المتتاليات والسلاسل التابعية

كلـيـة الـعــلـوم
قسم الرياضيات

السنة الثانية

فصل دراسي أول

المتتاليات والسلاسل التابعية

منشورات جامعة حلب
كلية العلوم

المتتاليات والسلاسل التابعية

الدكتور
صفوان عادل عويرة
أستاذ في قسم الرياضيات

الدكتور
عبد المحسن عبد المحسن
أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

لطلاب السنة الثانية
قسم الرياضيات

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية
١٤٣٦ هجري - ٢٠١٥ ميلادي

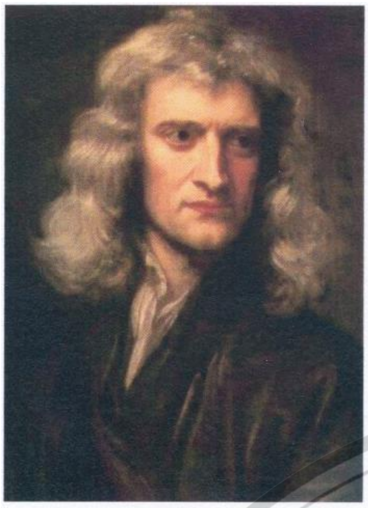
الفهرس

الفصل الثاني: سلاسل القوى (السلاسل الصحيحة)

الفصل الثالث: سلاسل فورييه

الفصل الرابع: تكامل فوربيه _ تحويل فوربيه

اسحاق نيوتن:



((بالإنكليزية Isaac Newton) وينادي بالسير إسحاق نيوتن (4 يناير 1643 – 31 مارس 1727) من رجال الجمعية الملكية كان فيزيائي إنكليزي وعالم رياضيات وعالم فلك وفيلسوف بعلم الطبيعة وكيميائي وعالم باللاهوت وواحداً من أعظم الرجال تأثيراً في تاريخ البشرية. ويعد كتابه كتاب الأصول الرياضية للفلسفة الميكانيكا الكلاسيكية، في هذا الكتاب، وصف "نيوتن" الجاذبية العامة وقوانين الحركة الثلاثة والتي سيطرت على النظرة العلمية إلى العالم المادي للقرون الثلاثة القادمة.

أندريان ماري ليجاندر:

عالم رياضيات فرنسي عاش بين 1752 و 1833، أوجد نتائج مهمة عديدة وبخاصة في نظرية الأعداد الأولية، وقانون التعاكس التربيعي، ونشر كتاباً منهجياً في مبادئ الهندسة، كما نشر أعمالاً حول المذنبات والمسح الأرضي، وعين في عدد من المناصب الرسمية.

بيير دي فيرمان:

محام وعالم رياضيات هاو فرنسي عاش بين 1601 و 1665 وينسب إليه تأسيس نظرية الأعداد الحديثة، وحساب الاحتمالات باستقلالية عن باسكال، وكذلك اكتشاف الهندسة التحليلية باستقلالية عن ديكارت، وقد تحصل على نتائج متطورة في مجالي أسس الهندسة التحليلية وحساب التفاضل، ولكنه لم يتمكن من نشرها، وأعلن أنه برهن المسألة غير المحلولة الشهيرة المعروفة باسم مبرهنة فيرما الأخيرة.

المقدمة

يعد مقرر المتتاليات والسلاسل التابعية أساساً لا غنى عنه لطلاب الرياضيات بشكل خاص ولطلاب قسم الفيزياء والهندسة بشكل عام، لما له من تطبيقات رياضية وفيزيائية وهندسية متعددة ، فمثلاً يمكن من خلاله، ايجاد بعض التكاملات المحددة التي يصعب حلها بالطرق المألوفة، كما يمكننا من إيجاد الكثير من الحلول العددية لكثير من المسائل الفيزيائية، على سبيل المثال حل بعض المعادلات التفاضلية الفيزيائية. كما ويمكن من خلال تحويلات فورييه حل بعض المعادلات التكاملية وحل بعض المعادلات التفاضلية.

يتسم الكتاب بما يلي:

1- البساطة في عرض المواضيع والبعد عن التعقيد، وذلك بالتدرج في العرض وطرح أمثلة توضيحية متعددة.

2- بالدقة العلمية في أسلوب العرض وعمق المفاهيم الرياضية التي شملتها مفردات المقرر.

3- يعد هذا المقرر أساساً قوياً لا غنى عنه لطالب كلية العلوم بشكل عام ولطالب قسمي الرياضيات والإحصاء بشكل خاص، لارتباطه بالكثير من المفردات الرياضية المستقبلية.

4- زودنا الكتاب بمجموعة من التمارين المحلولة وغير المحلولة ، وهدفها ترسيخ المفاهيم والمبرهنات الرياضية وتعويد الطالب على التفكير العلمي السليم.

يتألف الكتاب من الفصول التالية:

الفصل التمهيدي: قدمنا فيه دراسة موجزة في المتتاليات والسلاسل العددية والتي تعرف الطالب في مقرر التفاضل.

الفصل الأول: والمعنون بـ المتتاليات والسلاسل التابعية، وقد عرضنا فيه مفهوم التقارب البسيط والتقارب المنتظم للمتتاليات التابعية، وبعض خواص متتاليات التوابع المتقاربة بانتظام، وأهم اختبارات تقارب السلاسل التابعية ومناطق تقاربها، ومفهوم التقارب المطلق والتقارب الشرطي للسلاسل التابعية.

الفصل الثاني: حمل عنوان سلاسل القوى، ودرسنا فيه مفهوم سلاسل القوى ذات الأسس الموجبة والسالبة، وبعض خواصها، ونصف قطر تقاربها، وبعض العمليات الجبرية عليها، كما تم دراسة سلاسل تايلور وماكلوران، وعرضنا في هذا الفصل التوابع التحليلية وسلسلة ذي الحدين، ونشر التوابع الكسرية، وبعض أهم التطبيقات الرياضية باستخدام سلسلة ماكلوران.

الفصل الثالث: درسنا فيه سلاسل فورييه للتوابع الدورية ذات الدور 2π، وذات دور ما T، كما درسنا سلاسل فورييه للتوابع الفردية والتوابع الزوجية، واستعرضنا سلسلة فورييه بمتحولين حقيقين، واختتمنا هذا الفصل بدراسة مكاملة واشتقاق سلسلة فورييه.

الفصل الرابع: تكاملات وتحويلات فورييه، عرضنا في هذا الفصل مفهوم تكامل فورييه ومبرهنة فورييه وبعض الحالات الخاصة لتكامل فورييه والشكل العقدي لهذا التكامل، كما استعرضنا أيضاً تحويلات فورييه للتوابع الزوجية والفردية وتحويل فورييه المعاكس، وبعض خواص تحويلات فورييه ومتطابقة بارسيفال.

أخيراً إن هذا الكتاب لم يؤلف ليسد نقصاً في المكتبة العربية، ولا ندعي أنه يقدم علماً جديداً في المتتاليات والسلاسل التابعية، بل إننا نقدمه تلبية لحاجة طالب الرياضيات بشكل خاص وطالب الفيزياء والعلوم الهندسية بشكل عام، ليكون عوناً له في دراسته المستقبلية وحتى في حياته العملية.

وإننا لنرجو الله أن نكون قد وفقنا في هدفنا، لما فيه خير الأمة والوطن، والله ولي التوفيق.

المؤلفان

أ.د. صفوان عويرة   د. عبد المحسن عبد المحسن

حلب في   /   / 2015

الفصل التمهيدي
متتاليات وسلاسل الأعداد الحقيقية
Sequences and Series of Real Numbers

يهدف هذا الفصل لتذكير الطالب بالمفاهيم والمبرهنات الرئيسة وبعض خواص المتتاليات والسلاسل الحقيقية، والتي من المفترض أن يكون قد درست بشكل جيد في مقرر التفاضل. لذا لن يقدم هذا الفصل براهين المبرهنات المذكورة فيه.

تعد المتتاليات والسلاسل من المواضيع الهامة في الرياضيات وخاصة التطبيقية منها، فبواسطتها نستطيع مثلاً حساب بعض التكاملات المحددة التي يصعب حسابها بالطرائق المألوفة.

تبرز أهمية السلاسل في تعريف تكامل ريمان، كما أنها تشكل مدخلاً لتعريف التوابع التحليلية، وهي وسيلة لا غنى عنها في نظرية القياس وغيرها من العلوم الرياضية.

متتاليات الأعداد الحقيقية:

(0-1) تعاريف ومفاهيم أساسية:

1- المتتالية (Sequence): هي تطبيق منطلقة مجموعة الأعداد الطبيعية N (أو أي مجموعة غير منتهية من N) ومستقرة مجموعة غير خالية من R ، وعلى هذا الأساس المتتالية العددية الحقيقة اللانهائية بأنها تطبيق منطلقة N (أو أي مجموعة جزئية غير منتهية من N^*) ومستقرة مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقة R ، فبوضع مقابل كل عدد طبيعي n عدداً حقيقياً a_n نحصل على مجموعة من الأعداد الحقيقية: $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ المرقمة بوساطة الأعداد الطبيعية، وبالتالي نحصل على المتتالية العددية الحقيقة اللانهائية $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots$ ، نسمي الأعداد التي تشكل هذه المتتالية بـ حدود المتتالية، ونسمي الحد ذا الدليل n أي a_n **الحد العام** لهذه المتتالية.

سنكتب المتتالية بشكل مختصر باستخدام حدها العام بالشكل $\{a_n\}$. لا نقصد بالرمز $\{a_n\}$ مجموعة وحيدة العنصر a_n. وسنعتبر أن الحد الأول في المتتالية $\{a_n\}$ هو a_1 والحد الثاني هو a_2 من الآن فصاعداً وهكذا يكون الحد العام a_n وهو الحد ذو الدليل n (يسمى أيضاً بالحد النوني) للمتتالية $\{a_n\}$.

مثال (1):

لتكن المتتاليات:

$$(a) = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}, (b) = \{2 + (0.1)^n\}, (c) = \left\{(-1)^{n+1}\frac{n^2}{3n-1}\right\},$$
$$(d) = \{6\}$$

والمطلوب: شكل جدولاً للمتتاليات السابقة يضم الحد العام والحدود الأربعة الأولى والحد العاشر.

الحل:

	المتتالية	الحد العام	الحدود الأربعة الأولى	الحد العاشر
(a)	$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$	$\frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$	$\frac{10}{11}$
(b)	$\{2 + (0.1)^n\}$	$2 + (0.1)^n$	$2.1, 2.01, 2.001, 2.001$	2.0000000001
(c)	$\left\{(-1)^{n+1}\frac{n^2}{3n-1}\right\}$	$(-1)^{n+1}\frac{n^2}{3n-1}$	$\frac{1}{2}, -\frac{4}{5}, \frac{9}{8}, -\frac{16}{11}$	$-\frac{100}{29}$
(d)	$\{6\}$	6	$6,6,6,6$	6

من الآن فصاعداً، عندما نقول متتالية، فيقصد بها متتالية حقيقية لا نهائية.

ملاحظة (1):

إذا غيرنا من حدود متتالية ما حصلنا على متتالية أخرى جديدة عموماً تختلف عن المتتالية الأصلية مع أنهما تتشكلان من الأعداد نفسها.

مثال (2):

المتتاليتان العدديتان الحقيقيتان اللانهائيتان:

$$1,3,5,7,9,11,\cdots,2n-1,2n+1,\cdots$$
$$3,1,7,5,11,9,\cdots,2n+1,2n-1,\cdots$$

هما متتاليتان مختلفتان مع أنهما تتشكلان من الحدود نفسها.

2- المتتالية المحدودة ($\boldsymbol{Bounded\ Sequence}$):

نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ إنها **محدودة من الأعلى** إذا وجد عدد حقيقي وليكن a ، بحيث يتحقق:

$$\boxed{a_n \leq a \quad \forall\ n = 1,2,\cdots}$$

ونقول عن المتتالية $\{a_n\}$ إنها **محدودة من الأسفل (الأدنى)** إذا وجد عدد حقيقي وليكن b بحيث يتحقق:

$$\boxed{b \leq a_n}$$

ونقول عن المتتالية $\{a_n\}$ إنها **محدودة من الأعلى ومن الأسفل** أو اختصاراً محدودة إذا وجد عددان a و b حقيقيان، بحيث يتحقق:

$$\boxed{b \le a_n \le a}$$

بكلام آخر نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ إنها محدودة إذا وجد عدد حقيقي موجب وليكن c بحيث:

$$\boxed{|a_n| \le c \quad ; n \in N}$$

مثال (3):

- المتتالية:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

محدودة لأن:

$$|a_n| = a_n = \frac{n}{n+1} < 1 ; \quad \forall n \in N \text{ أي أن: } |a_n| < c:$$

- المتتالية $\{n^2\}$ محدودة من الأدنى لأن $b \in R$; $a_n = n^2 \ge b$، وبالتالي فهي محدودة من الأدنى بالصفر.
- المتتالية $\{(-1)^n\}$هي محدودة لأن: $|a_n| \le 1$
- المتتالية $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$ محدودة لأن: $0 \le a_n = 1 - \frac{1}{n} \le 1$

3- المتتاليات المطردة ($\boldsymbol{The\ Monotone\ Sequence}$):

نقول عن المتتالية $\{a_n\}$: إنها **متزايدة** ($Increasing$) إذا تحقق الشرط: $\boxed{a_n \le a_{n+1} \ ; \forall n \in N}$ ، إذا كان $a_n < a_{n+1}$ لكل $n \in N$ فنقول إن المتتالية $\{a_n\}$ متزايدة تماماً.

نقول عن المتتالية $\{a_n\}$: إنها **متناقصة** ($Decreasing$) إذا تحقق الشرط:

$$\boxed{a_{n+1} \le a_n}$$

لكل $n \in N$ ، وإذا تحقق الشرط $a_{n+1} < a_n$ لكل $n \in N$ ، فنقول: إن المتتالية $\{a_n\}$ **متناقصة تماماً** .

إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متزايدة أو متناقصة فإننا نقول: إن $\{a_n\}$ متتالية **مطردة** ($Monotone$)

مثال (4):

أثبت أن المتتالية التي حدها العام: $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ متناقصة تماماً.

الحل:

بما أن $n < n+1$ ، لكل $n \in N$ وبالتالي يكون: $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ لكل $n \in N$

بإضافة العدد 2 لطرفي المتراجحة السابقة نجد: $2 + \frac{1}{n+1} < 2 + \frac{1}{n}$ لكل $n \in N$ أي إن $a_{n+1} < a_n$ لكل $n \in N$ والمتتالية متناقصة.

ملاحظة (2):

إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متزايدة ، فإن المتتالية $\{-a_n\}$ متناقصة والعكس صحيح.

(2-0) تقارب متتالية ($Convergent\ of\ Sequence$)

نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ إنها متقاربة إلى العدد الحقيقي a ، ونرمز لذلك بالشكل: $lim_{n\to\infty} a_n = a$ (أو بالشكل $a_n \to a\ ;\ n \to \infty$) إذا تحقق الشرط:

لكل عدد حقيقي موجب ε يوجد عدد متعلق بـ ε وليكن N_ε في N (أي $N_\varepsilon \in N$) بحيث $|a_n - a| < \varepsilon$ عندما $n \geq N_\varepsilon$.

في حال عدم وجود مثل العدد a ، فإننا نقول: إنه للمتتالية a_n لا توجد نهاية أو نقول: إنها **متباعدة**($divergent$).

مثال (5):

أثبت أن المتتالية التي حدها العام: $a_n = \frac{n-2}{3n-1}$ متقاربة إلى العدد الحقيقي $a = \frac{1}{3}$.

الحل:

حسب التعريف السابق لكل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد حقيقي N_ε بحيث $|a_n - a| < \varepsilon$ لكل $n > N_\varepsilon$، لذلك يكون الهدف إيجاد مثل العدد N_ε من أجل ذلك نبحث عن علاقة تربط بين العددين $N_\varepsilon, \varepsilon$، من خلال الشرط $|a_n - a| < \varepsilon$، لكل $n > N_\varepsilon$، من أجل ذلك نكتب:

$$|a_n - a| = \left|\frac{n-2}{3n-1} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3n-6-3n+1}{3(3n-1)}\right| = \left|-\frac{5}{3(3n-1)}\right| < \varepsilon$$

لنفرض أن $n > 1$ ، وبالتالي:

$$\frac{5}{3(3n-1)} < \varepsilon \Rightarrow \frac{5}{3\varepsilon} < 3n-1 \Rightarrow \frac{5}{3\varepsilon} + 1 < 3n \Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3\varepsilon} + 1\right) < n$$

وبالتالي فإن $N_\varepsilon = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3\varepsilon} + 1\right)$، لاحظ أن $\frac{1}{3}\left(\frac{5}{3\varepsilon} + 1\right) < n$ بهذا الشكل تمكنا من إيجاد العدد N_ε (المتعلق بـ ε) من خلال الشرط: $|a_n - a| < \varepsilon$.

(3-0) بعض خواص المتتاليات المتقاربة:

نقدم أهم خواص المتتاليات المتقاربة من خلال المبرهنات الآتية:

مبرهنة (1):

إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة فإن نهايتها وحيدة.

مبرهنة (2):

بفرض $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متتاليتين، وأن:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \,, \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

وبفرض c عدداً حقيقياً عندئذ يتحقق مما يلي:

(1) $$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n = a . b$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}(c . a_n) = \text{c}. \lim_{n\to\infty} a_n = c . a$$

(4) إذا كان $b_n \neq 0$ لكل n من N وكذلك $b \neq 0$ ، فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

مبرهنة (3):

بالاستفادة من فرضيات المبرهنة السابقة، وإذا كانت: $a_n \leq b_n$ لكل $n \in N$ ، فإن $a \leq b$.

مبرهنة (4) (مبرهنة الحصر أو الإحاطة) ($\boldsymbol{Squeeze\ theorem}$):

لتكن لدينا المتتاليات $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ بحيث يتحقق $a_n \leq b_n \leq c_n$ لكل n من N ولنفرض أن: $lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} c_n = a$ (حيث a عدداً حقيقياً) عندئذٍ يكون: $lim_{n\to\infty} b_n = a$ أيضاً.

مثال (6):

مستفيداً من المبرهنة السابقة (مبرهنة الحصر الإحاطة) أثبت أن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

(إرشاداً للحل استفد من منشور نيوتن لـ: $2^n = (1+1)^n$)

الحل: باستخدام منشور نيوتن نجد:

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \cdots + 1$$
$$= 1 + n + \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) + \cdots + 1$$

وبما أن:

$$1 + n + \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n^6}{2}\right) + \cdots + 1 \geq 1 + n + \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) > \frac{n^2}{2}$$

لأن الحدود التي أهملناها هي حدود موجبة، ومنه نجد أن: $\frac{2}{n^2} > \frac{1}{2^n} > 0$ وبالتالي $0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n}$ ، ولما كان $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$، فحسب المبرهنة السابقة نجد أن: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

مبرهنة (5):

نفترض أن $\{a_n\}$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة، وإذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ و } a > 0$$

فإن: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{a}$

مبرهنة (6):

إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة، وإذا كان $a_n \geq 0$ لجميع قيم $n \in N$، فإن $a = \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$.

مبرهنة (7):

إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ فإن: $\lim_{n\to\infty}\{|a_n|\} = |a|$.

مبرهنة (8):

إذا كانت $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ فإن: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

ملاحظة (3):

1- يمكن تعميم المبرهنة (2) على أكثر من متتاليتين.

2- إن توزيع رمز الـ lim على الضرب والجمع والطرح لا يكون صحيحاً إلا إذا كانت كل المتتاليات متقاربة.

مبرهنة (9):

لتكن $\{a_n\}$ متتالية الأعداد الحقيقية الموجبة، وإذا كانت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a<1$$

فإن المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة وتكون نهايتها الصفر، أي إن: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

مثال (7):

طبق المبرهنة السابقة لدراسة تقارب المتتالية: $\{a_n\}=\left\{\frac{n}{4^n}\right\}$ لكل n من N.

الحل:

الحد العام للمتتالية المدروسة هو: $a_n=\frac{n}{4^n}$ وبالتالي:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{4^{n+1}}.\frac{4^n}{n}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

وبأخذ نهاية المساواة السابقة عندما $n\longrightarrow\infty$ نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{4}<1$$

فحسب المبرهنة السابقة نرى أن المتتالية المعطاة متقاربة ، كما أن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4^n}=0$$

مبرهنة (10):

إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة فإنها تكون محدودة.

ملاحظة (4):

إن عكس هذه المبرهنة غير صحيح بشكل عام ، فمثلاً المتتالية:

$$0,2,0,2,0,\cdots$$

محدودة من الأعلى بالعدد 2 ومن الأسفل بالعدد ٠ لكنها غير متقاربة لأن نهايتها عندما n تسعى نحو ∞ قد تكون 0 أو 2.

ينتج من المبرهنة السابقة، أن كل متتالية غير محدودة تكون غير متقاربة (متباعدة).

نتيجة (1):

تتقارب متتالية إذا كانت محدودة ومطردة.

مثال (8):

ادرس تقارب المتتالية $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$.

الحل:

المتتالية المدروسة محدودة لأن $1 \geq 1-\frac{1}{n} \geq 0$، لكل $n \in N$، وهي متزايدة لأن:

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^n} = a_n + \frac{1}{(n+1)^n}$$

وهذا يعني أن $a_{n+1} \geq a_n$ لكل $n \in N$، وعلى هذا فإن المتتالية المعطاة محدودة ومتزايدة فحسب النتيجة السابقة تكون متقاربة.

(4-0) بعض النماذج الخاصة لحساب نهاية متتاليات:

النماذج التالية تفيدنا في حساب نهاية متتالية، وذلك بعد الاستفادة من خواص المتتاليات السابقة.

النموذج الأول: بفرض أن المتتالية $\{a_n\}$ من الشكل:

$$\{a_n\} = \left\{\frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_0}\right\}$$

حيث a_p, b_q لا يساويان الصفر و a_i, b_j أعداد حقيقية،

و $i = 0,1,\cdots,p \ \ \& \ j = 0,1,\cdots,q$، لدراسة نهاية هذه المتتالية نميز الحالات الآتية:

(1) إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام أي $p = q$ في $\{a_n\}$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a_p}{b_q}$$

(2) إذا كنت درجة البسط أكبر تماماً من درجة المقام أي $p > q$ فإن: $lim_{n\to\infty} a_n$ غير موجودة، ونكتب في هذه الحالة $lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(3) إذا كانت درجة البسط أصغر تماماً من درجة المقام في $\{a_n\}$، أي $p < q$ فإن:

$$lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

مثال (9): احسب نهاية المتتاليات التالية:

$$(a) = \left\{\frac{3n^4 + 2n^2 + 1}{5n^4 - 3n^3 + n}\right\}, (b) = \left\{\frac{n^3 - 2n + 1}{n^5 - 7}\right\}, (c) = \left\{\frac{n^6 - 1}{n^2 + 5}\right\}$$

الحل:

نلاحظ في المتتالية (a) أن درجة البسط تساوي درجة المقام وتساوي العدد 4؛ لذا يكون حسب الحالة الأولى:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^4+2n^2+1}{5n^4-3n^3+n}\right)=\frac{3}{5}$$

وفي المتتالية (b) نلاحظ أن درجة البسط أصغر تماماً من درجة المقام؛ لذا يكون حسب الحالة الثالثة:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-2n+1}{n^5-7}\right)=0$$

أما في المتتالية (c) نلاحظ أن درجة البسط أكبر تماماً من درجة المقام؛ لذا يكون لدينا:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^6-1}{n^2+5}\right)=\infty$$

النموذج الثاني:

$$\lim_{n\to\infty} r^n=0\ ;\ if\ |r|<1 \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty\ ;\ if\ |r|>1 \qquad (2)$$

مثال (10):

احسب نهاية المتتاليات التالية:

$$(a)=\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right\}\ ,\ \ (b)=\{(1.07)^n\}$$

الحل: من أجل المتتالية (a) ، نلاحظ أن $r=-\frac{3}{4}$ ، وبما أن $|r|=\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}<1$ فحسب (1) نجد: $lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n=0$

أما في المتتالية (b) ، بما أن $r=1.07>1$ فحسب (2) يكون لدينا:

$$\lim_{n\to\infty}(1.07)^n=\infty$$

وهذا يعني أن المتتالية في (b) متباعدة ، أما المتتالية في (a) فهي متقاربة.

النموذج الثالث:

(1) بفرض a عدداً حقيقياً عندئذٍ يكون لدينا:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a\ \ Or\ \lim_{n\to 0}\left(1+\frac{n}{a}\right)^{\frac{1}{n}}=e^a$$

(2) إذا كان $a\in R^+$ ، فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+an}\right)=0$$

(3) من أجل أي عدد حقيقي n يكون:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

(4) من أجل أي عدد حقيقي موجب a يكون لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

مثال (11):

بالاستفادة من النموذج السابق لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{8}{n}\right)^n = e^8 \;\; ; \;\; a = 8$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+3^n}\right) = 0 \;\; ; \;\; a = 3 > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(5^{1/n}\right) = 1 \;\; ; \;\; a = 5 > 0$$

ملاحظة (5):

في بعض المتتاليات لا يمكن تحديد درجة البسط والمقام، كما في المتتالية: $\{a_n\} = \{2^{-n}.n^4\}$، وليست أيضاً من النماذج الثلاثة السابقة، في هذه الحالة يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال لإيجاد نهاية مثل هذه المتتالية، والمثال الآتي يوضح هذه الملاحظة.

مثال (12):

احسب نهاية المتتالية $\{a_n\} = \{2^{-n}.n^4\}$، عندما $n \to \infty$.

الحل:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n}.n^4 = 0.\infty$$

وهي إحدى حالات عدم التعيين، لذا نكتب:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n}.n^4 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{2^n} = \frac{\infty}{\infty}$$

بتطبيق قاعدة لوبيتال أربع مرات متتالية نجد:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n}.n^4 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{24}{2^n(\ln 2)^4} = \frac{24}{\infty} = 0$$

(5-0) متتالية كوشي ($\boldsymbol{Cauchy\ Sequence}$):

نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ إنها متتالية كوشي، إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ , \exists N_\varepsilon \in N : |a_m - a_n| < \varepsilon \quad ; \quad n, m \geq N_\varepsilon$$

مثال (13):

برهن أن المتتالية: $\{a_n\} = \frac{\cos n\pi}{n}\ ; n \in N$ هي متتالية كوشي.

الحل:

ليكن $\varepsilon > 0$ ولنختر العدد N_ε بحيث يكون $N_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon}$ ، عندئذٍ يكون:

$$|a_m - a_n| = \left|\frac{\cos m\pi}{m} - \frac{\cos n\pi}{n}\right| \leq \frac{n|\cos m\pi| + m|\cos n\pi|}{m.n} \leq \frac{m+n}{m.n}$$

إذا كان $m > n$ نستطيع كتابة:

$$|a_m - a_n| \leq \frac{m+n}{m.n} < \frac{2m}{m.n} = \frac{2}{n}$$

وبسبب $n > N_\varepsilon$ لدينا $n > \frac{2}{\varepsilon}$، ويكون:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

وهذا يبين لنا أن المتتالية $\left\{\frac{\cos n\pi}{n}\right\}$، لكل $n \in N$ هي متتالية كوشي.

نقدم الآن **أهم خصائص متتالية كوشي من خلال المبرهنات التالية:**

مبرهنة (11):

إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة فهي متتالية كوشي.

مبرهنة (12):

إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متتالية كوشي فإنها تكون محدودة.

إن عكس المبرهنة السابقة ليس صحيحاً بشكل عام، فمثلاً المتتالية $\{(-1)^n\}$ محدودة لكنها ليست متتالية كوشي.

(6-0) اختبار كوشي للمتتاليات:

الشرط اللازم والكافي لتقارب المتتالية $\{a_n\}$ هو أن تكون هذه المتتالية متتالية كوشي.

مثال (14):

أثبت ان المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ هي متتالية كوشي.

الحل:

لإثبات أن المتتالية المعطاة هي متتالية كوشي، نثبت أنها متقاربة.

بفرض $\varepsilon > 0$، يوجد عدد صحيح N_ε بحيث $N_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon}$. إذا كان $n, m > N_\varepsilon$ فإن:

$$\frac{1}{N_\varepsilon} \geq \frac{1}{m}, \quad \frac{1}{N_\varepsilon} \geq \frac{1}{n}$$

وبالتالي لكل $m, n \geq N_\varepsilon$ يكون لدينا:

$$|a_m - a_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq \frac{2}{N_\varepsilon} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\varepsilon} < N_\varepsilon$$

وبما أن ε عدد موجب اختياري، فإنه حسب تعريف متتالية كوشي، تكون المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ متتالية كوشي.

لندرس الآن سلاسل الأعداد الحقيقية ($Series\ of\ Real\ Numbers$):

لتكن المتتالية الحقيقية اللانهائية $\{a_n\}$، نعرف السلسلة الحقيقية اللانهائية بأنها مجموع حدود هذه المتتالية، أي إن:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

أو اختصاراً بالشكل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، نسمي الأعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ بحدود السلسلة، ونسمي a_n **بالحد العام للسلسلة** السابقة أو **بالحد النوني للسلسلة.**

نجدد الملاحظة بأنه سنرمز لبعض الأحيان للحد الأول للسلسة السابقة بالرمز a_0 والحد الثاني بـ a_1 وهكذا....

(7-0) المجموع الجزئي لسلسلة ($Sequence\ of\ Partial\ Sums$):

نسمي المجاميع التالية:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

بالمجاميع الجزئية للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. تشكل هذه المجاميع متتالية نرمز لها بـ $\{S_n\}$، ونسميها **متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة** السابقة.

- تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية الموافقة متقاربة. ونقول عن السلسلة السابقة إنها متقاربة ومجموعها العدد الحقيقي S إذا وفقط إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n\}$ متقاربة إلى S.

أما إذا كانت المتتالية $\{S_n\}$ متباعدة، فإننا نقول إن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

مثال (15):

لتكن السلسلة:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ \cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

1- أوجد $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$.

2- أوجد S_n.

3- بين فيما إذا كانت السلسلة المعطاة متقاربة أم متباعدة.

الحل:

-1

$$S_1=a_1=\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}$$
$$S_2=S_1+a_2=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}=\frac{2}{3}$$
$$S_3=2+a_3=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}=\frac{3}{4}$$
$$S_4=S_3+a_4=\frac{3}{4}+\frac{1}{4.5}=\frac{4}{5}$$
$$S_5=\frac{4}{5}+\frac{1}{5.6}=\frac{5}{6}$$
$$S_6=\frac{5}{6}+\frac{1}{6.7}=\frac{6}{7}$$

2- بما أن $a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ، فإن: $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$ أي أن:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ \ldots\ldots\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

وبالتالي:

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

-3

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

إذا كان $lim_{n\to\infty}S_n=1$ فالسلسلة المدروسة متقاربة ومجموعها يساوي الواحد.

(8-0) بعض خواص السلاسل المتقاربة:

سنستعرض أهم خواص السلاسل المتقاربة من خلال المبرهنات التالية:

مبرهنة (13):

إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة فإن حدها العام يسعى نحو الصفر عندما n تسعى إلى ∞ أي $lim_{n\to\infty}a_n=0$.

تمثل المبرهنة السابقة شرطاً لازماً لتقارب أية سلسلة، لكن هذا الشرط غير كافٍ؛ لأنه توجد سلاسل متباعدة في حين أن نهاية الحد العام لها يسعى نحو الصفر عندما n تسعى نحو ∞.

نتيجة (2):

إذا كانت نهاية الحد العام لسلسلة ما لا تساوي الصفر عندما n تسعى نحو اللانهاية فإن هذه السلسلة متباعدة. فمثلاً السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n+3}$ متباعدة لأن:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n+3} = \frac{3}{2} \neq 0$$

شرط كوشي لتقارب سلسلة

$$(\boldsymbol{Cauchy\ Condition\ for\ convergence\ of\ serie})$$

يعد شرط كوشي لدراسة تقارب السلاسل من أهم معايير تقارب السلاسل، لأنه يعطي شرطاً لازماً وكافياً، أما الاختبارات الأخرى فهي تعطي شروطاً كافيةً وليست لازمة للتقارب، لذا يعد شرط كوشي التالي وسيلة فعالة في حل الكثير من مسائل التقارب للمتتاليات.

نقول عن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: إنها تحقق شرط كوشي إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ تحقق شرط كوشي أي: من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد N_ε بحيث إنه من أجل: $N_\varepsilon < m < n$ يكون:

$$|S_n - S_m| = |\sum_{i=m+1}^{n} a_i| < S_{m+1}$$

مبرهنة (14): (مبرهنة كوشي في السلاسل):

الشرط اللازم والكافي لتقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هو أن يتحقق شرط كوشي.

مبرهنة(15):

إذا كانت السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة ومجموعها يساوي S وإذا كان b عدداً ما فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} ba_n$ تكون متقاربة ومجموعها يساوي $b.S$

مبرهنة (16):

إذا كانت السلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربتين ومجموع الأولى هو S_1 والثانية هو S_2 فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ تكون متقاربة ومجموعها يساوي $S_1 \pm S_2$.

ملاحظة (6):

إذا كانت السلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربتين

فإن السلسلة $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n).(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$ متقاربة أيضاً، لكن ليس بالضرورة أن تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n.b_n)$ متقاربة.

مبرهنة (17):

إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، بينما السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة فإن السلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ متباعدة.

مبرهنة (18):

إذا كان الحد العام للسلسلة العددية لا يسعى نحو الصفر فإنها تكون متباعدة حتماً.

مبرهنة (19):

الشرط اللازم والكافي لتقارب السلسلة ذات الحدود غير السالبة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هو أن تكون متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n\}$ محدودة.

مثال (16):

بين فيما إذا كانت السلسلة $\sum_{i=0}^{\infty} 2^i$ متقاربة.

الحل:

بما أن:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} 2^i = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n$$

وبما أن المتتالية $\{S_n\}$ غير محدودة ، فحسب المبرهنة السابقة السلسلة المدروسة تكون متباعدة.

تعريف الباقي النوني للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، يعرف الباقي النوني للسلسلة السابقة والذي نرمز له عادة بـ r_n بأنه السلسلة: $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$ والتي نحصل عليها بحذف الحدود الأولى $a_1, a_2, \cdots, a_n$ والتي عددها n من السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، ونكتب بشكل مختصر الباقي النوني: $r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$.

مبرهنة (20):

1- إذا كانت السلسلة$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فإن كل باقٍ من بواقيها يكون متقارباً .

2- إذا كان أحد بواقي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعداً فإن هذه السلسلة تكون متباعدة.

3- إذا تقارب أحد بواقي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ فإن السلسلة تكون متقاربة.

4- إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة فإن كل باقٍ من بواقيها يكون سلسلة متباعدة.

ممكن مما سبق القول:

5- إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فإن$lim_{n\to\infty} r_n = 0$، حيث r_n هو مجموع الباقي النوني للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(9-0) بعض أهم السلاسل:

نستعرض الآن أهم السلاسل التي سنسترشد بها في حل الكثير من المسائل المتعلقة بتقارب السلاسل العددية والتابعية أيضاً.

1) السلسلة التوافقية $(The\ Harmonic\ Series)$

الشكل العام لهذه السلسلة هو:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

وهي سلسلة متباعدة دائماً .

2) السلسلة الهندسية $(The\ Geometric\ Series)$

الشكل العام لهذه السلسلة هو:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots$$

حيث a, r عددان حقيقيان، نسمي a حدها الأول و r أساسها.

تكون هذه السلسلة متقاربة إذا كان $|r| < 1$ ومجموعها هو $S = lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$

وتتباعد هذه السلسلة إذا كان $|r| \geq 1$

مثال (17):

ادرس تقارب السلسلة التالية: $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$ ثم حدد مجموعها.

الحل:

السلسلة المعطاة هي سلسلة هندسية ، حيث إن حدها الأول $a = 2$ وأساسها $r = \frac{1}{3}$ ، وبما أن $r = \frac{1}{3} < 1$ فالسلسلة متقاربة ، أما مجموعها فهو:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = 3$$

3) السلسلة الحسابية:

الشكل العام لهذه السلسلة هو:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a + (i-1)q =$$

$$= \mathrm{a} + (a+q) + (a+2q) + \ldots\ldots\ldots + (a + (n-1)q) + \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

حيث a, q عددان حقيقيان ، نسمي a حدها الأول و q أساس هذه السلسلة.

هذه السلسلة متباعدة دائماً، ومجموع n حداً منها يعطى بالعلاقة:

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)q]$$

مثال (18):

شكل سلسلة حسابية حدها الأول $a = 3$ وأساسها 2.

الحل:

بما أن $a = 3$ و $q = 2$ فإن شكل السلسلة الحسابية المطلوبة بعد التعويض في $(*)$ هو:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a + (i-1)q =$$

$$= 3 + (3+2) + (3+4) + (3+6) + \cdots + \big(3 + 2(n-1)\big) + \cdots$$

أو الشكل: $= 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (1 + 2^n) + \cdots$

4) السلسلة التوافقية المعممة ($\boldsymbol{The\ Hyper\ harmonic\ Series}$):

الشكل العام لها هو:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

حيث إن p عدد حقيقي موجب.

لاحظ أنه من أجل $p = 1$ تكون السلسلة التوافقية المعممة هي سلسلة توافقية.

تكون السلسلة التوافقية المعممة متقاربة إذا كان $p > 1$ ، وتكون متباعدة إذا كان $p \leq 1$.

مثال (19):

ادرس تقارب السلسلتين:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ , \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$$

الحل:

السلسلة (a) سلسلة توافقية معممة، حيث $p = 2$، وبما أن $p = 2 > 1$ فالسلسلة المدروسة متقاربة.

السلسلة (b) سلسلة توافقية معممة، حيث $p = \frac{1}{5}$، وبما أن $p = \frac{1}{5} < 1$ فالسلسلة (b) متباعدة.

(10-0) بعض اختبارات تقارب للسلاسل:

نقدم أهم اختبارات تقارب السلاسل من خلال المبرهنات الآتية:

مبرهنة (21): اختبار المقارنة $(\boldsymbol{Compariom\ Test})$

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سلسلتين ذاتي حدود موجبة، عندئذٍ:

1- إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة، وكان $a_n \leq b_n$، لكل عدد صحيح موجب n، عندئذٍ تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

2- إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة وكان $b_n \leq a_n$، من أجل كل عدد صحيح موجب n، عندئذٍ تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة أيضاً.

3- إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سلسلتين ذاتي حدود موجبة ، وإذا وجد عدد حقيقي موجب مثل c بحيث أن:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0}$$

عندئذٍ تكون السلسلتان من طبيعة واحدة (أي إما أن تكونا متقاربتين معاً وإما أن تكون متباعدتين معاً).

الاختبار الأخير يسمى اختبار مقارنة النهايات $(The\ limit\ Comparion)$

ملاحظة (7):

إذا كانت $lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ أو $lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ وإذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متقاربة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون متقاربة أيضاً، وإذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متباعدة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متباعدة أيضاً، أما إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة فإن $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ قد تكون متباعدة أو متقاربة.

مثال (20):

لتكن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\frac{1}{n^2}$ وهي متقاربة، ولنأخذ السلسلة:

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\frac{1}{n^{3/2}}$ (وهي متقاربة أيضاً علل ذلك)، لاحظ أن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$$

أما إذا أخذنا السلسلة $\sum b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ وهي متباعدة ، فنلاحظ أن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{3/2}}=0$$

لاحظ أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة ، بينما السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة، وإذا أخذنا السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ فسنجد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{3/2}}=0$$

نلاحظ أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متباعدة في حين السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة.

وإذا أخذنا $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$$

إن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متباعدة ، وكذلك السلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة.

من الضروري حسن اختيار السلسلة التي سنقارن بها، ويجب معرفة طبيعتها (متقاربة أم متباعدة سابقاً).

مبرهنة (22) اختبار النسبة (اختبار دالمبير) $(\boldsymbol{The\ Ratio\ Test})$:

لتكن السلسلة ذات الحدود الموجبة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$، ولنفترض أن:

$$\boxed{lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L}$$

عندئذٍ:

1- إذا كان العدد الحقيقي L أصغر من العدد 1 $(L<1)$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة.

2- إذا كان العدد الحقيقي L أكبر تماماً من العدد 1 $(L>1)$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متباعدة أو $lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$.

3- إذا كان $L=1$ فمن الممكن أن تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة أو متباعدة، في هذه الحالة يفشل هذا الاختبار.

مثال (21):

أثبت أن السلسلة التي حدها العام $a_n=\frac{n^n}{n!}$ متباعدة.

الحل:

بتطبيق اختبار النسبة السابق، لدينا:

$$a_n=\frac{n^n}{n!} \implies a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{n^n}$$
$$=\frac{(n+1)^{n+1}.n!}{(n+1)n!.n^n}=\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

وبالتالي يكون: $lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

بما أن $e=L>1$ ، فحسب اختبار النسبة تكون السلسلة المدروسة متباعدة.

مبرهنة (23) اختبار الجذر النوني (اختبار كوشي) ($\boldsymbol{The\ Root\ Test}$):

لتكن السلسلة ذات الحدود الموجبة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ، ولنفترض أن

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=Q \quad ; \quad Q\in R}$$

عندئذٍ :

1- إذا كان العدد الحقيقي Q أصغر تماماً من الواحد، أي $Q<1$، فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون متقاربة.

2- إذا كان العدد الحقيقي Q أكبر من الواحد ، أي $Q>1$ أو كانت:

$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\infty$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون متباعدة.

3- إذا كان العدد الحقيقي Q يساوي الواحد فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ قد تكون متقاربة أو متباعدة ، وهذا يعني أن اختبار الجذر النوني فاشل.

مثال (22):

ادرس تقارب السلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{n^n}$

الحل:

بتطبيق اختبار الجذر النوني حيث $a_n = \frac{2^{3n+1}}{n^n}$ نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{3n+1}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{3n+1}}{n^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3+\frac{1}{n}}}{n} = 0$$

بما أن $Q = 0 < 1$ فالسلسلة المعطاة حسب اختبار الجذر النوني متقاربة.

مبرهنة (24) اختبار راب ($\boldsymbol{Raab\ Test}$):

لتكن السلسلة ذات الحدود الموجبة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، إذا كانت

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left[n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] = R \cdots (**)}$$

عندئذٍ:

1- إذا كان $R > 1$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

2- إذا كان $R < 1$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

3- إذا كان $R = 1$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ قد تكون متقاربة أو متباعدة ، وفي هذه الحالة فإن هذا الاختبار فاشل.

مثال (23):

استخدم اختبار راب لدراسة السلسلة التي حدها العام:

$$a_n = \frac{1}{2n(2n+1)}$$

الحل: لدينا:

$$a_n = \frac{1}{2n(2n+1)} \implies a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)[2(n+1)+1]}$$

$$= \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left[1 - \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}\right] = \frac{4n^2+3n}{(n+1)(2n+3)}$$

والآن وباستخدام اختبار راب نجد:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n}{2n^2+5n+3}=\frac{4}{2}=2$$

بمــا أن $R=2>1$، فحســب اختبــار راب تكــون السلســلة التــي حــدها العــام $a_n=\frac{1}{2n(2n+1)}$ متقاربة.

مبرهنة (25) اختبار التكامل ($The\ Integral\ Test$):

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة ذات حدود موجبة، وليكن $f(x)=a_n$، ولنفرض أن التابع f مستمر ولها قيمة موجبة ومتناقصة من أجل $x\geq 1$، عندئذٍ السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة إذا كان التكامل المعتل $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ متقارباً وتكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة إذا كان التكامل السابق متباعداً.

مثال (24):

ادرس تقارب السلاسل التالية، مستخدماً اختبار التكامل:

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ ,\quad (b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln(n)}{n}$$

الحل:

1- بما أن $a_n=\frac{1}{n}$، فإن $f(n)=\frac{1}{n}$، لنستبدل كل n بـ x لنحصل على $f(x)=\frac{1}{x}$، بما ان التابع $f(x)$ مستمر وموجب ومتناقص من أجل $x\geq 1$، لذا نستطيع تطبيق اختبار التكامل، أي أن:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\frac{1}{x}dx=\lim_{t\to\infty}[ln\,x]_1^t=\lim_{t\to\infty}[ln\,t-ln\,1]=\infty$$

بما أن التكامل متباعد $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$ متباعد، فالسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة أيضاً.

2- إذا طبقنا اختبار النسبة لدراسة تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln(n)}{n}$ فإنه سيفشل لأن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1\ ;\quad a_{n+1}=\frac{ln(n+1)}{n+1}$$

لذا سنستخدم اختبار التكامل للهدف المنشود.

لدينا $f(n)=\frac{ln(n)}{n}$، وبالتالي $f(x)=\frac{ln(x)}{x}$ (إن شروط تطبيق اختبار التكامل محققة)

$$I=\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\frac{\ln x}{x}dx \ , \ \ \ln x=z \ \Longrightarrow \ dz=\frac{dx}{x}$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$I=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}[\ln^2(x)]_1^t=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}[\ln^2 t-\ln 1]=\frac{1}{2}[\infty-0]=\infty$$

بما أن التكامل: $\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx$ متباعد، فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}$ متباعدة أيضاً.

(11-0) السلاسل المتناوبة $(Alternating\ Series)$

نقول عن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$، حيث $a_i>0$ ، لكل تحولات i، إنها متناوبة إذا كانت حدودها متناوبة بالإشارة، أي من الشكل:

$$a_1-a_2+a_3+\cdots+(-1)^n a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$$

وذلك إذا أخذنا الحد الأول a_1 موجباً، أو بالشكل:

$$-a_1+a_2-a_3+\cdots+(-1)^n a_n+\cdots-=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

إذا أخذنا الحد الأول a_1 سالباً.

لدراسة تقارب السلاسل المتناوبة، نطبق (اختبار) ليبنتز التالي:

مبرهنة (26) (مبرهنة ليبنتز) $(Liebinitz\ Theorem)$

تتقارب السلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ إذا تحقق الشرطان الآتيان:

1- حدودها متناقصة من الأعداد الموجبة، أي تتحقق المتراجحة: $a_i\geq a_{i+1}>0$، لكل قيم i.

2- $\lim_{n\to\infty}a_n=0$، ومجموعها موجب ولا يتجاوز الحد الأول أي: $S\leq a_1$

مثال (25):

ادرس تقارب السلسلة المتناوبة: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{4n^2-3}$

الحل:

لنطبق شرطي مبرهنة ليبنتز لنثبت أولاً أن: $a_i\geq a_{i-1}>0$ أو الشرط $a_i-a_{i-1}\geq 0$ لكل قيم i.

لدينا:

$$a_i - a_{i-1} = \frac{2\mathrm{i}}{4i^2 - 3} - \frac{2(i+1)}{4(i+1)^2 - 3} = \frac{8i^2 + 8i - 6}{(4i^2 - 3)(4i^2 + 8i + 1)} \geq 0$$

إذن الشرط الأول من شروط المبرهنة ليبنتز محقق. ولنتحقق من الشرط الثاني:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{4n^2 - 3} = 0$$

والشرط الثاني محقق أيضاً ، فالسلسلة المدروسة متقاربة.

(12-0) التقارب المطلق والتقارب الشرطي:

$(\boldsymbol{Absolute\ Convegnce\ and\ Conditional\ Convegnce})$

نقول عن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: إنها كيفية (مختلطة) إذا حوت حدوداً موجبة وأخرى سالبة، فمثلاً السلسلة:

$$1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + \cdots + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

لدراسة تقارب السلسلة الكيفية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، نشكل أولاً سلسلة القيم المطلقة لها، أي:

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

فإذا كانت السلسلة الأخيرة (سلسلة القيم المطلقة) متقاربة، عندها تكون السلسلة الكيفية متقاربة أيضاً. نسمي عادة التقارب في هذه الحالة بالتقارب المطلق.

مثال (26):

بين فيما إذا كانت السلسلة الكيفية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \cdots$$

متقاربة تقارباً مطلقاً.

الحل:

لنشكل سلسلة القيم المطلقة لها أولاً:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

وبما أن السلسلة الأخيرة هندسية، حدها الأول $a = \frac{1}{2}$، وأساسها $r = \frac{1}{2}$، وبما أن $r = \frac{1}{2} < 1$ فهي متقاربة.

إذاً سلسلة القيم المطلقة متقاربة وبالتالي فإن السلسلة الكيفية المعطاة متقاربة.

تعريف التقارب الشرطي: نقول عن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ إنها تتقارب تقارباً شرطياً، إذا كانت متقاربة، وكانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متباعدة.

اختبار النسبة للتقارب المطلق

$(\boldsymbol{Ratio\ Test\ for\ Absolute\ Convergence})$

لتكن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$غير الحاوية على حدود معدومة، وليكن $lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$، عندئذٍ:

1- إذا كان $L < 1$ ، فالسلسلة$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة تقارباً مطلقاً.

2- إذا كان $L > 1$ أو $lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ فالسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

3- إذا كان $L = 1$ فالاختبار في هذه الحالة يفشل، وهذا يعني أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ قد تكون متباعدة أو متقاربة.

ملاحظة (7):

يمكن استخدام اختبار الجذر النوني (اختبار كوشي) لدراسة التقارب المطلق للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، وذلك باستبدال $\sqrt[n]{a_n}$ بـ $\sqrt[n]{|a_n|}$، كما يمكن استخدام اختبار المقارنة الوارد في دراسة تقارب السلاسل ذات الحدود الموجبة، ولا ننسى وضع القيمة المطلقة لـ a_n. كما يمكن استخدام **اختبار التقارب المطلق التالي:**

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة متقاربة لحدود موجبة، ولتكن $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ سلسلة متناوبة، إذا كانت $lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{e_n}\right|$ موجودة وغير معدومة، عندئذٍ السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة تقارباً مطلقاً.

مثال (27):

بين فيما إذا كانت السلاسل التالية متقاربة تقارباً شرطياً أو تقارباً مطلقاً:

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[3]{n}}{4n+7}\ ,\ \ (b)\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$$

الحل:

(a) إن سلسلة القيم المطلقة للسلسلة (a) هي $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{4n+7}$، لنقارن هذه السلسلة مع السلسلة المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}$؛ فنجد حسب اختبار المقارنة:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{4n+7} . \frac{n^{2/3}}{1} = \frac{1}{4}$$

وبالتالي ستكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{4n+7}$ متباعدة، من ناحية ثانية السلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n}}{4n+7}$، حدها العام يسعى نحو الصفر عندما n تسعى نحو ∞، وحدودها تتناقص بالقيمة المطلقة لأن:

$$\frac{\sqrt[3]{n+1}}{4(n+1)+7} < \frac{\sqrt[3]{n}}{4n+7}$$

وبالتالي فحسب اختبار ليبنتز تكون متقاربة، إذاً السلسلة (a) متقاربة تقارباً شرطياً.

(b) إن سلسلة القيم المطلقة للسلسلة (b) هي السلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} sin\frac{\pi}{n}$، لنقارن هذه السلسلة مع السلسلة المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n}$ فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sin\, \pi/n}{\pi/n} = 1$$

بما أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n}$ متباعدة فالسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{\pi}{n}$ متباعدة أيضاً، أما السلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n\, sin\frac{\pi}{n}$ متقاربة حسب اختبار لبينتز (تأكد من ذلك).

إذن السلسلة b متقاربة تقارباً شرطياً.

تمرينات محلولة

{1} أوجد الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $\{a_n\}$ ، حيث إن:

$$a_1 = 3 \ \ , \ \ a_{k+1} = 2a_k \ \ ; \ \ k \geq 1$$

ثم أوجد الحد العام لها.

الحل:

بما أن $a_1 = 3 \ \ , \ \ a_{k+1} = 2a_k \ \ ; \ \ k \geq 1$، فمن أجل $k = 1,2,3$ يكون لدينا:

$$a_2 = 2a_1 = 2.3 = 6$$
$$a_3 = 2a_2 = 2.6 = 12$$
$$a_4 = 2a_3 = 2.12 = 24$$
$$a_1 = 3, a_2 = 6 = 2.3, a_3 = 12 = 2^2.3, a_4 = 24 = 2^3.3, a_5 = 2^4.3, \cdots$$

فإن الحد العام للمتتالية المدروسة هي: $a_n = 2^{n-1}.3$

{2} لتكن المتتالية $\{a_n\}$، حيث $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = (n+1)a_n \ \ ; \ \ n \in N$

والمطلوب أوجد الحدود الأربع الأولى منها وكذلك الحد العام لها.

الحل:

لدينا $a_1 = 1$، ومن $a_{n+1} = (n+1)a_n$ نجد:

$$a_2 = 2a_1 = 2.1 = 2! \ \ , \ \ a_3 = 3a_2 = 3.2 = 3.2.1 = 3!$$
$$a_4 = 4.3! = 4.3.2.1 = 4!$$

وبالتالي يمكن القول: إن الحد العام للمتتالية المدروسة هو: $a_n = n!$

{3} أثبت حسب تعريف تقارب متتالية أن المتتالية $\{(-1)^n\}$ متباعدة.

الحل:

نفرض جدلاً أن النهاية موجودة، ولتكن نهايتها العدد الحقيقي a. لنطبق تعريف تقارب متتالية:

لكل $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد N_ε بحيث $|a_n - a| < \varepsilon$ لكل $N_\varepsilon < n$.

بما أن الحد العام للمتتالية المدروسة هو: $a_n = (-1)^n$ فإن: $a_n = -1$، إذا كان n عدداً فردياً و $a_n = 1$، إذا كان n عدداً زوجياً.

وبالتالي نحصل على: $|1 - a| < \varepsilon$، إذا كانت $N_\varepsilon < n$ وهي زوجية، كما أن $|-1 - a| < \varepsilon$، إذا كانت $N_\varepsilon < n$ وهي فردية، فإذا وضعنا (فرضاً) $\varepsilon = \frac{1}{2}$ فإننا سنحصل على تناقض لأن:

$$2=|1-(-1)|=|1-a+a-(-1)|\leq|1-a|+|a-(-1)|=$$
$$|1-a|+|(-1)-a|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

بما أن $\varepsilon=\frac{1}{2}$، فإن $2<2.\frac{1}{2}=1$ وهذا غير ممكن، مما يعني أنه لا يوجد عدد حقيقي يصلح ليكون نهاية المتتالية $\{(-1)^n\}$، إذاً النهاية: $lim_{n\to\infty}(-1)^n$ غير موجودة وبالتالي المتتالية المدروسة متباعدة.

{4} مستفيداً من النماذج الثلاثة الواردة في قسم النظري ومن بعض خواص المتتاليات، احسب نهاية المتتاليات التالية:

$$(a)\ \left\{\frac{7n^2}{5n^2-7}\right\}\ ,\ \ (b)\ \left\{\frac{cos^2 n}{4^n}\right\}$$

الحل:

في المتتالية (a)، لنقسم كلاً من البسط والمقام على n^2 نجد:

$$\frac{7n^2}{5n^2-7}=\frac{7}{5-7/n^2}\ \ \Rightarrow\ \ \lim_{n\to\infty}\frac{7n^2}{5n^2-7}=\lim_{n\to\infty}\frac{7}{5-7/n^2}$$
$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}7}{\lim\limits_{n\to\infty}5-7\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{7}{5-7(0)}=\frac{7}{5}.$$

في المتتالية (b)، بما أن: $-1<\cos n<1$ ، فإن: $0<\cos^2 n<1$

وبالتالي يكون $0<\frac{\cos^2 n}{4^n}<\frac{1}{4^n}$، باستخدام النموذج الثاني حيث $r=\frac{1}{4}<1$، لدينا:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$$

بالإضافة لذلك، لدينا: $lim_{n\to\infty}\,0=0$، وبالتالي فحسب مبرهنة الحصر حيث:

$$a_n=0\ ,\ b_n=\frac{cos^2 n}{4^n}\ ,\ c_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

يكون لدينا: $lim_{n\to\infty}\frac{cos^2 n}{4^n}=0$

{5} كوّن سلسلة هندسية حدها الأول $a=1$ وأساسها $r=\frac{1}{2}$، ثم أوجد مجموعها.

الحل:

بالتعويض في شكل السلسلة الهندسية:

$$a+ar+\ \cdots+ar^n+\ \cdots$$

$a=1\,,r=1/2$ نجد أن السلسلة الهندسية المطلوبة هي:

$$1+1.\frac{1}{2}+1.\frac{1}{4}+\ \cdots+\ \frac{1}{2^{n-1}}+$$

أما مجموعها فهو:

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

{6} ادرس تقارب السلسلة: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{3^n}$. ثم احسب مجموعها.

الحل:

السلسلة المعطاة سلسلة هندسية، حدها الأول $a=2$، وأساسها $r=-\frac{1}{3}$ وبالتالي: $|r|=\frac{1}{3}<1$، وبالتالي السلسلة متقاربة، ومجموعها:

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{2}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

{7} أوجد الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية، واستفد منه في دراسة تقارب السلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$، ثم احسب مجموعها.

الحل:

إن الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية هو:

$$S_n=\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.6}+\cdots+\frac{1}{(n-1)(n+2)}+\frac{1}{n(n+3)}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\mathrm{n}-1}-\frac{1}{\mathrm{n}+2}\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}-\frac{1}{\mathrm{n}+3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

ومنه: $lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{18}$

إذاً السلسلة المعطاة متقاربة، مجموعها يساوي $S=lim_{n\to\infty}S_n=\frac{11}{18}$.

{8} حدد نوع السلاسل التالية، ثم أوجد مجموعها:

-1 $1-\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdots$

-2 $1+\frac{\pi}{4}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\cdots$

الحل:

السلسلة في (1) هي سلسلة هندسية، حدها الأول $a_1 = 1$ وأساسها $r = -\frac{2}{3}$ وهي متقاربة لأن $|r| = \left|-\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2}{3}\right| < 1$، وبالتالي مجموعها هو:

$$S = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-(-\frac{2}{3})} = \frac{3}{5}$$

أما السلسلة في (2) هي سلسلة هندسية، حدها الأول 1 وأساسها $\frac{\pi}{4}$، وبما أن $r = \frac{\pi}{4} < 1$، فالسلسلة متقاربة، ومجموعها: $S = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 4.66$

{9} ادرس تقارب كلٍّ من السلاسل التالية:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} (ln\, n)/n^2 \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} 1/[nln(n+5)]$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty} 1/(ln\, n)^n \qquad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^n/3^{4n+5}$$

$$(5)\ \sum_{n=1}^{\infty} (1/2 + 1/n)^n \qquad (6)\ \sum_{n=1}^{\infty} (100)^n/n!$$

الحل:

1- باستخدام قاعدة لوبيتال نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln\, n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/2\sqrt{n}} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

لذا من أجل n كبيرة بقدر كافٍ يتحقق: $ln\, n \leq \sqrt{n}$، بحيث يكون: $\frac{ln\, n}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$، بما أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{3/2}$ متقاربة، فحسب اختبار المقارنة تكون السلسلة المعطاة (1) متقاربة أيضاً.

2- نلاحظ أولاً: $1/[nln(n+5)] > 1/[(n+5)ln(n+5)]$ ،

باستخدام اختبار التكامل $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+5)\, ln(x+5)} = lim_{n\to\infty}[ln\, ln(x+5)]_1^{\infty} = \infty$

بما أن السلسلة التي حدها العام $b_n = 1/[(n+5)\, ln(n+5)]$ متباعدة، فالسلسلة حسب اختبار المقارنة المعطاة في (2) متباعدة أيضاً.

3- بتطبيق اختبار الجذر النوني حيث الحد العام للسلسلة في (3) هو: $a_n = 1/(\ln n)^n$ نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/(\ln n)^n}=\lim_{n\to\infty}[1/(\ln n)^n]^{1/n}=\lim_{n\to\infty}1/\ln n=0$$

وبما أن $R=0<1$، فالسلسلة في (3) متقاربة.

4- بتطبيق اختبار الجذر النوني، حيث أن: $a_n=n^n/3^{4n+5}$ نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}(n^n/3^{4n+5})^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\left(n/3^{4+5/n}\right)=\infty$$

(لأن$\lim_{n\to\infty}3^{4+5/n}=3^4=81$)، وبالتالي حسب اختبار كوشي تكون السلسلة (4) متباعدة.

5- بتطبيق اختبار الجذر النوني (كما في المثال السابق) نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}<1$$

السلسلة المعطاة في (5) مقاربة.

6- بتطبيق اختبار النسبة نجد: بما أن: $a_n=(100)^n/n!$، فيكون $a_{n+1}=\frac{(100)^{n+1}}{(n+1)!}$

وبالتالي: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(100)^{n+1}/(n+1)!}{(100)^n/n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{100}{n+1}=0$

بما أن $L=0<1$ فالسلسلة متقاربة حسب اختبار النسبة.

{10} هل يمكن تطبيق اختبار ليبنتز لدراسة تقارب السلسلة المتناوبة

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$$

الحل:

نلاحظ أن الحد العام ينتهي إلى الصفر، لكن القيمة المطلقة لحدود السلسلة لا تتناقص تماماً، فمثلاً $\frac{1}{\sqrt{2}-1}>\frac{1}{\sqrt{2}+1}\ ,\ \ \frac{1}{\sqrt{2}+1}<\frac{1}{\sqrt{3}-1},\cdots$ وبالتالي لا يمكن هنا تطبيق اختبار لايبنز.

{11} لتكن السلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ والمطلوب:

1- برهن أنها متقاربة تقارباً مطلقاً.

2- ادرس تقارب السلسلة الناتجة، بأخذ الحدود الموجبة فقط.

3- ادرس تقارب السلسلة الناتجة، بأخذ الحدود السالبة فقط.

الحل:

1- إن سلسلة القيم المطلقة لها: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$، ولنطبق عليها اختبار الجذر النوني

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

وبالتالي سلسلة القيم المطلقة متقاربة.

2- لنشكل سلسلة الحدود الموجبة للسلسلة المعطاة:

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{5}{7}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{2n-1}{4n-1}\right)^{2n-1} + \cdots$$

ولنطبق اختبار الجذر النوني لنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{4n-1}\right)^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{4n-1}\right)^{2n} \left(\frac{4n-1}{2n-1}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{4n-1}\right)^2 \left(\frac{4n-1}{2n-1}\right)^{1/n} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4} < 1$$

السلسلة الناتجة متقاربة.

$$-\left(\frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^4 - \left(\frac{16}{13}\right)^6 - \cdots - \left(\frac{2n}{4n+1}\right)^{2n} - \cdots$$

لنشكل سلسلة الحدود السالبة للسلسلة المعطاة:

للسهولة ندرس السلسلة التي نحصل عليها من السلسلة بعد ضربها بـ (-1) أي السلسلة $\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \left(\frac{6}{13}\right)^6 + \cdots + \left(\frac{2n}{4n+1}\right)^{2n} + \cdots$ وهي سلسلة ذات حدود موجبة تتقارب إذا وفقط إذا تقاربت السلسلة الثانية المشكلة. بتطبيق اختبار الجذر النوني نجد: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{4n-1}\right)^2 = \frac{1}{4} < 1$

أي إن السلسلة متقاربة.

{12} أثبت أن السلسلة التي حدها العام $(-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$ متقاربة تقارباً شرطياً.

الحل:

بما أن الحد العام a_n ينتهي إلى الصفر، والقيمة المطلقة لحدود السلسلة التي حدها العام a_n تتناقص تماماً وبالتالي فهي متقاربة حسب اختبار ليبنتز، من ناحية ثانية سلسلة القيم المطلقة لها متباعدة لأن نهاية نسبة حدها العام a_n إلى الحد العام للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ عندما $n \to \infty$ تساوي الواحد فهما من نفس النوع، إذاً السلسلة متقاربة شرطياً.

تمرينات غير محلولة

(1) اكتب الحد العام للمتتاليات التالية:

1- $-\frac{2}{3},\frac{3}{9},-\frac{4}{27},\frac{5}{81},\cdots$

2- $0,1,\sqrt{2},\sqrt{3},\cdots$

3- $1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0,\cdots$

4- $-1,1,-1,1,\cdots$

(2) اكتب الحدود الأربعة الأولى للمتتاليات التي حدها العام معطى بالحالات التالية:

1) $a_n=\frac{1}{n}\left(\frac{2.3.\cdots.n}{n.n.\cdots.n}\right)$

2) $a_n=\left(-\frac{3}{\pi}\right)^{n-1}$

3) $a_n=2^{2n},3^{1-n}$

4) $a_n=\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}$

(3) بين نوع السلسلة: $5-\frac{10}{3}+\frac{20}{9}-\frac{40}{27}+$، ثم أوجد مجموعها.

(4) ادرس تقارب السلاسل التالية:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{2n}.3^{1-n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^7}}$

(5) نفرض أن $a_1=1$ (الحد الأول للمتتالية $\{a_n\}$)، وإذا كان $a_{n+1}=\sqrt{3a_n}$ لكل $n\in N$ أثبت أن المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة.

(6) ادرس تقارب السلاسل المتناوبة التالية:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n.3n}{4n-1}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}$

(7) بين فيما إذا كانت السلاسل التالية متقاربة تقارباً مطلقاًأو شرطياً:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{3^n}$ 3) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$

(8) أوجد نهاية متتالية المجاميع الجزئية للسلاسل التالية وماذا تستنتج:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$$

(9)

1. استخدم اختبار المقارنة لدراسة تقارب السلسلتين:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\cdots$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$$

2. استخدم اختبار دالامبير لدراسة تقارب السلاسل التالية:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}\ ,\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}.\sqrt{n}}\ ,\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{10.n^{100}}$$

3. ادرس تقارب السلاسل الآتية ، مستخدماً اختبار الجذر النوني:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n-5}\right)^n\ ,\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

4. ادرس تقارب السلاسل الآتية ، مستخدماً اختبار راب:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n)!}.\frac{1}{2n+1}\ ,\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

5. ادرس تقارب السلاسل الآتية ، مستخدماً اختبار التكامل:

$$\frac{1}{2(ln\,2)^{1+\alpha}}+\frac{1}{3(ln\,3)^{1+\alpha}}+\cdots+\frac{1}{(n+1)[ln(n+1)]^{1+\alpha}}+\cdots\ ;\ \alpha>0$$

$$\frac{1}{3\,ln\,3\,ln\,ln\,3}+\frac{1}{4\,ln\,4\,ln\,ln\,4}+\cdots+\frac{1}{(n+2)\,ln(n+2)\,ln\,ln(n+3)}+\cdots$$

الفصل الأول
المتتاليات والسلاسل التابعية
Sequences and Series of Function

سندرس في هذا الفصل المتتاليات والسلاسل التي حدودها توابع حقيقية لمتحول حقيقي واحد.

إن لهذه المتتاليات والسلاسل التابعية دوراً رائداً في الرياضيات لما لها من تطبيقات رياضية عديدة، وتعد سلاسل فورييه وسلاسل القوى الصحيحة وسلسلتا تايلور وماك لوران من المواضيع المهمة جداً للطالب والباحث أيضاً في دراسته.

(1-1) المتتاليات التابعية ($Sequences\ of\ Function$):

إن مفهوم المتتالية التابعية يشابه كثيراً مفهوم المتتالية العددية، فإذا شكلنا بعلاقة رياضية ما مجموعة من التوابع بحيث تكون جميعها معرفة على المجال الحقيقي $I=[a,b]$ أو على (مجموعة A من محور الأعداد الحقيقية) بحيث يقابل كل عدد طبيعي $n\in N$ تابعاً من الشكل $f_n(x)$ حيث $x\in A$، عندها نقول عن مجموعة التوابع:

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$$

أو اختصاراً بالشكل $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ أو $\{f_n(x)\}$ إنها تشكل متتالية تابعية غير منتهية من التوابع الحقيقة، **نسمي $f_n(x)$ بالحد العام لهذه المتتالية التابعية.**

في هذا الفصل، عندما نقول $\{f_n(x)\}$ متتالية، فأننا قصد بذلك متتالية تابعية لمتحول حقيقي واحد مالم يرد غير ذلك.

مثال (1):

المتتاليات التالية هي متتاليات تابعية:

(1) $1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots$ حدها العام هو: x^n

(2) $1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx, \cdots$ حدها العام: $\cos nx$

(3) $x, -\frac{x^2}{1!}, \frac{x^4}{2!}, -\frac{x^6}{3!}, + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$ حدها العام هو: $(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$

(2-1) التقارب البسيط (النقطي) والتقارب المنتظم (القوي):

لتكن المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}$، وبفرض أن حدودها معرفة على المجال المغلق $I=[a,b]$، بتثبيت نقطة x_0 من I نحصل على المتتالية العددية: $\{f_n(x_0)\}$، إذا كانت

المتتالية العددية الأخيرة متقاربة، عندئذٍ نقول عن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ متقاربة في النقطة x_0 (أو في النقطة x_0)، وإذا كانت المتتالية $\{f_n(x_0)\}$ متقاربة عند كل نقطة من المجال I، عندها نقول عن المتتالية $\{f_n(x)\}$ إنها تتقارب تقارباً بسيطاً (أو نقطياً) على المجال I. أما إذا كانت المتتالية $\{f_n(x)\}$ متباعدة على I عندئذٍ نقول عنها إنها متباعدة.

لنفرض الآن أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة على المجال I، عندها يكون: من أجل النقطة x_0 من I تكون المتتالية العددية $\{f_n(x_0)\}$ متقاربة من عدد معين نرمز له عادة بـ $f(x_0)$، أي إن:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x_0)}$$

وعندما تمسح x المجال I نحصل على التابع الحقيقي $f(x)$ الذي منطلقه المجال I ومستقره R أو مجموعة جزئية منها، هذا التابع يمثل نهاية المتتالية $\{f_n(x)\}$، ونعبر عن ذلك بالعلاقة:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)}$$

ونقول في هذه الحالة: إن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ متقاربة على المجال I إلى التابع $f(x)$.

مثال (2):

متتالية التوابع $\{f_n(x)\} = \{9e^{-nx}\}$ المعرفة على المجال $I = [0,\infty[$ تتقارب إلى التابع f المعرف بالشكل:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 9\lim_{n\to\infty} e^{-nx} = \begin{cases} 0\ ; & x > 0 \\ 9\ ; & x = 0 \end{cases}$$

إذن المتتالية المفروضة تتقارب على المجال $[0,\infty[$ من التابع f المعرف بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} 0\ ; & x > 0 \\ 9\ ; & x = 0 \end{cases}$$

مثال (3):

متتالية التوابع $\{f_n(x)\} = \left\{x^3 + \frac{1}{n^2}\sin n\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right\}$ تتقارب على المجال $(-\infty,\infty)$ من التابع: $f(x) = x^3$ وذلك لأنه:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sin n\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0\ ; n \in N;\ \ \forall x \in (-\infty,\infty)$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^3\ ;\ \forall x \in (-\infty,\infty)$$

لنستعرض الآن **التعريف الدقيق للتقارب البسيط (النقطي).**

نقول عن المتتالية $\{f_n(x)\}$: إنها **متقاربة تقارباً بسيطاً (نقطياً)** على المجال I من التابع $f(x)$. إذا تحقق الشرط التالي:

من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$، ومن أجل أي نقطة x من I يمكن إيجاد عدد طبيعي $N = N(\varepsilon, x)$ (نقصد بذلك أن N تابعة لـ ε و x معاً) بحيث تتحقق المتراجحة:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ ، عندما } n \geq N$$

باختصار نكتب:

$$(\forall \varepsilon > 0 \,; x \in I), \exists N = N(\varepsilon, x) : (n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

ملاحظة (1):

التابع $f(x)$ الذي يمثل نهاية المتتالية $\{f_n(x)\}\,; x \in I$ لا يتمتع بالخواص التي تتمتع بها التوابع $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ والمثال التالي يوضح هذه الملاحظة.

مثال (4):

لتكن متتالية التوابع: $f_n(x) = \left\{\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right\}$ المعرفة على المجال $I =]-\infty, \infty[$ إن:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = \begin{cases} 1 \;;\; |x| > 1 \\ 0 \;;\; |x| = 0 \\ -1 \;;\; |x| < 1 \end{cases}$$

إن الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة يمثل تابعاً حقيقياً، منطلقه R أي نفس مجال تعريف حدود المتتالية المدروسة، ومستقرة المجموعة $\{1, 0, -1\}$ الجزئية من R إذن متتالية التوابع المعطاة متقاربة ونهايتها:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \;;\; |x| > 1 \\ 0 \;;\; |x| = 0 \\ -1 \;;\; |x| < 1 \end{cases}$$

لاحظ أن حدود المتتالية: $\left\{\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right\}$ هي توابع مستمرة على R، بينما نهايتها $f(x)$ هي تابع غير مستمر على R.

سنستعرض الآن: بعض خواص المتتاليات التابعية المتقاربة نقطياً.

لتكن $\{f_n(x)\}$ و $\{g_n(x)\}$ متتاليتين تابعيتين على $I \subseteq R$، وبفرض أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة إلى التابع f على I وكذلك $\{g_n(x)\}$ متقاربة إلى التابع g على I عندئذٍ يكون لدينا:

1- متتالية التوابع $\{f_n(x) + g_n(x)\}$ متقاربة من التابع $f + g$ على I.

2- متتالية التوابع $\{af_n(x)\}$ متقاربة من التابع af، من أجل كل $a \in R^*$ على I.

3- متتالية التوابع $\{f_n(x).g_n(x)\}$ متقاربة من التابع $f.g$ على I.

إن برهان الخاصة السابقة ينتج مباشرة من تعريف التقارب البسيط أو (النقطي) وخواص المتتاليات العددية.

سنهتم لاحقاً بالمتتاليات المتقاربة التي تتمتع نهايتها بالخواص التي تتمتع بها حدود المتتالية نفسها: (كالاستمرار، والاشتقاق) من أجل ذلك نخفف القيود المفروضة في التعريف السابق، حيث اشترطنا في التعريف السابق أن يكون العدد الطبيعي N مرتبطاً بـ ε و بـ $x \in I$ بنفس الوقت. إذا كان العدد الطبيعي N (مرتبطاً) بـ ε فقط (مستقلاً عن x) فإننا نقول: إن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على المجال I من التابع $f(x)$ ونرمز عادة لذلك بـ $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$

(3-1) التقارب المنتظم للمتتاليات:

$(\boldsymbol{Convergence\ of\ Regular\ Sequences})$

نقول عن المتتالية $\{f_n(x)\}$ والتي حدودها توابع معرفة على مجموعة $E \subseteq R$ أو على مجال مغلق $I = [a,b]$ من R: إنها متقاربة بانتظام إلى التابع $f(x)$ على المجموعة E أو على المجال $[a,b]$ إذا تحقق الشرط:

$$\forall\ (\varepsilon > 0, x \in I)\ ;\ \exists N = N(\varepsilon)\ ; (n \geq N \ \implies\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

لاحظ الفرق بين مفهوم التقارب المنتظم والتقارب البسيط لمتتالية تابعية.

مثال (5):

ادرس التقارب المنتظم لمتتالية التوابع: $\{f_n\} = \left\{\frac{x^n}{n}\right\}$ على المجال $I = [0,1]$

الحل:

نلاحظ أولاً أن:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = 0\ ;\ \ \forall\ x \in [0,1]$$

أي إن المتتالية المعطاة متقاربة نقطياً على I من التابع $f(x) = 0$، لنبرهن الآن أن هذا التقارب منتظم.

ليكن $\varepsilon > 0$ عدداً مفروضاً، ولنبحث عن قيم $N(\varepsilon)$ التي تحقق المتراجحة:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

لذلك ننطلق من الفرق:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff \left|\frac{x^n}{n} - 0\right| < \varepsilon \iff \frac{x^n}{n} < \varepsilon \ ; \ \forall x \in I = [0,1]$$

لكن من أجل قيم x من I، يكون $\frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n}$، فإذا وضعنا $\frac{1}{n} < \varepsilon$ يكون $n > \frac{1}{\varepsilon}$، وباختيار $N = \frac{1}{\varepsilon}$ نجد أن العدد N هو عدد طبيعي متعلق بـ ε، فقط كما أن المتراجحة $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ محققة من أجل جميع قيم $N \leq n$.

مثال (6):

أثبت أن المتتالية: $\{f_n(x)\} = \left\{\sin\frac{x}{n}\right\}$ في المجال $]-\infty,\infty[$، ليست متقاربة بانتظام على المجال I.

الحل :

التقارب النقطي: نلاحظ أنه مهما تكون $x \in I$، فإن:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} sin\frac{x}{n} = 0$$

أي إن متتالية التوابع المدروسة تتقارب نقطياً من التابع $f(x) = 0$ في المجال I، لنختار النقطة $x = \frac{\pi}{2}.n$، بحيث يكون:

$$f_n\left(\frac{\pi}{2}.n\right) = sin\frac{\frac{\pi}{2}.n}{n} = sin\frac{\pi}{2} = 1$$

لنأخذ $\varepsilon = \frac{1}{2}$، نلاحظ أنه مهما كان العدد n كبيراً، فإنه يستحيل تحقق المتراجحة:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|sin\frac{x}{n} - 0\right| < \varepsilon \ \ \forall\, x \in I$$

لأنه في النقطة $x = \frac{\pi}{2}.n \in I$، نلاحظ أن: $\left|sin\frac{\frac{\pi}{2}.n}{n} - 0\right| = 1 > \frac{1}{2}$ وهذا غير ممكن.

إذن متتالية التوابع المعطاة لا تتقارب بانتظام من التابع $f(x) = 0$ في المجال I.

ينتج من التعريف السابق ما يلي:

نتيجة (1):

1- إذا كانت متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على المجال $I \subseteq R$ إلى $f(x)$ فإنها تكون متقاربة نقطياً إلى $f(x)$ على المجال I، إلا أن العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة (المثال الأخير يوضح ذلك).

2- إذا كانت متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على المجال $I \subseteq R$، فإنها ستكون متقاربة بانتظام على أي مجال جزئي J من I $(J \subseteq I)$، إلا أن العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة.

المبرهنة التالية تفيدنا في دراسة استمرار التابع $f(x)$ $(f(x) = lim_{n\to\infty} f_n(x))$ على المجال I من R.

مبرهنة (1):

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية حدودها معرفة ومستمرة على المجال $I \subseteq R$، ولنفرض أن هذه المتتالية متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ في المجال I، عندئذٍ يكون التابع $f(x)$ مستمراً على المجال I.

البرهان:

بما أن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على المجال I، فإن ذلك يعني (حسب تعريف التقارب المنتظم) أنه من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $N(\varepsilon)$ (متعلق بـ ε) بحيث يكون: $n > N(\varepsilon)\ ;\ \forall x \in I \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

بما أن التوابع $f_n(x)$ مستمرة على المجال I، من أجل $n = 1,2,\cdots$ فإنه من أجل $n_0 > N(\varepsilon)$ يكون التابع $f_{n_0}(x)$ مستمراً على المجال I (حسب تعريف كوشي للاستمرار)، وبالتالي إذا كانت $x_0 \in I$، فمن أجل العدد $0 < \frac{\varepsilon}{3}$، نستطيع إيجاد العدد $0 < \delta$ بحيث يكون: $\left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ من أجل $|x - x_0| < \delta$

وكذلك: $\left|f_{n_0}(x) - f(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ ولنبين أن التابع $f(x)$ مستمر في النقطة x_0، نلاحظ من أجل أي $x \in I$ و $|x - x_0| < \delta$، يكون لدينا:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\right| \leq$$
$$\left|f(x) - f_{n_0}(x)\right| + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\right| + \left|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

أي من أجل أي عدد موجب $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$، بحيث:

$$|x - x_0| < \delta\ ;\ \forall x \in I \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

وهذا بدوره يعني أن التابع $f(x)$ مستمر في النقطة x_0 على المجال I.

وبما أن النقطة x_0 اختيارية من المجال I، إذن يكون $f(x)$ مستمراً في جميع نقاط المجال I.

نتيجة (2):

إذا كانت $\{f_n(x)\}$ متتالية من التوابع المستمرة على المجال $I \subseteq R$، وإذا تقاربت هذه المتتالية من التابع f غير المستمر على I، عندئذٍ تقارب المتتالية $\{f_n(x)\}$ من التابع f لا يكون منتظماً على I، وذلك مهما يكن $x \in I$.

مثال (7): ادرس التقارب المنتظم للمتتالية: $\{x^n\}$ على المجال $I = [0,1]$.

الحل: إن:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & ; \qquad x = 1 \end{cases}$$

إن التابع السابق الذي يمثل نهاية متتالية التوابع المفروضة غير مستمر على المجال I، وبالتالي حسب النتيجة السابقة المتتالية المدروسة لا تتقارب بانتظام من التابع $f(x)$ على المجال I.

ملاحظة (2):

إذا كانت $\{f_n(x)\}$ متتالية من التوابع المستمرة على المجال $I \in R$، وكانت هذه المتتالية متقاربة من التابع المستمر $f(x)$ على I، عندئذٍ قد يكون هذا التقارب منتظماً وقد لا يكون.

(4-1) اختبارات التقارب المنتظم لمتتاليات التوابع:

$(\boldsymbol{Tests\ of\ Uniformly\ Convergence})$

مبرهنة (2): (مبرهنة كوشي) $(\boldsymbol{Cauchy\ theorm})$

الشرط اللازم والكافي للتقارب المنتظم لمتتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ في المجال $I \subseteq R$ من التابع f على I هو أن يتحقق الشرط:

من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يمكن إيجاد عدد طبيعي N بحيث من أجل جميع النقاط $x \in I$ تتحقق المتراجحة:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \ ,\ \text{إذا كانت}\ \ N < n\ ,\ \ N < m \qquad (1)$$

البرهان:

نفرض أولاً أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ تتقارب بانتظام إلى التابع f على المجال I ، وهذا يعني أنه من أجل أي $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي N بحيث من أجل جميع النقاط $x \in I$ يكون لدينا:

$N < n$ من أجل $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$N < m$ من أجل $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

نستنتج مما سبق أنه من أجل جميع النقاط x من I يكون:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وذلك إذا كان $N < m \ , \ N < n$.

لنبرهن الآن أن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ تتقارب بانتظام إلى التابع f على المجال I، من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$، يوجد عدد طبيعي N بحيث تتحقق المتراجحة (1)، من أجل جميع x من I ولنبرهن على أن المتتالية متقاربة بانتظام، لنثبت النقطة x ونطبق المبرهنة التالية: (كي تكون متتالية الأعداد الحقيقية $\{a_n\}$ متقاربة، يلزم ويكفي أن تكون $\{a_n\}$ متتالية كوشي)، **على المتتالية** $\{\boldsymbol{f_n(x)}\}$، من هذا نجد أن $lim_{n\to\infty} f_n(x)$ موجودة حيث x من I. لنضع $lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$، حيث x من I ، ولننظر في المتتالية $\{a_m\}$ التالية:

$$a_m = |f_n(x) - f_m(x)| \ ; \ \forall x \in I, n > N$$

بما أن $\{f_m(x)\}$ تتقارب إلى $f(x)$ عندما m تسعى إلى ∞، فإن المتتالية a_m تتقارب إلى $|f_m(x) - f(x)|$، عندما m تسعى نحو ∞ ، وبما أن $a_m < \varepsilon$ من أجل $N < m$ ، وذلك حسب المتراجحة (1) ينتج من ذلك أن $lim_{n\to\infty} a_n \leq \varepsilon$ ، وهذا يعني أن $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$، إذا كان $N < n$ و $x \in I$ وهذا يبين أن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ تتقارب بانتظام من التابع f على المجال I

مبرهنة (3): اختبار فاير شتراس $(\boldsymbol{Weierstrass`s\ Test})$

الشرط اللازم والكافي لتقارب المتتالية $\{f_n(x)\}$ تقارباً منتظماً على المجال $I \subseteq R$ من التابع f هو أن تكون المتتالية العددية $\{a_n\}$، حيث:

$a_n = Sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| \ ; \ x \in I$ متقاربة من الصفر.

البرهان:

لزوم الشرط: لدينا المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على I.

عندئذٍ يكون لدينا بحسب تعريف التقارب المنتظم للمتتاليات التابعية ما يلي:

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in N : \ \forall \ n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ ; x \in I$$

وهذا يؤدي بدوره، لأن يكون من أجل كل $n > N(\varepsilon)$ لدينا:

$$\underset{x\in I}{Sup}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

فإذا وضعنا الآن: $(1) \cdots \quad \alpha_n = Sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| \geq 0$، لأصبح لدينا ما يلي:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) \in N:\ \forall\ n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |\alpha_n| = \alpha_n < \varepsilon$$

وهذا يعني أن المتتالية العددية $\{\alpha_n\}$ هي متتالية صفرية، أي أن:

$lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ والذي يؤدي بالتالي أن يكون:

$$\lim_{n\to\infty} \underset{x\in I}{Sup}|f_n(x) - f(x)| = 0$$

كفاية الشرط: لدينا من الفرض المتتالية $\{f_n(x)\}$ محققة للعلاقة:

$lim_{n\to\infty} Sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| = 0$، هذا يعني لأن المتتالية العددية $\{\alpha_n\}$، والمعطاة من خلال العلاقة (1) هي متتالية صفرية، وبحسب تعريف نهاية متتالية عددية يكون لدينا: من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $n \in N$ بحيث يكون:

$$\left|\underset{x\in I}{Sup}|f_n(x) - f(x)| - 0\right| < 0$$

والتي ينتج عنه أنه من أجل كل $n > N(\varepsilon)$ يكون:

$$\underset{x\in I}{Sup}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad ; \quad \forall\ x \in I$$

وهذا يعني أن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على

مثال (8):

ادرس التقارب المنتظم للمتتالية التابعية $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{nx^2}{1+nx}\right\}$ على المجال $I = [1,2]$

الحل:

الحد العام لهذه المتتالية التابعية هو: $f_n = \frac{nx^2}{1+nx}$، وبالتالي:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{1+nx} = \frac{x^2}{x} = x$$

وحسب اختبار فاير شتراس لدينا:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx^2}{1+nx} - x\right| = \left|\frac{-x}{1+nx}\right| = \frac{x}{1+nx}$$

ومنه:

$$a_n = \underset{x\in[1,2]}{Sup}|f_n(x) - f(x)| = \underset{x\in[1,2]}{Sup}\frac{x}{1+nx} = \frac{2}{1+n}$$

(لحساب $Sup\frac{x}{1+nx}$، (أكبر قيمة للكسر)، نحصل عليه بإعطاء x الموجودة في البسط أكبر قيمة في المجال $[1,2]$، وبإعطاء x الموجودة في المقام أصغر قيمة في المجال $[1,2]$)

وبملاحظة أن: $lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+n}$ ، نستنتج أن المتتالية المعطاة متقاربة تقارباً منتظماً على المجال I ، وذلك حسب اختبار فاير شتراس.

(5-1) بعض خواص متتاليات التوابع المتقاربة بانتظام:

Some Properties of the Uniformly Convergent Sequence of function

ليكن المجال $I = [a,b] \subseteq R$، وإذا كانت $\{g_n(x)\},\{f_n(x)\}$ متتاليتين متقاربتين بانتظام من التابعين g,f على الترتيب على I، وبفرض d,c ثابتين حقيقين عندئذٍ يتحقق ما يلي:

1- متتالية التوابع $\{cf_n(x) + dg_n(x)\}$ تتقارب بانتظام على المجال I من التابع $cf(x) + dg(x)$، وباستخدام رمز التقارب المنتظم $\rightrightarrows$ تكتب هذه الخاصة بالشكل:

إذا كانت $f_n \rightrightarrows f$ و $g_n \rightrightarrows g$، فإن:

$$(cf_n + dg_n) \rightrightarrows (cf + dg) \quad ; \quad c,d \in R$$

وبشكل خاص، إذا كان $c = d = 1$، فإننا: $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$، أما إذا كان $c = 1, d = -1$ فإننا نجد: $f_n - g_n \rightrightarrows f - g$

وهذا يعني أن نهاية حاصل جمع (أو طرح) متتاليتين متقاربتين بانتظام على المجال I يساوي حاصل جمع (أو طرح) نهايتي المتتاليتين المفروضتين.

أما إذا كان $d = 0$ ، فإننا نجد: $cf_n \rightrightarrows cf$، وهذا يعني أن نهاية جداء عدد ثابت بمتتالية متقاربة بانتظام على I يساوي جداء هذا العدد الثابت بنهاية المتتالية المدروسة.

2- نفرض أن كلاً من المتتاليتين التابعيتين $\{f_n(x)\}$ و $\{g_n(x)\}$ محدودة على المجال I عندئذٍ تكون المتتالية التابعية $\{f_n(x).g_n(x)\}$ تكون متقاربة بانتظام من التابع $f.g$ على المجال I .

3- إذا كانت المتتالية العددية $\{a_n\}$ متقاربة، وإذا كانت $\{f_n(x)\}$ متتالية تابعية بحيث يكون $f_n(x) = a_n$ لكل x من I، عندئذٍ متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ تتقارب بانتظام على المجال I.

ملاحظة (3):

إن شرط المحدودية الوارد في الخاصة السابقة يجب أن يشمل كلاً من المتتاليتين $\{f_n(x)\}$ و $\{g_n(x)\}$، فإذا كانت إحدى المتتاليتين السابقتين محدودة مع تحقق شرط التقارب المنتظم لكل منهما فنجد أن جداءهما لا يتقارب بانتظام من تابع الجداء لتابعي النهاية. والمثال التالي يوضح هذه الملاحظة:

مثال (9):

لتكن $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{nx+1}{n}\right\}; x \in R \ , \ \{g_n(x)\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \ ; \ x \in R$

المطلوب ادرس التقارب المنتظم للمتتالية $\{f_n(x). g_n(x)\}$.

الحل:

المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x) = x$ على R، وكذلك المتتالية $\{g_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من التابع الصفري $g(x) = 0$ على R، من ناحية ثانية المتتالية $\{g_n(x)\}$ محدودة على R، في حين أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ غير محدودة على R.

لندرس الآن التقارب المنتظم للمتتالية $\{f_n(x). g_n(x)\}$. من أجل كل x من R، لدينا: $lim_{n\to\infty}(f_n. g_n)(x) = lim_{n\to\infty}\frac{nx+1}{n^2} = 0$، أي إن $f. g = 0$ على R.

إلا أن هذا التقارب غير منتظم، ليكن $\varepsilon > 0$ معطى. ولنفرض جدلاً وجود عدد $N \ni N(\varepsilon)$ بحيث يكون شرط التقارب المنتظم لمتتالية التوابع $\{f_n(x). g_n(x)\}$ من التابع الصفري g على R محققاً عندئذٍ من أجل أي عدد $n > N(\varepsilon)$، ومن أجل $|x| \geq 1$ يكون:

$$|(f_n. g_n)(x) = (f. g)(x)| = \left|\frac{nx+1}{n^2}\right| = \frac{nx+1}{n^2} < \frac{2|x|}{n} < \varepsilon$$

ومنه نجد أن $n > \frac{2|x|}{\varepsilon}$. أن المقدار الأخير متعلق بـ ε, x معاً. وبما أن $|x| > 1$، فإن ذلك يعني أن $N \ni N(\varepsilon)$ والتي فرضنا وجودها سابقاً، لكنها في الحقيقة غير موجودة من أجل قيم $|x| \geq 1$، وبالتالي فإن متتالية التوابع $\{f_n(x). g_n(x)\}$ لا

تتقارب بانتظام من التابع الصفري من أجل $|x| \leq 1$، إذاً المتتالية $\{f_n(x)g_n(x)\}$ لا تتقارب بانتظام على R.

الخاصة التالية تبين لنا أن التقارب المنتظم يسمح بالمبادلة بين رمزي التكامل والنهاية:

مبرهنة (4):

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية من التوابع المستمرة على المجال $R \supseteq I = [a, b]$، ولنفرض أنها متقاربة بانتظام على المجال I إلى التابع f عندئذٍ، يكون التابع f قابلاً للمكاملة على المجال I وتتحقق العلاقة:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \quad \cdots (1)'$$

البرهان:

بما أن التابع f مستمر على المجال I، (حسب المبرهنة (١)) فهو قابل للمكاملة على نفس المجال I.

لنبرهن إذاً على صحة المساواة $(1)'$.

من أجل أي $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي N بحيث تتحقق من أجل جميع النقاط $x \in I = [a, b]$ المتراجحة: $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$، وذلك من أجل $n > N$، ومنه يكون من أجل $N < n$:

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\, dx\right|$$
$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon$$

وهذا ما يبرهن صحة المساواة $(1)'$.

ملاحظة (4):

إذا كان تقارب المتتالية $\{f_n(x)\}$ من التابع f على I ليس منتظماً فإن المساواة $(1)'$ في المبرهنة السابقة تفقد صحتها في الحالة العامة. بكلام آخر، إن التقارب المنتظم

للمتتالية $\{f_n(x)\}$ من f هو شرط كافٍ وغير لازم من أجل تحقيق المساواة $(1)'$ أي كي تكون نهاية تكامل تساوي تكامل النهاية. المثال التالي يوضح هذه الملاحظة:

مثال (10):

لتكن المتتالية التابعية: $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}\right\}$ والتي حدودها توابع معرفة ومستمرة على المجال $[0,1]$، والسؤال: هل تتحقق العلاقة:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx \ldots\ldots\ldots (*)$$

ثم أثبت أن المتتالية المذكورة غير متقاربة بانتظام على المجال $I = [0,1]$.

الحل:

إن متتالية التوابع المعطاة والتي حدها العام هو: $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ معرفة ومستمرة على المجال I ومتقاربة إلى $f(x) = 0$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$$

من ناحية ثانية لدينا:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n}ln(1+n^2x^2)\right]_0^1 = \lim_{n\to\infty}\frac{ln(1+n^2)}{2n} = 0$$

كما أن: $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 0dx = 0$ وبالتالي فإن العلاقة $(*)$ محققة.

لنبين الآن أن المتتالية $\left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}\right\}$ ليست متقاربة بانتظام إلى التابع f على المجال $I = [0,1]$ من أجل أي عدد طبيعي n ، يوجد $x = \frac{1}{n}$ من I بحيث يكون:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{n.\frac{1}{n}}{1+n^2.\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

ومنه: $a_n = Sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2} \implies lim_{n\to\infty}\, a_n \neq 0$

وهذا يعني حسب اختبار فايرشتراس، أن المتتالية المذكورة ليست متقاربة بانتظام من التابع f على المجال $[0,1]$.

الخاصة التالية تبين لنا أن التقارب المنتظم للمتتاليات التابعية يسمح بالمبادلة بين رمزي الاشتقاق والنهاية.

مبرهنة (5):

نفرض أن المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}$ متقاربة نقطياً على المجال $I=[a,b]$ إلى التابع f، ولنفرض أيضاً أن للتوابع $f_n(x)$ مشتقات $f'_n(x)$ مستمرة ومحدودة على المجال I، وإذا كانت المتتالية $\{f'_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على I، عندئذٍ يكون التابع f قابلاً للاشتقاق على المجال I ويحسب المشتق f' بالعلاقة:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}f'_n(x)$$

البرهان:

لنفرض أن g هو تابع النهاية لمتتالية التوابع $\{f'_n(x)\}$ على المجال I، عندئذٍ يكون g تابعاً قابلاً للمكاملة على المجال I، وبالتالي يمكننا أن نكتب من أجل $a\le t\le b$:

$$\int_a^t g(x)dx=\int_a^t\lim_{n\to\infty}f'_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^t f'_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\big(f_n(t)-f_n(a)\big)$$

من ناحية ثانية بما أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة من التابع f على المجال I، فيكون:

$$\lim_{n\to\infty}f_n(t)=f(t)\quad,\quad\lim_{n\to\infty}f_n(a)=f(a)$$

وبالتالي يكون:

$$\int_a^t g(x)dx=f(t)-f(a)$$

وهذا يعني أن التابع f هو تابع أصلي للتابع g، ومن ثم فإن التابع f قابل للاشتقاق على I بحيث يكون:

$$f'(x)=g(x)\ ;\ \forall\quad x\in I$$

وهذا يعني أنه من أجل كل $x\in I$ يتحقق دائماً:

$$\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)'=f'(x)=\lim_{n\to\infty}f'_n(x)\quad;\quad\forall x\in I$$

مثال (11):

لتكن المتتالية التابعية: $\{f_n(x)\}=\left\{\frac{1}{n}arctan\,x^n\right\}$ و $x\in R$

إن المتتالية المفروضة متقاربة بانتظام على R (ونترك للطالب التحقق من ذلك)، المطلوب التحقق فيما إذا كانت المساواة التالية صحيحة:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

الحل:

المتتالية المفروضة متقاربة في R نقطياً من التابع $f(x) = 0$ لأن:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} arctan\, x^n = 0$$

ومنه يكون لدينا:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = 0$$

لنحسب نهاية المشتق في النقطة $x = 1$

$$\{f_n(x)\} = \left\{\frac{1}{n} arctan\, x^n\right\} \implies f_n'(x) = \frac{1}{n}.\frac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}} = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$$

وبالتالي

$$f_n'(1) = \frac{1}{2} \implies \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \frac{1}{2}$$

إذاً:

$$\left(\lim f_n(x)\right)' = 0 \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \frac{1}{2}$$

إذاً المساواة غير صحيحة، والسبب في ذلك يعود إلى عدم التقارب المنتظم لمتتالية المشتقات $\{f_n(x)\}'$.

ملاحظة (3):

إن التقارب المنتظم للمتتالية $\{f_n(x)\}$ هو أحد الشروط اللازمة في المبرهنة السابقة ولكنه غير كافٍ لجعل التابع نهاية المتتالية السابقة قابلاً للاشتقاق.

نقدم الآن **مفهوم متتالية التوابع المحدودة والمحدودة بانتظام.**

تعريف: لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية تابعية معرفة على المجال $I \subseteq R$، نقول عن هذه المتتالية إنها:

1- محدودة على I، إذا وفقط إذا، وجد من أجل كل $n \in N$ عدد حقيقي موجب وليكن a_n $(a_n > 0)$، بحيث يكون: $|f_n(x)| \le a_n \;;\; \forall\; x \in I$.

2- محدودة بانتظام على I، إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب وليكن a (أي $0 < a$) وعدد $n \in N$ بحيث يكون:

$$\forall\, n \ge N \implies |f_n(x)| \le a \;;\; \forall x \in I$$

مثال (12):

لتكن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ والتي حدها العام معرف بالعلاقة:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad |x| > 1/n \\ 1 & ; \quad x = 0 \\ n & ; \quad 0 < x \le \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

إن هذه المتتالية محدودة على R، وذلك لأنه من أجل كل $n \in N$ نجد، بأخذ $a_n = n + 1$:

$$|f_n(x)| < a_n \quad ; \quad \forall \quad x \in R$$

ولكنها ليست محدودة بانتظام على R: لأنه لا يمكن إيجاد العدد $0 < k$ بحيث يكون:

$$|f_n(x)| < K \quad ; \quad \forall \ x \in R \ ; \ \forall n > N$$

ملاحظة (4):

نعلم أن كل متتالية عددية $\{a_n\}$ متقاربة تكون محدودة، لكن هذا الاقتضاء غير صحيح بشكل عام في المتتاليات التابعية، فليس من الضروري أن تكون كل متتالية تابعية متقاربة أو متقاربة بانتظام، محدودة (وبالطبع ليست محدودة بانتظام في هذه الحالة).

تبين المبرهنة التالية أن التقارب المنتظم لمتتاليات التوابع تحافظ على خاصية المحدودية.

مبرهنة (6):

بفرض $\{f_n(x)\}$ متتالية تابعية محدودة بانتظام على مجال $I \subset R$، وإذا كانت هذه المتتالية متقاربة بانتظام إلى التابع الحقيقي f على I، عندئذٍ يكون التابع f محدوداً على I.

البرهان:

لكل x من I يتحقق لدينا:

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)|$$

ليكن $\varepsilon > 0$ عدداً معطى يوجد عدد $N_1(\varepsilon) \in N$ بحيث يكون لكل $x \in I$:

$$\forall \ n > N_1(\varepsilon) \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

وبما أن المتتالية التابعية محدودة بانتظام على I، فهذا يعني أنه يوجد عدد حقيقي موجب وليكن $a > 0$ وعدد $N_2(\varepsilon) \in N$، عندئذٍ يكون لكل x من I:

$$\forall\ n \geq N_2(\varepsilon) \ \Longrightarrow\ |f_n(x)| \leq a$$

وبأخذ $N(\varepsilon) = max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ ، يكون لدينا من أجل جميع قيم $N(\varepsilon) < n$

$$|f(x)| < \varepsilon + a \ ; \ \forall\ x \in I$$

وهذا يعني أن التابع f محدود على المجال I.

ملاحظة (5):

إن شرط التقارب المنتظم في المبرهنتين السابقتين هو شرط كاف للمحدودية والمحدودية المنتظمة لتابع النهاية، لكنه غير لازم، فعلى سبيل المثال المتتالية: $\{f_n(x)\} = x^n$، حيث $x \in [0,1]$ هي متتالية محدودة على المجال السابق وهي متقاربة أيضاً إلى تابع محدود على المجال $[0,1]$، إلا أن تقاربها ليس منتظماً.

المبرهنة التالية، تبين لنا أن التقارب المنتظم لمتتالية تابعية يحافظ على خاصية الاضطراد.

مبرهنة (7):

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية تابعية مضطردة على المجال $I \subseteq R$، إذا كانت هذه المتتالية متقاربة بانتظام من التابع f على I، عندئذٍ يكون التابع f مضطرداً على المجال I.

البرهان:

نفرض أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ متزايدة على المجال I، وبفرض أن y, x نقطتان من I وأن $x < y$، عندئذٍ يكون: $f_n(y) \geq f_n(x)$ ، لكل $n \in N$، وليكن $0 < \varepsilon$ عدداً معطى، عندئذٍ يوجد $N(\varepsilon) \in N$ بحيث يكون لكل $N(\varepsilon) < n$ المتراجحة التالية محققة:

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

من تقارب المتتالية العددية $\{f_n(t)\}$ حيث $t \in I$، وحسب خاصية التزايد لتوابع متتالية التوابع المفروضة يكون لدينا:

$$|f_n(y) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad ; \ \forall\, n \in N$$

من ناحية أخرى لدينا:

$$|f(y) - f(x)| = |f(y) - f_n(y) + f_n(y) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \leq$$
$$\leq |f_n(y) - f(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$|f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

وبما أن ε عدد صغير بالقدر الذي نرغبه ، ينتج من ذلك أن:

$$f(y)\geq f(x)\quad ;\quad y>x$$

وبنفس الطريقة السابقة يمكن الإثبات في حالة متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ متتالية لتوابع متناقصة.

(6-1) السلاسل التابعية ومنطقة تقاربها:

$(\boldsymbol{The\ Series\ of\ Function\ and\ Convergent\ Domain})$

تماماً، كما عرفنا السلسلة العددية نعرف السلسلة التابعية، لتكن:

$$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots$$

متتالية توابع حقيقية، والتي حدودها توابع معرفة على مجموعة جزئية I من R، نسمي العبارة التالية:

$$f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots\quad ;\quad x\in I$$

أو اختصاراً بالشكل $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ بسلسلة توابع حقيقية أو اختصاراً بسلسلة تابعية.

نسمي عادة $f_n(x)$ بالحد العام لها أو (الحد النوني) ، حيث $x\in I$.

فمثلاً المتتالية التابعية المعرفة على R: $\frac{x}{4},\left(\frac{x}{4}\right)^2,\cdots,\left(\frac{x}{4}\right)^n,\cdots$ يقابلها السلسلة التابعية:

$$\frac{x}{4}+\left(\frac{x}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x}{4}\right)^n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n$$

مثال (13):

السلاسل التالية ، هي سلاسل تابعية:

-1 $x+\frac{x^2}{2^3}+\frac{x^3}{3^3}+\ \ldots+\frac{x^n}{n^3}+\ \ldots;\ x\in R$

-2 $(1-x)+x(1-x)+x^2(1-x)+\ \ldots+x^{n-1}(1-x)+\cdots;x\in$

-3 $\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ \ldots+\frac{\cos nx}{n^2}+\ \ldots\quad ;\ x\in R$

لدراسة تقارب أو تباعد السلسلة التابعية: $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ ندرس تقارب أو تباعد متتالية المجاميع الجزئية لها، والتي نرمز لها عادة بـ $\{S_n(x)\}$ وتعرف بالشكل:

لتكن السلسلة التابعية: $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$، وإذا كان:

$S_1(x) = f_1(x)$
$S_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$
$S_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$

$$\vdots$$

$$\boxed{S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots\ldots\ldots + f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \;\; ; \;\; x \in I \subseteq R}$$

نسمي **عادة $S_n(x)$ بالمجموع الجزئي النوني للسلسلة التابعية** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

لتكن النقطة a من I، عندما نقول: إن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة في النقطة a فإن ذلك يكافئ قولنا: إن متتالية المجاميع الجزئية لها $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ متقاربة في النقطة a أيضاً، كما أن القول: إن المتتالية العددية $\{S_n(a)\}$ متقاربة ويكافئ قولنا إن السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ متقاربة أيضاً.

- بالعودة إلى متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n(x)\}$ للسلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ نقول عن هذه المتتالية: إنها متقاربة في منطقة (مجال) معينة إذا كانت هذه المتتالية متقاربة لمتتالية عددية لأجل كل قيمة لـ x من هذه المنطقة.

وإذا كانت المتتالية $\{S_n\}$ متقاربة من أجل كل قيمة عددية لـ x من منطقة التقارب، كمتتالية عددية من نهاية معينة، فإن قيمة هذه النهاية تتعلق بالنقطة x المأخوذة من منطقة التقارب، لهذا يمكننا القول: إن لمتتالية المجاميع الجزئية $\{S_n(x)\}$ نهاية، ونرمز لهذه النهاية عادة بـ $S(x)$ وهي عبارة عن تابع لـ x، أي:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)}$$

بعض المراجع الأجنبية، يسمي التابع $S(x)$ بالتابع الحدي لمتتالية المجاميع الجزئية $\{S_n(x)\}$.

إذا كانت السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة عند النقطة a من I، فإننا نسمي a **بنقطة تقارب** هذه السلسلة، خلافاً لذلك ندعوها **بنقطة تباعد** لهذه السلسلة.

نسمي مجموعة نقاط تقارب السلسلة التابعية السابقة جميعها بـ **منطقة (أو مجال) تقارب السلسلة** ونرمز لهذه المنطقة بـ D، لاحظ أن $D \subseteq I$. ونقول عن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ إنها متقاربة على $I \subseteq R$ (أو في $I \subseteq R$)، إذا كانت جميع نقاط هذه المجموعة (مجال) تنتمي إلى منطقة تقارب السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$، أي إذا كان $I \subseteq D$.

ملاحظة (6):

بما أن تقارب (أو تباعد) السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ على المنطقة D يكافئ تقارب (أو تباعد) السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ حيث $\forall\, a \in D$، وبالتالي، بالإمكان الاستفادة من معايير التقارب للسلاسل العددية الواردة في الفصل التمهيدي السابق، والأمثلة التالية توضح ذلك:

مثال (14):

لتكن السلسلة التابعية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

والمطلوب هل النقاط $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 2$ نقاط تقارب للسلسلة، ثم حدد مجال تقاربها، ثم احسب مجموعها.

الحل:

السلسلة المفروضة متقاربة في النقطة $a_1 = \frac{1}{2}$، لأنه لو عوضنا في السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ كل x بـ $\frac{1}{2}$ لحصلنا على السلسلة العددية:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots$$

$$Or\ \ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

وهي سلسلة عددية متقاربة؛ لأنها سلسلة هندسية حدها الأول $a = 1$ وأساسها $q = \frac{1}{2}$ وبما أن $q < 1$ فهي متقاربة.

أما في النقطة $a_2 = 2$، السلسلة المفروضة متباعدة في النقطة $a_2 = 2$ لأن السلسلة العددية: $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + \ldots$ متباعدة.

أما مجال تقارب السلسلة المفروضة فهو المجال $]-1,1[$، لأنه من أجل نقطة $a \in]-1,1[$ نحصل على السلسلة العددية $1 + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots$ وهي سلسلة هندسية أساسها $|q| = |a| < 1$، وبالتالي فهي متقاربة ضمن المجال السابق. أما من أجل $|a| \geq 1$ فالسلسلة متباعدة.

إن مجموع السلسلة التابعية المفروضة هو:

$$S(x) = \frac{1}{1-x} \quad ; \quad x \in]-1,1[$$

لأنها سلسلة هندسية أساسها $q = x$.

مثال (15):

حدد منطقة تقارب السلسلة التابعية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$$

الحل:

السلسلة المدروسة هي سلسلة هندسية أساسها $q = \frac{x-1}{x+1}$ ونعلم أن الشرط اللازم والكافي لتقاربها هو $|q| < 1$، أي إن $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1$ أو $-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1$، **فإذا كان $x + 1 > 0$**، فإن: $-x - 1 < x - 1 < x + 1$ أي $-x - 1 < x - 1$ و $x - 1 < x < x + 1$ وبالتالي نجد أن المتراجحة الثانية محققة لأجل جميع قيم x من R، أما المتراجحة الأولى فهي محققة من أجل $x > 0$.

أما إذا كان $x + 1 < 0$، فإن: $-x - 1 > x - 1 > x + 1$، أي:

$$x - 1 < -x - 1 \text{ و } x + 1 < x - 1$$

وبالتالي فالمتراجحة الأولى مستحيلة، أما الثانية فهي محققة لأجل $x < 0$، لكن $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| > 1$ عندما $x < 0$ إذاً السلسلة المفروضة تتقارب عندما $x > 0$، أي إن منطقة تقارب هذه السلسلة هو المجال المفتوح $]0, \infty[$.

في حالة $x = 0$، سنحصل على السلسلة العددية: $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ وهي متباعدة.

مثال (16):

عين منطقة تقارب السلسلة التابعية التي حدها العام هو:

$$f_n(x) = 4^{2n}(3x+2)^{2n-1}$$

الحل:

بتطبيق اختبار النسبة (دالامبير) نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{4^{2n+2}(3x+2)^{2n+1}}{4^{2n}(3x+2)^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty} 4^2(3x+2)^2$$
$$= 4^2(3x+2)^2$$

فإذا كان: $4^2(3x+2)^2 < 1$، فإن: $|4(3x+2)| < 1$، أي أن:

$-1 < 4(3x+2) < 1$ ، أي: $-\frac{1}{4} < 3x+2 < \frac{1}{4}$ أو

$-\frac{1}{4} - 2 < 3x < \frac{1}{4} - 2$ أي أن: $-\frac{3}{4} < x < -\frac{7}{12}$.

وإذا كان $4^2(3x+2)^2 = 1$ ، فإن $x = -\frac{3}{4}$ أو $x = -\frac{7}{12}$.

عندما $x = -\frac{3}{4}$ (بالتعويض في السلسلة المعطاة) سنحصل على السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}.4$ وهي سلسلة عددية متباعدة.

وعندما $x = -\frac{7}{12}$ نحصل بعد التعويض في السلسلة المفروضة على السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} 1^{2n-1}.4$ وهي متباعدة أيضاً.

نستنتج مما سبق أن منطقة تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{2n}(3n+2)^{2n-1}$ هي المجال المفتوح $\left]-\frac{3}{4}, -\frac{7}{12}\right[$.

مثال (17):

لتكن السلسلة التابعية: $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$

والمطلوب: أوجد التابع الحدي لها، ثم ادرس تقاربها على $[0,1]$.

الحل: تكتب السلسلة المدروسة بالشكل المفصل:

$$x + x(x-1) + x^2(x-1) + \cdots + x^{n-1}(x-1) + \cdots$$

وبالتالي فإن الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لها هو:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= x + x(x-1) + x^2(x-1) + \cdots + x^{n-1}(x-1) \\ &= x + x^2 - x + \ldots + x^n - x^{n-1} = x^n \end{aligned}$$

وبالتالي فإن: $S_n(x) = x^n$ ، إن:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

إذاً التابع الحدي هو:

$$S(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

والسلسلة المعطاة متقاربة على المجال $[0,1]$.

تعريف الباقي النوني لسلسلة تابعية: إذا كانت السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة ومجموعها هو التابع الحدي $S(x)$، فإننا نسمي الفرق: $S(x) - S_n(x)$ بـ **الباقي النوني** للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ونرمز له عادة بـ $R_n(x)$.

من الواضح أن:

$$R_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+r}(x) + \cdots$$

كما أنه من أجل جميع النقاط x المنتمية إلى منطقة تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ يكون:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to 0}[S(x) - S_n(x)] = 0$$

وهذا يعني أن الباقي النوني $R_n(x)$ يسعى نحو الصفر عندما n تنتهي إلى ∞، وذلك مهما تكن قيمة x المنتمية إلى منطقة تقارب السلسلة التابعية المدروسة.

إن:

$$\boxed{S(x) = S_n(x) + R_n(x)}$$

تعريف التقارب المطلق $(\boldsymbol{Absolute\ Convergence})$

نقول عن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$: إنها متقاربة إطلاقاً في المنطقة (أو المجال) $I \subseteq R$، إذا كانت السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ متقاربة في كل نقطة من نقاط هذه المنطقة.

لتحديد منطقة التقارب المطلق للسلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تستخدم الاختبارات الواردة في السلاسل العددية، أي اختبارات المقارنة، اختبار النسبة، حيث ستكون النهاية (في الاختبارات) تابعة للمتحول الحقيقي x. والأمثلة التالية توضح ما سبق:

مثال (18):

ادرس التقارب المطلق للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ على R، ثم استنتج منطقة التقارب.

الحل:

إن المتراجحة $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ تتحقق مهما تكن x من R، وبالتالي السلسلة المفروضة (حسب اختبار المقارنة) متقاربة من أجل جميع قيم x من R لأن السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة دائماً. وبالتالي فإن منطقة (مجال) تقارب السلسلة هو $R =]-\infty, \infty[$.

مثال (19):

حدد منطقة (مجال) التقارب للسلسلة التي حدها العام هو:

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . 2^{n.x}$$

الحل:

بتطبيق اختبار الجذر النوني (اختبار كوشي) نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n . 2^{n.x}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) 2^x = 2^x$$

فإذا كانت $2^x < 1$ ، فإن $x < 0$ وبالتالي فالسلسلة المفروضة متقاربة.

أما إذا كان $2^x = 1$، فإن $x = 0$ ، وبالتالي سنحصل على السلسلة العددية المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$، وبالتالي منطقة التقارب هي: $]-\infty, 0[$.

(7-1) التقارب البسيط (النقطي) للسلاسل التابعية:

نقول عن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$: إنها متقاربة تقارباً بسيطاً (نقطياً) على المجال $I \subseteq R$ من المجموع $S(x)$، إذا تحقق الشرط التالي: من أجل كل $\varepsilon > 0$، ومن أجل كل x من I، يمكن إيجاد عدد طبيعي $N(\varepsilon, x)$ (مرتبط بـ x, ε معاً). بحيث تتحقق المتراجحة:

$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ وذلك من أجل جميع قيم $n \geq N(\varepsilon, x)$، أي تتحقق المتراجحة: $|R_n(x)| < \varepsilon$ من أجل جميع قيم $n \geq N(\varepsilon, x)$.

(8-1) التقارب المنتظم للسلاسل التابعية واختبار فاير شتراس:

$$\left(\begin{matrix}\boldsymbol{Convergence\ of\ regular\ Series\ of\ the\ function}\\ \boldsymbol{and\ Weierstrass`s\ Test}\end{matrix}\right)$$

إذا تقاربت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n(x)\}$ بانتظام إلى التابع $S(x)$ ضمن المجال $I \subseteq R$، فإن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تتقارب بانتظام ضمن نفس المجال I وغير ذلك نقول: إن السلسلة التابعية السابقة غير متقاربة بانتظام.

يمكن تعريف التقارب المنتظم للسلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ضمن المجال $I \subseteq R$ بالشكل التالي:

إذا كانت نهاية الباقي النوني $R_n(x)$ تساوي الصفر عندما n تسعى نحو اللانهاية عندها نقول: إن السلسلة التابعية السابقة متقاربة بانتظام ضمن المجال I لأن:

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2} + \cdots$$

بأخذ نهاية الطرفين، عندما n تسعى نحو اللانهاية نجد:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} S(x) - \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

وبما أن السلسلة التابعية متقاربة، وتتقارب للمجموع $S(x)$، أي إن:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

لنعرف الآن **التقارب المنتظم للسلسلة التابعية** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **بلغة العدد الحقيقي الموجب ε:**

نعلم أن السلسلة التابعية السابقة تتقارب إلى التابع $S(x)$ ضمن المجال $I \subseteq R$ إذا أمكن من أجل كل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ و $x \in I$ إيجاد عدد طبيعي $N(\varepsilon, x)$ وبحيث تتحقق المتراجحة: $|f_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ لكل $n > N(\varepsilon, x)$.

إذا كان العدد $N(\varepsilon, x)$ متعلقاً بالعدد الموجب ε فقط وغير متعلق بالعدد $x \in I$ قلنا: إن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال I.

ملاحظة (*7*):

إذا كانت السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة على مجال ما وليكن I من R، فإنه ليس من الضروري أن تكون هذه السلسلة متقاربة بانتظام على نفس المجال I.

ينتج من تعريف التقارب المنتظم السابق ما يلي:

1- إذا كانت السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال $I \subseteq R$ فهي حتماً متقاربة تقارباً بسيطاً (نقطياً) على I.

2- إذا كانت السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال I، عندئذٍ تكون متقاربة بانتظام على كل مجال J من I، أي $J \subset I$.

3- إذا كانت السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال I، عندها يتقارب الحد العام لهذه السلسلة إلى التابع الصفري $f(x) = 0$ بانتظام على المجال I، **تسمى هذه النتيجة بالشرط اللازم للتقارب المنتظم للسلسلة التابعية السابقة.**

4- إذا انتهى الحد العام للسلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ يتقارب إلى الصفر بشكل غير منتظم على I، و إذا كانت هذه السلسلة متقاربة على I، فإن تقاربها هذا لن يكون منتظماً على I.

مثال (*20*):

لتكن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ التي حدها العام هو:

$$f_n(x) = x^{n-1}(1-x)$$

والمطلوب: أوجد المجموع الجزئي النوني لها، ثم ادرس تقاربها على المجال $]-1,1[$ وحدد منطقة (مجال) تقاربها.

الحل:

إن المجموع الجزئي للسلسلة التابعية:

$$\sum f_n(x) = (1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \cdots$$

هو:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= (1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \cdots + x^{n-1}(1-x) \\ &= 1 - x + x - x^2 + \ldots + x^{n-1} - x^n = 1 - x^n \end{aligned}$$

فمن أجل $|x| < 1$ يسعى x^n إلى الصفر عندما n تسعى إلى اللانهاية، وبالتالي:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 1$$

إذاً السلسلة متقاربة من أجل $|x| < 1$.

أما إذا كان $|x| > 1$، فإن x^n تسعى نحو اللانهاية عندما n تسعى نحو اللانهاية، وبالتالي ليس لـ $S_n(x)$ نهاية محدودة، أي: إن السلسلة المفروضة متباعدة في هذه الحالة.

أما من أجل $x = 1$ فيكون $S_n(x) = 0$، وبالتالي:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0$$

أي إن السلسلة متقاربة في هذه الحالة.

أما من أجل $x = -1$ فيكون $S_n(x) = 1 - (-1)^n$، وبالتالي فإن النهاية $lim_{n\to\infty} S_n(x)$ تكون صفراً أو 2 وبالتالي فإن السلسلة متباعدة في هذه الحالة.

نستنتج مما سبق ان منطقة تقارب السلسلة التابعية المعطاة هي $]-1,1]$.

لندرس الآن التقارب المنتظم لها ، لدينا:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= S(x) - S_n(x) \quad ; \quad \forall \quad x \in]-1,1[\\ &= 1 - (1 - x^n) = x^n \quad ; \quad \forall \quad x \in]-1,1[\end{aligned}$$

ليكن $\varepsilon > 0$ عدداً معطى، لنفتش عن عدد طبيعي $N(\varepsilon)$ **(متعلق بـ ε فقط)** بحيث المتراجحة: $|R_n(x)| < \varepsilon$، من أجل $n \geq N(\varepsilon)$. أياً كانت $x \in]-1,1[$ لدينا:

$$|R_n(x)| < \varepsilon \iff |x^n| < \varepsilon \iff n\, ln|x| < ln\, \varepsilon \iff n > \frac{ln\, \varepsilon}{ln|x|}$$

نلاحظ أن العلاقة $\frac{ln\,\varepsilon}{ln|x|}$ مرتبطة بكلٍ من ε و x تسعى إلى اللانهاية عندما يسعى $|x|$ إلى العدد واحد. إذاً لا يمكننا إيجاد عدد طبيعي $N(\varepsilon)$ (المرتبط فقط بـ ε) بحيث تتحقق المتراجحة: $|R_n(x)| < \varepsilon$، وهذا يعني أن السلسلة التابعية المدروسة غير متقاربة بانتظام على المجال $]-1,1[$، وبالتالي فإن تقاربها على المجال $]-1,1[$ ليس منتظماً أيضاً.

لنستعرض الآن اختبارات التقارب المنتظم للسلاسل التابعية. ولنعرف قبل ذلك **التقارب المطلق بانتظام للسلاسل التابعية.**

تعريف:

نقول عن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ إنها متقاربة تقارباً مطلقاً بانتظام على المجال $I \subseteq R$ ، إذا كانت سلسلة قيمها المطلقة $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ متقاربة بانتظام على المجال I.

اختبار كوشي ($Test\ Cauchy$):

الشرط اللازم والكافي لتقارب السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تقارباً منتظماً على المجال $I \subseteq R$، هو أن يوجد من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$، عدد طبيعي $N(\varepsilon)$ بحيث إن:

$$m > n > N(\varepsilon)\ ; \text{ عندما يكون}$$
$$\left|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)\right| < \varepsilon\ ; \forall\, x \in I$$

مثال (21):

لتكن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^2)$ والمعرفة على $]0,1[$، أثبت أن تقاربها غير منتظم في المجال السابق، وذلك باستخدام اختبار كوشي.

الحل:

بفرض $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي معطى ولنفرض جدلاً أنه يوجد عدد طبيعي $N(\varepsilon)$ بحيث أنه من أجل كل $x \in]0,1[$ وكل $N(\varepsilon) < n < m$ يكون لدينا:

$$\left|\sum_{k=n}^{k=m} f_k(x)\right| = |x^n(1-x^2) + x^{n+1}(1-x^2) + \cdots + x^m(1-x^2)|$$
$$= |x^n + x^{n+1} - x^{m+1} - x^{m+2}| = |x|^n|1+x|.|1-x^{m-n+1}|$$
$$\leq x^n(1+x) < \varepsilon$$

والتي ينتج منها (باستخدام خواص اللوغاريتمات)

$$n < \frac{ln\,\varepsilon - ln(1+x)}{ln\,x} = N(\varepsilon, x)$$

وهذا يعني أن $N(\varepsilon)$ الذي فرضناه موجوداً هو في الحقيقية غير موجود لأن الطرف الأيمن من المتراجحة السابقة لا يمكن تقديره بمقدار أصغر منه ومستقل عن x على المجال $]0,1[$. إذاً حسب اختبار كوشي السلسلة المفروضة متقاربة تقارباً غير منتظم على المجال $]0,1[$.

عند تطبيق الاختبار السابق لدراسة التقارب المنتظم للسلاسل التابعية، ستظهر لنا بعض الصعوبات لذا وجدت اختبارات أخرى أسهل من اختبار كوشي ومنها اختبار فايرشتراس.

مبرهنة (8): اختبار فايرشتراس $Weierstrass`s\,Test$:

تتقارب السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ إطلاقاً وبانتظام على المجال $I \subseteq R$ ، إذا وجدت سلسلة عددية موجبة ومتقاربة مثل $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ محققة للعلاقة: $f_n(x) \le g_n$ مهما تكن $n \in N$ و $x \in I$.

البرهان:

بما ان السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ متقاربة لكل $n \in N$ ، فإنه بحسب المبرهنة: (تتقارب السلسلة العددية السابقة، إذا وفقط إذا، أمكن من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ إيجاد عدد صحيح موجب $N(\varepsilon)$ بحيث $|\sum_{k=n}^{m} g_n| < \varepsilon$،عندما يكون: $N(\varepsilon) < n \le m$)

فمن أجل أي عدد $\varepsilon > 0$، يوجد عدد طبيعي N بحيث يكون:

$$g_n + g_{n+1} + \cdots + g_m < \varepsilon$$

عندما يكون: $N < n \le m$.

نستنتج من ذلك أنه من أجل جميع قيم x من I يكون لدينا:

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| \le g_n + g_{n+1} + \cdots + g_m < \varepsilon$$

حيث $N < n < m$، وبحسب اختبار كوشي السابق، فإن السلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ متقاربة بانتظام على I.

مثال (22):

ادرس التقارب المنتظم للسلسلة التابعية: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ على المجال $[0,2\pi]$.

الحل:

إن السلسلة المدروسة متقاربة تقارباً منتظماً على المجال $[0,2\pi]$، وذلك لأن:

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$$

بما أن السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ موجبة ومتقاربة، فحسب اختبار فايرشتراس السابق تكون السلسلة التابعية المفروضة متقاربة بانتظام على $[0,2\pi]$.

مثال (23):

مستخدماً اختبار فايرشتراس، ادرس التقارب المنتظم للسلسلة التي حدها العام هو:

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$$

في المجال $[0,\infty[$.

الحل: لدينا:

$$|f_n(x)| = \left|\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}\right| \le \frac{1}{2^{n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

السلسلة العددية التي حدها العام $g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ هي سلسلة هندسية أساسها $r = \frac{1}{2}$، وبما أن $r < 1$، فهي متقاربة، فحسب اختبار فايرشتراس فإن السلسلة التابعية المفروضة متقاربة على $[0,\infty[$.

إن اختبار فايرشتراس قد لا يكون قابلاً للتطبيق في دراسة التقارب المنتظم لسلسلة تابعية، وذلك عندما تكون السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

الاختبار التالي والمسمى **اختبار آبل** يسمح لنا بدراسة التقارب المنتظم لسلسلة توابع.

لتكن $\{f_n(x)\}$ و $\{g_n(x)\}$ متتاليتين تابعيتين معرفتين على نفس المجال $I \subseteq R$ ولنشكل منهما سلسلة التوابع الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).\, g_n(x) = f_1(x).\, g_1(x) + f_2(x).\, g_2(x) + \cdots + ;\ x \in I \subseteq R \cdots (*)$$

مبرهنة (9) اختبار آبل لسلاسل التوابع $Abel\ Test$:

لتكن لدينا سلسلة التوابع ذات الشكل $(*)$ السابق، إذا كانت سلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال I، وإذا كانت متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ مضطردة ومحدودة من أجل كل n من N وكل x من I، فإن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).\, g_n(x)$ تكون متقاربة بانتظام على المجال I.

مثال (24):

لتكن سلسلة التوابع: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n.arc\ tg\ nx}{n\left(\frac{1}{x^2}+1+x^2\right)^n}$، حيث $x \in]0,1[$ ادرس التقارب المنتظم لهذه السلسلة.

الحل:

قبل البدء بحل هذا المثال، نقدم الملاحظة التالية: يبرهن بطريقة الاستقراء الرياضي أنه من أجل كل $x > 0$ يتحقق ما يلي:

$$x^n + x^{n-2} + \cdots + x^3 + x + 1 + x^{-1} + x^{-3} + \cdots + x^{-(n-2)} + x^{-n} \geq n+1$$

وذلك من أجل القيم الزوجية لـ n، أما من أجل القيم الفردية لـ n، فإنه تتحقق المتراجحة:

$$x^n + x^{n-2} + \cdots + x^4 + x^2 + 1 + x^{-2} + x^{-4} + \cdots + x^{-(n-2)} + x^{-n} \geq n+1$$

مما سبق يكون لدينا $\frac{1}{x^2}+1+x^2 \geq 3\ ;\ \forall\, x \in]0,\infty[$، لنبرهن الآن أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n\left(\frac{1}{x^2}+1+x^2\right)^n}$ متقاربة بانتظام على $]0,\infty[$.

بما أن $\frac{1}{x^2}+1+x^2 \geq 3$ لكل x من $]0,\infty[$ فيكون لدينا:

$$\frac{e^n}{n\left(\frac{1}{x^2}+1+x^2\right)^n} \leq \frac{e^n}{n3^n}$$

بما أن السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{e}{3}\right)^n$ متقاربة (حسب اختبار النسبة مثلاً) إذاً السلسلة التابعية المعطاة متقاربة بانتظام على $]0,\infty[$، وذلك حسب اختبار فايرشتراس.

من جهة ثانية، لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ المعرفة من خلال $f_n(x) = arctg\ nx$، حيث $x \in]0,1[$ متزايدة تماماً من أجل كل n من N وكل x من $]0,1[$، وكذلك محدودة

(بل ومحدودة بانتظام) على $]0,1[$ بالعدد $\frac{\pi}{2}$، إذاً شروط اختبار آبل لسلاسل التوابع محققة، إذاً سلسلة التوابع المعطاة متقاربة بانتظام على المجال $]0,1[$.

لنقدم الآن بعض أهم خواص السلاسل التابعية المتقاربة بانتظام، وذلك من خلال المبرهنات التالية:

مبرهنة (10):

إذا كانت السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$، التي حدودها توابع مستمرة على المجال $I \subseteq R$ ، متقاربة بانتظام على المجال I، فإن مجموعها $S(x)$ هو تابع مستمر على نفس المجال I.

البرهان:

بما أن متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n(x)\}$ للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ هي متتالية من التوابع المستمرة على المجال I من R ، لأن مجموع عدد منته من التوابع المستمرة على المجال I هو تابع مستمر على نفس المجال I، ونقصد هنا $S_n(x)$، وبالتالي حسب الفرض، المتتالية $S_n(x)$ تتقارب بإنتظام على المجال I وحسب المبرهنة (1) فإن التابع $S(x)$ التي تتقارب اليه المتتالية $S_n(x)$ على I، والذي يمثل مجموع السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ هو تابع مستمر على المجال $I \subseteq R$ وهو المطلوب.

ملاحظة (8):

إن عكس المبرهنة السابقة غير صحيح بشكل عام، أي إن شرط التقارب المنتظم لسلسلة توابع مستمرة هو شرط كافٍ وغير لازم؛ لكي يكون مجموع هذه للسلسلة التابعية تابعاً مستمراً.

المثال التالي يوضح هذه الملاحظة:

مثال (25):

ادرس على المجال $[0,1]$ تقارب السلسلة:

$$(xe^{-x}) + (2xe^{-2x} - xe^{-x}) + \cdots + nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x} + \cdots$$

الحل:

$$S_n(x) = (xe^{-x}) + (2xe^{-2x} - xe^{-x}) + \cdots + nxe^{-nx} - (n-2)xe^{-(n-2)x}$$

أو: $S_n(x) = nxe^{-nx}$

وبالتالي:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{e^{nx}} = 0$$

وهذا يعني أن السلسلة التابعية المفروضة متقاربة، ومجموعها $S(x)$ هو تابع مستمر على $[0,1]$، لندرس الآن تقاربها المنتظم (حسب اختبار فايرشتراس للمتتاليات التابعية) على $[0,1]$.

بما أن

$$a_n = Sup\,|S_n(x) - S(x)| \;\;;\;\; x \in [0,1]$$
$$= \sup_{x\in[0,1]} |nxe^{-nx} - 0| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{nx}{e^{nx}}\right| = \frac{1}{e}$$

بما أن $lim_{n\to\infty}\, a_n \neq 0$، فإن متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n(x)\}$ غير متقاربة بانتظام على المجال $[0,1]$ من التابع $S(x)$، وهذا يعني أن السلسلة المدروسة غير متقاربة بانتظام على $[0,1]$.

– المبرهنتان التاليتان تفيدنا في آلية اشتقاق وتكامل سلاسل تابعية، كما في المتتاليات التابعية.

مبرهنة (11):

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ سلسلة تابعية، حدودها توابع معرفة و مستمرة على المجال $I \subseteq R$، ولنفرض ان السلسلة السابقة متقاربة بانتظام من التابع $S(x)$ على I، عندئذٍ التابع $S(x)$ قابل للمكاملة على I وتتحقق أيضاً العلاقة:

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx \;\;;\;\; S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cdots (*)$$

البرهان:

بما أن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على $I \subseteq R$، فإن متتالية المجاميع الجزئية لها $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على I، وحسب المبرهنة (8) يكون f قابلاً للمكاملة على المجال I (حيث إن السلسلة التابعية متقاربة بانتظام من التابع f)، ويكون من أجل كل $a < t \leq b$ ما يلي:

$$\int_a^t f(x)dx = \int_a^t \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^t \left(\sum_{k=1}^{n} S_k(x)\right)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^t f_k(x)\,dx \quad \cdots (**)$$

بملاحظة أنه يمكن اعتبار $\sum_{k=1}^{n}\int_a^t f_k(x)dx$ المجموع الجزئي النوني للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^t f_n(x)dx$ ومن وجود الطرف الأيسر من العلاقة $(**)$ ينتج لدينا

$$\int_a^t f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^t f_n(x)dx$$

مثال (26):

لتكن السلسلة التابعية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2x\left(\frac{n^2}{e^{n^2x^2}} - \frac{(n-1)}{e^{(n-1)^2x^2}}\right)$$

على المجال $I=[0,1]$، هل تتحقق العلاقة:

$$\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2x\left(\frac{n^2}{e^{n^2x^2}} - \frac{(n-1)}{e^{(n-1)^2x^2}}\right)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \;\; ; \;\; x\in[0,1]$$

الحل:

نلاحظ أولاً أن مجموع سلسلة التوابع هذه يساوي الصفر على $[0,1]$، أي:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0$$

ومن ثم فإن:

$$\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2x\left(\frac{n^2}{e^{n^2x^2}} - \frac{(n-1)}{e^{(n-1)^2x^2}}\right)\right)dx = \int_0^1 S(x)dx = 0$$

من ناحية ثانية، لدينا:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 f_k(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1\sum_{k=1}^{n} f_k(x)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 2xn^2e^{-n^2x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\left(1-e^{-n^2}\right) = 1$$

وهذا يعني أن المساواة الموجودة في نص المسألة غير محققة.

ملاحظة (9):

إن شرط التقارب المنتظم لسلسلة توابع مستمرة على مجال مغلق $[a,b]$ هو شرط كاف لتطبيق العلاقة $(*)$، ولكنه غير لازم. والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (27):

لتكن سلسلة التوابع المستمرة $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$ على المجال $[0,1]$ وجدنا سابقاً في التمرين المحلول (10) في القسم العملي أن هذه السلسلة متقاربة على $[0,1]$ وتقاربها ليس منتظماً على $[0,1]$، ومجموعها $S(x)=0$ على $[0,1]$.

يمكن مكاملة هذه السلسلة حداً حداً على $[0,1]$، وذلك لأن:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right)dx=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\int_0^1\left(\frac{kn}{1+k^2x^2}-\frac{(k-1)x}{1+(k-1)^2x^2}\right)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kn}{1+k^2x^2}-\frac{(k-1)x}{1+(k-1)^2x^2}\right)\right]dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{ln(1+n^2)}{n}=0=\int_0^1 S(x)dx$$

مبرهنة (12):

بفرض $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ سلسلة توابع مستمرة على المجال $I=[a,b]$، وإذا كانت السلسلة السابقة متقاربة من التابع f على I، ولنفرض أن التوابع f_n تملك مشتقات f_n' على I، لكل $n\in N$، وإذا كانت سلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$ متقاربة بانتظام على I، عندئذٍ يكون التابع f قابلاً للاشتقاق على I وتتحقق العلاقة أيضاً:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right)'=f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$$

البرهان:

لنفرض أن سلسلة المشتقات $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ متقاربة من التابع g على I بحسب المبرهنة السابقة والمبرهنة (9)، التابع g قابل للمكاملة على المجال $[a,x]$، حيث $a < x \leq b$، ومن الفرض أيضاً يكون لدينا:

$$\int_a^x g(t)dt = \int_a^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)\right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n(x) - f_n(a)\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) = f(x) - f(a)$$

وهذا يعني أن التابع f هو التابع الأصلي للتابع g على I، وبالتالي يكون التابع g قابل للاشتقاق على I، ويكون لدينا:

$$f'(x) = g(x) \quad ; \quad \forall\, x \in [a,b]$$

وهذا يؤدي بدوره إلى أن:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

ملاحظة (10):

إذا كانت سلسلة التوابع المستمرة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال $I = [a,b]$، فليس من الضروري أن تكون سلسلة المشتقات لها $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ (في حال وجودها) متقاربة بانتظام.

مثال (28):

لتكن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^4 x}{n^2} \;;\; x \in R$ (حدودها توابع مستمرة على R) والمتقاربة بانتظام على R، إن سلسلة المشتقات لها هي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2 \cos n^4 x \quad ; \quad x \in R$$

وهي سلسلة متباعدة من أجل جميع القيم $x = \frac{k\pi}{n^4}$، حيث k عدداً صحيحاً.

ملاحظة (11):

إن شرط التقارب المنتظم لسلسلة المشتقات $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ الوارد في النظرية السابقة هو شرط كافٍ وغير لازم لتطبيق المبرهنة السابقة.

والمثال التالي يوضح هذه الملاحظة:

مثال (29):

لتكن سلسلة التوابع المستمرة على $I=[0,1]$:

$$\frac{1}{2}ln(1+x^2)+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}ln(1+n^2x^2)-\frac{1}{2(n-1)}ln(1+(n-1)^2.x^2)\right]$$

والمطلوب: أثبت أن $S(x)=0$ ، ثم أثبت أن $S'(x)=g(x)=0$ حيث إن سلسلة التوابع المشتقة $\sum_{n=1}^{\infty}f'_n(x)$ متقاربة من التابع $g(x)$ على I.

الحل: إن السلسلة المدروسة متقاربة على $[0,1]$ ومجموعها $S(x)=0$ على المجال $[0,1]$ لأن:

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}ln(1+x^2)+\left(\frac{1}{4}ln(1+2^2x^2)-\frac{1}{2}ln(1+x^2)\right)\right)+$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{2n}ln(1+n^2x^2)-\frac{1}{2(n-1)}ln(1+(n-1)^2.x^2)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}ln(1+n^2x^2)=0\ \ ;\ \ \forall\ x\in[0,1]$$

من ناحية ثانية، إن سلسلة المشتقات هي:

$$\frac{x}{1+x^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right)$$

وهي نفس السلسلة التابعية الواردة في المثال (27)، وهذه السلسلة كما بينا سابقاً انها متقاربة في $[0,1]$ ولكن تقاربها غير منتظم على $[0,1]$، ومجموعها هو التابع $g(x)=0$ على $[0,1]$، لأن:

$$S'(x)=0=g(x)\ \ ;\ \ \forall\ x\in[0,1]$$

(9-1) بعض العمليات الجبرية على السلاسل التابعية:

تماماً كما في السلاسل العددية نقدم أهم العمليات الجبرية على السلاسل التابعية:

1- إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ و $\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$ سلسلتي توابع معرفتين على نفس المجال $I\subseteq R$، وإذا كانتا متقاربتين (أو بانتظام) على المجال I من التابعين f و g على الترتيب، عندئذٍ يتحقق ما يلي:

a) السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda f_n(x)$ متقاربة (أو بإنتظام) من التابع λf على I، حيث $\lambda \in R^*$ بالإضافة لذلك تتحقق المساواة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big(\lambda f_n(x)\big) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lambda . f(x)$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\big(f_n(x) \pm g_n(x)\big)$ متقاربة (أو بانتظام من التابع $f \pm g$) على I ويكون لدينا:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f_n + g_n)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \pm \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$
$$= f(x) \pm g(x) \;\; ; \;\; x \in I$$

2- لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ سلسلتين تابعيتين معرفتين على نفس المجال I وإذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ و $\sum_{n=1}^{\infty}|g_n(x)|$ متقاربة (أو متقاربة بانتظام) على المجال I من التابعين f_1 و g_1 على الترتيب عندئذٍ يتحقق مايلي:

a) السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda f_n(x)|$ متقاربة (أو متقاربة بانتظام) على I من التابع λf_1 ، من أجل كل λ من R^* ، ويكون لدينا من أجل كل x من I:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda f_n(x)| = |\lambda| \sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)| = |\lambda| . f_1(x)$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x) \pm g_n(x)|$ متقاربة (أو متقاربة بانتظام) من التابع $f_1 \pm g_1$ على I ، بالإضافة لذلك يكون من أجل كل x من I:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x) \pm g_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)| \pm \sum_{n=1}^{\infty}|g_n(x)| = f_1 + g_1$$

تمرينات محلولة

{**1**} أوجد تابع النهاية لكل من المتتاليات التابعية وذلك في الحالات التالية:

1- $\{f_n(x)\} = \frac{x^2}{n} \quad ; \quad x \in [0, \infty[$

2- $\{f_n(x)\} = \frac{1}{n} \sin x \quad ; \quad x \in [0, \pi]$

3- $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{1}{x^{2n}+1}\right\} \quad ; \quad x \in [0,1]$

الحل:

1- إن المتتالية $\left\{\frac{x^2}{n}\right\}$ متقاربة نقطياً من التابع الصفري أي: $f(x) = 0; \forall \ x \in [0, \infty[$، لأن:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n} = 0 \quad ; \quad \forall \, x \in]0, \infty[$$

2- إن تابع النهاية للمتتالية $\left\{\frac{1}{n} \sin x\right\}$ هو التابع الصفري ، أي ، $f(x) = 0$ ، وذلك لأن:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{n} = 0 \quad ; \quad \forall \ x \in [0, \pi]$$

(جداء متتالية محدودة في متتالية لامتناهية في الصغر هي متتالية لامتناهية في الصغر)

3- إن المتتالية $\left\{\frac{1}{x^{2n}+1}\right\}$ تتقارب نقطياً من التابع $f(x)$ التالي:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x^{2n}+1}\right) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2} & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

{**2**} ادرس التقارب المنتظم للمتتاليات التابعية التالية:

1- $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{1}{n} \sin x\right\} \quad ; \quad x \in [0, \pi]$

2- $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{1}{nx^2}\right\} \quad ; \quad x \in [1, \infty[$

3- $\{f_n(x)\} = \left\{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\right\} \quad ; \quad x \in]-\infty, \infty[$

الحل:

1- وجدنا في المثال السابق أن تابع النهاية للمتتالية $\left\{\frac{1}{n} \sin x\right\}$هو التابع الصفري، أي: $f(x) = lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{n} = 0$، لكل $x \in [0, \pi]$. لنبين الآن فيما إذا كان هذا التقارب منتظماً أم لا. نعلم أن $\frac{\sin x}{n} \le \frac{1}{n}$، لكل $x \in [0, \pi]$، ليكن $0 < \varepsilon$ عدداً معطى ، نأخذ $N(\varepsilon) = \left|\frac{1}{\varepsilon}\right|$ فنجد:

$$\forall\, n > N(\varepsilon) = \left|\frac{1}{\varepsilon}\right| \;\Rightarrow\; \left|\frac{\sin x}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

وذلك من أجل كل $x \in [0, \pi]$، وهذا يعني أن متتالية التوابع المعطاة في (1) متقاربة بانتظام من التابع الصفري f على المجال $[0, \pi]$.

2- لنوجد أولاً تابع النهاية للمتتالية التابعية: $\left\{\frac{1}{nx^2}\right\}$ في المجال $[1, \infty[$، إن:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx^2} = 0$$

إذاً تابع النهاية للمتتالية المعطاة هو التابع الصفري، أي:

$$f(x) = 0 \;\;;\;\; \forall\; x \in [1, \infty[$$

لنبين الآن فيما إذا كان هذا التقارب تقارب منتظم أم لا؟

ليكن $\varepsilon > 0$ عدداً معطى ، ولنوجد $N(\varepsilon) \in N$ بحيث $N(\varepsilon) < n$:

$$\forall\, n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{nx^2} - 0\right| = \frac{1}{nx^2} < \varepsilon$$

وبما أن $\frac{1}{n} > \frac{1}{nx^2}$، وذلك لكل $x \in [1, \infty[$، ومنه بوضع $\frac{1}{n} < \varepsilon$ يكون لدينا: من أجل كل $x \in [1, \infty[$ المتراجحة الآتية محققة $\frac{1}{nx^2} < \varepsilon$، إذاً بأخذ $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ يتم المطلوب، إذاً المتتالية التابعية $\left\{\frac{1}{nx^2}\right\}$ متقاربة بانتظام من التابع الصفري على المجال $[1, \infty[$.

3- نلاحظ أولاً ، أن:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = |x| \;\;;\;\; \forall\; x \in]-\infty, \infty[$$

أي إن متتالية التوابع $\left\{\sqrt{x^2 + 1/n}\right\}$ تتقارب من التابع $f(x) = |x|$، لكل $x \in]-\infty, \infty[$ لندرس الآن التقارب المنتظم:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt{x^2 + 1/n} - |x|\right| = \left|\frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + 1/n} + |x|}\right|$$

$$= \left|\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + 1/n} + |x|}\right| \leq \left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right| \sqrt{\frac{1}{n}} \;\;;\;\; \forall\, x \in]-\infty, \infty[$$

ليكن $\varepsilon > 0$ عدداً مفروضاً، فإذا وضعنا $\sqrt{\frac{1}{n}} < \varepsilon$ أو $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$، فإن المتراجحة $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ تتحقق من أجل جميع قيم $x \in]-\infty, \infty[$، لنختر العدد

الطبيعي $N(\varepsilon)$ بحيث $N(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}$، أي إن $n>N(\varepsilon)$، وبالتالي شرط التقارب المنتظم قد تحقق من التابع $f(x)=|x|$ في المجال $]-\infty,\infty[$.

{**3**} أثبت أن المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}=\left\{\frac{1}{x^{2n}+1}\right\}$ لا تتقارب بانتظام من التابع $f(x)$ في المجال $I=[0,1]$

الحل:

وجدنا في التمرين (1) أن

$$f(x)=\begin{cases}1 & ; \quad 0\le x<1\\ \dfrac{1}{2} & ; \qquad x=1\end{cases}$$

وبما أن التابع السابق $f(x)$ ، والذي يمثل نهاية متتالية التوابع المفروضة غير مستمر في النقطة $x=1$ فهو غير مستمر على المجال I فحسب النتيجة (2) (من قسم النظري) تقارب المتتالية المدروسة من التابع $f(x)$ ليس منتظماً على المجال $[0,1]$.

{**4**} لتكن المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}=\{nx^n\}\ ;\ x\in I=[0,1]$، أثبت صحة العلاقة:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx\neq\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\ dx$$

الحل: لدينا أولاً:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}nx^n=0\ \ ;\ \ \forall\ \ x\in[0,1[$$

أي إن تابع النهاية هو $f(x)=0$ ، وبالتالي فإن:

$$\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 0.\,dx=0\ \cdots(1)$$

من ناحية ثانية ، لدينا:

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1 nx^n.\,dx=\frac{n}{n+1}[x^{n+1}]_0^1=\frac{n}{n+1}$$

ومنه:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\ \cdots(2)$$

من (1) و (2) نجد تحقق المساواة المعطاة.

{**5**} ليكن لدينا الحد العام للمتتالية التابعية $\{S_n(x)\}$:

$$S_n(x) = n.x.e^{-nx^2} \; ; \; n \in N , x \in [0,1]$$

بين فيما إذا كانت المساواة التالية صحيحة:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,dx = \int_0^1 S(x)\,dx$$

الحل:

$$\int_0^1 S_n(x)\,dx = \int_0^1 nx\,e^{-nx^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-nx^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-n})$$

وبالتالي:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-e^{-n}) = \frac{1}{2}$$

وبما أن:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(nxe^{-nx^2}\right) = 0 \; ; \; x \in [0,1] \; or \; x = 0$$

ومنه يكون:

$$\int_0^1 S(x)\,dx = 0$$

نستنتج مما سبق أن:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,dx = \int_0^1 S(x)\,dx$$

{**6**} حدد منطقة (مجال) تقارب السلسلة التابعية:

$$\frac{1}{3} + \frac{x}{2.3^2} + \frac{x^2}{3.3^3} + \cdots$$

الحل:

الحد العام للسلسلة المدروسة هو: $f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n.3^n}$، باستخدام اختبار النسبة (دالامبير)

$$f_{n+1} = \frac{x^{(n+1)-1}}{(n+1).3^{n+1}} = \frac{x^n}{(n+1).3^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{(n+1).3^{n+1}}.\frac{n.3^n}{x^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)}|x| = \frac{|x|}{3}$$

تكون السلسلة المعطاة متقاربة إذا كان $\frac{|x|}{3} < 1$، ومتباعدة إذا كان $\frac{|x|}{3} > 1$، أما إذا كلن $\frac{x}{3} = 1$ أي $x = \pm 3$ فالاختبار يفشل.

إذاً لدينا $\frac{|x|}{3} < 1$ ومنه $|x| < 3$ أي أن $-3 \leq x \leq +3$

إذا كان: $x = 3$، فالسلسلة تأخذ الشكل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ وهي سلسلة متباعدة (توافيقة). أما إذا كان: $x = -3$ فالسلسلة تأخذ الشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

وحسب اختبار لابيبتز السلسلة العددية الأخيرة متقاربة، وبالتالي إن منطقة (مجال) تقارب السلسلة المعطاة هو: $-3 \leq x < 3$

{**7**} برهن أن منطقة تقارب السلسلة:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots$$

هو مجموعة الأعداد الحقيقية R .

الحل:

الحد العام للسلسلة المذكورة هو: $f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

بتطبيق اختبار النسبة، نلاحظ أن:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^n (n-1)!}{n!\,(x^{n-1})}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

وبالتالي فالسلسلة المدروسة متقاربة مهما تكن قيمة x، إذاً منطقة تقارب السلسلة المعطاة هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.

{**8**} لتكن السلسلة التابعية: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$، أثبت أنها متقاربة تقارباً منتظماً لكنه غير مطلق على المجال $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

الحل:

لكي نطبق اختبار ليبتتز عليها، نعتبر أن x نقطة ثابتة في المجال I، وبالتالي فحسب اختبار ليبتتز ستكون متقاربة. من ناحية ثانية لدينا:

$$|R_n(x)| < \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \quad ; \ \forall \ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

بما أن $\frac{1}{n+1}$ غير متعلق بـ x، فمن أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ يمكن إيجاد عدد طبيعي وليكن $N(\varepsilon)$ (غير مرتبط بـ x) بحيث تتحقق المتراجحة:

$$|R_n(x)| < \varepsilon \ \ \forall\, N(\varepsilon) \leq n\,, \forall\, x \in I$$

وهذا يعني أن السلسلة المدروسة بانتظام على I.

بتعويض $x = 1$ في السلسلة المعطاة سنحصل على السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ وهي متقاربة تقارباً شرطياً، إذاً السلسلة المعطاة غير متقاربة بالإطلاق على I.

{**9**} لتكن السلسلة التابعية: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[2n+1]{x} - \sqrt[2n-1]{x}\right)$ حدد مجموع هذه السلسلة، وماذا تستنتج بالنسبة للاستمرار على R.

الحل:

تكتب السلسلة بالشكل:

$$\left(x^{1/3} - x\right) + \left(x^{1/5} - x^{1/3}\right) + \left(x^{1/7} - x^{1/5}\right) + \cdots + \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right) + \cdots$$

لنشكل المجموع الجزئي النوني لها:

$$S_n(x) = x^{\frac{1}{2n+1}} - x$$

وبالتالي مجموعها هو:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x\right)$$

فعندما $x > 0$ يكون لدينا:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x\right) = 1 - x$$

وعندما $x < 0$ يكون:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty}\left[-|x|^{\frac{1}{2n+1}} - x\right] = -1 - x$$

وفي حالة $x = 0$ ، يكون لدينا: $S(x) = 0$.

وبالتالي تكون السلسلة المفروضة متقاربة، ومجموعها هو التابع:

$$S(x) = \begin{cases} 1 - x & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ -1 - x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

وهو تابع مستمر على R، كما أن حدود السلسلة المفروضة هو توابع مستمرة على R.

{**10**} لتكن السلسلة التابعية التي حدودها توابع مستمرة على المجال $[0,1]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2.x^2}\right)$$

المطلوب أثبت أن التابع $S(x)$ مستمر في $[0,1]$، وهي غير متقاربة بانتظام على $[0,1]$.

الحل: لدينا

$$S_n(x)=\left(\frac{x}{1+x^2}-0\right)+\left(\frac{2x}{1+4x^2}-\frac{x}{1+x^2}\right)+\cdots+\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2.x^2}\right)=\frac{nx}{1+n^2x^2}\ ;\ x\in[0,1]$$

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0\ ;\ \forall x\in[0,1]$$

إن التابع $S(x)$ مستمر على المجال $[0,1]$. لنثبت أن تقارب السلسلة المدروسة غير منتظم على $[0,1]$. من أجل ذلك نفرض جدلاً أن السلسلة المعطاة متقاربة بانتظام على $[0,1]$، فهذا يعني أن متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على $[0,1]$ من التابع $S(x)=0$، حيث $x\in[0,1]$، وهذا يعني أنه من أجل العدد الحقيقي الموجب $\varepsilon=\frac{1}{2}$، يوجد عدد طبيعي $N(\varepsilon)$ بحيث يكون: $\frac{nx}{1+n^2x^2}<\frac{1}{2}$ عندما $n\geq N(\varepsilon)$، لكل $x\in[0,1]$، فإذا كان $n>N(\varepsilon)$ فإن $\frac{1}{n}\in[0,1]$ أي أن: $\frac{n\left(\frac{1}{n}\right)}{1+n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2}<\frac{1}{2}$ أي أن $\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$، وهذا مستحيل، إذاً السلسلة التابعية المدروسة متقاربة لكن ليس بانتظام على $[0,1]$.

{11} ادرس التقارب المطلق للسلسلة التي حدها العام: $f_n(x)=\frac{2^n.n!}{n^n}.x^{2n}$

الحل:

لدراسة التقارب المطلق للسلسلة المعطاة نطبق اختبار النسبة حيث:

$$f_{n+1}=\frac{2^{n+1}.(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}x^{2(n+1)}$$

وبالتالي:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}.(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}.x^{2n+2}\frac{n^n}{2^n.n!\,x^{2n}}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2x^2.n^n}{(n+1)^n}=2x^2.\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=2x^2.\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2x^2}{e}$$

تتقارب السلسلة التابعية المعطاة بإطلاق إذا كان: $\frac{2}{e}x^2<1$ أي $x^2<\frac{e}{2}$ وهذا يعني:

$$|x|<\sqrt{\frac{e}{2}}$$

{12} لتكن السلسلة التابعية: $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ المعرفة على $I=[0,\pi]$ والمطلوب:

1- أثبت أن: $\int_0^{\pi}f_n(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^4}$

2- أوجد $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}\right)'$ في النقط: $x=\pi\ ,\ x=\frac{\pi}{2}\ ,\ x=0$.

الحل:

1- لكل $x\in I$ يكون لدينا:

$$|f_n(x)|=\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right|\leq\frac{1}{n^3}$$

فحسب اختبار فاير شتراس تكون السلسلة التابعية المعطاة متقاربة بانتظام على $[0,\pi]$ ، وبالتالي يمكن مكاملتها حداً حداً أي:

$$\int_0^k f_n(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n^3}\,dx=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^4}-\frac{1}{n^4}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^4}=\sum_{n-0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^4}$$

2- إن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ هي سلسلة المشتقات للسلسلة التابعية المفروضة ، وهذه السلسلة متقاربة بانتظام على $[0,\pi]$ ، وذلك لأن:

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}\ ;\ \forall\, x\in[0,\pi]$$

وبالتالي $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ قابلة للاشتقاق على $[0,\pi]$ ، ويكون لدينا:

$$f_n'(x)=\frac{\cos nx}{n^2}\ ;\ x\in[0,\pi]$$

والتي يكون من أجلها:

$$f'(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ ,\qquad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)^2}\ ,\ f'(\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

{**13**} من المعلوم أن شرط التقارب المنتظم لسلسلة التوابع المستمرة على المجال $I \subseteq R$ هو شرط لازم للمكاملة حداً حداً لحدود السلسلة التابعية، لكنه غير كاف ، ادعم هذه المقولة من خلال السلسلة التابعية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^2 - x^{-2n}) - (x^{n-1} - x^{2n-2}) \quad ; \quad x \in [0,1]$$

الحل:

إن متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة المفروضة هي:

$$S_n(x) = x^2 - x^{2n} \quad ; \quad x \in [0,1]$$

كما أن متتالية التوابع $\{S_n\}$ تتقارب من التابع الصفري وبشكل غير منتظم (أي إن سلسلة التوابع المدروسة لها مجموع يساوي الصفر على [0,1])، وبالتالي سلسلة التوابع تتقارب من التابع الصفري $f(x) = 0$ على [0,1] بشكل غير منتظم، مع ذلك نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (x^n - x^{2n})\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(2n+1)} = 0$$

أي إن:

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

{**14**} مستخدماً اختبار فايرشتراس، ادرس التقارب المنتظم للسلسلتين الآتيتين على R:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^n} \quad (2) \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{n^2x^2}} \quad (1)$$

الحل:

1- إن هذه السلسلة متقاربة بانتظام على $R =]-\infty, \infty[$ ، وذلك:

إذا كان $x = 0$، فالسلسلة المدروسة متقاربة بانتظام ومجموعها يساوي الصفر، إذا كان $x \neq 0$، لدينا $\forall\, n \in N \quad ; \quad n^2x^2 < e^{n^2x^2}$، وبالتالي: يكون لكل n من N وكل $x \neq 0$ ، لدينا:

$$x^2 e^{-nx^2} < \frac{x^2}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2}$$

وبما أن السلسلة العددية التي حدها العام $\frac{1}{n^2}$ متقاربة دائماً ، فحسب اختبار فايرشتراس تكون السلسلة المفروضة متقاربة بانتظام.

2- لدينا من أجل جميع قيم n من N ومهما تكن $x \in R$:

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n^n}\right| \leq \frac{1}{n^n}$$

بما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ سلسلة عددية متقاربة (حسب اختبار الجذر النوني)، فإن السلسلة المدروسة متقاربة بانتظام، وذلك حسب اختبار فايرشتراس.

{**15**} لتكن السلسلة التابعية:

$$\frac{1}{x+1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$$

المعرفة على المجال [0,1]، والمطلوب:

بدلالة الباقي النوني للسلسلة السابقة، ادرس التقارب المنتظم على [0,1].

الحل:

لنوجد أولاً المجموع الجزئي النوني $S_n(x)$ للسلسلة المعطاة:

$$S_n(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \dots - \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$$

وباستخدام عملية تفريق الكسور نجد:

$$S_n(x) = \frac{1}{x+1} - \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) - \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) - \dots - \left(\frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x-n}\right)$$

وبالتالي يكون:

$$S_n(x) = \frac{1}{x+n} \quad ; \quad x \in [0,1]$$

إذاً

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x+n} = 0$$

وبما أن:

$$|R_n(x)| = |S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{x+n} \quad ; \quad x \in [0,1]$$

لنفرض الآن أن $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي معطى، ولنبحث عن العدد الطبيعي $N(\varepsilon)$ بحيث يكون: $|R_n(x)| = \frac{1}{x+n} < \varepsilon$، من أجل $n \geq N(\varepsilon)$، إن المتراجحة السابقة

$\frac{1}{x+n} < \varepsilon$ تتحقق عندما يكون $\frac{1}{\varepsilon} < n$، وذلك مهما يكن $x \in [0,1]$، فإذا كان $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$، فإن المتراجحة $|R_n(x)| < \varepsilon$ تتحقق عندما $n \geq N(\varepsilon)$، ذلك مهما يكن $x \in [0,1]$. إذاً السلسلة متقاربة بانتظام على $[0,1]$.

{**16**} حدد منطقة (مجال) تقارب السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(n!)x^n$

الحل:

إن الحد العام لهذه السلسلة هو: $f_n(x) = (n!)x^n$، هو معرف من اجل جميع قيم x من R.

بفرض x_0 قيمة المتحول x من R^*، فإن السلسلة العددية الناتجة ستكون متباعدة دائماً ، لأنه: بتطبيق اختبار النسبة نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x_0^{n+1}}{n!\,x_0^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1).|x_0| = \infty$$

وبما أن النهاية الأخيرة غير محدودة عندما n تسعى إلى ∞، إذاً السلسلة المدروسة متباعدة وبالتالي لا توجد منطقة تقارب للسلسلة. أما إذا كان $x_0 = 0$، فإن السلسلة ستتقارب، وفي هذه الحالة إن منطقة تقارب السلسلة التابعية المدروسة من نقطة واحدة هي $\{0\}$.

{**17**} ادرس التقارب المنتظم لسلسلة التوابع: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x^2)}{1+n^2x^2}$

وذلك مستفيداً من اختبار آبل حيث $x \in [0,q]$ و $0 < q < 1$.

الحل:

إن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ المعرفة من خلال: $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$ متناقصة من أجل كل n من N وكل x من $[0,q]$ ، وكذلك محدودة ، (بل محدودة بانتظام) على المجال $[0,q]$ بالعدد 1. من جهة ثانية إن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^2)$ متقاربة بانتظام على المجال $[0,q]$ حيث $0 < q < 1$، لأن:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right| = |x^n(1-x^2) + x^{n+1}(1-x^2) + \ldots + x^m(1-x^2)| =$$

$$= |x^n + x^{n+1} - x^{m+1} - x^{m+2}| = |x|^m.|1+x|.|1-x^{m-n+2}| \leq$$

$$\leq x^n(1+x) < \varepsilon \implies n > \frac{\ln\varepsilon - \ln(1+x)}{\ln n} = N(\varepsilon, x)$$

من أجل إثبات أنه متقاربة بانتظام على $]-q,q[$ حيث $0<q<1$، وذلك بأن نأخذ من أجل $\varepsilon>0$ العدد الطبيعي $N(\varepsilon)$ بالشكل:

$$N(\varepsilon)=\left|\frac{\ln\varepsilon-\ln(1+q)}{\ln q}\right|$$

وبالتالي فالعلاقة:

$$\forall\ m>n>N(\varepsilon)\ \Longrightarrow\ \left|\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right|<\varepsilon$$

محققة من أجل كل x من $[-q,q]$، وكل $N(\varepsilon)<n<m$، وبالتالي فهي متقاربة بانتظام على $[0,q]$ حيث $0<q<1$.

إذاً فحسب اختبار آبل لتقارب سلاسل التوابع تكون سلسلة التوابع:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x^2)}{1+n^2x^2}$$

متقاربة بانتظام على المجال $[0,q]$ ، حيث $0<q<1$.

{18} أوجد جميع قيم x التي تكون عندها سلسلة القوى:

$$1+\frac{1}{5}x+\frac{2}{5^2}x^2+\cdots+\frac{n}{5^n}x^n+\cdots$$

متقاربة إطلاقاً.

الحل:

بما أن: $U_n=\frac{n}{5^n}x^n=\frac{nx^n}{5^n}$ فيكون:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{(n+1)}}{5^{n+1}}.\frac{5^n}{nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x}{5n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{5n}\right)|x|=\frac{1}{5}|x|$$

وحسب اختبار النسبة تكون السلسلة المدروسة متقاربة أطلاقاً، إذا تحقق:

$\frac{1}{5}|x|<1$ أو $|x|<5$ أي أن $-5<x<5$

وتتباعد السلسلة المدروسة إذا كان: $\frac{1}{5}|x|>1$ وهذا يعني أن $x>5$ أو $x<-5$.

أما إذا كان $\frac{1}{5}|x|=1$، عندئذٍ اختبار النسبة يفشل.

بوضع $x=5$ في السلسلة المفروضة نحصل على السلسلة العددية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}5^n=\sum_{n=1}^{\infty}n=0+1+2+\cdots$$

وهي متباعدة.

بوضع $x=-5$ في السلسلة المفروضة سنجد السلسلة العددية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}(-5)^n=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n=0-1+2-3+\cdots$$

وهي أيضاً متباعدة.

إذاً مجموعة قيم x التي تكون عندها السلسلة المدروسة متقاربة إطلاقاً هي $]-5,5[$.

{19} أوجد جميع قيم x التي يكون من أجلها السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}n!\,x^n$ متقاربة.

الحل:

لدينا: $U_n=n!\,x^n$. إذا كان $x\neq 0$، فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}|(n+1)x|=\lim_{n\to\infty}(n+1).|x|$$
$$=\infty$$

وحسب اختبار النسبة السلسلة المدروسة متباعدة، وتكون متقاربة إذا كان $x=0$.

{20} أوجد قطر تقارب السلسلة التي حدها العام:

$$U_n=(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ونصف قطر تقارب مشتقها.

الحل:

إن نصف قطر تقارب السلسلة المعطاة هو:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{2(n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}(2n+3)=\infty$$

والسلسلة المشتقة هي:

$$V_n = U_n' = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

ونصف قطر تقاربها هو:

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}} = \infty$$

{**21**} أوجد نصف قطر تقارب السلسلة ، التي حدها العام هو:

$$U_n = (-1)^{n-1} x^{2n-2}$$

ونصف قطر السلسلة الناتجة عن تكاملها.

الحل:

إن نصف قطر تقارب السلسلة التي حدها العام معطى كما سبق هو:

$$R = lim \left|\frac{(-1)^{n-1}}{(-1)^n}\right| = 1$$

إن السلسلة الناتجة عن تكاملها هي:

$$V_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$$

ونصف قطر تقاربها هو:

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}/(2n-1)}{\frac{(-1)^n}{2n} + 1}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+1} = 1$$

إذن $R = R_1 = 1$

{**22**} حدد مجال تقارب السلسلة:

$$(x-2) + (x-2)^2 + \cdots + (x-2)^n + \cdots$$

الحل:

للسهولة، نفرض $x - 2 = \mathrm{X}$ ، فيكون لدينا:

$$X + X^2 + \cdots + X^n + \cdots$$

وهي سلسلة هندسية أساسها X وهي متقاربة عندما $|x| < 1$ ، أي إن $|x-2| < 1$ أو $-1 < x - 2 < 1$ أو $1 < x < 3$ عند طرفي المجال تكون السلسلة متباعدة (تأكد من ذلك).

{**23**} ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-n}}{ln(n+2)}$

الحل:

إن نصف قطر تقارب السلسلة هو:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{ln(n+2)}}{\frac{1}{ln(n+3)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{ln(n+3)}{ln(n+1)} = 1$$

والسلسلة متباعدة في المجال $]-1,1[$، ومتقاربة مطلقاً خارج المجال السابق أما من أجل $x = -1$، فتصبح السلسلة المعطاة: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{ln(n+2)}$ وهي سلسلة متناوبة، وبتطبيق اختبار لايبنز نجد أنها متقاربة وسلسلة قيمها المطلقة متباعدة.

ومن أجل $x = 1$، تصبح السلسلة المعطاة: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ln(n+2)}$، وهي سلسلة متباعدة وذلك بمقارنتها مع السلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

تمرينات غير محلولة

(1) لتكن المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}$، التي حدها العام هو: $f_n(x) = \frac{x^2+nx}{n}$ حيث $x \in [0,1]$, $n \geq 1$ ، أثبت أن:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x \;;\; \forall\, x \in [0,1]$$

(2) إذا كانت السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$، حيث إن $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ لكل n من N ولكل $x \in [-1,1]$، أثبت أنها متقاربة، ثم أوجد مجموعها.

(3) لتكن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ حيث $f_n(x) = \frac{x^3}{3^n} \;;\; x \in (-3,3)$ ، بين أن هذه السلسلة متقاربة تقارباً منتظماً على المجال $(-a,a)$ حيث $0 < a < 3$.

(4) ادرس التقارب المنتظم للسلسلة التي حدها العام $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^3}$ على R.

(5) لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} nx(1-x^2)^n$ ، حيث $x \in [0,1]$، أثبت صحة العلاقة:

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx \neq \lim \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

(6) لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية تابعية معرفة على المجال المغلق $[0,1]$ بالشكل:

$$\{f_n(x)\} = \left\{\frac{x^n}{n^\alpha}\right\} \;;\; x \in [0,1]$$

حيث α عدد حقيقي غير سالب $(0 \leq \alpha < \infty)$ والمطلوب دراسة قابليته المكاملة والاشتقاق حداً حداً لهذه المتتالية على المجال $[0,1]$.

(7) لتكن السلسلة التابعية:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(x-x^2) - \sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{2n}) - (x^{n-1} - x^{2n-1})$$

المطلوب أوجد المجموع الجزئي النوني $S_n(x)$ ثم ادرس تقاربها المنتظم على $[0,1]$.

(8) حدد منطقة تقارب السلاسل التابعية التالية:

$$(1)\;\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\;,\quad (2)\;\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}\;,\quad (3)\;\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{2n}}$$

(9) ادرس التقارب المنتظم للسلاسل التابعية:

$$(1)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^4)x}{n^2} \;;\; x \in R$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad ; \quad x \in R$$

(10) أثبت أن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)^n}$ ، لكل n من N متقاربة، ثم أوجد مجموعها على المجال $I = [-1,1]$.

(11) أثبت أنه $x \in [0,1] \; ; \; lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$، حيث أن $f_n(x)$ الحد العام للسلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2+nx}{n}$ $= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

(12) لتكن السلسلة التابعية: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \; ; \; x \in]-3,3[$، أثبت أن هذه السلسلة متقاربة بانتظام على المجال $]-a,a[$، حيث إن $0 < a < 3$.

(13) لتكن المتتالية التابعية $\{nx^n\} \; ; \; x \in [0,1]$، أثبت صحة العلاقة التالية:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 nx^n \, dx \right) = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} (nx^n)$$

(14) أثبت أن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ ليست متقاربة مطلقاً.

(15) أثبت صحة العلاقة: $(lim_{n\to\infty} f_n(x))' = lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ ، حيث $f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^2 + \frac{1}{n}\right)$ على $I = [-1,1]$.

(16) حدد قيمة x التي تجعل السلسلة التابعية متقاربة تقارباً مطلقاً:

$$1 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5^2}x^2 + \cdots + \frac{n}{5^n}x^n + \cdots$$

(17) حدد مجال تقارب السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$

(18) لتكن السلسلة: $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots$ والمطلوب:

1. أوجد الحد العام.
2. أوجد مجال التقارب.
3. احسب مجموع السلسلة.

(19) عين مجال تقارب السلسلة التالية، واحسب مجموعها:

$$\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

(20) حدد مجال تقارب السلسلة التي حدها العام:

$$U_n = \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$$

(21) اكتب الحد العام للسلسلة الآتية، ثم عين مجال تقاربها:

$$\frac{x}{1.3}+\frac{x^2}{2.3^2}+\frac{x^3}{3.3^3}+\ \cdots$$

(22) حدد مجال تقارب السلسلة:

$$1+\frac{x-3}{1^2}+\frac{(x-3)^2}{2^2}+\frac{(x-3)^3}{3^2}+\ \cdots$$

(23) لتكن السلسلة: $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ \cdots$ والمطلوب:

1. أوجد الحد العام لها.
2. حدد مجال تقاربها.
3. احسب بدلالة x مجموع السلسلة الناتجة عن اشتقاقها واحسب مجموعها.

(24) لتكن السلسلة: $\frac{1}{1}.x+\frac{2}{2^2}x^2+\frac{3}{3^3}x^3+\ \cdots$ والمطلوب:

1. أوجد الحد العام.
2. حدد مجال تقاربها.

ليونارد أويلر:

عالم رياضيات وفيزياء سويسري المولد، عاش من 1707 حتى 1783، وقد عمل معظم الوقت في سان بطرسبرغ حيث تبع آل برنوللي، ثم في برلين بدعوة من فريدريك الأكبر، ولقد اشتهر بقدرته على إنجاز العمليات المعقدة ذهنياً، وواصل عمله حتى بعد فقد بصره، ويعتبر واحداً من أعظم الرياضيين عبر التاريخ، فقد نشر أكثر من 400 ورقة بحثية وكتاباً منهجياً اهتمت بكل فروع الرياضيات تقريباً، هذا بالإضافة إلى 350 ورقة ظهرت بعد وفاته، وكانت أهم إسهاماته في الهندسة التحليلية والحساب وحساب المثلثات وبالتالي إسهامه في توحيد كل الرياضيات.

أوغستين لويس كوشي:

عالم رياضيات وفيزياء فرنسي عاش في الفترة من 1789 إلى 1857، كان لأعماله التي تميزت بالدقة تأثير عظيم في معظم فروع الرياضيات، وبخاصة وضع أسس التحليل الحديث بدلالة النهايات والاستمرار، وطور نظرية الدوال في متغيرات عقدية، بعد انتهاء خدماته كمهندس في القوة التي كانت تعد لغزو نابليون لبريطانيا والتي لم تتم، وشجّعه على متابعة نشاطه في الرياضيات العالم لابلاس والعالم لاغرانج وأصبح أستاذاً للرياضيات في مدرسة البوليتكنيك والسوربون، وكلية فرنسا، وبسبب آرائه السياسية والدينية رفض أن يقسم يمين الولاء للويس فيليب سنة 1830 فنفي مع حفيد تشارلز العاشر، وعينته جامعة تورينو في منصب كرسي أستاذيه أنشئ من أجله، ولكنه تركه لتعليم حفيد تشارلز العاشر، ولقد نشر ما مجموعه 789 عملاً، تتضمن مقالات حول التكاملات المحدودة وانتشار الموجات، كما نشر أوراق بحثية في الهندسة ونظرية الأعداد والمرونة ونظرية الخطأ والفلك والضوء.

الفصل الثاني

سلاسل القوى (السلاسل الصحيحة)

(Power Series)

تمهيد:

يمكن القول: إن لسلاسل القوى المكانة الأولى من حيث الأهمية بين السلاسل التابعية. يعود الفضل إلى نشوء سلاسل القوى للفلكي والرياضي الألماني نيكولاوس ميركاتور، وكان ذاك عام 1665 ق.م، ومن ثم على يد الرياضي الفيزيائي إسحاق نيوتن حيث قدم الأخير الصيغة العامة لسلسلة القوى. إن فكرة نشوء سلاسل القوى أتت عند محاولة إيجاد مشتق تابع مفروض، وبشكل خاص، عند محاولة إيجاد المشتق الأول للتابع العكسي لتابع ما.

تعريف (1) سلسلة القوى (Power Serie):

لتكن x_0 و $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ أعداداً حقيقية، ولنفرض أن x متحول حقيقي، عندئذٍ نسمي كل سلسلة تابعية من الشكل:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

أو اختصاراً بالشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \qquad \cdots (1)$$

بسلسلة قوى حقيقية في $(x - x_0)$، نسمي عادة x_0 **بمركز السلسلة،** أما $a_0, a_1, \cdots$ فنسميها **بأمثال أو معاملات سلسلة القوى.**

إن السلسلة (1) تلعب دوراً مهماً في التحليل الرياضي وتطبيقاته، وذلك نظراً لكون مجاميعها الجزئية كثيرات حدود بالنسبة لـ x.

بما أننا لن ندرس في هذا المقرر سوى سلاسل القوى الحقيقية فسوف نقول عن السلسلة (1): إنها سلسلة قوى (على سبيل الاختصار).

إذا أجرينا التحويل $t = x - x_0$ (أي انسحاباً نحو المبدأ بمقدار x_0) لأخذت السلسلة (1) الشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad \cdots (2)$$

إذا يمكن كتابة: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . t^n$، فمثلاً لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$، إذا كان $t = x - 3$ عندئذٍ السلسلة السابقة تأخذ الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ والسلسلة الأخيرة هي سلسلة قوى في t.

بما أن التحويل السابق لا يغير من عمومية دراسة السلسلة (1)، لذا ستتركز دراستنا على السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بدلاً من السلسلة (1).

(1-2) تقارب وتباعد سلاسل القوى:

$(\boldsymbol{Cnvergence\ and\ Divergence\ Of\ aPower\ Series})$

إن دراسة تقارب أو تباعد سلسلة القوى (1) أو $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ يتعلق بقيم المتحول x.

تعريف (2):

نقول عن سلسلة قوى: إنها متقاربة إلى x إذا كانت سلسلة الأعداد الحقيقية $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة، غير ذلك نقول عنها إنها متباعدة.

نقول عن سلسلة قوى إنها متقاربة في المجموعة $D \subseteq R$ إذا كانت متقاربة لكل عدد حقيقي x من D.

مثال (1):

لأجل أي من الأعداد الحقيقية تكون سلسلة القوى: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{3^k}$ متقاربة.

الحل:

الحد النوني لهذه السلسلة هو $a_n = \frac{x^n}{3^n}$، وبالتالي باستخدام اختبار النسبة نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|/3^{n+1}}{|x^n|/3^n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{3}\right| = \left|\frac{x}{3}\right|$$

تتقارب سلسلة القوى إذا كان: $\frac{|x|}{3} < 1$ أو $|x| < 3$ (تتباعد سلسلة القوى إذا كان $|x| > 3$)

الحالة $|x| = 3$ اذا كان $x = 3$ سنجد (بعد التعويض) في السلسلة:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{3^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{3^k}=\sum_{k=0}^{\infty}1^k$$

وهي سلسلة متباعدة.

إذا كان $x = -3$ ، فسنجد: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{3^k}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ وهي أيضاً متباعدة.

إذاً تتقارب سلسلة القوى في المجال المفتوح $]-3,3[$.

تعريف (3):

نقول عن سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ **إنها متقاربة مطلقاً** (إطلاقاً) إذا كانت سلسلة القيم المطلقة: $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|=|a_0|+|a_1x|+\cdots+|a_nx^n|+\cdots$، متقاربة.

المبرهنة التالية، والمسماة بمبرهنة آبل مهمة جداً لدراسة تقارب سلاسل القوى.

مبرهنة (1) مبرهنة آبل ($Abel$):

1- اذا تقاربت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ في النقطة x_0 حيث $x_0\neq 0$، عندئذٍ تكون متقاربة إطلاقاً من أجل جميع قيم x المحققة: $|x|<|x_0|$.

2- اذا تباعدت السلسلة السابقة في النقطة x_1، عندئذٍ تكون متباعدة من أجل جميع قيم x المحققة $|x|>|x_1|$.

البرهان:

1- بما أن السلسلة (2) ... $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ متقاربة في النقطة x_0، فإن السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ متقاربة، وبالتالي فإن حدها العام يسعى نحو الصفر عندما n تسعى نحو اللانهاية، وهذا يعني أن المتتالية العددية $\{a_nx_0^n\}$ متقاربة، الأمر الذي يؤدي إلى كونها متتالية محدودة ، وهذا يعني وجود عدد حقيقي موجب وليكن M بحيث يكون:

$$|a_nx_0^n|<M \quad \dots(*) \quad ; \quad n=0,1,2,\dots$$

بإعادة كتابة السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ بالشكل:

$$a_0+a_1x_0\left(\frac{x}{x_0}\right)+a_2x_0^2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2+\ \dots+a_nx_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n+\ \dots$$

وبالنظر إلى سلسلة القيم المطلقة لها نجد:

$$|a_0| + |a_1 x_0| \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2|.\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + |a_n x_0^n|.\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \quad (3)$$

بالاستفادة من العلاقة $(*)$ نجد أن كل حد من حدود السلسلة الأخيرة أصغر من الحد المقابل له في السلسلة:

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$$

لكن من أجل كل قيمة لـ x تتحقق المتراجحة: $|x| < |x_0|$ وبالتالي السلسلة الأخيرة سلسلة هندسية أساسها $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$، وبالتالي فهي متقاربة، وهذا بدوره يؤدي حسب اختبار المقارنة إلى التقارب المطلق للسلسلة (3).

2- نفرض جدلاً وجود نقطة ولتكن x_0 تحقق المتراجحة: $|x_0| > |x_1|$، وبحيث تكون السلسلة (2) متقاربة، فحسب (1) تكون السلسلة (2) متقاربة في النقطة x_1، وهذا يناقض الفرض.

نتيجة (1):

نستنتج من المبرهنة السابقة أنه إذا كانت x_0 نقطة تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، فإن هذه السلسلة تتقارب إطلاقاً في جميع نقاط المجال المفتوح: $]-|x_0|, |x_0|[$، أي إذا كانت سلسلة القوى متباعدة في x_1 فإن هذه السلسلة تتباعد في جميع النقاط الواقعة خارج المجال $]-|x_1|, |x_1|[$.

ملاحظة (1):

توجد سلاسل قوى لا تتقارب إلا من أجل $x = 0$(في حالة السلسلة$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ لا تتقارب إلا من أجل $x = x_0$)، فمثلاً لو أخذنا سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ لوجدنا أنها تتقارب من أجل $x = 0$ فقط، في هذه الحالة نقول إن سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **متباعدة في كل مكان.**

مبرهنة (2):

لتكن سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة لكن ليس من أجل جميع قيم x، وليس من أجل $x = 0$، عندئذٍ يوجد عدد حقيقي موجب $R > 0$ بحيث تتقارب هذه السلسلة إطلاقاً من أجل $|x| < R$، وتتباعد من أجل $|x| > R$.

البرهان:

لنرمز بـ D لمنطقة تقارب السلسلة السابقة، ولنبرهن أولاً أن D مجموعة محدودة، لتكن x_1 نقطة تتباعد فيها السلسلة السابقة، هذه النقطة موجودة فرضاً فحسب مبرهنة آبل السابقة تتحقق المتراجحة $|x| < |x_1|$

من أجل جميع قيم x من D وهذا يعني أن D مجموعة محدودة.

وبما أن كل مجموعة محدودة من الأعلى تملك حداً أعلى أصغرياً (Sup)، بوضع $R = Sup_{x\in D}|x|$، فإن $R > 0$ حتماً وذلك لأن السلسلة المفروضة متقاربة فرضاً (ليس من أجل $x = 0$). لنختر أي قيمة لـ x بحيث تتحقق المتراجحة: $|x| < R$، وبالتالي (حسب تعريف الـ Sup) يمكن إيجاد x_0 من D بحيث يكون $|x| < |x_0| < R$، وبالتالي وحسب مبرهنة آبل السابقة ينتج التقارب المطلق للسلسلة المدروسة من أجل x المختارة.

أما إذا أخذنا x بحيث تتحقق المتراجحة $|x| > R$، فإن $x \notin D$، وهذا يعني أن سلسلة القوى المدروسة متباعدة عند النقطة x.

(2-2) نصف قطر تقارب سلسلة القوى:

$(\boldsymbol{The\ Radius\ of\ Convergence\ of\ Power\ Series})$

لتكن سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، ولندرس تقاربها المطلق ، وذلك بتطبيق اختبار النسبة على سلسلة قيمها المطلقة (نعتبر أن x مقدار ثابت):

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

فإذا فرضنا أن $lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$، فإننا سنجد: $lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|}{R}$، وحسب اختبار النسبة لدينا الحالات التالية:

1- تكون سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة عندما $\frac{|x|}{R} < 1$ ، أي أن: $|x| < R$.

2- تكون سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متباعدة عندما $\frac{|x|}{R} > 1$ ، أي إن: $|x| > R$.

3- تكون لدينا حالة شك (السلسلة ليست متقاربة وليست متباعدة) عندما $\frac{|x|}{R} = 1$، أي أن: $|x| = R$.

نسمي العدد (4) .. $\boxed{R = lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{، أو } R = lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}$

بنصف قطر تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ كما نسمي المجال $]-R,R[$ بمجال تقارب سلسلة القوى السابقة.

ملاحظة (2):

غالباً ما يتم تحديد نصف قطر تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بتطبيق اختبار الجدر النوني (كوشي) أو اختبار النسبة، أو من العلاقة (4). فمثلاً عند تطبيق اختبار الجذر النوني على السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ نستنتج أن:

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad \dots(5)}$$

ملاحظة (3):

سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ قد تتباعد وقد تتقارب عند طرفي المجال $]-R,R[$ ، وبالتالي فإن مجال تقارب سلسلة القوى السابقة يكون له أحد الأشكال

$$]-R,R[\ ,\ ]-R,R]\ ,\ [-R,R[\ ,\ [-R,R]$$

حالات خاصة:

لنفرض أن النهاية: $lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ موجودة وتساوي العدد L ، عندئذٍ:

1. إذا كان $L=0$ فإن نصف قطر تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ هو ∞ أي $R=\infty$ والسلسلة تكون متقاربة من أجل جميع النقاط x.
2. اذا كان $L=\infty$ فسلسلة القوى متباعدة من أجل جميع قيم x حيث $x\neq 0$ ، كما أن نصف قطر تقاربها هو الصفر، أي $R=0$.
3. إذا كانت النهايات في (4) أو (5) غير موجودة، فلإيجاد نصف قطر تقارب سلسلة القوى السابقة، نطبق بشكل مباشر اختبار دالامبير أو اختبار الجذر النوني (كوشي) والأمثلة الآتية توضح ماسبق.

مثال (3):

من أجل أي قيم لـ x، تكون سلسلة القوى $\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k$ متقاربة.

الحل:

السلسلة المعطاة هي سلسلة قوى مركزها $x_0=0$، وبالتالي:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n}\right| = |x|.\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

لذلك فإنه من أجل $x \neq 0$ تكون سلسلة القوى المدروسة متباعدة، وفي هذه الحالة يكون نصف قطر تقاربها هو $R = 0$.

مثال (3):

حدد نصف قطر سلسلة القوى: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

الحل:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

سلسلة القوى متقاربة من أجل جميع قيم x الحقيقية، أما نصف قطر تقاربها فهو $R = \infty$.

مثال (4):

حدد نصف قطر تقارب ومجال تقارب سلسلة القوى:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

الحل:

لدينا:

$$a_n = \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

وبالتالي:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-3)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+2}}.\frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n}\right| = 3|x| \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{1}{n}\right)}{1+\left(\frac{2}{n}\right)}}$$

$$= 3|x|$$

تتقارب سلسلة القوى المفروضة عندما $3|x| < 1$، وتتباعد عندما $3|x| > 1$ وبالتالي فإن مجال تقاربها هو $|x| < \frac{1}{3}$، وتتباعد عندما $|x| > \frac{1}{3}$، وبالتالي فإن نصف قطر تقاربها هو $R = \frac{1}{3}$. ومجال تقارب السلسلة هو $\left]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right[$ لكن ضروري دراسة التقارب عند طرفي المجال $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ ضرورية ، فإذا كان $x = -\frac{1}{3}$ عندئذٍ سنحصل على السلسلة العددية:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

وهي سلسلة عددية متباعدة (للتأكد استخدم اختبار التكامل). إذا كان $x=\frac{1}{3}$ فسنجد أن السلسلة العددية:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n.\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

متقاربة.

إذاً مجال تقارب سلسلة القوى المدروسة هو $]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$.

جميع الأمثلة السابقة كانت لسلاسل القوى التي من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ أما إذا كانت سلسلة القوى من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ فكيف نحدد مجال تقاربها ونصف قطر تقاربها، من أجل ذلك نقدم المثال التالي:

مثال (5):

حدد مجال تقارب السلسلة:

$$(x-2)+(x-2)^2+(x-2)^3+\ \dots+(x-2)^n+\ \dots$$

الحل:

السلسلة المدروسة هي سلسلة قوى مركزها $x_0=2$.

لدراسة مثل هذا النوع من سلاسل القوى، نعوض $x-2=t$، بعد التعويض تأخذ السلسلة المدروسة الشكل:

$$t+t^2+t^3+\ \dots+t^n+\ \dots$$

والأخيرة هي سلسلة هندسية أساسها t وحدها الأول t، وبالتالي مجال تقاربها $|t|<1$ أي $|x-2|<1$ أو $-1<x-2<1$ أو $1<x<3$ وبعد دراسة التقارب عند طرفي المجال الأخير نجد أن السلسلة متباعدة من أجل $x=3$ و $x=1$، وبالتالي فإن مجال تقاربها هو: $]1,3[$.

نستنتج من المثال السابق أن مجال تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ هو المجال المفتوح $]R-x_0,R+x_0[$ ، حيث R هو نصف قطر تقارب هذه السلسلة.

مثال (6):

حدد مجال تقارب سلسلة القوى التالية: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$، ثم ادرس تقاربها في طرفي مجال تقاربها.

الحل:

باستخدام اختبار الجذر النوني(كوشي)، نجد أن نصف قطر تقاربها هو:

$$R = \lim_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{x-3}{2}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|x-3|} < 1 \ \Rightarrow$$

$$2 < |x-3| \ \Rightarrow \ -2 < x-3 < 2 \ \ \Rightarrow \ \ 1 < x < 5$$

اذاً مجال تقارب السلسلة المفروضة هو $]1,5[$، أما في طرفي مجال التقارب السابق فسنجد أن سلسلة القوى متباعدة عند طرفي مجال التقارب، وذلك (بعد التعويض) لأن كلاً من السلسلتين العدديتين $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ و $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ متباعدتان.

مثال (7):

ادرس تقارب سلسلة القوى: $\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n$

الحل:

باستخدام

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n} = 0$$

وهذا يعني أن سلسلة القوى المعطاة متباعدة دائماً باستثناء $x = 0$.

مبرهنة آبل الثانية: (3)

ليكن R نصف قطر تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، عندئذٍ هذه السلسلة تتقارب إطلاقاً وبانتظام في أي مجال مغلق وليكن $[a,b]$ يقع ضمن المجال $]-R,R[$.

البرهان:

بما أن النقطتين b,a تقعان ضمن المجال $]-R,R[$ وبالتالي يمكن إيجاد عدد وليكن c من هذا المجال وبحيث يكون أكبر من العددين $|a|$ و $|b|$. وبما أن c تنتمي إلى مجال تقارب سلسلة القوى المفروضة، فإن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ تتقارب إطلاقاً، من جهة ثانية، بما أن $|a_n x^n| < |a_n c^n|$، من أجل جميع قيم x من $[a,b]$، ومهما تكن

n، فحسب اختبار فاير شتراس تكون سلسلة القوى المفروضة متقاربة بانتظام على هذا المجال وهو المطلوب.

ملاحظة (4):

مبرهنة آبل الثانية تؤكد على التقارب المنتظم لسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ في كل مجال مغلق من المجال $]-R,R[$، أما تقارب سلسلة القوى السابقة في المجال $]-R,R[$ فيمكن أن لا يكون منتظماً.

(3-2) بعض خواص سلاسل القوى:

نقدم بعض أهم خواص سلاسل القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ من خلال المبرهنات التالية:

مبرهنة (4):

ليكن نصف قطر تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، هو $R > 0$ ، إذا كانت هذه السلسلة متقاربة من أجل $x = R$ (ليس بالضرورة أن يكون هذا التقارب مطلقاً)، فإن سلسلة القوى تكون متقاربة بانتظام على المجال $[0,R]$.

البرهان:

ليكن $x \in [0,R]$، عندها يمكننا كتابة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$$

وباستخدام اختبار آبل للسلاسل التابعية (الفصل السابق) نجد أن سلسلة القوى المفروضة متقاربة بانتظام على المجال $[0,R]$، وذلك لأن السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ متقاربة ومن ثم كسلسلة تابعية متقاربة بانتظام على $[0,R]$، كذلك إن المتتالية التابعية التي حدها العام $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ مضطرة ومحدودة بانتظام على $[0,R]$ لأن:

$$1 \geq \frac{x}{R} \geq \left(\frac{x}{R}\right)^2 \geq \ldots \geq \left(\frac{x}{R}\right)^n \geq \ldots > 0$$

مبرهنة (5):

إذا كان نصف قطر تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ موجباً أي $R > 0$، وإذا كان التابع الحقيقي f هو تابع مجموع سلسلة القوى هذه على مجال التقارب فإن هذا التابع f مستمر على مجال التقارب $]-R,R[$.

البرهان:

لتكن $x_0 \in]-R, R[$ ، فحسب خواص الأعداد الحقيقية يمكن إيجاد مجال مغلق وليكن $[a, b]$ بحيث $[a, b] \subset [-R, R]$ وبحيث تكون $x_0 \in [a, b]$ وبالتالي فإن سلسلة القوى المفروضة متقاربة بانتظام على $[a, b]$ حسب مبرهنة آبل الثانية.

وبما أن السلاسل التابعية هي سلاسل لتوابع مستمرة على فترة تقاربها فيكون تابع المجموع f مستمراً في النقطة x_0 (حسب المبرهنة (1) من الفصل السابق). وبما أن x_0 نقطة اختيارية من $]-R, R[$، فيكون التابع f مستمراً على المجال $]-R, R[$.

مبرهنة (6):

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$ سلسلة قوى بنصف قطر تقارب $R > 0$، إذا كانت هذه السلسلة متباعدة من أجل $x = R$، عندئذٍ لا يمكن أن يكون تقارب سلسلة القوى هذه منتظماً على $[0, R]$.

البرهان:

نفرض جدلاً أن سلسلة القوى المفروضة متقاربة بانتظام على $[0, R]$، فحسب خاصة الاستمرار لدينا:

$$\lim_{x \to R^{-0}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lim_{x \to R^{-0}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

وهذا يؤدي إلى أن السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ متقاربة وهذا يناقض الفرض إذاً تقارب سلسلة القوى المفروضة غير منتظم على المجال $[0, R]$.

مبرهنة (7):

نفرض أن f هو المجموع لسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ في مجال التقارب، والتي نصف قطرها $R > 0$ ، عندئذٍ يكون التابع f قابلاً للمكاملة على $[0, z]$، وذلك من أجل جميع قيم z من R والمحققة للمتراجحة $|z| < R$، ويكون لدينا:

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^z x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \quad ; \quad |z| < R$$

تبرهن تماماً كما في برهان المبرهنة (12) في الفصل السابق.

ينتج من المبرهنة السابقة ما يلي:

إذا كانت سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة من أجل $R = x$ ، عندها تكون هذه السلسلة قابلة للمكاملة حداً حداً على المجال $[0, z]$ حيث $-R < z \leq R$، وبالمثل إذا تقاربت هذه السلسلة من أجل $-R = x$ فإنها تكون قابلة للمكاملة حداً حداً على المجال $[0, z]$ حيث $-R \leq z < R$، حالة خاصة ومن أجل أي مجال مغلق ومحدود $[a, b]$ المحتوى في $]-R, R[$ يكون لدينا:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(b^n - a^n)$$

مبرهنة (8):

بفرض f تابع المجموع على مجال التقارب $]-R, R[$ لسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ والتي نصف قطر تقاربها موجب $(R > 0)$، عندئذٍ يكون التابع f قابلاً للاشتقاق على المجال $]-R, R[$، ويكون لدينا:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

تبرهن بنفس الطريقة التي تم برهان المبرهنة (13) من الفصل السابق.

ينتج من المبرهنة السابقة مايلي:

سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ قابلة للاشتقاق حداً حداً ضمن مجال تقاربها، وفي حالة خاصة، إذا كانت سلسلة القوى السابقة متقاربة في طرفي مجال تقاربها، فإن هذه السلسلة تكون أيضاً قابلة للاشتقاق حداً حداً في طرفي مجال تقاربها.

إن سلسلة القوى السابقة قابلة للاشتقاق عدداً كيفياً من المرات ضمن مجال تقاربها، وتتحقق العلاقة:

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(n)}(0) \quad ; \quad n \in N$$

حيث $f^{(0)}(x) = f(x)$ ، ولإثبات صحة العلاقة الأخيرة ، يكفي أن نضع $x = 0$ في العلاقات التالية:

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \dots + a_k x^k + \ \dots$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ ... + ka_kx^{k-1} + \ ...$$
$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \ ... + k(k-1)a_kx^{k-2} + \ ...$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$f^{(k)}(x) = k(k-1)(k-2)\ ...\ 2.1a_k + (k+1)k\ ...\ 2.1a_{k+1}x + \ ...$$

لنجد المطلوب

ملاحظة (5):

إذا كانت سلسلة القوى من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$، و كان f هو مجموع السلسلة على مجال تقاربها، فإن:

$$a_k = \frac{1}{\mathrm{k!}} f^{(n)}(x_0) \quad ; \quad n \in N$$

وتثبت بالطريقة السابقة نفسها حيث نضع $x = x_0$ في العلاقات التالية:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ ... + a_k(x-x_0)^k + \ ...$$
$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^3 + \ ... + ka_k(x-x_0)^{k-1} + \ ...$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$f^{(k)}(x) = k(k-1)(k-2)\ ...\ 2.1a_k + (k+1)k\ ...\ 2.1a_{k+1}(x-x_0) + \ ...$$

ينتج من الملاحظة السابقة ما يلي:

إذا كان مجموع سلسلتي القوى

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

و

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$$

هو التابع نفسه f في جوار ما للنقطة x_0 عندئذٍ تتحقق المساواة:

$$b_n = a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

أي إن سلسلتي القوى السابقتان متساويتان حداً حداً.

نتيجة (2):

إن نصفي قطري تقارب السلسلتين:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

الناتجتين من سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بمكاملتها حداً حداً وباشتقاقها حداً حداً على الترتيب، يتطابقان مع نصف قطر تقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(4-2) بعض العمليات الجبرية لسلاسل القوى:

لما كانت سلاسل القوى حالة خاصة من السلاسل التابعية، فإنه بإمكاننا. من أجل سلاسل القوى استخدام العمليات الجبرية من أجل السلاسل التابعية. وفي هذه الفقرة نحدد نصف قطر التقارب في كل من الحالات الآتية:

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ سلسلتي قوى، نصف قطر تقارب الأولى $0 < R_1$ والثانية $0 < R_2$ على الترتيب، وإذا كان λ عدداً حقيقياً لا يساوي الصفر وإذا كان مجموع السلسلة الأولى $S_1(x)$ في مجال تقاربها وكان $S_2(x)$ مجموع السلسلة الثانية في مجال تقاربها، عندئذٍ يتحقق ما يلي:

1- حاصل جمع وطرح سلاسل القوى:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n \quad ; \quad x \in]-R, R[$$

حيث نصف قطر المجموع الوارد في الطرف الأيمن يساوي $R = min\,(R_1, R_2)$ ، كما أن كلاً من السلسلتين متقاربتان من أجل جميع النقاط x الواقعة في $]-R, R[$.

مثال (8):

لتكن سلسلتا القوى: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^{n+1}}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2}$، أوجد نصف قطر تقارب مجموع هاتين السلسلتين.

الحل:

إن نصف قطر تقارب الأولى هو 3 لأن:

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^{n+2}}{1} = 3$$

ونصف قطر تقارب الثانية هو 1 لأن:

$$R_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{(i+2)^2}{1} = 1$$

وبالتالي، فإن نصف قطر مجموع السلسلتين المفروضتين هو:

$$R = min(3,1) = 1$$

2- حاصل ضرب سلسلة قوى بعدد حقيقي لا يساوي الصفر:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad x \in]-R_1, R_1[$$

حيث R_1 نصف قطر تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n$ ، وهي متقاربة من أجل جميع قيم x الواقعة في $]-R_1, R_1[$.

3- حاصل ضرب سلسلتي قوى:

إذا كان $R = min\{R_1, R_2\}$، فإنه من أجل جميع x من $]-R, R[$ تتحقق المساواة:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ \dots + a_k b_0) x^k$$

أو بالشكل المختصر: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad ; \quad c_k = \sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}$

كما أن نصف قطر تقارب سلسلة القوى الواقعة في الطرف الأيمن هو R. وهي متقاربة من أجل جميع قيم x الواقعة في المجال $]-R, R[$.

مثال (9): لتكن

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x + \frac{x^3}{3!} + \ \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ \dots$$

إن حاصل جداء هاتين السلسلتين هو:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = x + \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) x^3 + \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{3!.2!} + \frac{1}{5!}\right) x^5 + \ \dots$$

$$= x + \frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{5} x^5 + \ \dots$$

$$= \frac{1}{2}\left[2x + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + \ \dots\right]$$

وبملاحظة أن السلسلتين المفروضتين تتقاربان من أجل جميع قيم x الحقيقية فإن سلسلة القوى الناتجة عن ضرب السلسلتين المفروضتين تتقارب من أجل جميع قيم x الحقيقية.

4- حاصل قسمة سلسلتي قوى:

بالاستفادة من الفرضيات الواردة سابقاً، إن حاصل قسمة سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ على سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \; ; \; b_0 \neq 0$ هي من جديد سلسلة قوى متقاربة من أجل قيم x من المجال $]-R,R[$ وتعطى بالشكل:

$$\frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1 b_0 + a_0 b_1}{b_0^2} x + \frac{a_2 b_0^2 - a_1 b_0 b_1 + a_0 b_1^2 - a_0 b_0 b_2}{b_0^3} x^2 + \cdots ; \;\; b_0 \neq 0$$

5- تعويض سلسلة قوى في أخرى:

لتكن سلسلة القوى، والتي مجموعها Z:

$$Z = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n + \ldots$$

ولنفرض أنها متقاربة من أجل $|y| < R_1$ ، ولتكن سلسلة القوى التي مجموعها y:

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots$$

ولنفرض أنها متقاربة من أجل $|x| < R_2$، ولنفرض أيضاً $|b_0| < R_1$، عندئذٍ يمكننا أن نضع بدلاً من y في سلسلة القوى الأولى قيمة y من السلسلة الثابتة، وسنحصل نتيجة ذلك على سلسلة قوى بدلالة المتحول الحقيقي x، مجموعها هو Z، وتتقارب هذه السلسلة من أجل جميع قيم x التي تحقق $|x| < R_2$.

مثال (10):

لتكن سلسلة القوى:

$$Z = e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \ldots + \frac{y^n}{n!} + \ldots$$

وإذا كانت

$$y = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots$$

عندئذٍ نجد:

$$y^2 = 1 - x^2 + \frac{1}{3} x^4 - \ldots$$

$$y^3 = 1 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{7}{8} x^4 - \ldots\ldots\ldots$$

$$y^4 = 1 - 2x^2 + \frac{5}{3} x^4 - \ldots\ldots\ldots$$

وبالتالي فإن:

$$e^{\cos x} = 1 + \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ \dots\right) + \frac{1}{2}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \ \dots\right) +$$
$$\frac{1}{6}\left(1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 - \ \dots\right) - \frac{1}{24}\left(1 - 2x^2 + \frac{5}{3}x^4 - \ \dots\right)$$

بفك الأقواس وجمع الحدود المتشابهة نحصل على السلسلة:

$$= 2.\frac{17}{24} - 1.\frac{1}{3}x^2 + \frac{61}{144}x^4 - \ \dots$$

إن أمثال السلسلة الأخيرة هي سلسلة لا نهائية، وإن القيم النهائية لهذه الأمثال هي قيم تقريبية قد حسبت بأخذ حدود قليلة من الحدود الأولى لكل سلسلة من سلاسل الأمثال.

(5-2) سلاسل القوى ذات الأس السالب:

$(\boldsymbol{Series\ of\ Negative\ Powers})$

العدد الصحيح k أو n الوارد في ما سبق قد يكون موجباً وقد يكون سالباً ، فإذا كان k موجباً وبحيث سلسلة القوى $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ أو $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ الصحيحة الموجبة، وإذا بدلنا كل k بـ $-k$ عندئذٍ نحصل على سلسلة صحيحة ذات الأس السالب.

الشكل العام لهذا النوع من السلاسل هو $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-k}$ أو

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{-k}$$

حيث $k \in N$.

ندرس هذه السلسلة كما درسنا السلاسل الصحيحة السابقة، أي يمكن تطبيق كل من اختباري النسبة (دالامبير) والجذر النوني (كوشي)، فمثلاً لنطبق اختبار النسبة من أجل إيجاد نصف قطر تقارب السلسلة المفروضة:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.\left|\frac{x^{-n}}{x^{-n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.\frac{1}{|x|}$$

لنفرض أن $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = R_1$ ، فيكون R_1 هو نصف قطر تباعد السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$ إذاً : $R_1 \frac{1}{|x|} < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| > R_1$ أي إن السلسلة متقاربة خارج المجال $(-R_1, R_1)$.

مثال (11):

حدد نصف قطر التباعد R_1 للسلسلة التي حدها العام هو:

$$u_k(x) = \frac{x^{-1}}{ln(k+2)} \quad ; \quad k \in N$$

ثم ادرس تباعدها عند طرفي مجال التباعد.

الحل:

لنوجد نصف قطر التباعد R_1

$$R_1 = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{ln(k+3)}{ln(k+2)} = 1$$

وبالتالي السلسلة متباعدة في المجال $]-1,1[$، ومتقاربة إطلاقاً خارج هذا المجال، من أجل $x=-1$، يكون الحد العام للسلسلة المفروضة من الشكل: $u_k(x) = \frac{(-1)^k}{ln(k+2)}$ وهو الحد العام للسلسلة عددية متقاربة وبتطبيق اختبار ليبنتز نجد أنها متقاربة وسلسلة قيمها المطلقة متباعدة أي متقاربة شرطياً .

ومن أجل $x=1$ سنحصل على $u_k(x) = \frac{1}{ln(k+2)}$، وهو الحد العام لسلسلة متباعدة، وذلك بالمقارنة مع الحد العام للسلسلة التوافقية $\frac{1}{n}$.

أما من أجل السلسلة: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^{-k}$ وبتطبيق اختبار النسبة سنجد:

$$L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{U_{k+1}}{U_k(x)}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| . \frac{1}{|x-x_0|}$$

وبفرض أن $R = lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$، والذي نسميه بنصف قطر تباعد السلسلة المدروسة يكون:

$$L = \frac{R_1}{|x-x_0|}$$

وهنا نميز الحالات الثلاث التالية:

الحالة الأولى: إذا كان $L<1$ أي $\frac{R_1}{|x-x_0|} < 1$ والسلسلة في هذه الحالة متقاربة مطلقاً، ويكون مجال تقاربها هو: $|x-x_0| > R_1$ أي: $x-x_0 > R_1$ و $x-x_0 < -R_1$ أو $x > x_0 + R_1$ أو $x < x_0 - R_1$

والذي يمكن كتابته بالشكل: $x \in]-\infty, x_0-R_1[\cup]x_0+R_1,\infty[$

الحالة الثانية: $L>1$ والسلسلة متباعدة ، وبالتالي:

$\frac{R_1}{|x-x_0|} > 1$ أي أن $-R_1 < x-x_0 < R_1$ ، ويكون مجال التباعد هو:

$$x \in]x_0-R_1, x_0+R_1[$$

الحالة الثالثة: $L = 1$ أي: $|x - x_0| = R_1$ ، أو: $x = x_0 \pm R_1$ وفي هذه الحالة نبدل قيمتي x في السلسلة المعطاة ، ونطبق اختبارات التقارب المطبقة على السلسلة العددية ونبين بالتالي تقاربها أو تباعدها.

ملاحظة (6):

إن نصف قطر تباعد سلسلة القوى ذات الأس السالب التي من الشكل: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-(\alpha+\beta)}$، حيث α عدد طبيعي لا يساوي الصفر و β عدد طبيعي يعطى بالنهاية التالية:

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|^{1/\alpha}}$$

(6-2) سلاسل تايلور وماكلوران

$(\boldsymbol{Taylor\ amd\ Maclaurin\ Series})$

تهدف هذه الفقرة إلى إمكانية تمثيل تابع حقيقي معطى على شكل سلسلة قوى، وذلك في جوار نقطة ما (وفي حالة خاصة حول المبدأ $a = 0$). ونحتاج إلى هذه الآلية كثيراً في العلوم الرياضية، كالتحليل العددي، والتحليل المركب، والتحليل التابعي، وفي العلوم الهندسية، وخاصة التحكم الآلي، والاتصالات وغيرها.

وجدنا سابقاً أن سلسلة القوى قابلة للاشتقاق حداً حداً ضمن مجال تقاربها عدداً كيفياً من المرات، وبالتالي سنشترط في التابع المراد تمثيله في سلسلة قوى أن يكون قابلاً للاشتقاق عدداً لانهائياً من المرات في مجال تقارب سلسلة القوى الممثلة له. إن المدخل في هذه المسألة متعلق بما يسمى بسلسلة تايلور (نسبة للرياضي الانكليزي بروك تايلور (1685-1731)) وسلسلة ماكلوران (نسبة للرياضي الاسكتلندي كولين ماكلوران (1698-1745))، سنجد أن نشر التابع في سلسلة قوى حدودها أبسط من التابع نفسه.

تعد صيغة تايلور من أهم صيغ نشر تابع وفق سلسلة قوى.

صيغة تايلور $(\boldsymbol{Taylor's Formula})$

بفرض أن التابع $f(x)$ قابل للاشتقاق n مرة متتالية في النقطة x من R ومعين بكثيرة الحدود التالية:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \quad \cdots (1)$$

لنحدد قيم الثوابت $a_i\,;i=0,1,\dots,n$ وذلك باشتقاق العلاقة (1) n مرة متتالية:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ \dots+na_nx^{n-1}$$
$$f''(x)=2a_2+2.3a_3x+\ \dots+n(n-1)a_nx^{n-2}$$
$$f'''(x)=1.2.3a_3+4.3.2a_4x+\ \dots+n(n-1)(n-2)(n-3)a_nx^{n-3}$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$f^{(n-1)}(x)=(n-1)(n-2)\dots3.2a_{n-1}+n(n-1)(n-2)\dots3.2a_nx$$
$$f^{(n)}(x)=\mathrm{n}(n-1)(n-2)\dots3.2.1.a_n$$

بتعويض $x=0$ في جميع المعادلات السابقة، سنحصل على مايلي:

$$f(0)=a_0\ ,f'(0)=1!\,a_1\ ,f''(0)=2!\,a_2\ ,\dots,f^{(n-1)}(0)=(n-1)!\,a_{n-1}$$
$$f^{(n)}(0)=n!\,a_n$$

نلاحظ مما سبق أن أمثال كثيرة الحدود(1) قد تم تعينها بدلالة قيم التابع ومشتقاته في النقطة $x=0$ ، وبالتالي نجد أن:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ \dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\ \cdots(2)$$

لنعمم الصيغة السابقة (2) وذلك باختيار نقطة ما ولتكن a من R تلعب دور النقطة $x=0$، من أجل ذلك نفرض أن:

$$g(h)=f(a+h)\quad;\quad x=a+h$$

يعطى التابع $g(h)$ بالصيغة التالية:

$$g(h)=a_0+a_1(a+h)+a_2(a+h)^2+\ \dots+a_n(a+h)^n\ ---(3)$$

وهو كثيرة حدود من الدرجة n بالنسبة للمتحول الحقيقي h، وحسب العلاقة (2) تكتب العلاقة (3) بالشكل:

$$g(h)=g(0)+\frac{g'(0)}{1!}h+\frac{g''(0)}{2!}h^2+\ \dots+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}h^n$$

من ناحية ثانية، لدينا:

$$g(h)=f(a+h)\,,g'(h)=f'(a+h),g''(h)=f''(a+h),\dots$$
$$g^{(n)}(h)=f^{(n)}(a+h)$$

وبوضع $h=0$، نحصل على:

$$g(0)=\mathrm{f}(a)\ ,\ \ g'(0)=f'(a)\ ,\ \ g''(0)=f''(a),\dots,g^{(n)}(0)=f^{(n)}(a)$$

عندئذٍ تأخذ العلاقة (3) الشكل التالي:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\ \dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

وباستبدال المتحول h بالمتحول x في العلاقة الأخيرة سنجد:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$
$$+\ \dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\quad \dots\ (4)$$

نسمي الصيغة الأخيرة بصيغة تايلور (في النشر المنتهي)

ملاحظة (7):

يمكن أن نضيف للطرف الأيمن من العلاقة (4) الأخيرة حداً آخر يسمح من خلاله للعلاقة (4) التعبير عن أي تابع قابل للاشتقاق $(n+1)$ مرة متتالية في جوار النقطة $x=a$، من أجل ذلك سنستعرض **مبرهنة تايلور** التي تسمى في بعض المراجع بصيغة تايلور مع باقٍ.

لإثبات ذلك، نحتاج إلى **إحدى نتائج نظرية التزايدات المحدودة التالية:**

بفرض أن التابعين g,f قابلان للاشتقاق $(n+1)$ مرة متتالية في جوار ما D للنقطة a، إذا كان $g(x)\neq 0, g'(x)\neq 0,\dots,g^{(n+1)}(x)\neq 0$ حيث $x\neq a$ ، وكان أيضاً:

$$f(a)=f'(a)=f''(a)=\ \cdots=f^{(n+1)}(a)=0$$
$$g(a)=g'(a)=g''(a)=\ \cdots=g^{(n+1)}(a)=0$$

عندئذٍ تتحقق العلاقة التالية من أجل أية نقطة x من D مختلفة عن a:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}$$

حيث إن ξ نقطة تقع بين x و a.

مبرهنة (9) مبرهنة تايلور ($Taylor's Formula\ With\ Remainder$):

ليكن f تابعاً قابلاً للاشتقاق $(n+1)$ مرة متتالية في الجوار δ للنقطة a أي $]a-\delta, a+\delta[$ (ممكن أن يشمل الأعداد الحقيقية كلها). ولنفرض أن x نقطة من هذا الجوار عندئذ تتحقق العلاقة التالية:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \end{aligned}}$$

وحيث ξ نقطة واقعة بين a و x.

البرهان:

لنشتق التابع المساعد التالي n مرة متتالية:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$g'(x) = f'(x) - f'(a) - \frac{f''(a)}{1!}(x-a) - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

$$g''(x) = f''(x) - f''(a) - f'''(a)(x-a) - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)$$

من العلاقة السابقة نجد بسهولة أن:

$$g(a) = g'(a) = g''(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$$

لنحسب الآن المشتق النوني للتابع الجديد التالي:

$$h(x) = (x-a)^{n+1}$$

$$h'(x) = (n+1)(x-a)^n \quad , \quad h''(x) = n(n+1)(x-a)^{n-1}$$

$$h^{(n)}(x) = (n+1)n(n-1)(n-2)\ldots 2.1.(x-a) = (n+1)!\,(x-a)$$

ومن أجل $x = a$ نجد أن:

$$h(a) = \mathrm{h}'(a) = h''(a) = \ldots = h^{(n)}(a) = 0$$

وحسب النتيجة الواردة قبل نص هذه المبرهنة نجد أنه توجد نقطة ξ واقعة بين x و a و من أجلها يكون:

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{h^{(n+1)}(\xi)}$$

أي إن:

$$g(x)=\frac{g^{(n+1)}(\xi)}{h^{(n+1)}(\xi)}.h(x)$$

وبما أن: $h^{(n+1)}(x)=(n+1)!$ و $g^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$ فإن:

$$f(x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)-\ \dots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$=\frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

أي:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ \dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\ \cdots(5)$$

حيث ξ نقطة واقعة بين a و x وهي **الصيغة العامة لتايلور.**

يسمى الحد الأخير منها $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ بالحد الباقي (أو باقي تايلور للتابع $f(x)$).

ملاحظة (8):

1- إن العلاقة (4) هي حالة خاصة من العلاقة (5) السابقة، فإذا كان التابع $f(x)$ يمثل كثيرة حدود من الدرجة n فإن $f^{(n+1)}(x)=0$، مهما يكن x من R.

2- بعض المراجع العلمية تصوغ صيغة تايلور السابقة (5) بالشكل التالي:

بفرض أن: $x\neq a$; $\vartheta=\frac{Z-a}{x-a}$ و بالتالي يكون: $Z=a+\vartheta.h$ بحيث ϑ تحقق المتراجحة $0<\vartheta<1$، وبالتالي تأخذ صيغة تايلور(5) الشكل التالي:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}.h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\ \dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta.h)}{(n+1)!}.h^{n+1}$$

في حالة خاصة: إذا كان $a=0$ ، ستأخذ الصيغة (5) الصيغة التالية ،والمعروفة باسم **صيغة ماكلوران** العامة

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\vartheta . x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (6)$$

سلسلة تايلور وماكلوران $(\boldsymbol{Maclaurin\ and\ Taylor\ Series})$

ليكن f تابعاً ممثلاً بسلسلة القوى: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، التي نصف قطر تقاربها $0 < R$ ولتكن المشتقات $f^{(k)}(0)$ موجودة من أجل كل عدد صحيح موجب k و $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ ، فإن:

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots}$$

نسمي الطرف الأيمن من المساواة السابقة **بسلسلة ماكلوران** للتابع $f(x)$ في جوار النقطة 0 على $]-R,R[$ أو سلسلة ماكلوران المولدة للتابع f حول الصفر:

أما إذا كان التابع f ممثلاً بسلسلة القوى: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ والتي نصف قطر تقاربها $0 < R$، وكانت المشتقات $f^{(k)}(a)$ موجودة من أجل كل عدد صحيح موجب k و $a_n = \frac{f^{(k)}(a)}{n!}$، عندئذٍ يسمى الطرف الأيمن من العلاقة التالية **بسلسلة تايلور** للتابع $f(x)$ في جوار النقطة a على المجال $]a-R, a+R[$ أو بسلسلة تايلور المولدة لـ f حول النقطة a.

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots}$$

نسمي عادة a **بمركز النشر**، R نصف قطر النشر و $]a-R, a+R[$ **مجال النشر**، $|x-a| < R$ **شرط النشر** أو $x \in]a-R, a+R[$.

لاحظ أن سلسلة ماكلوران حالة خاصة من سلسلة تايلور، وذلك بوضع $a = 0$ في سلسلة تايلور. يمكن كتابة سلسلة ماكلوران وتايلور في الشكل المختصر التالي:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad , \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

لنعرف الآن **كثيرة حدود تايلور من الدرجة n** (أو المجموع الجزئي لسلسلة تايلور)، بفرض أن a عدد حقيقي، وأن f تابع حقيقي قابل للاشتقاق حتى المرتبة n ضمناً في النقطة a:

$f'(a), f''(a), \cdots, f^{(n)}(a)$، عندئذٍ تكون كثيرة حدود تايلور من الدرجة n والتي نرمز لها عادة بـ $P_n(x)$ هي:

$$P_n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

وبشكل مختصر تكتب كثيرة حدود تايلور بالشكل:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

وفي **حالة خاصة:** إذا كان $a = 0$ فسنحصل على ما يسمى كثيرة حدود ماكلوران من الدرجة n، أي:

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k$$

ملاحظات:

1. بعد أن عرفنا كثيرة حدود تايلور من الدرجة n، فإن باقي سلسلة تايلور $R_n(x)$ للتابع $f(x)$ بجوار النقطة c يعطى بالعلاقة:

$$\boxed{R_n(x) = f(x) - P_n(x)}$$

2. عند نشر تابع ما في سلسلة تايلور أو ماكلوران يجب التحقق من أن التابع المدروس يحقق شروط تايلور أو ماكلوران في النشر في جوار نقطة معينة وذلك فيما يتعلق بتعريف التابع واستمراره واشتقاقه، وكذلك $lim_{n\to\infty} R_n = 0$، وإلا فإن التابع لن يكون قابلاً للنشر، وبالتالي ستكون السلسلة غير متقاربة إلى التابع المفروض: على سبيل المثال التابع $ln\,x$ لا يمكن نشره بجوار الصفر لأن التابع $ln\,x$ غير محدود بجوار الصفر، كما أن مشتقاته غير معينة في جوار الصفر أيضاً، كما أنه لا يمكن نشر التابع $ln(x+1)$ إلا من أجل قيم x المحققة للشرط $x > -1$.

3. عند إثبات $lim_{n\to\infty} R_n = 0$ يتطلب الأمر إيجاد المشتق من المرتبة n والمشتق من المرتبة $n+1$ للتابع المفروض، وهي عملية قد تكون صعبة، لذا بالإمكان نشر مشتق

التابع أو تابعه الأصلي (إذا علم ذلك) بشكل سلسلة صحيحة متقاربة مطلقة ثم نكامل أو نشتق التابع في مجال التقارب لاحظ (8) من الأمثلة (2-7).

مثال (12):

أثبت أن الحد الباقي $R_n(x)$ للتابع $f(x) = \mathrm{e}^x$ يسعى نحو الصفر عندما n تسعى إلى ∞

الحل:

بما أن $f^{(n+1)}(x) = e^x$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\xi}.|x|^{n+1}}{(n+1)!} \le e^{|x|}\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

لأن: $0 < \xi < |x|$.

مبرهنة (10):

إذا كان للتابع f مشتقات حتى المرتبة $n+1$ ضمناً، وكانت هذه المشتقات محدودة في مجال $I \subseteq R$ (وهذا يعني وجود عدد حقيقي موجب $0 < M$ بحيث تتحقق المتراجحة $M > \left|f^{(n)}(x)\right|$ حيث $x \in I$) عندئذٍ التابع f يساوي مجموع سلسلة تايلور الموافقة له.

البرهان:

بما أن $M > \left|f^{(n)}(x)\right|$ ، فإن باقي السلسلة $R_n(x)$ يأخذ الشكل:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| < M\left|\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

من جهة ثانية السلسلة، التي حدها العام $\left|\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$، متقاربة (إذا طبقنا عليها اختبار النسبة، فإن حدها العام يسعى نحو الصفر عندما n تسعى نحو اللانهاية أي إن $(R_n(x))$ يسعى نحو الصفر عندما n يسعى نحو اللانهاية، وبالتالي يكون مجموع سلسلة تايلور في المجال I مطابقاً للتابع f.

(2-7) التابع التحليلي ($Analytic\ Function$)

غالباً ما نصادف التوابع التحليلية في التطبيقات العملية سواء أكان في التحليل الحقيقي أو في التحليل المركب (العقدي). ويعرف بالشكل:

تعريف: نقول عن التابع f إنه تحليلي في النقطة x_0 من R إذا أمكن تمثيله على شكل سلسلة تايلور في جوار النقطة x_0، فمثلاً التوابع التالية (التوابع المثلثية، توابع كثيرات الحدود، التابع الأسي، التوابع القطعية). جميعها توابع تحليلية في كل نقطة x_0 من R. أما التوابع الكسرية فهي تحليلية في جميع النقاط x من R باستثماء النقط التي تعدم المقام.

المبرهنة التالية تقدم لنا الشرط اللازم والكافي لكي يكون التابع f تحليلياً في جوار النقطة x_0. وسنقبلها بدون برهان.

مبرهنة (11):

بفرض f تابعاً حقيقياً يملك مشتقات مستمرة حتى المرتبة $(n+1)$ في جوار $N(x_0)$ للنقطة x_0، عندئذٍ الشرط اللازم والكافي لكي يكون التابع f تحليلياً في x_0 هو أن يتحقق الشرط:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$= 0 \;;\; \forall\, x \in N(x_0) \;;\; x_0 < \xi < x$$

(7-2) أمثلة:

1- أوجد سلسلة تايلور للتابع $f(x) = \sin x$ في النقطة $a = \frac{\pi}{3}$.

الحل:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \;,\; f'(x) = \cos x \;\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$
$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \;,\; f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \;,\cdots \quad ;\; \forall\; x \in R$$

بالتعويض في سلسلة تايلور في جوار النقطة a التالية:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

نجد أن:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x-\pi/3) - \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{[x-(\pi/3)]^2}{2!} - \frac{1}{2}.\frac{[x-(\pi/3)]^3}{3!}$$
$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{[x-(\pi/3)]^4}{4!} + \cdots \quad ;\quad \forall\; x \in R$$

إن السلسلة الأخيرة متقاربة من أجل جميع قيم x.

2- انشر التابع $f(x)=\frac{1}{x}$ في سلسلة تايلور بجوار النقطة $a=-2$. ثم حدد قيمة x والتي تكون السلسلة الناتجة متقاربة.

الحل:

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad\Longrightarrow\quad f(-2)=-\frac{1}{2}=-\frac{0!}{2}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2} \quad\Longrightarrow\quad f'(-2)=-\frac{1!}{2^2}$$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3} \quad\Longrightarrow\quad f''(-2)=-\frac{2!}{2^3}$$

$$f'''(x)=\frac{-3.2}{x^4} \quad\Longrightarrow\quad f'''(-2)=-\frac{3!}{2^4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k\frac{k!}{x^{k+1}} \quad\Longrightarrow\quad f^{(k)}(-2)=-\frac{k!}{2^{k+1}}$$

وبالتالي فإن سلسلة تايلور للتابع $\frac{1}{x}$ بجوار النقطة $a=-2$ (أو حسب قوى $x+2$) هي:

$$-\frac{1}{2}-\frac{(x+2)}{2^2}-\frac{(x+2)^2}{2^3}-\frac{(x+2)^3}{2^4}-\dots-\frac{(x+2)^k}{2^{k+1}}-\dots$$

نلاحظ أن السلسلة السابقة هي هندسية حدها الأول $-\frac{1}{2}$ وأساسها $\frac{x+2}{2}$ وبالتالي فهي متقاربة عندها $\left|\frac{x+2}{2}\right|<1$ أي $-4<x<0$ ومجموعها هو: $\frac{1}{x}=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{x+2}{2}}$

وبالتالي، فإن: $\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}-\frac{(x+2)}{2^2}-\frac{(x+2)^2}{2^3}-\dots-\frac{(x+2)^k}{2^{k+1}}-\dots$

ملاحظة (9): يمكن حل المثال السابق من دون استخدام المشتقات المتتالية بشكل مباشر ، بل بالاستفادة من منشور التابع التالي وفق سلسلة ماكلوران:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots+x^k+\dots \quad ; \quad |x|<1$$

بالطريقة التالية:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{(x+2)-2}=-\frac{1}{2-(x+2)}=-\frac{1}{2\left(1-\frac{x+2}{2}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1+\frac{x+2}{2}+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+\dots+\left(\frac{x+2}{2}\right)^k+\dots\right]$$

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{2} - \frac{x+2}{2^2} - \frac{(x+2)^2}{2^3} - \ \dots - \frac{(x+2)^k}{2^{k+1}} - \ \dots \quad ; \quad \left|\frac{x+2}{2}\right| < 1$$

3- انشر وفق سلسلة تايلور التابع: $f(x) = ln\, x$ بجوار النقطة $a = 1$، ثم حدد قيمة x التي تكون من أجلها السلسلة الناتجة متقاربة، ثم احسب $ln\, 2$.

الحل:

$$f(x) = ln\, x \quad \Rightarrow \quad f(1) = ln\, 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 1, f''(x) = -x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = 2x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f'''(1) = 2 \ \ , \ \ f^{(4)}(x) = -2.3x^{-4} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(1) = -2.3$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

بالتعويض في سلسلة تايلور حيث $a = 1$ نجد:

$$ln\, x \approx f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \cdots$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2!}{3!}(x-1)^3 - \frac{3!}{4!}(x-1)^4 + \cdots$$

$$= (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$$

$$\approx \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

لندرس الآن تقاربها، وذلك حسب اختبار النسبة:

الحد العام للسلسلة السابقة هو: $u_n = (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$

ومنه يكون:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} . \frac{n}{(-1)^{n-1}(x-1)^n}\right| = \frac{|x-1|}{1+\frac{1}{n}}$$

ومنه:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = |x-1|$$

وبالتالي، حسب اختبار النسبة تكون السلسلة الأخيرة، متقاربة عندما $|x-1| < 1$ ومتباعدة عندما $|x-1| > 1$. وبالتالي سنحصل على التقارب إذا كان

وعندما $0 < x < 2$ سنحصل على سلسلة توافقية متباعدة دائماً، أما من أجل $x = 0$ فسنجدها متقاربة وبالتالي، فإن مجال التقارب هو $0 < x \leq 2$، وبالتالي يكون $x = 2$ لدينا:

$$ln\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ \dots\dots\dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

4- اكتب كثيرة الحدود $x^4 - 3x^2 - 10x + 11$ على شكل سلسلة قوى لـ $x - 2$

الحل:

$$f(x) = x^4 - 3x^2 - 10x + 11 \quad \Longrightarrow \quad f(2) = -5$$
$$f'(x) = 4x^3 - 6x - 10 \quad \Longrightarrow \quad f'(2) = 10$$
$$f''(x) = 12x^2 - 6 \quad \Longrightarrow \quad f''(2) = 42$$
$$f'''(x) = 24x \quad \Longrightarrow \quad f'''(2) = 48$$
$$f^{(4)}(x) = 24 \quad \Longrightarrow \quad f^{(4)}(2) = 24$$

بالتعويض في سلسلة تايلور في جوار النقطة $a = 2$

$$x^4 - 3x^2 - 10x + 11 =$$
$$-5 + 10(x-2) + \frac{42}{2!}(x-2)^2 + \frac{48}{3!}(x-2)^3 + \frac{24}{4!}(x-2)^4$$

5- أوجد سلسلة تايلور للتابع: $f(x) = e^x$، بجوار النقطة $a = 0$ و $a = 1$، ثم أوجد قيمة x التي من أجلها تكون السلسلة الناتجة متقاربة.

الحل:

بما أن $f(x) = e^x$ فإن $f^{(n)}(x) = e^x$، وبالتالي $f^{(n)}(x) = e^0 = 1$ لكل $n \in N$ وبالتالي تأخذ سلسلة تايلور في جوار النقطة $(x = 0)$ (سلسلة ماكلوران) الشكل:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ \dots + \frac{x^n}{n!} + \ \dots$$

لنوجد الآن نصف قطر تقاربها، وذلك باستخدام اختبار النسبة، بما أن $u_n = \frac{x^n}{n!}$،

فإن:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1}$$

وبالتالي:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|.\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = |x|.0 = 0 < 1$$

مهما تكن x من R ، بالتالي فإن نصف قطر تقارب السلسلة المفروضة هو $R = \infty$.

اذاً، يمكن كتابة: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$، لكل x من R بوضع $x = 1$ في السلسلة الأخيرة سنحصل على:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

لنوجد الآن سلسلة تايلور للتابع $f(x) = e^x$ بجوار النقطة $a = 1$ وبما أن $f(x) = e^x$، فإن $f^{(n)}(x) = e^x$ وبالتالي $f^{(n)}(1) = e^1 = e$ وبوضع $a = 1$ في سلسلة تايلور نحصل على منشور التابع e^x بجوار $a = 1$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}(x-1)^n$$

وبإعادة المناقشة السابقة سنجد أن نصف قطر تقارب السلسلة الأخيرة هو $R = \infty$.

6- انشر التابع $f(x) = a^x$، حيث $1 < a \neq 0$ و $x \in R$ في سلسلة ماكلوران مع حساب باقي لاغرانج.

الحل:

تعطى سلسلة ماكلوران للنشر غير المنتهي بـ:

$$f(x) = \mathrm{f}(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta,x) \quad ; \quad 0 < \theta < 1$$

لدينا:

$$\begin{aligned}
&f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f(0) = a^0 = 1 \\
&f'(x) = a^x.\ln a \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \ln a \\
&f''(x) = a^x.\ln^2 a \quad \Rightarrow \quad f''(0) = \ln^2 a \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&f^{(n)}(x) = a^x \ln^n a \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = \ln^n a \\
&f^{(n+1)}(x) = a^x \ln^{n+1} a \quad \Rightarrow \quad f^{(n+1)}(\theta.x) = a^{\theta.x}\ln^{n+1} a
\end{aligned}$$

بالتعويض في سلسلة ماكلوران السابقة نجد:

$$a^x = 1 + \frac{x}{1!} \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + \cdots + \frac{x^n}{n!} \ln^n a + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} a^{\theta x} \ln^{n+1} a$$

لاحظ أنه من أجل $a = e$ نحصل على منشور التابع e^x وفق سلسلة ماكلوران وهو:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad ; \quad 0 < \theta < 1$$

7- انشر التابع: $ln(ax+b)$، حيث $b > 0$ و $x > -\frac{b}{a}$، وفق سلسلة ماكلوران مع باقي لاغرانج، ثم استنتج منشور التابع $ln(x+1)$.

الحل: لدينا:

$$f(x) = \ln(ax+b) \quad \Rightarrow \quad f(0) = \ln b$$
$$f'(x) = \frac{a}{ax+b} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \frac{a}{b}$$
$$f''(x) = \frac{-a^2}{(ax+b)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = \frac{-a^2}{b^2} = -\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

بالاستمرار على هذا الشكل نجد أن:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(ax+b)^n} . a^n \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0)$$
$$= (-1)^{n-1}(n-1)! \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

والباقي هو:

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} . \frac{a^{n+1}}{(a\theta x + b)^{n+1}}$$

بالتعويض في سلسلة ماكلوران نجد:

$$\ln(ax+b) = \ln b + \frac{x}{1} . \frac{a}{b} - \frac{x^2}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n +$$
$$+ (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{a^{n+1}}{(a\theta x + b)^{n+1}}$$

بوضع $a = 1 = b$ في السلسلة الأخيرة نجد أن سلسلة ماكلوران للتابع $ln(x+1)$ هي:

$$\ln(x+1) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} . \frac{1}{(\theta x + 1)^{n+1}}$$

ملاحظة (10):

إن شروط النشر وفق سلسلة تايلور أو ماكلوران محققة في جميع الأمثلة السابقة، وإذا جعلنا n تسعى نحو اللانهاية فسنحصل على نشر تايلور وماكلوران غير المنتهي بشرط أن:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

8- مستفيداً من منشور التابع $ln(x+1)$ ، حيث $x > -1$، استنتج منشور التابع $f(x) = \frac{1}{1+x}$ حيث $x \neq -1$ ومنشور التابع $\frac{1}{1-x}$; $x \neq 1$

الحل: باشتقاق السلسلة التالية حداً حداً:

$$ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ ...$$

نجد:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ ... + (-1)^n x^n + \ ... \ ; \ |x| < 1$$

أما من أجل إيجاد منشور التابع $\frac{1}{1-x}$ فنبدل في المنشور السابق كل x بـ $-x$ لنجد:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ .... + x^n + \ .... \ ; \ |x| < 1$$

لاحظ أنه من السلسلة الأخيرة يمكن إيجاد منشور التابع $ln|1-x|$، وذلك بمكاملة السلسلة الأخيرة حداً حداً (اعتبر ثابت التكامل يساوي الصفر) لنجد

$$ln|1-x| = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ ... - \frac{x^n}{n} - \ ...$$

9- انشر التابع $f(x) = sin\, x$ في جوار الصفر (ماكلوران)، ثم استنتج منه منشور التابع $\cos x$.

الحل: لدينا $f(0) = sin\, 0 = 0$، أما المشتقات المتتالية في النقطة $x = 0$ فهي على الترتيب.

$$f'(x) = cos\, x = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \ \Rightarrow \ f'(0) = sin\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f''(x) = -sin\, x = sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \ \Rightarrow \ f''(0) = sin(0 + \pi) = 0$$

$$f'''(x) = -cos\, x = sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) \ \Rightarrow \ f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = sin\, x = sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right) \ \Rightarrow \ f^{(4)}(0) = 0$$

وهكذا نستنتج أن $f^{(2n)}(0)=0$ وأن، $f^{(2n-1)}(0)=(-1)^{n-1}$، وبالتعويض في سلسلة ماكلوران للنشر نجد:

$$\sin x \approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ \dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ \dots$$

ويمكن التحقق بسهولة أن نصف قطر تقارب السلسلة السابقة هو ∞ والسلسلة متقاربة على R. كما أن $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$، حيث إن:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{\sin\left(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\ \ ;\ \ 0<\xi<x$$

(إذاً مجموع سلسلة ماكلوران للتابع $\sin x$ يطابق هذا التابع في كل نقطة من R)

بما أن سلسلة ماكلوران للتابع $\sin x$ تحقق شروط المبرهنة المتعلقة باشتقاق سلسلة تابعية على مجال $I\subseteq R$، فإنه باشتقاق سلسلة التابع $\sin x$ حداً حداً نجد:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ \cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n!}+\ \cdots$$

لاحظ أنه كان بالإمكان الحصول على منشور التابع $\cos x$، بمكاملة منشور التابع $\sin x$ حداً حداً (وضع ثابت التكامل مساوياً للصفر) لنحصل على نفس منشور التابع $\cos x$ بجوار الصفر.

10- استفد من منشور التابع $f(x)=e^x$ وفق سلسلة ماكلوران في إيجاد منشور التابعين $sh\,x\ ,\ ch\,x$.

الحل: وجدنا في المثال (6) السابق أن منشور التابع e^x وفق سلسلة ماكلوران هو:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\ \dots\ \ ;\ \ \forall\, x\in R$$

بتعويض $-x$ بـ x في المنشور السابق نجد:

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ \dots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ \dots\ \ ;\ \ \forall\, x\in R$$

وبما أن $ch\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$، فبجمع السلسلتين السابقتين وبعد التقسيم الناتج على العدد 2 نجد أن:

$$ch\,x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ \dots+\frac{x^{2n}}{2n!}+\ \dots\ \ ;\ \ \forall\, x\in R$$

أما من أجل إيجاد منشور التابع $sh\,x$، فيمكن نشره كما سبق علماً أن $sh\,x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ وبالتالي سنجد أن منشور $sh\,x$ هو:

$$sh\,x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad ; \quad \forall\, x \in R$$

أو بالطريقة التالية: بما أن $(ch\,x)' = sh\,x$، لذا نشتق منشور التابع $ch\,x$ حداً حداً لنجد:

$$(ch\,x)' = sh\,x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad ; \quad \forall\, x \in R$$

(8-2) سلسلة ذي الحدين (*Binomial Series*)

لسلسلة ذي الحدين تطبيقات عديدة نذكر منها في التكاملات، وفي حساب النهايات، وكذلك في العلوم الفيزيائية.

نعلم من مبرهنة ذي الحدين (كرخي_نيوتن) أنه إذا كان b, a عددين حقيقين وكان k عدداً صحيحاً موجباً فإن:

$$\begin{aligned}(a+b)^k = {} & a^k + k.a^{k-1}.b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}.b^2 \\ & + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}a^{k-3}.b^3 + \ldots \\ & + \frac{k(k-1)(k-2)\ldots\ldots\ldots(k-n+1)}{n!}a^{k-n}.b^n + \ldots \\ & + kab^{k-1} + b^k \qquad (*)\end{aligned}$$

وباستخدام رموز التوافيق التالية:

$$\binom{k}{0} = 1 \;\; , \;\; \binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2) - - - (k-n+1)}{n!} \quad ; \quad n = 1,2,\cdots,k$$

تأخذ الصيغة الأخيرة الشكل التالي:

$$\boxed{(a+b)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} a^{k-n}.b^n \;\; \cdots \; (*)}$$

في الحقيقة، إذا وضعنا $b = x, a = 1$ ، لنحصل على:

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n}\, x^n \;\; \cdots (\Delta)$$

هدفنا الآن كتابة التابع $(1+x)^k$، حيث k أي عدد حقيقي وليس صحيحاً على شكل سلسلة ماكلوران، من أجل ذلك نوجد المشتقات المتتالية حتى المرتبة n في النقطة $x = 0$.

$$f(x) = (1+x)^k \quad \Longrightarrow \quad f(0) = 1$$
$$f'(x) = k(1+x)^{k-1} \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = k$$
$$f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2} \quad \Longrightarrow \quad f''(0) = k(k-1)$$
$$f'''(x) = k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} \quad \Longrightarrow \quad f'''(0) = k(k-1)(k-2)$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$f^{(n)}(x) = k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)(1+x)^{k-n}$$
$$\Longrightarrow \quad f^{(n)}(0) = k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)$$

بالتعويض في سلسلة ماكلوران نجد:

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!} x^n$$

لاحظ أن $k-n$ لا يمكن أن يساوي الصفر لأن نتيجة تكون k ليس عدداً صحيحاً كما أن في كل الحدود لدينا $x \neq -1$.

لنوجد الآن مجال تقارب السلسلة الأخيرة وذلك باستخدام اختبار النسبة، إذا كان u_n الحد العام للسلسلة السابقة فنجد:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)(k-n)\, x^{n+1}}{(n+1)!} . \frac{n!}{k(k-1)\ldots(k-n+1)\, x^n}\right|$$

$$= \frac{|k-n|}{n+1} . |x| = \frac{\left|1-\frac{k}{n}\right|}{1+\frac{1}{n}} |x|$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما n تسعى نحو اللانهاية لنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|$$

إذاً، باستخدام اختبار النسبة تكون السلسلة المدروسة متقاربة عندما $|x| < 1$، ومتباعدة عندما $|x| > 1$.

يمكن برهان أن الحد الباقي في سلسلة ماكلوران $R_n(x)$ يسعى إلى الصفر عندما n إلى اللانهاية من أجل جميع قيم x المنتمية إلى $]-1,1[$، وبالتالي يكون لدينا من أجل $x \in]-1,1[$:

$$(1+x)^{\mathrm{k}} = 1 + \frac{\mathrm{k}}{1!}x + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{k(k-1)(k-2)---(k-n+1)}{n!}x^n + -$$

أو بالشكل:

$$(1+x)^k = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!}x^n$$

تسمى السلسلة السابقة بـ **سلسلة ذي الحدين**.

فمثلاً، بوضع $k = \frac{1}{2}$ نجد سلسلة القوى:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^4 - \dots$$

وبوضع $k = -\frac{1}{2}$ نجد:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 - \dots$$

أما إذا وضعنا $k = -1$ فنجد أن سلسلة القوى للتابع $\frac{1}{1+x}$ هي

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

ملاحظة (11):

إذا كان $|x| > 1$، فإن سلسلة ذي الحدين تتباعد إذا لم يكن k عدداً طبيعياً. أما إذا كان $x = -1$ أو $x = 1$ فإن السلسلة يمكن أن تتباعد أو أن تتقارب، وذلك حسب طبيعة العدد k.

إذا كان k عدداً طبيعياً، فإن السلسلة تتحول في دستور نيوتن ذي الحدين إلى كثيرة حدود من الدرجة n، لأن جميع أمثال السلسلة السابقة تنعدم ابتداءً من $n = \mathrm{k} + 1$، وبناءً على ذلك تكون متقاربة مهما تكن قيمة x من R.

والأمثلة التالية توضح ماسبق شرحه.

مثال (14):

انشر التابع $f(x) = (1 + x)^6$ حسب قوى x.

الحل:

نلاحظ هنا أن $k = 6$ عدد صحيح موجب وبالتالي، حسب العلاقة (Δ)

$$(1+x)^6 = \sum_{n=0}^{6} \binom{6}{0} x^n = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$$

مثال (15):

طبق سلسلة ذي الحدين في نشر التابع $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ حسب قوى x.

الحل:

لدينا هنا $k = -2$، إن أمثال سلسلة ذي الحدين هي:

$$\binom{-2}{n} = \frac{(-2)(-3)(-4)\ldots(-2-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n.2.3.4\ldots n(n+1)}{n!}$$
$$= (-1)^n(n+1)$$

وعندما يكون $|x| < 1$ يكون لدينا:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(n+1).x^n$$

مثال (16):

أوجد سلسلة ماكلوران للتابع: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$، ثم حدد نصف قطر تقارب السلسلة الناتجة.

الحل:

لنكتب أولاً التابع على شكل $(1+x)^k$،

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\frac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

لنستخدم الآن سلسلة ذي الحدين، حيث $k = -\frac{1}{2}$، وذلك باستبدال x بـ $-\frac{x}{4}$ لنحصل على:

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(-\frac{x}{4}\right)^n$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{4}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(-\frac{x}{4}\right)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}\left(-\frac{x}{4}\right)^3\right.$$
$$\left.+\ \dots+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(-\frac{x}{4}\right)^n+\ \dots\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{8}x+\frac{1.3}{2!\,8^2}x^2+\frac{1.3.5}{3!\,8^3}x^3+\ \dots+\frac{1.3.5\ \dots\ \dots\ (2n-1)}{n!\,8^n}x^n+\ \dots\right]$$

تتقارب السلسلة عندما تتحقق المتراجحة $\left|-\frac{x}{4}\right|<1$، أي أن $|x|<4$، وبالتالي فإن نصف قطر تقارب السلسلة هو $R=4$.

ملاحظة (12):

يمكن الاستفادة من سلسلة ذي الحدين في نشر بعض التوابع المثلثية العكسية مثل $arcsin\,x$ أو $arctan\,x$ .... والمثال التالي يوضح هذه الملاحظة.

مثال (17):

أوجد منشور التابع $f(x)=arcsin\,x$ حسب قوى x، **إرشاداً للحل** استفد من سلسلة ذي الحدين لنشر التابع $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ حسب قوى x.

الحل:

لننشر التابع $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ حسب قوى x أولاً، حيث $k=-\frac{1}{2}$ ، وبالتعويض في سلسلة ذي الحدين نجد:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2.1!}x+\frac{1.3}{2^2.2!}x^2-\frac{1.3.5}{2^3.3!}x^3+\ \dots$$
$$+\frac{(-1)^n1.3.5\ \dots\ (2n-1)}{2^n.n!}x^n+\ \dots$$

حيث $x\in]-1,1[$ ، نعوض في السلسلة السابقة $-x^2$ بدلاً من x لنجد:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2.1!}x^2+\frac{1.3}{2^2.2!}x^4+\frac{1.3.5}{2^3.3!}x^6+\ \dots$$
$$+\frac{(-1)^n1.3.5\ \dots\ (2n-1)}{2^n.n!}x^{2n}+\ \dots$$

حيث إن $x^2\in]-1,1[$ أو $x\in]-1,1[$. بمكاملة السلسلة الأخيرة حداً حداً نجد:

$$arcsin\,x=x+\frac{1}{2.1!}.\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2^2.2!}.\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2^3.3!}.\frac{x^7}{7}+\ \dots;\ x\in]-1,1[$$

(9-2) نشر التوابع الكسرية، وفق سلسلة ماكلوران:

توجد عدة طرائق متعددة لنشر التابع الكسري $f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$، حيث $P_n(x)$ و $Q_m(x)$ كثيرتا حدود، وبحيث يكون:

$$deg\,Q_m(x) > deg\,P_n(x)$$

(غير ذلك نقسم البسط على المقام)، إن أهم الطرق هي تفريق التابع الكسري إلى كسور بسيطة مع تحديد الثوابت، ثم نستخدم منشور ثنائي الحدين، والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (*18*):

انشر التابع: $f(x)=\frac{5-x}{-x^2-x+12}$، وفق سلسلة ماكلوران.

الحل:

نلاحظ أولاً أن: $-x^2-x+12=(x+4)(3-x)$

$$\frac{5-x}{-x^2-x+12}=\frac{5-x}{(x+4)(3-x)}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{3-x}$$

بتحديد الثوابت ، وذلك بتوحيد المقامات وحذفها، وإجراء المطابقة نجد أن:

$$A=\frac{9}{7}\ ,\ B=\frac{2}{7}\quad ,\quad f(x)=\frac{9}{7}.\frac{1}{x+4}+\frac{2}{7}.\frac{1}{3-x}\quad \cdots(1)$$

لنستخدم الآن منشور ذي الحدين للتابعين $\frac{1}{x+4}$ و $\frac{1}{3-x}$:

$$\frac{1}{x+4}=\frac{1}{4}.\frac{1}{1+\frac{x}{4}}=\frac{1}{4}\left[1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{4^2}-\ \ldots+(-1)^n\frac{x^n}{4^n}+\ \ldots\right]$$

$$=\frac{1}{4}\sum(-1)^n\frac{x^n}{4^n}\quad ;\ |x|<4$$

$$\frac{1}{3-x}=\frac{1}{3}.\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}\left[1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}+\ \ldots+\frac{x^n}{3^n}+\ \ldots\right]$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\quad ;\quad |x|<3$$

بالتعويض في العلاقة (*1*) نجد:

$$f(x)=\frac{5-x}{(x+4)(3-x)}=\frac{9}{7}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{4^{n+1}}+\frac{2}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}\ ;\ |x|<3$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{9}{7}.\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}+\frac{2}{7}.\frac{1}{3^{n+1}}\right]x^n\quad ;\quad |x|<3$$

مثال (19):

انشر التابع التالي وفق سلسلة ماكلوران: $f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$

الحل:

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{\mathrm{A}}{1-x}+\frac{B}{(1-x)^2}$$

بعد توحيد المقامات وحذفها وإجراء عملية المطابقة نجد: $A=-1 \;\;,\;\; B=1$،

وبالتالي يكون:

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{-1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}\cdots(*)$$

وباستخدام سلسلة ذي الحدين نجد:

$$-\frac{1}{1-x}=-(1+x+x^2+\ \ldots+x^n+\ \ldots)=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad ; \quad |x|<1$$

لإيجاد منشور التابع $\frac{1}{(1-x)^2}$، نشتق طرفي المساواة السابقة بالنسبة لـ x لنجد:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+\ \ldots+nx^{n-1}+(n+1)x^n+\ \ldots \;\; ; \;\; |x|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n \quad ; \quad |x|<1$$

$$\frac{x}{(1-x)^2}=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n \quad ; \quad |x|<1$$

ملاحظة (13):

إن عملية نشر التابع f لا تتم فقط باستخدام النشر وفق سلسلة تايلور أو ماكلوران أو غيرها، فهناك طرائق أخرى تمكننا من نشر التابع المحقق لشروط معينة بسلاسل القوى، من إحدى هذه الطرائق هو استخدام السلسلة الهندسية حيث إن:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ \cdots+x^n+\ \cdots \quad ; \quad |x|<1$$

والأمثلة التالية توضح استخدام السلسلة السابقة.

مثال (20):

انشر التابع $f(x)=\frac{1}{2-x}$، مستخدماً السلسلة الهندسية السابقة:

الحل:

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}.\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\ \cdots+\frac{x^n}{2^n}+\ \cdots\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{2^3}+\ \cdots+\frac{x^n}{2^{n+1}}+\ \cdots$$

النشر الأخير صحيح من أجل $|x|<2$ و $n\in N$.

مثال (21):

مستفيداً من السلسلة الهندسية الآتية:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ \cdots+(-1)^n x^n+\ \cdots$$

انشر التابع الآتي:

$$f(x)=\frac{x}{3+2x}$$

الحل:

$$\frac{x}{3+2x}=\frac{x}{3\left(1+\frac{2}{3}x\right)}=\frac{x}{3}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{3}x}\right)$$
$$=\frac{x}{3}\left(1-\frac{2}{3}x+\frac{2^2}{3^2}x^2-\ \ldots+(-1)^n\frac{2^n}{3^n}x^n+\ \ldots\right)$$
$$\frac{x}{3+2x}=\frac{x}{3}-\frac{2}{3^2}x^2+\frac{2^2}{3^3}x^3-\ \ldots+(-1)^n\frac{2^n}{3^{n+1}}x^{n+1}+\ \ldots$$

النشر السابق صحيح من أجل $|x|<\frac{3}{2}$ وحيث $n\in N$.

2) الشكل الآخر من أشكال نشر التوابع بسلاسل قوى هو المكاملة حداً حداً وذلك بالاستفادة من منشور التابعين: $\frac{1}{1-x}$ و $\frac{1}{1+x}$ حسب قوى x.

والمثال التالي يوضح هذه الطريقة.

مثال (22):

انشر التابع: $f(x)=arcth\ x$ حسب قوى x.

الحل:

نعلم من مقرر التفاضل أن:

$$arcth\ x=\frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{2}[ln(1+x)-ln(1-x)]\ \cdots(*)$$

من ناحية ثانية، لدينا:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ ... + x^n + \ ... \ ; \ |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ ... + (-1)^n x^n + \ ... \ ; \ |x| < 1$$

بمكاملة المساوتين السابقتين حداً حداً (مع وضع ثابت التكامل يساوي الصفر) نجد:

$$ln|1-x| = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ ... - \frac{x^n}{n} - \ ...$$

$$ln|1+x| = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} - \ ...$$

بالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد:

$$arcth\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ ... + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ ... \quad ; \quad |x| < 1$$

3) الشكل الآخر من طرق النشر هو الاعتماد على اشتقاق حدود السلسلة حداً حداً. (إن هذه الطريقة تم تطبيقها كثيراً في هذا الفصل).

مثال (23):

انشر التابع $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ حسب قوى x.

الحل:

بما أن التابع $\frac{1}{(1-x)^2}$ هو مشتق التابع $\frac{1}{1-x}$، وبما أن منشور التابع $\frac{1}{1-x}$ حسب قوى x هو:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \ ; \ |x| < 1$$

فإن:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ ... + nx^{n-1} + \ ... \ ; \ |x| < 1$$

تهدف الفقرة التالية في إيجاد علاقات أولر والعلاقات بين التوابع المثلثية والتوابع القطعية، وذلك بالاستفادة من منشور التابع e^x.

لنوجد أولاً علاقات أولر: بما أن

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ ... + \frac{x^n}{n!} + \ ...$$

بوضع ix بدلاً من x في المنشور السابق نجد:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \dots + \frac{(ix)^n}{n!} + \dots$$

وبما أن $i = \sqrt{-1}\ ,\ i^2 = -1\ ,\ i^3 = -i\ ,\ i^4 = 1$

وهكذا نجد بعد ترتيب الحدود:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n!}x^{2n} + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\right)$$

وبما أن: $cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n!}x^{2n} + \dots$ و

$$sin\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

نجد:

$$e^{ix} = cos\,x + i\,sin\,x \quad \cdots (1)$$

وباستبدال كل x بـ $-x$ في العلاقة (1) نجد:

$$e^{-ix} = cos(-x) + i\,sin(-x) = \cos x - i \sin x \quad \cdots (2)$$

نسمي عادة العلاقات (1) و (2) بعلاقات أولر.

بجمع العلاقتين (1) و (2) والتقسيم على العدد 2 نجد:

$$cos\,x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \cdots (3)$$

$$sin\,x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \cdots (4)$$

لنوجد الآن العلاقات بين التوابع المثلثية والتوابع القطعية:

$$cos(ix) = \frac{e^{i^2x} + e^{-i^2x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch\,x$$

$$sin(ix) = \frac{e^{i^2x} - e^{-i^2x}}{2i} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2i} = i\frac{e^x - e^{-x}}{2} = i\,sh\,x$$

$$sh(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = i \sin x$$

$$ch\,(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = cos\,x$$

إذاً العلاقات هي: $cos(ix) = ch\,x \quad \& \quad sin(ix) = ish\,x$

$$sh\,(ix) = i\,sin\,x \quad \& \quad ch\,(ix) = cos\,x$$

(10-2) تطبيقات كثيرات حدود تايلور:

:($Applications\ of\ Taylor\ Polynomials$)

لسلاسل تايلور وماكلوران تطبيقات عددية. منها في حساب التفاضل والتكامل والمعادلات التفاضلية وفي حساب النهايات أيضاً، وفي التحليل العددي، وغير ذلك من العلوم الهندسية والتطبيقية و ......

سنتناول في هذه الفقرة بالإضافة إلى بعض تطبيقات كثيرات حدود تايلور الحساب التقريبي لمجموع سلاسل متقاربة، وكذلك استخدام النشر في حساب النهايات وفي **حساب التكاملات المستعصية.**

نذكر بداية بمفهوم الخطأ لـ كثيرة حدود تايلور: بفرض f تابع قابل للاشتقاق من المرتبة $(n+1)$ على المجال $I \subseteq R$، ولنفرض أن $x, a \in I$ بحيث $x \neq a$ عندئذٍ يكون الخطأ المرتكب عند تطبيق كثيرة حدود تايلور $f(x)$ من الدرجة n في النقطة a التالية:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

هو $|R_n(x)|$ حيث إن:

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad ; \quad a < \xi < x}$$

التطبيق الأول: الحساب التقريبي لمجموع سلسلة متقاربة:

اذا كان S مجموعاً لسلسلة عددية متقاربة أي:

$$S = \mathrm{u}_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

وبفرض S_n هو مجموع n حداً من حدود هذه السلسلة، عندئذٍ يمثل S_n القيمة التقريبية للعدد S، وعندئذٍ يكون الخطأ المرتكب يساوي إلى مجموع الحدود الباقية من السلسلة، ونرمز له بـ R_n، أي إن: $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ و

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+r} + \cdots$$

وبما أنه في أية سلسلة متقاربة، يكون بدءاً من دليل ما k:

$k < n \quad ; \quad |R_n| < \varepsilon$، عندئذٍ يمكننا دائماً اختيار العدد n بحيث يكون الخطأ المطلق $|R_n|$ للقيمة التقريبية S_n للمجموع S لا يتجاوز عدداً صغير بقدر كافٍ وليكن ε، معطى ببداية المسألة.

ملاحظة (14):

إذا كانت السلسلة المفروضة متناوبة، فتبقى قيمة الخطأ المطلق S_n أقل من u_{n+1}.

مثال (24):

احسب $sin(0.5)$ بتقريب قدره: $\varepsilon = 0.001$

الحل:

يعطى منشور التابع $sin\, x$ وفق ماكلوران بـ:

$$sin\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

بوضع $x = 0.5$ نجد:

$$sin(0.5) = 0.5 - \frac{(0.5)^3}{3!} + \frac{(0.5)^5}{5!} - \frac{(0.5)^7}{7!} + \quad \cdots (*)$$

إن:

$$u_1 = 0.5 \;, \qquad u_2 = \frac{(0.5)^2}{6} \;, \;\; u_3 = \frac{(0.5)^5}{120}$$

لنعين العدد الطبيعي n بحيث يكون $|R_n| < 0.001$، بما أن $|R_n| < u_{n+1}$، لنحسب القيم الدقيقة لبعض الحدود الداخلة في السلسلة: فمن أجل $n = 2$ يكون لدينا:

$$u_{n+1} = u_3 = \frac{(0.5)^3}{120} = 0.00026 < 0.001$$

وبالتالي فإن:

$$|R_2| < u_3 < 0.001$$

وهذا يعني أنه إذا أهملنا كل حدود السلسلة $(*)$ بدءاً من الحد الثالث، فإن قيمة $sin\, 0.5$ مقربة إلى ثلاثة أرقام عشرية تكون:

$$sin\, 0.5 \approx 0.5 - \frac{(0.5)^3}{6} = 0.479$$

مثال (25):

ليكن $f(x) = ln\, x$، والمطلوب:

1- أوجد $p_3(x)$ و $R_3(x)$ وذلك في النقطة $a = 1$.

2- أوجد القيمة التقريبية لـ $ln(1.1)$، لأربعة أرقام عشرية، واستخدم $R_3(1.1)$ في حساب القيمة التقريبية للخطأ المرتكب. في النقطة $x = 1$.

الحل:

تعطى كثيرة الحدود تايلور من الدرجة الثالثة بالشكل:

$$P_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

و $R_3(x) = \frac{f^{(4)}}{4!}(x-1)^4 \ ; \ 1 < \xi < x$

من أجل ذلك لنوجد المشتقات الأربع الأولى المتتالية للتابع $ln\, x$ في النقطة $x = 1$

$$\begin{array}{ll} f(x) = ln\, x & \Longrightarrow \ f(1) = 0 \\ f'(x) = x^{-1} & \Longrightarrow \ f'(1) = 1 \\ f''(x) = -x^{-2} & \Longrightarrow \ f''(1) = -1 \\ f'''(x) = 2x^{-3} & \Longrightarrow \ f'''(1) = 2 \\ f^{(4)}(x) = -6x^{-4} & \Longrightarrow \ f^{(4)}(\xi) = -6\xi^{-4} \end{array}$$

بالتعويض في عبارتي $P_3(x)$ و $R_3(x)$ نحصل على:

$$P_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3$$

$$R_3(x) = -\frac{6\xi^{-4}}{4}(x-1)^4 = -\frac{1}{4\xi^4}(x-1)^4 \ \ ; \ \ 1 < \xi < x$$

لنحسب الآن $ln\, 1.1$ ، أن

$$ln\, 1.1 = P_3(1.1) = 0.1 - \frac{1}{2}(0.1)^2 + \frac{1}{3}(0.1)^3 \approx 0.0953$$

لنحسب الآن الخطأ المرتكب في النقطة 1.1:

$$|R_3(1.1)| = \left| -\frac{(0.1)^4}{4\xi^4} \right| \ \ ; \ \ 1 < \xi < 1.1$$

بما أن $1 < \xi$، فإن: $\frac{1}{\xi} < 1$ ومنه يكون $\frac{1}{\xi^4} < 1$، وبالتالي:

$$|R_3(1.1)| = \left| -\frac{(0.1)^4}{4\xi^4} \right| < \left| -\frac{0.0001}{4} \right| = 0.000025$$

بما أن $0.000025 < 0.00005$ فتكون القيمة التقريبية للعدد $ln\, 1.1$ هي تقريباً 0.0953

مثال (26):

اكتب كثيرة حدود تايلور من الدرجة الثانية للتابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ في النقطة $a = 8$ ثم حدد دقة التقريب ، حيث $7 \le x \le 9$.

الحل:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \quad \Longrightarrow \quad f(8) = 2$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \quad \Longrightarrow \quad f'(8) = \frac{1}{12}$$
$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \quad \Longrightarrow \quad f''(8) = -\frac{1}{144}$$
$$f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$$

وبالتالي تكون صيغة تايلور هي:

$$\sqrt[3]{x} = f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 + R_2(x)$$

وبالتالي كثيرة الحدود التقريبية من الدرجة الثانية لتايلور للتابع $\sqrt[3]{x}$ هي:

$$\sqrt[3]{x} \approx P_2(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2$$

لنحسب الآن الباقي $R_2(x)$:

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-8)^3 = \frac{10}{27}\xi^{-\frac{8}{3}}\frac{(x-8)^3}{3!} = \frac{5(x-8)^3}{81\,\xi^{\frac{8}{3}}}$$

بما أن ξ بين 8 و x وبالتالي الخطأ المرتكب $|R_2(x)|$ يحسب بالشكل:

بملاحظة أن: $7 \le x \le 9$، ينتج أن $-1 \le x - 8 \le 1$، لذلك يكون $|x-8| \le 1$ ومنه يكون $|x-8|^3 \le 1$، لذلك وبسبب $\xi > 7$، يكون لدينا $\xi^{\frac{8}{3}} > 7^{\frac{8}{3}} > 179$ وبالتالي:

$$|R_2(x)| = \frac{5|x-8|^3}{81\xi^{\frac{8}{3}}} < \frac{5.1}{81.179} < 0.0004$$

وهكذا، إذا كان $7 \le x \le 9$ التقريب الوارد في الطلب السابق يكون 0.0004

لاحظ أنه من دون استخدام الآلة الحاسبة سنجد: $\xi^{\frac{8}{3}} > 7^{\frac{8}{3}} > 7^2 = 49$

وبالتالي عبارة الخطأ ستكون في هذه الحالة:

$$|R_2(x)| < \frac{5.1}{81.49} < 0.002$$

مثال (27):

احسب القيمة التقريبية للعدد $\sqrt[4]{e}$، بدقة 0.0001

الحل:

بما أن: $\sqrt[4]{e} = e^{\frac{1}{4}}$ لذا نستخدم صيغة تايلور للتابع $f(x) = e^x$ وذلك في النقطة $a = 0$، ونعلم أن منشور التابع e^x بجوار الصفر هو:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

حيث ξ بين الصفر و x. وإذا كنا نقرب العدد $e^{\frac{1}{4}}$، فإننا سنأخذ $x = \frac{1}{4}$ عندئذٍ $0 < \xi < 1/4$، لذا باستخدام أن $e < 3$، يكون لدينا:

$$e^{\xi} < e^{\frac{1}{4}} < 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3} < 2$$

$$R_n\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} < \frac{2}{(n+1)!\,4^{n+1}} = \frac{1}{2.4^n(n+1)!}$$

ولأجل $n = 3$ يكون لدينا:

$$\left|R_3\left(\frac{1}{4}\right)\right| < \frac{1}{2.4^3.4!} = \frac{1}{3072} < 0.0004$$

وهذا غير كافٍ بشكل جيد؛ لذا نأخذ $n = 4$، فنجد:

$$\left|R_3\left(\frac{1}{4}\right)\right| < \frac{1}{2.4^4.5!} = \frac{1}{61440} < 0.00002$$

لذلك، اختيارنا لـ $n = 4$ سنحصل على التقريب المطلوب وهو:

$$\sqrt[4]{e} \approx P_4\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2.2!} + \frac{1}{4^3.3!} + \frac{1}{4^4.4!} \approx 1.28402$$

التطبيق الثاني:

نصادف أحياناً بعض التوابع التي لا يمكن مكاملتها بالطرائق المألوفة في حساب التكاملات (كتغيير في المتحول أو بالتجزئة). مثل $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ أو $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}$؛ لذا نستخدم سلسلة تايلور أو سلسلة ماكلوران لنحصل على القيمة التقريبية لمثل هذه التكاملات، والأمثلة التالية توضح هذا التطبيق:

مثال (28):

احسب التكامل $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ بخطأ لا يتجاوز 0.0001

الحل:

بتعويض t^2 بـ x في السلسلة:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

نجد:

$$e^{-t^2} = 1 - \mathrm{t}^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}$$

بمكاملة المساواة السابقة حداً حداً نجد:

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^7}{7.3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

الخطأ: $R_n = |S - S_n|$ يتحدد بـ $|a_{n+1}| = \left|\frac{x^{2(n+1)+1}}{[2(n+1)+1](n+1)!}\right|$

وفي مثالنا هذا لدينا $x = 1$؛ لذا نحتاج إلى تحديد العدد n وبحيث يكون:

$$\frac{1}{(2n+3)(n+1)!} < 0.001 \;\; Or \;\; (2n+3)(n+1)! > 10.000$$

إذا كان $n = 6$ عندئذٍ $(2n+3)(n+1)! = (15)(7!) = 75600$، بهذا الاختيار لـ n (إذا كان $n = 5$ أيضاً يتحقق)، نجد أن:

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5.2!} - \frac{1}{7.3!} + \frac{1}{9.4!} - \frac{1}{11.5!} + \frac{1}{13.6!}$$

$$\approx 1 - 0.33333 + 0.1 - 0.02381 + 0.00463 - 0.00076 + 0.00011$$
$$= 0.74684$$

وإذا اكتفينا بأربعة أرقام عشرية نجد:

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt = 0.7468$$

مثال (29):

احسب التكامل: $I = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$، مستفيداً من منشور التابع $y = \ln x$

الحل:

نفرض $y = \sqrt{x}$ فيكون $y^2 = x$ ومنه فإن $2ydy = dx$ وبالتالي سيكون:

$$I = \int_0^y 2y \frac{\ln y^2}{y} dy = 2\int_0^y \ln y^2 \, dy$$

لدينا منشور التابع $2\,ln\,y^2$ حسب ماكلوران:

$$2\,ln\,y^2 = 2\left(y^2 - \frac{y^6}{3!} + \frac{y^{10}}{5!} - \ \dots + (-1)^{n+1}\frac{y^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ \dots\right)$$

نكامل المنشور حداً حداً من 0 إلى y حيث إن السلسلة في الطرف الأيمن متقاربة بانتظام لنحصل على:

$$2\int_0^y ln\,y^2\,dy = 2\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^7}{3!.7} + \frac{y^{11}}{5!.11} - \ \dots \right.$$
$$\left. + (-1)^{n+1}\frac{y^{4n-1}}{(2n-1)!\,(4n-1)}\right]$$

وبالعودة إلى المتحول x نجد:

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{ln\,x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{3!\,7} + \frac{x^{\frac{11}{2}}}{5!\,11} - \ \dots\right]$$

التطبيق الثالث: استخدام النشر في حساب النهايات

نعلم من دراستنا في (مقرر التفاضل) النهايات أنه توجد توابع تأخذ أحد أشكال عدم التعيين عندما x تسعى نحو a، حيث a عدد منته أو لانهائي، وقد استطعنا إزالة عدم التعيين، إما حسب خواص النهايات مباشرة وبعض النهايات الشهيرة، وإما باستخدام قاعدة لوبيتال، وسنتبين من خلال الأمثلة التالية كيف يمكن إزالة عدم التعيين للتابع f باستخدام النشر.

مثال (30):

احسب النهاية التالية، وذلك بطريقة النشر: $lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$.

الحل:

نعلم أن منشور e^x حسب ماكلوران هو:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

حيث $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$ و $lim_{x\to\infty} R_n(x) = 0$ ، وبالتالي

$$e^x - 1 = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ \dots + \frac{x^n}{n!} + \ \dots \ ; \ x \neq 0$$
$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ \dots$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ \dots\right)=1+\frac{0}{2!}+\frac{0}{3!}+\ \dots=1$$

إذاً :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

مثال (31):

أثبت أن $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=-\frac{1}{2}$، وذلك باستخدام النشر.

الحل:

نعلم أن منشور $\cos x$ و $e^{-\frac{x^2}{2}}$ (حسب منشور ماكلوران) هو على الترتيب:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ \cdots$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1+\frac{-\frac{x^2}{2}}{1!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3}{3!}+\cdots$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2.2!}-\frac{x^6}{2^3.3!}+\frac{x^8}{2^4.4!}-\ \cdots$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ \dots-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2.2!}-\frac{x^6}{2^3.3!}+\frac{x^8}{2^4.4!}-\ \dots\right)}{x^4}$$

بجمع الحدود المتشابهة نجد:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{2^2.2!}\right)-x^6\left(\frac{1}{6!}-\frac{1}{2^3.3!}\right)+x^8\left(\frac{1}{8!}-\frac{1}{2^4.4!}\right)-\ \dots}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\ \left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{2^2.2!}\right)-x^2\left(\frac{1}{6!}-\frac{1}{2^3.3!}\right)+x^4\left(\frac{1}{8!}-\frac{1}{2^4.4!}\right)-\ \dots$$

$$=\frac{1}{4.3.2.1}-\frac{1}{4.2.1}-0-0=\frac{1-3}{4.3.2.1}=-\frac{2}{24}=-\frac{1}{12}$$

التطبيق الرابع: استخدام النشر في إزالة حالات عدم التعيين.

نعلم من دراستنا في النهايات أنه توجد توابع تأخذ أحد أشكال عدم تعيين عندما x تسعى نحو a، حيث a عدد محدود أو غير محدود، وقد استطعنا إزالة عدم التعيين إما

مباشرة حسب خواص النهايات، وإما باستخدام قاعدة لوبيتال، سنبين فيما يلي كيفية إزالة عدم التعيين باستخدام النشر.

تعريف التابع اللامتناهي في الصغر:

إذا كان التابع $f(x)$ يسعى نحو الصفر عندما x يسعى نحو الصفر فإن $f(x)$ لا متناهي في الصغر مع x، وإذا كان $f(x)\underset{x\to 0}{\frown} ax^m$، فسنقول إن x هو لا متناهي في الصغر الأساسي، وإن ax^m هو الجزء الرئيسي للتابع $f(x)$.

تعريف التابعان المتكافئان:

نقول عن تابعين $f(x)$ و $g(x)$ معرفين على R أو على أية مجموعة جزئية من R: إنهما متكافئان في جوار النقطة $x = 0$، إذا تحقق الشرط: $lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$
ونكتب عندئذٍ: $f(x)\underset{x=0}{\frown} g(x)$ أو $f(x) = g(x)\big(1 + \varepsilon(x)\big)$ حيث $\varepsilon(x)$ لا متناه في الصغر مع x أي $\varepsilon(x) \to 0$، عندما x تسعى نحو الصفر.

ونعرف بصورة مماثلة التابعين المتكافئين عندما x تسعى نحو العدد a:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

ملاحظة (15):

إذا كتبنا النشر المحدود للتابع $f(x)$ فالحد الأول من النشر هو الجزء الرئيس للتابع $f(x)$.

نتيجة (1):

في جوار الصفر يكون كثير الحدود مكافئاً للحد الأدنى درجة، أما في جوار اللانهاية، فإن كثير الحدود يكافئ الحد الأعلى درجة. فمثلاً:

$x^3 + 2x^2 - x \sim x$ عندما x يسعى نحو الصفر.

$3x^3 - 21x^2 + x \sim 3x^3$ عندما x يسعى نحو اللانهاية.

مثال (32):

بما أن: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots\ldots$، فإن:

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\frown} x$$

وبما أن: $sin\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots\ldots$، فإن: $\sin x \underset{x\to 0}{\frown} x$

لنطبق الآن النشر في إزالة عدم التعيين.

حالة $\frac{0}{0}$: تحدث هذه الحالة في التابع $\frac{f(x)}{g(x)}$، حيث $f(x)$ و $g(x)$ ينتهيان نحو الصفر، عندما x يسعى نحو العدد a.

مثال (33):

أوجد نهاية التابع: $f(x)=\frac{(1-\cos x)\sin^2 x}{x^3\ln(1+x)}$ عندما x يسعى نحو الصفر.

الحل:

بما أن: $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\dots\dots$، فإن: $1-\cos x \underset{x\to 0}{\frown} \frac{x^2}{2}$

و $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\dots\dots\dots$، فإن: $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\frown} x$

و $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\dots\dots$ فإن: $\sin x \underset{x\to 0}{\frown} x$

وبالتالي، التابع المعطى يكافئ: $\frac{\frac{x^2}{2}.x^2}{x^3.x}=\frac{1}{2}$ إذاً: $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}$.

حالة $\frac{\infty}{\infty}$: تحدث هذه الحالة في التابع $\frac{f(x)}{g(x)}$، حيث $f(x)$ و $g(x)$ ينتهيان إلى اللانهاية عندما $x\to a$.

مثال (34):

أوجد نهاية التابع $y=\frac{e^{2x}+x^2}{e^x+x^3}$، عندما x تسعى نحو اللانهاية.

الحل:

بما أن $e^{2x}+x^2 \underset{x\to\infty}{\frown} e^{2x}$ و $e^x+x^3 \underset{x\to\infty}{\frown} e^x$، فإن:

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{e^x}=\infty$$

نقدم الآن باقي حالات عدم التعيين: $0^0, 1^\infty, \infty-\infty, 0.\infty$ من خلال الأمثلة التالية وعلى الترتيب:

مثال (35):

أوجد نهاية التابع: $y=\left(x+\sqrt{x}\right)\ln x$، عندما x يسعى نحو الصفر الموجب:

الحل:

بما أن $x+\sqrt{x} \underset{x\to 0^+}{\frown} \sqrt{x}$ فيكون: $y \underset{x\to 0^+}{\frown} \sqrt{x}\ln x$

أو: $y \underset{x\to 0^+}{\frown} 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}$ ، وبفرض $\sqrt{x}=t$، يكون لدينا: $y \underset{t\to 0}{\frown} 2t\ln t$

وهذا يعطي: $\lim_{x\to 0^+} y=0$.

مثال (36):

احسب $lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{cos\,x}{x\,sin\,x}\right)$.

الحل:

تكتب النهاية المدروسة بالشكل: $lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-x\,cos\,x}{x^2\,sin\,x}\right)$، وهذا من الشكل $\frac{0}{0}$،
وبما أن: x $sin\,x \underset{x\to 0}{\sim}$ و $\frac{x^3}{3}$ $sin\,x - x\cos x \underset{x\to 0}{\sim}$ لأن:

$$sin\,x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{120}-\ \dots\dots\dots\ \ \&\ \ \cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ \dots\dots\dots$$

نعوض فنجد:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sin\,x-x\,cos\,x}{x^2\,sin\,x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}}{x^2.x}=\frac{1}{3}$$

مثال (37):

أوجد نهاية التابع: $y=(cos\,x)^{1/x^2}$ عندما x تسعى إلى الصفر.

الحل:

لدينا: $ln\,y=\frac{1}{x^2}ln\,cos\,x$، وبما أن $-\frac{x^2}{2}$ $ln\,cos\,x \underset{x\to 0}{\sim}$ فيكون $lim_{x\to 0}\,ln\,y=-\frac{1}{2}$، وبالتالي فإن: $lim\ y=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

مثال (38):

أوجد نهاية التابع $y=(ln\,x)^{x-1}$، عندما x يسعى نحو 1^+.

الحل:

نأخذ لوغاريتم الطرفين نجد: $ln\,y=(x-1)\,ln\,ln\,x$، ولنبدل المتغير x بـ $1+z$ فنجد: $ln\,y=z\,ln(ln(1+z))$ وبما أن $ln\,z$ $ln(ln(1+z)) \underset{x\to 1^+}{\sim}$
لأن $ln\,z\sim z$، ويكون $z\,ln\,z$ $ln\,y \underset{x\to 1^+}{\sim}$
لأن: $lim_{x\to 1^+}\,ln\,y=0$، ومنه $lim_{x\to 1^+}\,y=e^0=1$.

(11-2) جدول لأهم السلاسل التابعية غير المنتهية:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ \dots+\frac{x^n}{n!}+\ \dots\qquad;\quad x\in R$$

$$sin\,x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ \dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ \dots\qquad;\quad x\in R$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \ \dots \quad ; \quad x \in R$$

$$ch\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \ \dots \quad ; \quad x \in R$$

$$sh\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ \dots \quad ; \quad x \in R$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ \dots + (-1)^n x^n + \ \dots \quad ; \quad |x| < 1$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ \dots \quad ; \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ \dots + x^n + \ \dots \quad ; \quad |x| < 1$$

$$ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ \dots - \frac{x^n}{n} + \ \dots \quad ; \quad |x| < 1$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ \dots \quad ; \quad x \in [-1,1]$$

$$a^x = 1 + \frac{ln\, a}{1!} x + \frac{ln^2 a}{2!} x^2 + \ \dots + \frac{ln^n a}{n!} x^n + \ \dots \quad ; x \in R \ \ \& \, 1 \neq a > 0$$

تمرينات محلولة

{1} حدد قيم x حتى تكون سلسلة القوى: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)}$ متقاربة.

الحل:

بما أن $n \in N \;\; ; \;\; a_n = \frac{x^n}{(n+1)}$ ، فيكون:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/(n+2)}{x^n/(n+1)}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = |x|$$

وبالتالي السلسلة المعطاة متقاربة مطلقاً عندما $|x| < 1$، ومتباعدة عندما $|x| > 1$ وإذا كان $x = 1$ فسنحصل على السلسلة العددية: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ وهي سلسلة عددية توافقية متباعدة.

اذا كان $x = -1$، فسنحصل على السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ وهي سلسلة عددية متناوبة وهي متقاربة شرطياً. اذاً قيم x التي تكون فيها سلسلة القوى المعطاة متقاربة هي $[-1,1[$.

{2} أعد الطلب السابق لسلسلة القوى: $\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k$

الحل:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!.\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

لذلك، إذا كان $x \neq 0$، السلسلة متباعدة ، ونصف قطر تقاربها $R = 0$.

{3} حدد قيمة x حتى تكون سلسلة القوى: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ متقاربة ثم استنتج نصف قطر تقاربها.

الحل:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

وبالتالي فإن السلسلة متقاربة من أجل جميع قيم x الحقيقية. وهنا نصف قطر تقاربها $R = \infty$.

{4} حدد مجال تباعد سلسلة القوى التالية:

$$1 - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{3}(x-3) + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n+1}(x-3)$$

الحل:

إن الحد العام لهذه السلسلة هو:

$$a_n = (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n+1}$$

وبالتالي:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+2}.\frac{n+1}{(x-3)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}.(x-3)\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)|x-3| = 1.|x-3|$$

وبالتالي السلسلة المدروسة تكون متقاربة عندما $|x-3| < 1$، أي إن:

$$2 < x < 4 \quad or \quad -1 < x-3 < 1$$

تكون السلسلة المدروسة متباعدة إذا $x > 4$ أو $x < 2$.

أما من أجل $x = 4$ فنحصل بعد التعويض في السلسلة المعطاة على السلسلة العددية:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \cdots$$

وهي سلسلة عددية متقاربة.

أما من أجل $x = 2$ فنحصل على السلسلة العددية:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} + \dots$$

وهي متباعدة، إذاً مجال تقارب السلسلة المعطاة هو $]2,4]$، وبالتالي مجال تباعد السلسلة هي: $]-\infty,2[\cup]4,+\infty[$.

{5} أثبت أن مجال تقارب سلسلة القوى: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}x^n$ هو $-1 \le x < 1$

الحل:

الحد العام لهذه السلسلة هو: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}x^n$، كما أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}.\frac{\sqrt{n}}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}.x\right| =$$

$$= |x|.\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) = |x|.1 = |x|$$

السلسلة المدروسة تكون متقاربة (حسب اختبار النسبة) عندما يتحقق: $|x| < 1$ أو $-1 < x < 1$، وتكون متباعدة عندما $x > 1$ أو $x < -1$ وفي حالة $x = 1$ نحصل على السلسلة العددية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(1)^n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots$$

والتي هي $p-$، سلسلة، حيث $P = \frac{1}{2}$، وهي متباعدة.

في حالة $x = -1$ نحصل على السلسلة العددية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(-1)^n = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots$$

وهي سلسلة متقاربة، إذاً مجال تقارب السلسلة المدروسة هو: $-1 \le x < 1$.

{6} ادرس تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$، محدداً نصف قطر التقارب، وبالتالي مجال التقارب.

الحل: لدينا:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

أي إن: $|x| = 1$ أو $x = \pm 1$.

لنبدل في السلسلة الأخيرة المفروضة x بـ 1 فسنحصل على السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ وهي سلسلة متباعدة. أما من أجل $x = -1$ فسنحصل على السلسلة العددية المتناوبة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ وهي متقاربة شرطياً.

{7} أوجد مجال تقارب السلاسل التالية:

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n(5^n+1)} \quad , \quad (2)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \quad , \quad (3)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . 2^{n.x}$$

الحل: من أجل السلسلة (1) نطبق اختبار النسبة لنجد:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n(5^n+1)} . \frac{(n+1)(5^{n+1}+1)}{1}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} . \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}+1}{5^n+1} = 1. \lim_{n\to\infty} \frac{5 + \frac{1}{5^n}}{1 + \frac{1}{5^n}} = 5$$

وبالتالي: إن مجال التقارب هو $R = 5$ أي أن: $\frac{|x+2|}{5} < 1$ أي إن: $|x+2| < 5$ أو $-7 < x < 3$، أي إن مجال التقارب هو $]-7,3[$، أما مجال التباعد فهو جميع قيم x الأخرى أي:

$$x \in]-\infty,-7[\cup]3,\infty[$$

ونحصل على حالة شك عندما $x=-7$, $x=3$ ، سنجد بإبدال $x=-7$ السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{n(5^n+1)}$ وهي سلسلة متقاربة أما من أجل $x=3$ ، فسنحصل على السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n(5^n+1)}$ المتباعدة (يمكن التحقق من ذلك باختبار المقارنة).

من أجل السلسلة (2) نطبق عليها اختبار الجذر النوني لإيجاد نصف قطر التقارب:

$$R = \lim_{n\to\infty}|a_n|^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n}\right|^{-\frac{1}{n}} = 2$$

أي إن السلسلة (2) متقاربة مطلقاً على المجال $]-2,2[$، ومجال التباعد هو:

$$]-\infty,-2[\cup]2,\infty[$$

ومن أجل $x=+2$ نحصل على السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty}(1)^n$ وهي سلسلة متباعدة لأن حدها العام لا يسعى نحو الصفر.

ومن أجل $x=-2$ نحصل على السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ وهي سلسلة متباعدة أيضاً لكون حدها العام لا يسعى نحو الصفر.

أما من أجل السلسلة (3)، فسنطبق عليها اختبار الجذر النوني (كوشي)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n . 2^{n.x}\right|}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)|2^x| = 2^x$$

إذا كان $2^x < 1$ ، فإن $x < 0$ ، وتكون السلسلة المدروسة متقاربة.

إذا كان $2^x = 1$، فإن $x = 0$ ونحصل من السلسلة المعطاة على السلسلة المتباعدة: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$، إذاً مجال تقارب السلسلة المدروسة هو $]-\infty,0[$.

{8} لتكن سلسلة القوى:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n . x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

أوجد مجموعها ثم تكاملها.

الحل:

لندرس تقارب هذه السلسلة أولاً: $lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{x^{2n}}\right| = x^2$ السلسلة متقاربة من أجل $-1 < x < 1$، لنحسب مجموع هذه السلسلة، وهي سلسلة هندسية أساسها $-x^2$، وبالتالي فإن مجموعها: $S(x) = \frac{1}{1-(-x^2)}$ أي إن $S(x) = \frac{1}{1+x^2}$ أي إن:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ ...$$

بمكاملة الطرفين من 0 حتى x حيث $-1 < x < 1$ نجد:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = arctg\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ ...$$

{9} لتكن السلسلتان:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

المطلوب عين السلسلة الناتجة عن ضرب هاتين السلسلتين:

الحل:

إن السلسلتين متقاربتين من نفس المجال وهو $-1 < x < 1$ والسلسلة الناتجة عن الضرب تتقارب من نفس المجال نفسه أيضاً.

إن أمثال السلسلة الناتجة تحسب بعد معرفة أمثال السلسلتين وهما:

$$a_n = 1 \quad , \quad b_n = (-1)^n$$

وبالتالي:

$$c_n = \sum_{m=0}^{n} a_n . b_{n-m} = \sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}$$

وهذا يعطينا مجموع حدود متساوية بالقيمة المطلقة ومختلفة بالإشارة، فإذا كان n عدداً فردياً كان عدد الحدود في المجموع عدد زوجي وبالتالي مجموعها يساوي الصفر أي إن c_n من أجل n فردي معدومة.

أما إذا كان n زوجي لكان c_n مساوياً $(+1)$، وبالتالي السلسلة الناتجة عن الضرب هي:

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots$$

{**10**} أثبت أن المشتق الأول لسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ المتقاربة هو سلسلة قوى لها نصف قطر التقارب نفسه.

تطبيق:

أوجد نصف قطر تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n$، ونصف قطر تقارب مشتقها.

الحل:

نصف قطر التقارب للسلسلة المفروضة يعطى بـ: $R = lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ لنشتق سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حداً حداً لنحصل:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$$

لنحسب نصف قطر تقارب سلسلة القوى الأخيرة، وذلك حسب اختبار النسبة:

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n a_n}{(n+1)a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}.\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1.R = R$$

التطبيق:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{3^n}.\frac{3^{n+1}}{n+1}\right| = 3$$

لنفرض أن R_1 هو نصف قطر تقارب السلسلة الناتجة عن الاشتقاق: فيكون:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}\ x^{n-1}$$

ويكون:

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^2}{3^n} \times \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\right| = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 3.1 = 3$$

ينتج مما سبق أن $R = R_1 = 3$

{**11**} من المعلوم أن مكاملة سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حداً حداً هي سلسلة قوى جديدة، لها نصف قطر تقارب السلسلة الأصلية نفسه.

تطبيق:

أوجد نصف قطر تقارب سلسلة القوى: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n.x^n$، ونصف قطر السلسلة الناتجة عن تكاملها.

الحل:

نحسب أولاً نصف قطر سلسلة القوى المفروضة:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{2^{n+1}}\right| = \frac{1}{2}$$

نكامل سلسلة القوى حداً حداً لنحصل:

$$\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^n\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x 2^n\, x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}.x^{n+1}$$

لنحسب الآن نصف قطر تقارب السلسلة القوى الأخيرة وليكن R_1.

$$R_1 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{n+1}.\frac{n+2}{2^{n+1}}\right| = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$$

أي إن $R = R_1 = \frac{1}{2}$.

{12} أوجد نصف قطر تقارب ومجال تقارب سلسلة القوى: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)^2}$

الحل:

لنجر التحويل التالي: $u = x-3$، أي أن $x = u+3$، حيث u متحول حقيقي وبالتالي ستأخذ سلسلة القوى المفروضة الشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n (n+1)^n$$

لنحسب نصف قطر تقارب السلسلة الأخيرة:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 = 1$$

إذاً نصف قطر تقارب السلسلة الأخيرة هو: $R = 1$.

إذا كان $u = -1$، فستأخذ السلسلة الأخيرة الشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n.u^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$

وهي متقاربة (بالمقارنة مع السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$).

إذا كان $u = 1$، فسنحصل على السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ وهي متقاربة أيضاً. إذاً مجال تقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n.u^n}{(n+1)^2}$ هو $[-1,1]$ لكن، بما أن $u = x-3$،

فيكون $-1 \le x-3 \le 1$ أو $2 \le x \le 4$، إذاً مجال تقارب سلسلة القوى الأصلية هو $[2,4]$.

{**13**} أوجد سلسلة القوى للتابع: $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$

الحل:

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$$

إن $k = \frac{1}{3}$، بالتعويض في سلسلة القوى التالية:

$$(1+x)^k = 1 + k.x + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}.x^n$$

حيث $k = \frac{1}{3}$ نجد أن:

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}.x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3 \dots$$
$$+ \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\dots\dots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}.x^n + \dots$$

أو بالشكل:

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3^2.2!}x^2 + \frac{1.2.5}{3^3.3!}x^3 + \dots$$
$$+ (-1)^{n+1}\frac{1.2\dots(3n-4)}{3^n.n!}.x^n + \dots$$

حيث $|x| < 1$.

{14} مستفيداً من منشور التابعين $\frac{1}{1-x}$ و $\frac{1}{1+x}$، انشر التابع:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2+2x-3}$$

الحل:

لنكتب التابع بدلالة التابعين $\frac{1}{1-x}$ و $\frac{1}{1+x}$، وذلك بتفريق الكسر $\frac{2x-1}{x^2+2x-3}$ إلى كسور بسيطة (مع تحديد الثوابت).

$$\frac{2x-1}{x^2+2x-3} = \frac{2x-1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

بتوحيد المقامات وحذفها وإجراء المطابقة نجد أن $A = \frac{1}{4}$ و $B = \frac{7}{4}$ وبالتالي يكون لدينا:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}\right) = -\frac{1}{4}(1 + x + x^2 + \ \dots + x^n + \ \dots) \ ; \ |x| < 1$$

كما أن:

$$\frac{7}{4}\left(\frac{1}{3+x}\right) = \frac{7}{4.3}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{3}}\right)$$
$$= \frac{7}{4.3}\left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} - \ \dots + (-1)^n \frac{x^n}{3^n} + \ \dots\right) \ ; \ |x| < 3$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\frac{2x-1}{x^2+2x-3} = -\frac{1}{4}(1 + x + x^2 + \ \dots + x^n + \ \dots) +$$
$$+\frac{7}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{3^2} + \frac{x^2}{3^3} - \ \dots + (-1)^n \frac{x^n}{3^{n+1}} + \ \dots\right)$$

وبجمع الحدود المتشابهة نجد:

$$= \frac{1}{3} - \frac{4}{9}x - \frac{5}{27}x^2 + \ \dots + \frac{1}{4}\left((-1)^n \frac{7}{3^{n+1}} - 1\right)x^n + \ \dots$$

والنشر الأخير صحيح حيث $|x| < 1$.

{**15**} أوجد النشر غير المنتهي بجوار العدد الحقيقي a للتابع الأسي:

$$f(x) = e^{x-a}$$

الحل:

التابع e^{x-a} يحقق شروط تايلور للنشر بجوار النقطة a لأنه معرف ومستمر في مجال تعريفه $]-\infty, \infty[$، كما أن منشور تايلور مع الحد الباقي هو:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ \dots$$
$$+ \frac{(x-a)^n}{n!} . f^{(n)}(a)$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \ ; \ 0 < \theta < 1$$

$$f(x) = e^{x-a} \ \Rightarrow \ f(a) = e^{a-a} = e^0 = 1$$
$$f'(x) = f''(x) = \ \dots = f^{(n)}(x) = e^{x-a}$$
$$f'(a) = f''(a) = \ \dots = f^{(n)}(a) = e^{a-a} = 1$$
$$f^{(n+1)}(x) = e^{x-a} \ \Rightarrow \ f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)] = e^{a+\theta(x-a)-a} = e^{\theta(x-a)}$$

وبالتالي يكون الباقي:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta(x-a)}$$

بالتعويض في منشور تايلور نجد:

$$e^{x-a}=1+\frac{x-a}{1!}+\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta(x-a)}\ ;$$
$\theta\in]0,1[$

للانتقال إلى النشر غير المنتهي، يجب أن نبرهن أن: $lim_{n\to\infty} R_n=0$.

أو أن نبرهن أن السلسلة غير المنتهية التالية متقاربة:

$$1+(x-a)+\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}+\cdots$$

من أجل ذلك نستخدم اختبار النسبة:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|x-a|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

وبالتالي السلسلة متقاربة مطلقاً، إذاً منشور التابع e^{x-a} وفق دستور تايلور في النشر غير المنتهي هو:

$$e^{x-a}=1+(x-a)+\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}+\cdots$$

لاحظ أنه إذا وضعنا $a=0$ سنحصل على منشور التابع e^x وفق منشور ماكلوران غير المنتهي:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

{16} انشر التابع $f(x)=e^{-2x}$ وفق سلسلة ماكلوران، ثم أوجد قيمة x التي من أجلها تكون السلسلة الناتجة متقاربة.

الحل:

$$f(x)=e^{-2x}\quad\Longrightarrow\quad f(0)=e^0=1$$
$$f'(x)=-2e^{-2x}\quad\Longrightarrow\quad f'(0)=-2$$
$$f''(x)=2^2e^{-2x}\quad\Longrightarrow\quad f''(0)=2^2$$
$$f'''(x)=-2^3e^{-2x}\quad\Longrightarrow\quad f'''(0)=-2^3$$

بالتعويض في سلسلة ماكلوران نجد:

$$e^{-2x}=1-2x+\frac{2^2}{2!}x^2-\frac{2^3}{3!}x^3+\frac{2^4}{4!}x^4+\ \ldots+(-1)^n\frac{2^n}{n!}x^n+\ \ldots$$

لنوجد الآن قيمة x التي تكون من أجلها السلسلة الأخيرة متقاربة.

بتطبيق اختبار النسبة نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{2^n.x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0$$

اذاً السلسلة السابقة متقاربة مهما تكن قيمة x.

{**17**} مستفيداً من علاقات أولر، أثبت صحة العلاقة:

$$\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

الحل:

بما أن $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ فيكون لدينا:

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3ix}-3e^{2ix}.e^{-ix}+3e^{ix}.e^{-2ix}-e^{-3ix}}{-8i}$$

$$= \frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{-8i} = \frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{-8i} - \frac{3\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)}{-8i}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

{18} اكتب صيغة تايلور للتابع $f(x) = \ln(1+x)$، حيث $a = 0$ و $n = 5$، ثم احسب $\ln(1.2)$ واحسب قيمة الخطأ المرتكب.

الحل:

$$f(x) = \ln(1+x) \quad \Rightarrow \quad f(0) = \ln 1 = 0$$
$$f'(x) = (1+x)^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -(1+x)^{-2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = 2(1+x)^{-3} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 2$$
$$f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(0) = -6$$
$$f^{(5)}(x) = 24(1+x)^{-5} \quad \Rightarrow \quad f^{(5)}(0) = 24$$
$$f^{(6)}(x) = -120(1+x)^{-6}$$

وبالتالي فإن صيغة تايلور للتابع $f(x)$ هي:

$$\ln(1+x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + R_5(x)$$

$$= x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 + \frac{24}{5!}x^5 + R_5(x)$$

حيث:

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}x^6 = -\frac{120}{(1+\xi)^6.6!}x^6 = -\frac{x^6}{6(1+\xi)^6} \quad ; \quad 0 < \xi < x$$

لحساب $ln(1.2)$، لدينا:

$$ln(1+x) \approx P_5(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

عملياً لدينا $x = 0.2$، وبالتالي:

$$ln(1.2) \approx 0.2 - \frac{(0.2)^2}{2} + \frac{(0.2)^3}{3} - \frac{(0.2)^4}{4} + \frac{(0.2)^5}{5} \approx 0.18233067$$

لنحسب الآن الخطأ المرتكب في النقطة 0.2

$$|R_5(0.2)| = \frac{(0.2)^6}{6(1+\xi)^6} \quad ; \quad 0 < \xi < 0.2$$

بما أن $0 < \xi$، فيكون $\frac{1}{1+\xi} < 1$ وبالتالي $\frac{1}{(1+\xi)^6} < 1$ وبالتالي:

$$|R_5(0.2)| = \frac{(0.2)^6}{6(1+\xi)^6} < \frac{(0.2)^6}{6} = \frac{0.000064}{6} < 0.000011$$

لذلك يكون الخطأ المرتكب أقل من 0.000011

{**19**} ماهي أكبر قيمة للخطأ المرتكب، عند استخدام التقريب:

$$sin\, x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

حيث $-0.3 \le x \le 0.3$ ثم استخدم التقريب السابق لحساب $sin(12^0)$ مقرباً لستة أرقام عشرية.

الحل:

بما أن $f(x) = sin\, x$، فإن: $f^{(6)}(0) = -sin\, 0 = 0$، وباستخدام صيغة تايلور حيث $n = 6$ نجد:

$$sin\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_6(x)$$

حيث $R_6(x) = \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}x^7 = -cos\, \xi \frac{x^7}{7!}$ حيث $-0.3 \le x \le 0.3$ أو $|x| \le 0.3$ ، وبذلك يكون:

$$|R_6(x)| = |cos\, \xi|.\frac{|x|^7}{7!} \le \frac{|x|^7}{7!} \le \frac{(0.3)^7}{7!} \le 0.00000005$$

وهذا يعني أن أكبر قيمة للخطأ المرتكب أصغر من 0.00000005

لإيجاد $sin\, 12^0$ نحول أولاً من درجة إلى راديان، أي:

$$sin\,12^0 = sin\left(\frac{12\pi}{180}\right) = sin\left(\frac{\pi}{15}\right)$$

وبالتالي:

$$sin\left(\frac{\pi}{15}\right) \approx \frac{\pi}{15} - \left(\frac{\pi}{15}\right)^2 . \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{15}\right)^5 . \frac{1}{5!} \approx 0.20791169$$

لاحظ أن القيمة الحقيقية لـ $sin\,12^{\circ}$ هي تقريباً $sin\,12^0 \approx 0.207912$.

{**20**} أوجد سلسلة ماكلوران للتابع: $\frac{1}{1+x^2}$، مستفيداً من منشور التابع $\frac{1}{1-x}$ وفق سلسلة ماكلوران

الحل:

نعلم أن سلسلة ماكلوران للتابع $\frac{1}{1-x}$ هي:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \;\; ; \;\; |x| < 1$$

باستبدال x بـ $-x^2$ في السلسلة الأخيرة نجد:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

بما أن السلسلة الأخيرة سلسلة هندسية ، فهي متقاربة عندما $|-x^2| < 1$ وهذا يعني أن: $x^2 < 1$ أو $|x| < 1$.

{**21**} استفد من التمرين السابق في إيجاد سلسلة ماكلوران للتابع $f(x) = arctan\,x$

الحل:

بما أن $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$: بمكاملة سلسلة ماكلوران للتابع $\frac{1}{1+x^2}$ (انظر التمرين السابق) حداً حداً نجد:

$$arctan\,x = \int \frac{dx}{1+x^2} = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)\,dx$$

$$= c + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

لإيجاد قيمة ثابت التكامل c ، نضع $x = 0$ فنجد $c = arctan(0) = 0$ بذلك تكون سلسلة ماكلوران للتابع $arctan\,x$ هي:

$$arctan\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

بما أن نصف قطر تقارب سلسلة التابع $\frac{1}{(1+x^2)}$ هو الواحد لذلك يكون نصف قطر تقارب السلسلة للتابع $arctan\, x$ هو الواحد أيضاً.

{22} أوجد سلسلة ماكلوران للتابع $f(x) = x.\cos x$

الحل:

نعلم أن سلسلة ماكلوران للتابع $\cos x$ هي:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \;\; ; \;\; \forall\, x \in R$$

بضرب السلسلة الأخيرة بـ x نجد:

$$x.\cos x = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + \dots = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$

{23} مستخدماً النشر، احسب النهاية التالية:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} \;\; ; \;\; 1 \neq a > 0$$

الحل:

باستخدام منشور التابعين a^{-x}, a^x (حسب منشور ماكلوران):

$$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 a}{3!} + \dots$$

$$a^{-x} = 1 + \frac{-x \ln a}{1!} + \frac{(-x)^2 \ln^2 a}{2!} + \frac{(-x)^3 \ln^3 a}{3!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} - \frac{x^3 \ln^3 a}{3!} + \dots$$

نجد:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 a}{3!} + \dots + 1 - \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} - \frac{x^3 \ln^3 a}{3!} + \dots - 2}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x^2 \ln^2 a}{2!} + \frac{2x^4 \ln^4 a}{4!} + \frac{2x^6 \ln^6 a}{6!} + \ \dots}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\ln^2 a + \frac{x^2 \ln^4 a}{4.3} + \frac{x^4 \ln^6 a}{6.5.4.3} + \ \dots \right) = \ln^2 a + 0 + 0 = \ln^2 a$$

{**24**} استخدم منشور ثنائي الحدين لحساب القيمة التقريبية للعدد: $\sqrt[3]{70}$

الحل:

$$\sqrt[3]{70} = \sqrt[3]{64 + 6} = \sqrt[3]{64\left(1 + \frac{6}{64}\right)} = 4\sqrt[3]{1 + \frac{3}{32}} = 4\left(1 + \frac{3}{32}\right)^{\frac{1}{3}}$$

باستخدام منشور ثنائي الحدين:

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ \dots$$

نجد:

$$4\left(1 + \frac{3}{32}\right)^{\frac{1}{3}} = 4\left[1 + \frac{1}{3}.\frac{3}{32} + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{32}\right)^2}{2}\right] =$$

$$= 4\left(1 + \frac{1}{32} - \frac{2.9}{9.2.32^2}\right) = 4\left(1 + \frac{1}{32} - \frac{1}{32^2}\right) = 4\frac{32^2 + 32 - 1}{32^2} = \frac{1055}{256}$$

$$\approx 4.121$$

{**25**} أوجد صيغة لحساب القيمة التقريبية للتكامل: $\int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dx$ ، ثم استفد من الطلب السابق في حساب التكامل $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin x}{x}\, dx$ بخطأ قيمته المطلقة أصغر من 10^{-5}.

الحل: بما أن:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ \dots$$

فإن:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ \dots$$

السلسلة السابقة تتقارب من أجل جميع قيم x ، وبالتالي:

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dx = x - \frac{x^3}{3!.3} + \frac{x^5}{5!.5} - \ \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+2)} + \ \dots$$

لنحسب الآن $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin x}{x}\, dx$ وذلك بتعويض كل x بـ $\frac{1}{4}$ في السلسلة الأخيرة

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin x}{x} = [x]_0^{\frac{1}{4}} - \left[\frac{x^3}{3!.3}\right]_0^{\frac{1}{4}} + \left[\frac{x^5}{5!.5}\right]_0^{\frac{1}{4}} - \ ...$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3!.3}.\frac{1}{4^3} + \frac{1}{5!.5}.\frac{1}{4^5} - \ ...$$

إذا أخذنا أول حدين من السلسلة العددية السابقة فسنجد:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{3!.3.4^3} \approx 0.25000 - 0.00087 = 0.24913$$

وبالتالي فيكون الخطأ المرتكب بالقيمة المطلقة أصغر من:

$$\frac{1}{5!.5.4^3} + 0.5.10^{-5} = \frac{1}{614400} + 0.5.10^{-5} < 0.2.10^{-5} + 0.5.10^{-5} =$$
$$= 0.7.10^{-5} < 10^{-5}$$

{**26**} احسب التكامل:

$$I(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

الحل:

نفرض$\sqrt{t} = y$ ومنه $t = y^2$، وبالتالي: $dt = 2ydy$، ومنه:

$$I(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\sin y^2}{y}.2ydy = 2\int_0^{\sqrt{x}} \sin y^2 \ dy$$
$$= 2\int_0^{\sqrt{x}} \left[y^2 - \frac{y^6}{3!} + \ ... + (-1)^n \frac{y^{4n+2}}{(2n+1)!} + \ ...\right] dy$$

حيث إن السلسلة الموجودة تحت رمز التكامل متقاربة من أجل جميع قيم y، وبالتالي يكون:

$$I(x) = 2\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^7}{3!.7} + \ ... + (-1)^n \frac{y^{4n+3}}{(2n+1)!\,(4n+3)} + \ ...\right]_0^{\sqrt{x}}$$
$$= 2\sqrt{x}\left[\frac{x}{3} - \frac{x^3}{3!.7} + \ ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(4n+3)} + \ ...\right]$$

{**27**} مستخدماً النشر، أثبت صحة النهاية: $lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{tg^2 x} = \frac{1}{2}$

الحل:

بما أن $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ ......$ ، فإن $1 - \cos x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

وبما أن $x \underset{x\to 0}{\sim} tg\, x$ وبالتالي يكون:

$$\frac{1-\cos x}{tg^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

ومنه يكون:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{tg^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

{28} مستخدماً النشر، احسب $lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2}$

الحل:

بما أن $-\frac{x^3}{6} \underset{x\to 0}{\sim} \sin x - x$ فيكون:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-x^3/6}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} -\frac{x}{6} = 0$$

{29} مكتفياً بثلاثة حدود غير معدومة من نشر التابع $\sin x$، احسب النتيجة التقريبية للعدد $\sin(31^\circ)$.

الحل:

لدينا: $\sin(31^\circ) = \sin(30^\circ + 1^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right) = \sin(x+h)$

وبالتالي أصبح لدينا: $f(x+h) = \sin(x+h)$

وهو يحقق شروط النشر حسب تايلور:

$$f(x) = \sin x \ , \quad f'(x) = \cos x \ , \quad f''(x) = -\sin x$$

ولدينا: $f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x)$

$$\sin(31^\circ) = \sin\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{6} - \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 . \frac{1}{2!}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\sin(31^\circ) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{360}\pi - \frac{\pi^2}{29600} \approx 0.5149$$

{30} مستخدماً منشور التابع $\frac{1}{1+x}$ استنتج منشور التابع: $\frac{1}{(1+x)^2}$

الحل:

إن: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ \dots\dots\dots + (-1)^n x^n + \ \dots\dots\dots$، وبوضع $f(x) = \frac{1}{1+x}$ و يكون: $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$، بمفاضلة كل حد من حدود السلسلة السابقة نجد:

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \ ... + (-1)^n.nx^{n-1} + \ ... \ ; |x| < 1$$

ومنه يكون:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \ ... + (-1)^n.nx^{n-1} + \ ...$$

{**31**} أوجد سلسلة القوى للتابع: $ln(1+x)$ حيث $|x| < 1$، ثم احسب $ln(1.1)$ مقرباً الناتج إلى خمسة أرقام عشرية.

الحل:

بما أن: $|x| < 1$ فيكون:

$$ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x [1 - t + t^2 - t^3 + \ ... + (-1)^n t^n + \ ...]\, dt$$

$$= \int_0^x 1dt - \int_0^x t\, dt + \int_0^x t^2 dt - \ ... + (-1)^n \int_0^x t^n\, dt + \ ...$$

$$= t\,|_0^x - \frac{t^2}{2}|_0^x + \frac{t^3}{3}|_0^x + \ ... + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}|_0^x + \ ...$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ ... \quad ; \quad |x| < 1$$

بوضع في السلسلة الأخيرة $x = 0.1$ نجد:

$$ln(1.1) = 0.1 - \frac{(0.1)^2}{2} + \frac{(0.1)^3}{3} - \frac{(0.1)^4}{4} + \frac{(0.1)^5}{5} - \ ...$$

$$= 0.1 - 0.005 + 0.000333 - 0.000025 + 0.000002 - \ ...$$

بجمع الحدود الأربعة الأولى ومكتفين إلى خمسة أرقام عشرية سنحصل على:

$$ln(1.1) \approx 0.09531$$

{**32**} أوجد سلسلة تايلور لـ $sin\, x$ بقوى $x - \pi/6$

الحل:

بوضع: $f(x) = sin\, x$ نجد:

وبالتالي: $f'(x) = cos\, x \quad , \quad f''(x) = -\, sin\, x \quad , \quad f'''(x) = -\, cos\, x$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \quad f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \quad , \quad f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وبالتعويض في سلسلة تايلور:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ \dots$$

نجد:

$$\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2(2!)}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2(3!)}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \ \dots$$

والحد العام لهذه السلسلة هو:

$$U_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}.\frac{1}{2n!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) & ; \ n = 0,2,4,\cdots \\ (-1)^{\frac{(n-1)}{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2n!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^n & ; \ n = 1,3,5,\cdots \end{cases}$$

{**33**} أوجد القيمة التقريبية للتكامل: $\int_0^1 \sin x^2\, dx$ مقرباً الناتج إلى أربعة أرقام عشرية.

الحل:

بما أن: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ \cdots$ ومنه نجد:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots$$

وبإجراء المكاملة لكل حد من حدود السلسلة الأخيرة نجد:

$$\int_0^1 \sin x^2\, dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} + \ \cdots$$

وبجمع الحدود الثلاثة الأولى فقط نجد:

$$\int_0^1 \sin x^2\, dx \approx 0.3103$$

وفي هذه الحالة يكون الخطأ أقل من $\frac{1}{75600} \approx 0.00013$

{**34**} أوجد سلسلة القوى للتابع: $\sqrt[3]{1+x^4}$ ثم احسب $\int_0^{0.3} \sqrt[3]{1+x^4}\, dx$

الحل:

بتعويض x بـ x^4 في سلسلة القوى حيث $|x| < 1 \ , \ k \in R$ بالمتتالية:

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \ \dots$$
$$+ \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!}x^n + \ \dots$$

نجد:

$$\sqrt[3]{1+x^4} = 1 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3^2.2!}x^8 + \ \dots + (-1)^{n+1}\frac{1.2.\dots(3n-4)}{3^n.n!}x^{4n} + \ \dots$$

بإجراء عملية المكاملة لكل حد من حدود السلسلة السابقة نجد:

$$\int_0^{0.3} \sqrt[3]{1+x^4}\,dx = 0.3 + 0.000162 - 0.000000243 + \ \dots\dots\dots$$

وبالاكتفاء بستة أرقام عشرية يكون لدينا:

$$\int_0^{0.3} \sqrt[3]{1+x^4}\,dx \approx 0.300162$$

تمرينات غير محلولة

(1) أوجد مجال تقارب سلسلة القوى: $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n.\frac{x^{2n}}{2^{n-1}}$، وأوجد مجال تباعد سلسلة القوى: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

(2) أوجد نصف قطر تقارب ومجال تقارب سلسلة القوى: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$.

(3) من أجل أي قيم لـ x تكون سلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ متقاربة، ثم حدد مجال تقاربها.

(4) حدد قيم لـ x حتى يكون تابع بيسل من المرتبة صفر التالي $J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ متقارباً، وما هو نصف قطر تقاربه.

(5) أثبت أن مجال تقارب سلسلة القوى: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ هو $]-\infty,\infty[$.

(6) أوجد مجال تقارب سلاسل القوى الآتية ، ثم احسب مجموعها على مجال تقاربها:

$$(1)\quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad (2)\quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

(7) أوجد مجال تقارب سلاسل القوى الآتية:

$$(1)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(n+4)} \quad , \quad (2)\quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(n-2)}$$

(8) أوجد نصف قطر تقارب ومجال تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ، والتي حدها العام هو:

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(10)^n} x^n$$

(9) أوجد نصف قطر تقارب ومجال تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-3)^n}{n.5^n}$، ثم أوجد مجال تقارب السلسلة التي حدها العام $u_n = x.tan\frac{x}{2^n}$.

(10) مستخدماً نشر التابعين e^x و $sin\, x$ بجوار الصفر، احسب النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

(11) انشر التابع $f(x) = tan\, x$ بجوار الصفر.

(12) مستخدماً صيغة تايلور في النشر، احسب القيمة التقريبية لـ $sin\, 18^{\circ}$ مقرباً الناتج إلى سبعة أرقام عشرية.

(13) أوجد نصف قطر تقارب سلسلة القوى ذات الحد العام:

$$a_n x^{\alpha n+\beta} \quad \text{حيث} \quad \alpha \in N^* \ , \ \beta \in N$$

(14) مستفيداً من منشور التابعين $ln(1+x)$, $ln(1-x)$، أوجد القيمة التقريبية للعدد $ln\,3$ مقرباً الناتج إلى ستة أرقام عشرية.

(15) انشر التابع التالي بجوار الصفر: $f(x) = 2^x$.

(16) باستخدام طريقة النشر، احسب كلاً من النهايات التالية:

$$(1) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2(e^x - 1)} \quad , \quad (2) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin 2x}{x - \tan 3x}$$

$$(3) \quad \lim_{x\to 0} \left(\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 1}\right) \quad , \quad (4) \quad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{e^{3x} - 1 - 3x}$$

(17) احسب قيمة العدد: $arctan\,0.2$ بدقة 0.001

(18) احسب قيمة العدد $\sqrt[3]{1001}$ بخمس مراتب عشرية صحيحة.

(19) أوجد منشور ماكلوران مع باقي لاغرانج للتابع:

$$f(x) = ln(ax + b) \quad ; \quad x > -\frac{b}{a} \quad , \quad b > 0$$

(20) عين مجال تقارب السلسلة

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

(21) أوجد نصف قطر تقارب السلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}$، ونصف قطر السلسلة الناتجة عن تكاملها.

(22) أوجد نصف قطر تقارب السلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$، ونصف قطر تقارب مشتقها.

(34) اكتب التابع: $f(x) = x^3 - 16x^2 + 83x - 140$ حسب قوى $x - 2$.

(24) حسب منشور ماكلوران انشر التوابع الآتية:

$$(1) \quad f(x) = \sin^2 x \quad , \quad (2) \quad f(x) = e^{\cos x}$$

(25) انشر بجوار $a = 2$ التابع $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-4x+3}$.

(26) مستفيداً من منشور التابعين $ln(1+x)$, $ln(1-x)$ أوجد منشور ماكلوران للتابع: $f(x) = arcth\,x$

(27) انشر التابع $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ في سلسلة ماكلوران، ثم عين مجال تقارب السلسلة الناتجة.

استخدم $\int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

(28) انشر التابع $f(x) = ln\,x$ حسب قوى $x = \frac{1-t}{1+t}$.

(29) أوجد ثلاثة حدود غير معدومة من نشر التابع $f(x) = e^{e^x}$ وفق سلسلة ماكلوران.

(30) أوجد ثلاثة حدود غير معدومة من نشر التابع: $f(x) = cos^2 x\,.sin^2 x$.

(31) عين مجال تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{x}{2^n}$.

(32) لتكن السلسلة التابعية التي حدها العام: $u_n = \frac{(x-3)^n}{n.2^n}$ ، والمطلوب:

عين مجال تقاربها ، ثم ادرس طبيعتها عند طرفي مجال تقاربها.

(33) احسب التكامل $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$، وذلك باستخدام سلسلة ذي الحدين.

(34) انشر وفق سلسلة ماكلوران التابع: xe^{-2x}.

(35) اكتب الحدود الأربعة الأولى من نشر التابع $f(x) = ln(1+e^x)$ في جوار الصفر.

(36) اكتب الحدود الثلاث الأولى من منشور التابع $f(x) = cos\,x\,ch\,x$ في جوار الصفر.

(37) مستخدماً النشر، أثبت صحة النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\,x\,ln(1+x^2)}{x\,tg\,x} = 0$

2) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{ln(5x^2+4)}{ln\,x} = 2$

3) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

(38) بين فيما إذا كانت التوابع التالية قابلة للنشر حسب منشور ماكلوران:

$$f(x) = ln\,x \quad , \quad g(x) = \frac{1}{sin\,x} \quad , \quad h(x) = x^{3/2}$$

(39) أوجد أربعة حدود من منشور التابع $y = ln(x+2)$ حسب منشور ماكلوران، واستنتج الحد العام، وعين مجال التقارب.

جورج فريدريك برنهارد رايمان:

عالم رياضيات ألماني عاش في الفترة من 1836 حتى 1866، أصبح سنة 1859 أستاذاً في غونتغن، حيث كان يدرس هناك تحت إشراف جاوس، وحاز على دعمه، تتضمن إنجازاته الرئيسية أعمالاً في نظرية الدوال وتطوير الهندسة التفاضلية من بداياتها في أعمال جاوس، ووصف هندسة ريمانية غير إقليدية، واكتشاف تكامل ريمان كما وضع فرضية ريمان، وانتخب قبل وفاته زميلاً في الجمعية الملكية.

غوتفريد لايبنتز:

غوتفريد فيلهيلم من لايبنتز (أيضاً لايبنتز) (لايبتزغ يوليو 1 (يونيو *31* أو. إس.)، 14646 – نوفمبر 14، 1716 في هانوفر) ألماني فيلسوف، عالم طبيعة، عالم رياضيات، دبلوماسي، ومحامي.

يعتبر لايبنتز مع نيوتن أحد مؤسسي علم التفاضل والتكامل وبخاصة تطوير مفهوم التكامل وقاعدة الجداء، كما طوّر المفهوم الحديث لمبدأ انحفاظ الطاقة.

الفصل الثالث

سلاسل فورييه

Fourier Series

يعود الفضل لسلاسل فورييه إلى العالم الفيزيائي الرياضي جوزيف فورييه (1768_1830) والذي استخدمها لأول مرة في بحوثه العلمية الخاصة بانتقال الحرارة.

إن لسلاسل فورييه أهمية خاصة وبالغة الأهمية في الرياضيات التطبيقية والفيزيائية والهندسية، مثل هندسة التحكم الآلي والاتصالات وغيرها.

وقبل البدء بالتعرف على سلسلة فورييه ودراستها نقدم أهم المفاهيم التي سنحتاجها في دراستنا.

(1-3) التابع الدوري ($\boldsymbol{Periodic\ Function}$):

ليكن f تابعاً حقيقياً على مجال I من مجموعة الأعداد الحقيقية R، أي $I \subseteq R$، نقول إن f تابع دوري على I إذا وجد عدد حقيقي موجب t بحيث تتحقق العلاقة:

$$\boxed{f(x+t) = f(x)\ ;\ \forall x \in I}$$

نسمي أصغر الأعداد التي تحقق المساواة السابقة بدور التابع ونرمز له بـ T.

بعض المراجع تعرف التابع الدوري بالشكل التالي: نقول عن التابع الحقيقي f المعرف على I من R إنه دوري، إذا وجد عدد حقيقي $T \neq 0$ بحيث تتحقق المساواة: $\boxed{f(x+2T) = f(x)\ ;\ \forall x \in I}$، كما يسمى أصغر الأعداد T والتي تكون المساواة السابقة محققة بنصف دور التابع f.

مثال (1):

التوابع التالية $sin\, x\, , cos\, x$ دورية ودور كل منها $T = 2\pi$.

أما التوابع $cot\, x\, , tan\, x$ دورية ودور كل منها $T = \pi$.

التابع الثابت يمكن اعتباره تابعاً دورياً بأي دور ممكن، فمثلاً التابع f المعرف على R: $f(x) = 6\, sin^2\, x\ \ ;\ \ x \in R$ يمكن كتابته بالشكل:

$$f(x) = 3 - 3\, cos\, 2x$$

بما أن دور التابع $cos\, 2x$ هو π، فيمكن اعتبار التابع $g(x) = 3$ تابعاً دورياً ودوره على R هو (π) أيضاً، وبالتالي يكون دور التابع $6\, sin^2\, x$ هو π.

نقدم الآن بعض **أهم خواص التوابع الدورية** والتي سنستفيد منها لاحقاً.

1- إذا كان T دوراً للتابع الدوري f، وكان n عدداً صحيحاً لا يساوي الصفر، عندئذٍ nT هو دور التابع f أيضاً.

البرهان: لدينا:

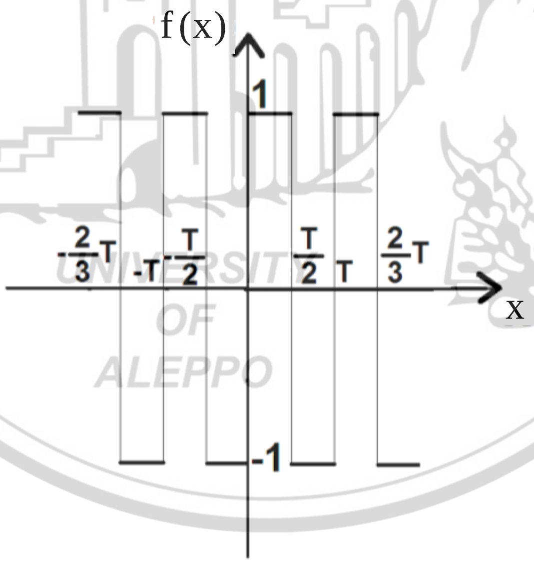
$$f(x+nT) = f(x+nT+T-T) = f(x+(n-1)T+T)$$
$$= f(x+(n-1)T) = f(x+T) = f(x) \ ; \quad \forall\, x \in I$$

2- لرسم المنحني البياني لتابع دوري ، يكفي رسم منحني هذا التابع في المجال $[0,T]$ ثم نمدده دورياً على طول محور الأعداد الحقيقية.

فمثلاً التابع الدوري ذو الدور T والمعرف على المجال $-\frac{T}{2} < x < \frac{T}{2}$ و ذو الدور $T = \frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right)$ والمعرف بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \quad ; \quad 0 < x < \dfrac{T}{2} \\ -1 \quad ; \quad -\dfrac{T}{2} < x < 0 \end{cases}$$

يمكن رسم خطه البياني بالشكل:



3- إذا كان $g(x), f(x)$ تابعين دوريين، ودور كل منها هو T وكان b, a ثابتيين حقيقين، عندئذٍ التابع: $h(x) = af(x) + bg(x)$ دوري ودوره T أيضاً.

نستنتج من الخاصة السابقة أن حاصل جمع، أو طرح، أو ضرب عدة توابع دورية دور كل منها T هو تابع دوري له الدور T نفسه. كما ان حاصل قسمة تابعين دوريين لهما الدور نفسه هو تابع دوري له الدور نفسه.

تجدر الإشارة إلى أنه إذا كانت أدوار التوابع مختلفة فإن حاصل جمعها أو طرحها أو ضربها أو قسمتها تكون أيضاً توابع دورية.

4- إذا كان T دور التابع $f(x)$ فإن $\frac{T}{a}$ يكون دوراً للتابع:

$g(x) = f(ax) \;\; ; \;\; x \in I \subseteq R$ ، حيث $a \neq 0$.

البرهان:

$$g\left(x + \frac{T}{a}\right) = f\left[a\left(x + \frac{T}{a}\right)\right] = f(ax + T) = f(ax) = g(x)$$

فمثلاً : التابع $f(x) = cos\,7x$ تابع دوري ودوره $T = \frac{2\pi}{7}$. وبشكل عام، التوابع $cos\,nx$ و $sin\,nx$ دورية ودورها $T = \frac{2\pi}{n}$، أما التوابع $tan\,nx$ و $cotg\,nx$ دورية ودورها $T = \frac{n}{\pi}$.

5- بفرض f تابع دوري ودوره T، وقابل للمكاملة على المجال $I \subseteq R$، عندئذٍ يتحقق مايلي:

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx \quad ; \; \forall\, a \in R \;,\; x \in I \cdots (*')$$

البرهان:

1- لنفرض أن $0 < a < T$ ، وبما أن:

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx \quad \cdots (*)$$

وبإجراء التحويل $x = t + T$ للتكامل $\int_T^{a+T} f(x)dx$ وباعتبار أن T هو دور التابع $f(x)$ يكون لدينا:

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(t+T)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt = \int_0^a f(x)\,dx$$

بالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد:

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

2- أما إذا كان $a < 0$ فنبرهن العلاقة بنفس الطريقة السابقة.

نستنتج من الخاصة (5) السابقة مايلي:

1. إذا كان $a = -\frac{T}{2}$ فسنحصل من العلاقة $(*')$ على العلاقة:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

وبشكل خاص إذا كان $T = 2\pi$، فإن الطريقة الأخيرة تأخذ الشكل:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

من أجل الخواص المتبقية نفرض للسهولة، أن التابع الدوري f دورة $2T$.

6- ليكن f تابعاً دورياً دوره $2T$، عندئذٍ التابع:

$$g(t) = \int_0^t f(x)\ dx \quad ; \quad x \in I \subseteq R \ \ , \ \ t \in R^*$$

دوري ودوره $2T$ أيضاً، إذا وفقط إذا $\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = 0$.

البرهان:

إذا كان $t \in R^*$، فإن:

$$g(t+2T) = \int_0^{t+2T} f(x)\,dx = \int_0^{2T} f(x)dx + \int_{2T}^{t+2T} f(x)dx$$

وبما أن:

$$\int_0^{2T} f(x)\,dx = \int_{-T}^{T} f(x)\,dx$$

$$\int_{2T}^{t+2T} f(x)dx = \int_{2T}^{t+2T} f(x-2T)dx = \int_0^t f(x)dx$$

فيكون:

$$g(t+2T) = \int_{-T}^{T} f(x)dx + \int_0^t f(x)dx$$

وهذا يعني أن: $g(t+2T) = g(t)$ يتحقق إذا وفقط إذا كان:

$$\int_{-T}^{T} f(x)dx = 0$$

7- إذا كان f تابعاً دورياً ودوره $2T$ ، عندئذٍ التابع:

$$g(t) = \int_0^t f(x)dx = -\frac{1}{2}a_0 t \quad ; \quad t \in R^*$$

حيث $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx$ دوري ودوره $2T$ أيضاً.

البرهان:

بفرض $t \in R^*$، عندئذٍ يكون لدينا:

$$g(t+2T) = \int_0^{t+2T} f(x)dx - \frac{t+2T}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)dx$$

$$= \int_0^{2T} f(x)dx + \int_{2T}^{t+2T} f(x)dx - \frac{t}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)dx - \int_{-T}^{T} f(x)dx \cdots (\&)$$

ومن الخاصتين السابقتين نجد:

$$\int_0^{2T} f(x)\,dx = \int_{-T}^{T} f(x)\,dx \ \ \& \ \ \int_{2T}^{t+2T} f(x)dx = \int_0^{t} f(x)dx$$

بالتعويض في العلاقة $(*')$ نجد أن:

$$g(t+2T) = g(t)$$

مثال (2):

بفرض $f(x) = x^2$ تابعاً معرفاً على $[-2,2]$، دوري ودوره 4، بين هل التابع g المعرف على R^* بالشكل: $g(t) = \int_0^t f(x)dx$ دوري.

الحل:

حسب الخاصة 6 نرى:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{2} x^2 dx = \frac{1}{3}\big(8-(-8)\big) = \frac{16}{3} \neq 0$$

إذاً التابع المعطى ليس دورياً حسب الخاصة (6).

مثال (3):

إذا كان $f(x) = x$ معرفاً على المجال $]-\pi,\pi[$ ودوره 2π، بين هل التابع g المعرف على R^* بالشكل: $g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \,; t \in R^*$، دوري.

الحل:

لنحسب أولاً $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} xdx = \frac{1}{2}[x^2]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}(\pi^2 - \pi^2) = 0$$

فحسب الخاصة (6) التابع g المعطى دوري ودوره 2π.

(2-3) التوابع الفردية والزوجية ($Even\ and\ Odd\ Functions$):

للتوابع الفردية والزوجية أهمية لا يستهان بها، فهي تسهل علينا حساب أمثال (معاملات) فورييه والتي سندرسها لاحقاً.

تعريف التابع الفردي والزوجي:

ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على المجال I من مجموعة الأعداد الحقيقية R، نقول: إن التابع f

1. فردي إذا كان المجال I متناظراً بالنسبة لمبدأ الاحداثيات وكان
$$f(-x) = -f(x)$$
2. زوجي إذا كان المجال I متناظراً بالنسبة للمحور oy وكان
$$f(-x) = f(x)$$

من التعريف السابق، نستنتج أن منحني التابع الفردي متناظر بالنسبة لمبدأ الاحداثيات، أما منحني التابع الزوجي فهو متناظر بالنسبة لمحور العينات (التراتيب).

مثال (4):

التوابع التالية: $x^5 + 3x$, $e^x - e^{-x}$, $\sin x$, x^3 هي توابع فردية.

أما التوابع: $x^6 + 7$, $|x|$, $\cos x$, $e^x + e^{-x}$, x^4 فهي توابع زوجية.

وذلك حسب التعريف السابق.

توجد توابع ليست بفردية وليست بزوجية، مثل
$$x^5 - 5x^2 + 3, \sin x + 3\cos x$$

نقدم الآن **بعض خواص التوابع الفردية والزوجية:**

1- حاصل جداء تابعين زوجين أو فرديين هو تابع زوجي.

البرهان:

إذا كان التابعان $g(x), f(x)\ ;\ x \in I \subseteq R$ زوجيين، فإنه من أجل:
$$h(x) = g(x).f(x)\ ;\ x \in I$$

يكون:
$$h(-x) = f(-x).g(-x) = f(x).g(x) = h(x)\ ;\ x \in I$$

أما إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ تابعين فرديين حيث $x \in I$ ، عندئذٍ يكون:
$$h(-x) = f(-x).g(-x) = -f(x).\big(-g(x)\big) = f(x).g(x) = h(x)$$

2- حاصل جداء تابع فردي بتابع زوجي هو تابع فردي.

البرهان:

ليكن $f(x)$ تابعاً زوجياً و $g(x)$ تابعاً فردياً، حيث $x \in I$ عندئذٍ يكون:

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(-x).\, g(-x) = f(x).\,\big(-g(x)\big) = -f(x).\, g(x) \\ &= -h(x) \ ;\ x \in I \end{aligned}$$

أي إن التابع $h(x)$ فردي ، حيث $x \in I$.

3- إن مجموع تابعين زوجين أو أكثر هو تابع زوجي وإن مجموع تابعين فرديين أو أكثر هو تابع فردي.

4- إذا كان التابع f معرفاً وقابلاً للمكاملة على المجال المغلق $[-L, L]$، عندئذٍ يتحقق:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \begin{cases} 0 & ; \quad \text{فردي } f(x) \\ 2\displaystyle\int_{0}^{L} f(x)dx & ; \quad \text{زوجي } f(x) \end{cases}$$

البرهان:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx$$

باستبدال x بـ $-x$ بالتكامل $\int_{-L}^{0} f(x)dx$ نجد:

$$\int_{-L}^{0} f(x)dx = -\int_{L}^{0} f(-x)dx = \int_{0}^{L} f(-x)dx$$

وبالتالي يكون:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{0}^{L} f(-x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx = \int_{0}^{L} [f(-x) + f(x)]\ dx \ \cdots (*)$$

فإذا كان f تابعاً فردياً تؤدي إلى أن:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$$

أما إذا كان f تابعاً زوجياً فتأخذ العلاقة $(*)$ السابقة الشكل:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$$

مثال (5):

بما أن كلاً من التابعين x و $\sin x$ فردي فإن: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx = 0$ و $\int_{-3}^{3} x\, dx = 0$، كما أن:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = 2\int_{0}^{\pi}|x|dx = 2\int_{0}^{\pi}xdx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi^2$$

وذلك لأن $|x|$ تابع زوجي.

5- إذا كان التابع f ليس زوجياً ولا فردياً فيمكن كتابته على شكل مجموع تابعين أحدهما زوجي والآخر فردي ، ويتم ذلك كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = f_1(x) + f_2(x)$$

حيث $f_1 = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ تابع زوجي و $f_2 = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ تابع فردي.

مثال (6):

اكتب التابع $x \neq -1$; $f(x) = \frac{1}{1+x}$ على شكل مجموع تابعين أحدهما زوجي والآخر فردي.

الحل:

نلاحظ أولاً أن التابع $\frac{1}{1+x}$، ليس فردياً ولا زوجياً حسب الخاصة (5) السابقة لدينا:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{x^2-1}$$

إن التابع $f_1 = \frac{1}{1-x^2}$ زوجي، وأن التابع $\frac{x}{x^2-1}$ فردي.

قبل البدء في تعريف سلسلة فورييه، نستعرض الملاحظة التالية:

ملاحظة (1):

يمكن التحقق بسهولة من التكاملات التي سنستخدمها لاحقاً التالية:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & ; \quad n \neq 0 \\ 2\pi & ; \quad n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0 \quad ; \quad n = 1,2,--- \qquad (2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ \pi & ; \quad m = n \end{cases} \quad ; \; n, m \in Z$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\; dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ \pi & ; \quad m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = \pi$$

نود الإشارة إلى أن ناتج التكاملات السابقة لا يتغير عندما تكون حدود التكامل من 0 إلى 2π، عوضاً من $-\pi$ إلى π، وذلك حسب الخاصة (5) من خواص التوابع الدورية.

(3-3) السلسلة المثلثية ($Trigonometric\ Series$)

لتكن $\{a_n\},\{b_n\}$ متتاليتين عدديتين حقيقيتين ، وإذا كان a_0 عدداً حقيقياً ثابتاً ، عندئذٍ نسمي كل سلسلة تابعية من الشكل:

$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \cdots \quad (\Delta)$$

أو بالشكل المختصر:

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad ; \quad x \in R}$$

بسلسلة مثلثية.

نسمي عادة الأعداد الحقيقية $a_0, a_n, b_n \quad ; \quad n = 1,2, \dots$ أمثال السلسلة المثلثية السابقة، وسنسميها لاحقاً ثوابت أولر ($Euler\ Constants$).

ونسمي التوابع:

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

بجملة مثلثية أساسية.

إن جميع توابع الجملة المثلثية الأساسية هي توابع دورية ، لها الدور نفسه وهو 2π.

ملاحظة (2):

بعض المراجع الأجنبية تعرف السلسلة المثلثية بأنها سلسلة تابعية من الشكل:

$$\boxed{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nwx + b_n \sin nwx) \; ; \; x \in R \cdots (\nabla)}$$

حيث $a_0, a_n, b_n \; ; \; n = 1,2,\cdots$ ثوابت حقيقية، وفي هذا الشكل، إن توابع الجملة المثلثية الأساسية:

$$1, \cos wx, \sin wx, \cos 2wx, \sin 2wx, \cdots$$

هي توابع دورية ودورها $T = \frac{2\pi}{w}$.

نتائج:

1- من تعريف السلسلة المثلثية، نجد أن كل حد $(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$، حيث $n = 1,2,\cdots$ من حدود السلسلة المثلثية (Δ)، يمثل حركة اهتزازية توافقية بالنسبة للمتحول الحقيقي x ، ويمكن التعبير عنها بالشكل: $A \sin(nx + \alpha)$، حيث α الصفحة الابتدائية للحركة في اللحظة $t = 0$ و A سعة الحركة، وهي دورية ودورها هو $\frac{2\pi}{n}$.

2- بما أن السلسلة المثلثية (Δ) هي مجموع غير منته لتوابع دورية ذات دور 2π، فإن تابع المجموع لها يكون دورياً أيضاً إذا كانت السلسلة (Δ) متقاربة ودوره 2π أيضاً.

سنحتاج لاحقاً إلى **المبرهنة المساعدة التالية:** إذا كانت السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال $I \subseteq R$، وكان $g(x)$ تابعاً محدوداً على نفس المجال I، عندئذٍ ستكون السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} g(x).f_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال I. (للبرهان انظر التمرين المحلول رقم (3) من التمرينات المحلولة).

لندرس الآن **إمكانية نشر تابع دوري ما** وليكن f دوره 2π في سلسلة مثلثية. تقتضي هذه المسألة تعيين أمثال السلسلة المثلثية، من أجل ذلك نستعرض المبرهنة التالية:

مبرهنة (1):

إذا كانت السلسلة المثلثية

$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos kx + b_n \sin kx) \quad ; \quad k \in N$ متقاربة بانتظام إلى تابع f على المجال $[-\pi, \pi]$ ، عندئذٍ يكون:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \; dx \quad ; \quad n = 0,1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \; dx \quad ; \quad n = 1,2,\cdots$$

البرهان:

بما أن السلسلة المثلثية المفروضة متقاربة بانتظام إلى f على $[-\pi,\pi]$ عندئذٍ يكون من أجل كل x من $[-\pi,\pi]$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

وكذلك يكون التابع f قابلاً للمكاملة على $[-\pi,\pi]$ ، وبالتالي يكون لدينا:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\ \,dx\right)$$
$$=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx=\pi.a_0$$

أي إن:

$$\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx}$$

بضرب طرفي السلسلة المثلثية المفروضة بـ $\cos kx\ ;\ k\in N$ فإن السلسلة المثلثية الناتجة تبقى متقاربة بانتظام من التابع $f(x)\cos kx$ على $[-\pi,\pi]$ وبالمكاملة من $-\pi$ إلى π نجد:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,.\cos nx\,dx+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,.\sin nx\,dx$$

وبالاستفادة من الملاحظة (1) ينتج لدينا:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\pi a_n$$

وبالتالي:

$$\boxed{a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ \ ;\ \ n=1,2,\cdots}$$

وبنفس الطريقة، بضرب طرفي السلسلة المثلثية المعطاة بـ $\sin nx$، وبالمكاملة نجد:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,.\cos nx\,dx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \,.\sin nx \, dx = \pi b_n$$

ومنه ينتج لدينا:

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad ; \quad n = 1,2,\cdots}$$

تسمى الثوابت الحقيقية a_0, a_n, b_n حيث $n \in N$ **بثوابت أولر فورييه.**

مثال (7):

حدد ثوابت أولر فورييه للتابع المحقق للشرط $f(x + 2\pi) = f(x)$ ، والمعرف بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\pi \le x \le 0 \\ x & ; \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$$

الحل:

نلاحظ أن التابع معطى بصورتين مختلفتين في المجالين: $[-\pi, 0], [0, \pi]$، وبالتالي لحساب الأمثال a_0, a_n, b_n حيث $n = 1,2,\cdots$ لهذا التابع، ينبغي حساب التكاملات على المجالين $[-\pi, 0], [0, \pi]$ كما يلي:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} xdx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \left[\frac{x^2}{2\pi}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0.\, dx + \int_{0}^{\pi} x\cos nx \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \cos nx \, dx$$

وبإجراء المكاملة بطريقة التجزئة حيث نفرض أن: $x = u \ , \ \cos nx \, dx = dv$ نجد:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x \sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx \, dx = \left[\frac{\cos nx}{n^2\pi}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2.\pi}$$

ومنه يكون:

$$a_n = \begin{cases} 0 & ; \quad \text{عدداً زوجياً } n \\ -\dfrac{2}{n^2.\pi} & ; \quad \text{عدداً فردياً } n \end{cases}$$

لنحسب أخيراً العدد b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0.\,dx + \int_{0}^{\pi} x.\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x.\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad ; \quad n \in N$$

ملاحظة (3):

يمكن صياغة وبرهان المبرهنة السابقة بالحالة العامة بالشكل التالي:

إذا كانت السلسلة المثلثية:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nwx + b_n\sin nwx)$$

متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على المجال $(c, c+T)$، حيث $T = \frac{2\pi}{w}$ دور التوابع $1, \sin nwx, \cos nwx \quad ; \quad \pi \neq w > 0$ و c ثابت حقيقي ما، أي إذا كان:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nwx + b_n\sin nwx)$$

فإن أمثال أولر فورييه $a_0, a_n, b_n \quad ; \quad n = 1,2,\dots$ تعطى بالعلاقات التالية:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(x)\,dx \;\;,\;\; a_n = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(x)\cos nwx\,dx \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_c^{c+T} f(x)\sin nwx\,dx \quad ; \quad n = 1,2,\cdots \end{array}}$$

(4-3) سلسلة فورييه (***Fourier Series***):

تهدف سلسلة فورييه إلى تمثيل التوابع الدورية غير البسيطة بدلالة مجموع توابع دورية بسيطة مكافئة لها. وذلك ضمن شروط يجب أن يحققها التابع الدوري لكي نتمكن من نشره وفق سلسلة فورييه، من أجل ذلك نعرف سلسلة فورييه للتابع الحقيقي f.

تعريف سلسلة فورييه لتابع حقيقي:

ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً وقابلاً للمكاملة على المجال $[-\pi,\pi]$، ولتكن السلسلة المثلثية:

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

حيث الأعداد الحقيقية $a_0,a_n,b_n\ ;\ n\in N$ معرفة من خلال علاقات أولر فورييه (التي تمت دراستها سابقاً) الموافقة التابع f، عندئذٍ نسمي السلسلة المثلثية السابقة بسلسلة فورييه للتابع f، ونسمي في هذه الحالة الأعداد الحقيقية $a_0,a_n,b_n\ ;\ n\in N$ **بأمثال أو معاملات فورييه.**

نتائج وملاحظات من تعريف سلسلة فورييه:

1- إذا لم تكن سلسلة فورييه متقاربة من التابع الحقيقي f فسنكتب سلسلة فورييه للتابع f بالشكل:

$$f(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

2- الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ لسلسلة فورييه بالشكل:

$$S_n(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)\quad ;\quad n\in N$$

نلاحظ أن هذا المجموع (في الطرف الأيمن) يتألف من $(2n+1)$ حداً ، وليس n حداً كما هو معروف سابقاً .

3- إذا كان f تابعاً حقيقياً ودوره $2T$، وإذا أمكن إيجاد سلسلة مثلثية متقاربة بانتظام على المجال $[-T,T]$ $;T\neq\pi$ كان مجموعها يساوي هذا التابع ، أي إن:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\left(a_n\cos\frac{\pi n}{T}x+b_n\sin\frac{\pi n}{T}x\right)$$

عندئذٍ نسمي هذه السلسلة بسلسلة فورييه للتابع $f(x)$ على المجال $[-T,T]$ وفي هذه الحالة نحسب الأعداد الحقيقية $a_0,a_n,b_n\ ;\ n=1,2,\dots$ والتي سميناها بأمثال فورييه بالعلاقات التالية:

$$a_0 = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-T}^{T} f(x)dx$$
$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\,dx \quad ; \quad n = 1,2,\cdots$$
$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\,dx \quad ; \quad n = 1,2,\cdots$$

حيث $x \in [-T,T]$، إن مجموع السلسلة الأخيرة يساوي $\frac{f(-T)+f(T)}{2}$ وذلك من أجل كل من النقطتين $x = T, x = -T$.

4- يمكن صياغة مفهوم سلسلة فورييه بشكل عام على النحو التالي:

بفرض f تابع حقيقي دوري ودوره T (أو 2π) وقابل للمكاملة على المجال $[c, c+T]$ حيث c عدد حقيقي، يكون كل سلسلة مثلثية من الشكل:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nwx + b_n\sin nwx) \;\; ; \;\; x \in R\,, \;\; w > 0$$

تدعى سلسلة فورييه للتابع f ونكتب:

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nwx + b_n\sin nwx)$$

كما أن أمثال فورييه تحسب من العلاقات الواردة في الملاحظة (3) فمثلاً إذا كان $c = 0$ و $T = 2\pi$ فإن سلسلة فورييه للتابع f على المجال $[0,2\pi]$ تكون:

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

حيث:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\,dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nwx\,dx \quad ; \quad n = 1,2,\cdots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nwx\,dx \;\; ; \;\; n = 1,2,\cdots$$

كما أن السلسلة الأخيرة تكون متقاربة من أجل كل من النقطتين $x = 0, x = 2\pi$ ويكون مجموعها في كل من هاتين النقطتين هو: $\frac{f(0)+f(2\pi)}{2}$.

لنقدم الآن الشروط الكافية (غير لازمة) لنشر تابع حقيقي في سلسلة فورييه والتي تعرف باسم **شروط ديرخليه**، لكن سنحتاج قبلها إلى المفاهيم التالية:

تعريف نقطة الانقطاع من النوعين الأول والثاني:

نقول عن التابع f: إنه **مستمر جزئياً** في مجال ما، إذا كان مستمراً عند كل نقطة من هذا المجال باستثناء عدد منته من نقاط الانقطاع من النوع الأول.

ونقول عن النقطة x_0 إنها نقطة **انقطاع من النوع الأول** للتابع f المعرف على المجال $I \subseteq R$ إذا كانت النهايتان:

$f(x_0+0) = lim_{x \to x_0^+} f(x)$ أو $f(x_0^+)$ (النهاية موجودة ومحدودة من اليمين).

$f(x_0-0) = lim_{x \to x_0^-} f(x)$ أو $f(x_0^-)$ (النهاية موجودة ومحدودة من اليسار).

موجودتين ومحدودتين.

أما إذا كانت إحدى النهايتين السابقتين غير موجودة، قلنا عن النقطة x_0 إنها نقطة انقطاع من النوع الثاني للتابع f على المجال $I \subseteq R$.

نسمي الفرق (العدد) التالي: $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ بقفزة التابع f عند النقطة x_0 ، ونرمز له بـ δ. حيث $x_0 \in I \subseteq R$.

إذا كان التابع f دورياً ودوره $T = \frac{2\pi}{w}\ ;\ w > 0$، وكان التابع f ومشتقه f' مستمرين أو مستمرين جزئياً في المجال $]-T, T[$، و كان التابع f معرفاً ووحيد القيمة في مجال الدور عندئذٍ تكون سلسلة فورييه للتابع f متقاربة في كل نقطة منه.

إذا حقق التابع f ذو الدور $T = \frac{2\pi}{w}\ ;\ w > 0$ الشروط السابقة في مجال الدور: $(c, c+T)$، حيث c عدد حقيقي، فإن سلسلة فورييه له تكون متقاربة بانتظام على مجال الدور هذا، ويكون مجموعها $S(x)$ مساوياً للتابع $f(x)$ نفسه إذا كانت x نقطة استمرار له، ومساوياً لـ $\frac{f(x^+) - f(x^-)}{2}$ ، إذا كانت x نقطة انقطاع من النوع الأول أي:

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \text{ نقطة استمرار له} \\ \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} & ; \quad x \text{ نقطة انقطاع من النوع الأول له} \end{cases}$$

مثال (8):

بفرض أن التابع $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ نُشِرَ في سلسلة فورييه على المجال $[-\pi, \pi]$، ولنفرض أن $S(x)$ هو مجموع سلسلة فورييه له، أوجد مايلي:

$$S(1)\ \ ,\ \ S(\pi)\ \ ,\ \ S\left(\frac{7\pi}{2}\right)\ \ ,\ \ S\left(\frac{15\pi}{2}\right)$$

الحل:

بما أن $x = 1 \in]-\pi, \pi[$، فإن $S(1) = f(1) = 6$ كما أن:

$$S(\pi) = \frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2}$$

وبالتالي يكون: $S(\pi) = 2\pi^2 + 1$.

وبما أن 2π هو دور التابع $S(x)$ فإننا نجد:

$$S\left(\frac{7\pi}{2}\right) = S\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = S\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{9}\pi^2 + \pi + 1$$

حيث أن $\frac{\pi}{3} \in]-\pi, \pi[$ ، وبصورة مشابهة نجد:

$$S\left(\frac{15\pi}{2}\right) = S\left(-\frac{\pi}{2} + 8\pi\right) = S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} - \frac{3}{2}\pi + 1$$

لنقدم الآن بعض الأمثلة المناسبة لنشر تابع دوري وفق سلسلة فورييه:

مثال (9):

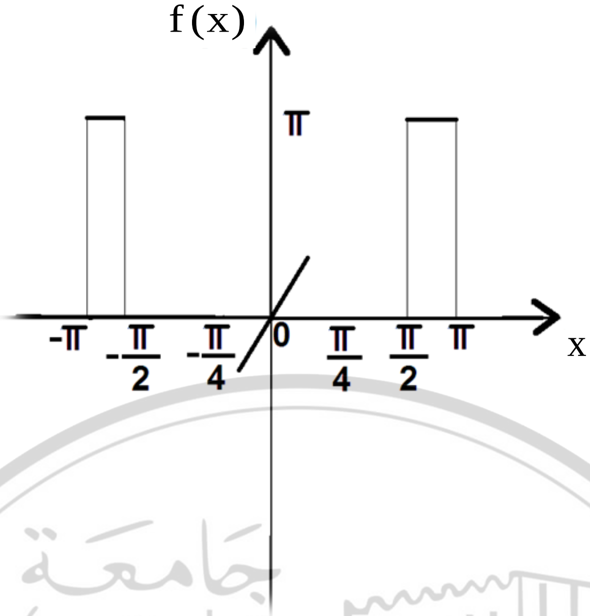
ليكن f تابعاً دورياً دوره 2π، ومعرفاً على المجال $]-\pi, \pi[$ بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} \pi\ ;\ x \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[\\ 0\ ;\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x\ ;\ x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\end{cases}$$

المطلوب: ارسم التابع $f(x)$، ثم ادرس تقارب سلسلة فورييه له، وأوجد مجموعها في كل نقطة $x \in]-\pi, \pi[$.

الحل:

إن الخط البياني للتبع المعطى هو التالي:



نلاحظ أن للتابع المعطى أربع نقاط انقطاع من النوع الأول وهي:

$$-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}$$

حيث لدينا:

$$f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\pi \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=0$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}+0\right)=0 \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}+0\right)=-\frac{\pi}{4} \quad , \quad f\left(-\frac{\pi}{4}-0\right)=0$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)=0 \quad , \quad f\left(-\frac{\pi}{2}-0\right)=\pi$$

وكذلك التابع المدروس مضطرد على كل مجال جزئي من المجالات الجزئية المحددة بنقاط الانقطاع والتي هي:

$$]-\pi,-\frac{\pi}{2}[\;,\;]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}[\;,\;]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[\;,\;]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[\;,\;]\frac{\pi}{2},\pi[$$

وأخيراً نجد أن:

$$f(\pi-0)=\pi \quad , \quad f(-\pi+0)=\pi$$

إذن شروط ديرخليه محققة، وبالتالي، فإن سلسلة فورييه للتابع المفروض f متقاربة على المجال $]-\pi,\pi[$ ومجموعها يساوي:

1- $f(x)$ من أجل كل نقطة استمرار x للتابع f.

2- $\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{8},-\frac{\pi}{8},-\frac{\pi}{2}$ على الترتيب عند النقط $\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{2}$.

3- π عند كل طرف من أطراف المجال $]-\pi,\pi[$.

مثال (10):

انشر في سلسلة فورييه التابع المغرف ، في المجال $[-\pi,\pi]$ بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases}0 & ; \quad -\pi\le x\le 0\\ x & ; \quad 0<x\le\pi\end{cases}$$

ثم احسب مجموعها.

الحل:

بما أن التابع المعطى مستمر ومضطرد في المجال $[-\pi,\pi]$ ، فإنه يمكن نشره وفق سلسلة فورييه على المجال $]-\pi,\pi[$ وجدنا في المثال (7) أن أمثال فورييه له هي:

$$a_0=\frac{\pi}{2}\ \ ,\ \ a_n=\begin{cases}0 & ; \quad n\ \text{زوجية}\\ -\dfrac{2}{\pi n^2} & ; \quad n\ \text{فردية}\end{cases}\ \ ,\ b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \ ;\ \ n\in N$$

وبالتالي فإن مجموع سلسلة فورييه للتابع $f(x)$ (مستمر على $]-\pi,\pi[$) هي:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad ;\quad x\in]-\pi,\pi[$$

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right];x\in]-\pi,\pi[$$

إن المساواة الأخيرة تمثل مجموع سلسلة فورييه للتابع المعطى $f(x)$ على المجال $]-\pi,\pi[$، أما مجموع سلسلة فورييه لهذا التابع من أجل النقطتين $x=\pm\pi$ فيساوي

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{0+\pi}{0}=\frac{\pi}{2}$$

حيث إن $f(-\pi)=0\neq\frac{\pi}{2}$ و أن $f(\pi)=\pi\neq\frac{\pi}{2}$ ، وبالتالي ، فإن النشر المطلوب هو:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]\quad ;\quad x\in]-\pi,\pi[$$

مثال (11):

ليكن f تابعاً معرفاً على المجال $[-\pi,\pi]$ بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} \pi \quad ; \quad x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ x \quad ; \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

المطلوب، إيجاد سلسلة فورييه الموافقة لهذا التابع.

الحل: لإيجاد سلسلة فورييه الموافقة للتابع المفروض، نوجد أولاً ثوابت فورييه: $a_0, a_n, b_n \; ; \; n \in N$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \pi dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \pi dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} + 0 + \frac{\pi^2}{2}\right] = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \pi \cos nx \, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \pi \cos nx \, dx\right]$$

بإجراء عملية المكاملة، علماً أن التكامل الثاني من اليمين يكامل بالتجزئة، ونفرض من أجل ذلك: $x = u \;\; \& \;\; \cos nx \, dx = dv$ نجد:

$$a_n = -\frac{2}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \pi \sin nx \, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \pi \sin nx \, dx\right]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \, dx = -\frac{2}{n^2\pi}\left(n\pi \cos \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2}\right)$$

بالتعويض في سلسلة فورييه التالية:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

نجد أن سلسلة فورييه المقابلة للتابع المعطى هي:

$$f(x) \approx \frac{\pi}{2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \cos nx + \frac{1}{n^2\pi}\left(n\pi \cos \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2}\right) \sin nx\right]$$

- لاحظ في المثال السابق استخدمنا الرمز ≈ بدلاً من = لأننا لم نناقش بعد موضوع تقارب سلسلة فورييه.

مثال (12):

انشر في سلسلة فورييه على المجال $[-\pi,\pi]$ التابع الدوري دورة 2π والمعرف بالعلاقة:

$$f(x) = e^x$$

الحل:

نلاحظ أن شروط ديرخليه محققة على $[-\pi,\pi]$ بسهولة، وبالتالي فإن سلسلة فورييه لهذا التابع هي:

$$e^x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

لنوجد الآن أمثال فورييه:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{1}{\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi}) = \frac{2shx}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\, dx$$

بالمكاملة بطريقة التجزئة نجد:

$$a_n = \frac{1}{\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi})\cos n\pi + nb_n \;\; ; \;\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx\, dx \;\; ; \;\; n \in N$$

بحساب الثابت b_n بطريقة التجزئة نجد:

$$b_n = -\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\, dx = -n.a_n \;\; ; \;\; n \in N$$

بتعويض b_n الأخيرة في a_n السابقة نجد:

$$a_n = \frac{1}{\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi})\cos n\pi - n^2 a_n$$

أي إن:

$$(1+n^2)a_n = \frac{1}{\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi})(-1)^n \;\; ; \;\; \cos n\pi = (-1)^n \;\; ; \;\; n \in N$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)}(e^{\pi} - e^{-\pi}) = \frac{(-1)^n.2sh\pi}{\pi(1+n^2)}$$

وبالتالي تكون قيمة الثابت b_n هي:

$$b_n = -\frac{n(-1)^n}{\pi(1+n^2)}(e^{\pi} - e^{-\pi}) = \frac{(-1)^{n+1}.2nsh\pi}{\pi(1+n^2)}$$

وبالتالي سلسلة فورييه للتابع e^x على المجال $[-\pi,\pi]$ هي:

$$e^x = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\Big[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{5}\cos 2x - \frac{1}{10}\cos 3x + \ \dots + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{5}\sin 2x + \frac{3}{10}\sin 3x + \ \dots\Big]$$

أو بالشكل:

$$e^x = \frac{2\mathrm{sh}\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum \frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n\sin nx)\right]$$

مثال (13):

انشر في سلسلة فورييه التابع $f(x) = x$ في المجال $[0,2\pi]$، ثم أوجد المجموع $S(x)$ لسلسلة فورييه الناتجة وأوجد $S\left(\frac{28}{3}\pi\right)$.

الحل:

تعطى سلسلة فورييه للتابع المفروض الذي دوره 2π بالعلاقة:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad ; \quad x \in R \ ; \ n \in N$$

لنحسب الآن أمثال فورييه:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} xdx = \frac{1}{4\pi}[x^2]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{4\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\, dx$$

بإجراء المكاملة بطريقة التجزئة، حيث نفرض:

$$u = x \ \Rightarrow \ du = dx \ \ , \ \ \cos nx\, dx = dv \ \Rightarrow \ v = \frac{1}{n}\sin nx$$

بالتعويض سنحصل: $a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\, dx$$

بإجراء المكاملة بطريقة التجزئة (كما سبق تماماً) نجد أن:

$$b_n = -\frac{2}{n} \quad ; \quad n \in N$$

إذاً سلسلة فورييه للتابع المعطى هي:

$$x = \pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + ---\right)$$

أو بالشكل:

$$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad ; \quad x \in]0,2\pi[$$

نلاحظ أن المجموع $S(x)$ لسلسلة فورييه الناتجة يساوي π من أجل النقطتين $x = 0 \ , \ x = 2\pi$

وكذلك نجد:

$$S\left(\frac{28}{3}\pi\right) = S\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{4}{3}\pi$$

ملاحظة (4):

يمكن حساب a_0 في المثال السابق بالعلاقة:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

لكن في هذه الحالة تكون سلسلة فورييه من الشكل:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

مثال (14): ارسم التابع الدوري والمعرف على المجال $[-5,5]$ بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -5 \le x < 0 \\ 3 & ; \quad 0 \le x \le 5 \end{cases}$$

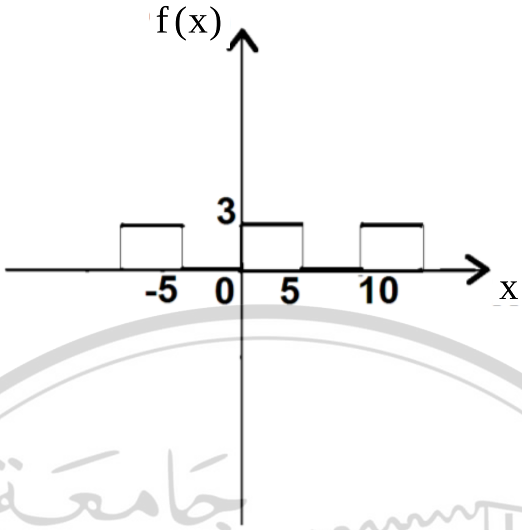
وأوجد منشور (سلسلة) فورييه له، ثم أوجد قيمة التابع في النقط $x = 0, x = \mp 5$ حتى يصبح مجموع سلسلة فورييه للتابع مساوياً لـ $f(x)$ على $[-5,5]$.

الحل: لنتحقق أولاً من شروط ديرخليه، بما أن النهايتين التاليتين موجودتان ومحدودتان:

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \quad , \quad f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$$

فإن النقطة $x = 0 \in]-5,5[$ هي نقطة انقطاع من النوع الأول للتابع المعطى، كما أن التابع المعطى ومشتقه على المجالين الجزئيين $]-5,0[$ و $]0,5[$ من المجال $]-5,5[$ المعطى عليه التابع المدروس، يحققان شروط ديرخليه.

إن الخط البياني للتابع المعطى هو:



إن دور التابع المعطى $2T = 10 \quad \Rightarrow \quad T = 5$

لنحسب أولاً أمثال فورييه للتابع المفروض:

$$a_0 = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-T}^{T} f(x)dx \quad \Rightarrow \frac{1}{5}\int_{-5}^{0} 0dx + \int_{0}^{5} 3dx = \frac{1}{5}3[x]_0^5 = 3$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}dx = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} 0dx + \int_{0}^{5} 3\cos\frac{n\pi x}{5}dx\right]$$

$$= 0 + \frac{3}{5}.\frac{5}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{5}x\right]_0^5 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}dx = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} 0dx + \int_{0}^{5} 3\sin\frac{n\pi}{5}xdx\right]$$

$$= -\frac{3}{5}.\frac{5}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi}{5}x\right]_0^5 = \frac{3}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

بإعطاء $n = 1,2,3,\cdots$ نجد أن:

$$b_n = \begin{cases} 0 \quad ; \quad n \text{ عدد زوجياً} \\ \dfrac{6}{n\pi} \quad ; \quad n \text{ عدد فردياً} \end{cases} \qquad \cdots(*)$$

وبالتالي يمكن كتابة b_n بالشكل:

$$b_n = \frac{6}{(2n-1)\pi} \quad ; \quad n = 1,2,3,\ldots$$

وبالتالي فإن:

$$f(x)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(2n-1)\pi}.\sin\frac{(2n-1)\pi}{5}x$$

كان بالإمكان مباشرة أن نكتب سلسلة فوريية آخذين بعين الاعتبار حساب b_n من $(*)$ بالشكل:

$$f(x)=\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{5}x+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{5}x+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{5}x+\cdots\right)$$

وهي متقاربة ومجموعها يساوي التابع $f(x)$ المعطى، **في جميع نقاط استمرار التابع في المجال** $]-5,5[$ وفي نقطة الانقطاع $x=0$ مجموعها حسب مبرهنة ديرخليه يعطى بالعلاقة التالية:

$$\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}$$

وبالتالي، فإن مجموعها في هذه الحالة:

$$\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{3}{2}$$

أما في طرفي المجال $[-5,5]$، فإن مجموعها يحسب حسب مبرهنة ديرخليه بالعلاقة:

$$\frac{f(-5^+)+f(5^-)}{2}$$

ويساوي $\frac{3}{2}$.

(5-3) سلاسل فوريية للتوابع الزوجية والفردية (ذات الدور 2π)

$(\boldsymbol{Fourier\ Series\ for\ Even\ and\ Odd\ Functions})$

من تعريف التابع الزوجي والتابع الفردي ينتج لدينا ما يلي:

إذا كان $f(x)$ تابعاً زوجياً، فإن $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=2\int_0^{\pi}f(x)dx$ لأن:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{0}f(x)dx+\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}f(-x)dx+\int_0^{\pi}f(x)dx$$
$$=\int_0^{\pi}f(x)dx+\int_0^{\pi}f(x)dx=2\int_0^{\pi}f(x)dx$$

وإذا فرضنا أن $g(x)$ تابع فردي، فيكون لدينا:

$$\int_{-\pi}^{\pi}g(x)dx=\int_0^{\pi}g(-x)dx+\int_0^{\pi}g(x)dx=-\int_0^{\pi}g(x)dx+\int_0^{\pi}g(x)dx$$
$$=0$$

وبملاحظة **أنه إذا كان $\boldsymbol{f(x)}$ تابعاً فردياً** فإن $f(x)\,cos\,nx$ يكون تابعًا فردياً أيضاً، بينما $f(x)\,sin\,nx$ تابعاً زوجياً. ينتج مما سبق في حالة $f(x)$ تابع فردي مايلي:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,sin\,nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\,sin\,nx\,dx$$

لاحظ أن سلسلة فورييه في هذه الحالة تحوي فقط توابع الجيب وأما إذا كان $f(x)$ تابعاً زوجياً، فإن $f(x)\,sin\,nx$ سيكون تابعاً فردياً، بينما يكون $f(x)\,cos\,nx$ تابعاً زوجياً، وفي هذه الحالة سيكون لدينا:

$$\boxed{\begin{aligned}a_0&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx\\ a_n&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\,cos\,nx\,dx\quad;\quad n=1,2,\cdots\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,sin\,nx\,dx=0\quad;\quad n=0,1,2\cdots\end{aligned}}$$

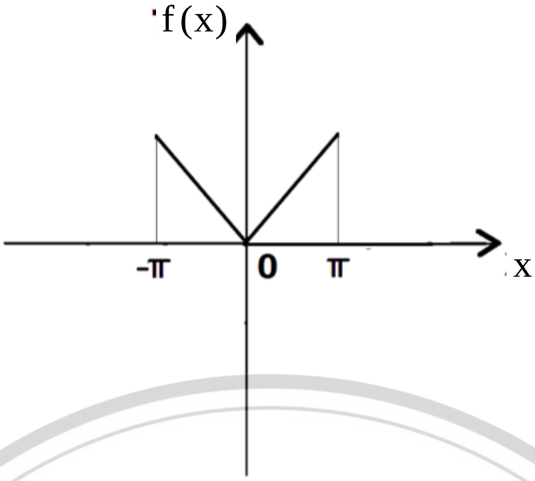
لاحظ أن سلسلة فورييه في هذه الحالة لا تحوي إلا توابع التجيب.

مثال (15):

انشر التابع $f(x)=|x|$ وفق سلسلة فورييه في المجال $[-\pi,\pi]$.

الحل:

إن شرطي ديرخليه محققان؛ لأن المجال $[-\pi,\pi]$ يتجزأ إلى المجالين $[-\pi,0]$ و $[0,\pi]$ والتابع متناقص في المجال الجزئي الأول بينما يتزايد في المجال الجزئي الثاني، وبما أن $f(-\pi)=\pi=f(\pi)$ والتابع $|x|$ مستمر في كل نقطة من نقاط المجال $[-\pi,\pi]$، فيكون الشرط الثاني من شروط ديرخليه محققاً، وكذلك بالنسبة لطرفي المجال، لاحظ الشكل التالي:



لنوجد الآن أمثال فورييه للتابع المعطى، بما أن التابع $|x|$ زوجي، لأن:

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

فإن $b_n = 0$ من أجل $n = 1,2,\cdots$، لنوجد الآن الأمثال a_0, a_n:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)dx + \int_{0}^{\pi}xdx\right] = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|.\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x\cos nx)dx + \int_{0}^{\pi}(x\cos nx)dx\right]$$

لنعوض في التكامل $\int_{-\pi}^{0}(-x\cos nx)dx$ كل $x = -u$ فنجد:

$$\int_{-\pi}^{0}(-x\cos nx)dx = \int_{\pi}^{0}u\cos nu\,(-du) = \int_{0}^{\pi}u\cos nu\ \ du$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x.\cos nx\,dx$$

وبإجراء المكاملة بطريقة التجزئة، حيث (نفرض $x = \mathrm{u}$ و $\cos nx\,dx = dv$)

$$\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx = \left[\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{0}^{\pi} = \begin{cases} 0 & ;\ for\ even\ n \\ -\dfrac{2}{n^2} & ;\ \ for\ odd\ n \end{cases}$$

وهذا يعني أن

$$a_n = \begin{cases} 0 & ;\ for\ even\ n \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & ;\ \ for\ odd\ n \end{cases}$$

بالتعويض في سلسلة فورييه في هذه الحالة نجد:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4\cos x}{\pi.1^2} - \frac{4\cos 3x}{\pi.3^2} - \frac{4\cos 5x}{\pi.5^2} - \ \ldots$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$$

أو بالشكل المختصر:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

إذا وضعنا $x = 0$ في السلسلة الأخيرة، فسنجد:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right)$$

ومنه يكون:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

مثال (16):

ليكن f تابعاً دورياً ودوره 4، ومعرفاً على مجال دوره $]-2,2[$ بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -2 < x \le -1 \\ x & ; \quad -1 < x < 1 \\ 0 & ; \quad -1 \le x < 2 \end{cases}$$

والمطلوب نشر هذا التابع وفق سلسلة فورييه.

الحل: التابع المعطى فردي ودوره $2L = 4$ ، لذا فإن: $a_n = 0 \quad ; \quad n = 0,1,2,\cdots$

لنحسب b_n ، حيث $n = 1,2,\ldots$ ، بالشكل التالي:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \int_0^1 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \int_0^1 x\sin\frac{n\pi}{2}xdx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[x\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi}{2}x\right]_0^1 = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{k+1}}{2k\pi} & ; \quad n = 2k \\ \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cdot\dfrac{4}{\pi^2} & ; \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

وبالتالي فإن سلسلة فورييه للتابع المعطى هي:

$$\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{4\pi}\sin\pi x-\frac{4}{3^2\pi^2}\sin\frac{3\pi x}{2}-\frac{1}{8\pi}\sin 2\pi x+---$$

نلاحظ أن مجموع هذه السلسلة في جميع النقاط x المغايرة للأعداد الصحيحة الفردية يساوي $f(x)$، أما في الأعداد الصحيحة الفردية، فإن مجموع هذه السلسلة يساوي $\frac{1}{2}$ في النقاط $4k+1$، ويساوي $-\frac{1}{2}$ في النقاط $4k-1$، حيث k عدد صحيح.

– تقدم الملاحظة التالية شكل آخر من أشكال فورييه لتابع دوري يحقق شروط ديرخليه.

ملاحظة (5):

إذا حقق التابع الدوري $f(x)$ شروط ديرخليه في المجال $]-T,T[$، فإنه يمكن نشره بسلسلة فورييه الحاوية على التجيبات فقط أو بسلسلة فورييه الحاوية على الجيوب فقط، وذلك لأن:

نعلم أن سلسلة فورييه للتابع الدوري السابق الذي يحقق شروط ديرخليه في المجال $]-T,T[$ هي من الشكل:

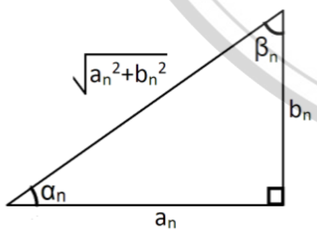
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi x}{T}+b_n\sin n\frac{\pi x}{T}\right)$$

حيث إن أمثال فورييه $a_0,a_n,b_n \quad ; \quad n=1,2,\dots\dots\dots$ تحسب من العلاقات:

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\cos n\frac{\pi x}{T}dx \quad ; \quad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\sin n\frac{\pi x}{T}dx \quad ; \quad n=1,2,\cdots$$

لنتأمل المثلث القائم التالي:



ومنه نجد أن:

$$\cos\alpha_n=\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$$

$$\& \quad \sin\alpha_n=\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$$

من ناحية ثانية، يمكن كتابة سلسلة فورييه السابقة بالشكل:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}\left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos n\frac{\pi x}{T}+\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin n\frac{\pi x}{T}\right]$$

أو بالشكل (بعد الاستفادة من قيم $\cos\alpha_n \;\&\; \sin\alpha_n$)

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\cos \alpha_n \cos n\frac{\pi x}{T} + \sin \alpha_n \sin n\frac{\pi x}{T} \right] \cdots (*)$$

حيث إن: $A_0 = \frac{a_0}{2}$ و $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$، وبالتالي يكون لدينا:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\frac{\pi x}{T} - \alpha_n\right)$$

وبما أن $\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \beta_n$، فتأخذ السلسلة $(*)$ الشكل التالي:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n\frac{\pi x}{T} + \beta_n\right)$$

(6-3) الصيغة العقدية لسلسلة فورييه

$(\boldsymbol{Complex\ Form\ of\ Fourier\ Series})$:

إن علاقات أولر التالية:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad \& \quad \sin nx = i\left(\frac{-e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right)$$

$$Or \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

تسمح لنا بكتابة التوابع المثلثية بدلالة التوابع النيبرية ذات الأس العقدي (المركب)، وبالتالي نستطيع بتلك الصيغة كتابة السلسلة المثلثية، وبشكل خاص سلسلة فورييه لتابع ما.

مبرهنة (2):

ليكن $f(x)$ تابعاً حقيقياً قابلاً للمكاملة على المجال $[-\pi, \pi]$، عندئذٍ سلسلة فورييه العقدية لهذا التابع هي من الشكل:

$$\boxed{f(x) \approx c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx}}$$

حيث

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots}$$

البرهان:

نعلم أن سلسلة فورييه للتابع $f(x)$ على المجال $[-\pi, \pi]$ هي من الشكل:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

حيث:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad ; \quad n = 0,1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad ; \quad n = 1,2,\cdots$$

بالاستفادة من صيغ أولر التالية:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad \& \quad \sin nx = i\left(\frac{-e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right)$$

$$Or \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

نجد أن:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right) e^{inx} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right) e^{-inx}\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ia_n + b_n}{2i} e^{inx} + \frac{ia_n - b_n}{2i} e^{-inx} \quad \cdots (*)$$

وبما أن:

$$\frac{ia_n + b_n}{2i} = \frac{i(ia_n + b_n)}{2i^2} = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

وبالمثل نجد أن:

$$\frac{ia_n - b_n}{2i} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

عندئذٍ تأخذ السلسلة $(*)$ الشكل التالي:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2i} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2i} e^{-inx}$$

إذا رمزنا للعدد العقدي $\frac{a_n - ib_n}{2i}$ بـ c_n ولمرافقه $\frac{a_n+ib_n}{2i}$ بـ c_{-n} وفرضنا أن $c_0 = \frac{a_0}{2}$، فتأخذ السلسلة الأخيرة الشكل التالي:

$$f(x) \approx c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \right)$$

أو بالشكل:

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

لنحسب الآن ثوابت فورييه في النشر العقدي:

بما أن $c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i)$، وبالاستفادة من أمثال فورييه a_n و b_n يكون لدينا:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,(\cos nx - i \sin nx) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\cos(-nx) + i \sin(-nx) \right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

إذاً:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad ; \quad n = 0,1,2,\cdots$$

وبشكل مشابه نجد أن:

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i \sin nx) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(-n)x} dx \quad ; \quad n = 1,2,\ldots$$

وبالتالي من أجل أي عدد صحيح يكون:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

مثال (17):

انشر التابع $f(x) = e^{ax} \; ; \; a \in R$ في سلسلة فورييه العقدية، وحيث $x \in [-\pi, \pi]$

الحل:

لنحسب أولاً أمثال فورييه c_n، لدينا من أجل أي قيمة لـ n:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-in)x} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{a - in} e^{(a-in)x} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi(a-in)}\left(e^{(a-in)\pi} - e^{-(a-in)\pi}\right)$$

وبما أن:

$$e^{in\pi} = cos\, n\pi + i\, sin\, n\pi = cos\, n\pi = (-1)^n$$

لذلك يكون:

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2\pi(a-in)}(e^{a\pi} - e^{-a\pi}) = \frac{(-1)^n}{\pi(a-in)} sh\, a\pi$$

وبالتالي يكون منشور فورييه العقدي للتابع e^{ax} هو:

$$e^{ax} = \frac{sh\, a\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{inx}}{a-in}$$

نقدم المبرهنة التالية التي تفيدنا في كتابة سلسلة فورييه العقدية للتابع $f(x)$ القابل للمكاملة على المجال $]-T,T[$، والتي تبرهن بنفس الطريقة الواردة في برهان المبرهنة السابقة.

مبرهنة (3):

بفرض $f(x)$ تابع حقيقي قابل للمكاملة على المجال $]-T,T[$، عندئذٍ سلسلة فورييه العقدية لهذا التابع تعطى بالشكل:

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{T}x}$$

حيث إن أمثال فورييه لها هي:

$$c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x) e^{i\frac{n\pi}{T}x}\, dx \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

(7-3) نتائج وملاحظات:

1- إذا حقق التابع $f(x)$ في المبرهنتين السابقتين شروط ديرخليه في المجال $[-\pi,\pi]$ (أو $]-T,T[$) فإن الإشارة $\approx$ تأخذ شكل المساواة $=$، وفي هذه الحالة تكون سلسلة فورييه العقدية للتابع $f(x)$ في المجال $]-T,T[$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{T}x}$$

2- في نشر التوابع الحقيقية، تكون أمثال فورييه c_n و c_{-n} مترافقة عقدياً.

3- من الممكن الانتقال من الشكل العقدي إلى الشكل المثلثي لسلسلة فورييه لتابع حقيقي معطى، وذلك بتطبيق العلاقات:

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad \& \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

وذلك لأن:

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad \& \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

بضرب العلاقتين السابقتين بالعدد 2 نجد:

$$2c_{-n} = a_n + ib_n \quad \& \quad 2c_n = a_n - ib_n$$

وبجمع العلاقتين السابقتين أيضاً نجد: $2a_n = 2c_n + 2c_{-n}$

وبطرح العلاقتين السابقتين أيضاً نجد: $2b_n i = 2c_{-n} - 2c_n$

تكتب العلاقتان السابقتان على الشكل الآتي:

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad \& \quad -b_n = i(c_{-n} - c_n)$$

أو على الشكل:

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) \end{aligned}}$$

وبالعكس، يمكن الانتقال من الشكل المثلثي إلى الشكل العقدي لسلسلة فورييه لتابع حقيقي معطى، وذلك بتطبيق العلاقات:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \;,\; c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \;,\; c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

4- ليكن $f(x)$ تابعاً حقيقياً وقابلاً للمكاملة على المجال $]-T,T[$.

أ- إذا كان $f(x)$ تابعاً فردياً، فإن نشر فورييه العقدي لهذا التابع على المجال المذكور يكون:

$$\boxed{f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(e^{\frac{i\pi n}{T}x} - e^{-\frac{i\pi n}{T}x}\right) \quad ; \quad n \neq 0}$$

حيث إن أمثال فورييه تتعرف بالعلاقات:

$$\boxed{c_0 = 0 \quad , \quad c_n = -\frac{1}{2T}\int_0^T f(x)\left(e^{\frac{i\pi n}{T}x} - e^{-\frac{i\pi n}{T}x}\right)dx \quad , \quad c_{-n} = -c_n}$$

ب- أما إذا كان التابع الحقيقي $f(x)$ المعطى على المجال $]-T,T[$ والقابل للمكاملة على هذا المجال زوجياً، فإن نشر فورييه العقدي له على المجال المذكور يأخذ الشكل:

$$\boxed{f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(e^{\frac{i\pi n}{T}x} + e^{-\frac{i\pi n}{T}x}\right)}$$

وتعطى أمثال فورييه بالعلاقات:

$$\boxed{c_0 = \frac{a_0}{2} \ , \ \ c_n = \frac{1}{2T}\int_0^T f(x)\left(e^{\frac{i\pi n}{T}x} + e^{-\frac{i\pi n}{T}x}\right)dx \ , \ \ c_n = c_{-n}}$$

البرهان:

أ- بما أن التابع $f(x)$ فردي على $]-T,T[$ فإن

$$a_n = 0 \ \ ; \ \ \ n = 0,1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\, sin\frac{n\pi}{T}x\, dx$$

وإن سلسلة فورييه له في هذه الحالة:

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, sin\frac{n\pi}{T}x \ \cdots (*)$$

وبما أن $a_0 = 0$، فإن $c_0 = 0$ و

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = -\frac{ib_n}{2} = -\frac{i}{T}\int_0^T f(x)\, sin\frac{n\pi}{T}xdx$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{ib_n}{2} = -c_n$$

وبالتالي يكون لدينا: $b_n = 2ic_n$ لأن: $b_n = i(c_n - c_{-n})$

بالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أن سلسلة فورييه في الصيغة العقدية للتابع الحقيقي الفردي $f(x)$ على المجال $]-T,T[$ هي:

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(e^{\frac{i\pi n}{T}x} - e^{-\frac{i\pi n}{T}x}\right)$$

إذا حقق التابع المفروض $f(x)$ شروط ديرخليه على المجال $]-T,T[$ فإن سلسلة فورييه في الصيغة العقدية لهذا التابع الفردي على المجال المذكور هي:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(e^{\frac{i\pi n}{T}x} - e^{-\frac{i\pi n}{T}x}\right) \ \ ; \ \ n \neq 0$$

ب- أما إذا كان التابع $f(x)$ المعطى على المجال $]-T,T[$ زوجياً وقابلاً للمكاملة على $]-T,T[$، فإنه يكون:

$$a_n = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_0^T f(x) \cos \frac{n\pi}{T} x \, dx \;\; ; \; n = 0,1,2, \cdots \;\; , b_n = 0,1,2, \cdots$$

وفي هذه الحالة تكون لدينا الأمثال:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$
$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{a_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, cos \frac{n\pi}{T} x dx$$
$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{a_n}{2} = c_n$$

اذاً الأمثال العقدية لسلسلة فورييه في هذه الحالة هي:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \;\; , \;\; c_n = \frac{1}{2T} \int_0^T f(x) \left(e^{\frac{i\pi n}{T} x} + e^{-\frac{i\pi n}{T} x} \right) dx \;\; , \;\; c_{-n} = c_n$$

ومنه يكون لدينا:

$$a_n = c_n + c_{-n} = 2c_n$$

وهكذا تكون سلسلة فورييه في الصيغة العقدية للتابع الحقيقي الزوجي $f(x)$ على المجال $]-T, T[$ هي:

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(e^{\frac{i\pi n}{T} x} + e^{-\frac{i\pi n}{T} x} \right)$$

واذا حقق التابع $f(x)$ شروط ديرخليه على المجال $]-T, T[$، فإن سلسلة فورييه في الصيغة العقدية للتابع المفروض على المجال $]-T, T[$ وفق سلسلة جيوب تمام عقدية لفورييه هي:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(e^{\frac{i\pi n}{T} x} + e^{-\frac{i\pi n}{T} x} \right)$$

مثال (18):

أوجد سلسلة فورييه في الصيغة العقدية للتابع:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \;\; -5 < x < 0 \\ 3 & ; \;\;\;\; 0 < x < 5 \end{cases}$$

ثم استنتج منه سلسلة فورييه في الصيغة الحقيقية.

الحل:

إن دور التابع المعطى $2T = 10$، ومنه $T = 5$، لنوجد أولاً الأمثال:

$$c_n = \frac{1}{10}\int_{-5}^{5} f(x) e^{-\frac{in\pi}{5}x} = \frac{1}{10}\int_{-5}^{0} 0dx + \frac{1}{10}\int_{0}^{5} 3e^{-\frac{in\pi}{5}x} dx$$

$$= \frac{3}{10}\frac{5}{(-in\pi)}\left[e^{-\frac{in\pi}{5}x}\right]_0^5 \quad ; \quad n \neq 0$$

$$= \frac{3}{2}\frac{i}{n\pi}\left(e^{-\frac{in\pi}{5}5} - 1\right) = \frac{3i}{2n\pi}\left(e^{-in\pi} - 1\right) \quad ; \quad n \neq 0$$

لنحسب الآن c_0، وذلك من العلاقة:

$$c_0 = \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_0^5 3e^0 dx = \frac{3}{10}[x]_0^5 = \frac{3}{2}$$

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{T}x} \quad ; \quad n \neq 0$$

وبالتالي فإن سلسلة فورييه في الصيغة العقدية للتابع المعطى هي:

$$f(x) \approx \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\left(e^{-in\pi} - 1\right) e^{-\frac{in\pi}{5}x} \quad ; \quad n \neq 0$$

للحصول على سلسلة فورييه في الصيغة الحقيقية، نطبق مايلي:

$$a_0 = \mathrm{c}_0 = \frac{3}{2}$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{3}{2}\left[\frac{i}{n\pi}\left(e^{-in\pi} - 1\right) - \frac{i}{n\pi}\left(e^{in\pi} - 1\right)\right] \quad ;$$

$$c_{-n} = \frac{3}{2}\frac{i}{-n\pi}\left(e^{in\pi} - 1\right) = -\frac{3}{2}\frac{i}{n\pi}\left(e^{in\pi} - 1\right)$$

$$a_n = \frac{3}{2}\frac{i}{n\pi}\left[e^{-in\pi} - 1 - e^{in\pi} + 1\right] = 0$$

لأن $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$ ولدينا:

$$b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n}) = -\frac{3}{2\pi}\left[\frac{1}{n}\left(e^{-in\pi} - 1\right) - \frac{1}{-n}\left(e^{in\pi} - 1\right)\right]$$

$$= -\frac{3}{2n\pi}\left[e^{-in\pi} + e^{in\pi} - 2\right] = -\frac{3}{n\pi}\left[\frac{e^{in\pi} + e^{-in\pi}}{2} - 1\right]$$

$$= -\frac{3}{\mathrm{n\pi}}(\cos n\pi - 1) = \frac{3}{n\pi}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & if \ \text{زوجي}\, n \\ \dfrac{6}{n\pi} & if \ \text{فردي}\, n \end{cases}$$

لنعوض الآن قيمة a_0, a_n, b_n في:

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{n\pi}{T} x \right)$$

نجد:

$$f(x) \approx \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \left[\sin \frac{\pi}{5} x + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{5} x + \cdots \right]$$

ملاحظة(6):

ذكرنا سابقاً أن بعض المراجع الأجنبية، تعتمد سلسلة فورييه للتابع الحقيقي $f(x)$ المعرف على المجال $(c, c+T)$ حيث c ثابت حقيقي، هي السلسة:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nwx + b_n \sin nwx) \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{w}$$

حيث:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(x) \cos nwx \, dx \quad ; \quad n = 1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(x) \sin nwx \, dx \quad ; \quad n = 1,2,\cdots$$

في هذه النموذج (الحالة)، تعطى الثوابت العقدية بالعلاقات التالية:

$$\boxed{\begin{aligned} c_0 &= a_0 = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(x) dx \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(x) e^{-inwx} dx \end{aligned}}$$

و بما أن $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ فإنه يكون لدينا:

$$c_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(x) (\cos nwx - i \sin nwx) dx$$

$$= \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(x) e^{-inwx} dx$$

وبالطريقة نفسها نجد أن:

$$\boxed{c_{-n} = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(x) e^{inwx} dx}$$

وهذا يعني أنه يمكن حساب الثوابت العقدية c_0, c_n, c_{-n} من علاقة واحدة هي:

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(x) e^{-inwx} dx \quad ; \quad n \in Z}$$

نستنتج مما سبق ، أنه للحصول على سلسلة فورييه في الصيغة العقدية، يكفي أن نحسب ثوابت النشر c_n من العلاقة الأخيرة مباشرة ، هذا يعني أنه يمكن الحصول على الثوابت العقدية c_n من دون الحاجة إلى معرفة الثوابت الحقيقية في سلسلة فورييه والتي هي a_0, a_n, b_n حيث $n = 1,2, \dots \dots \dots$

(8-3) النشر ذو نصف المدى $(Half\ Range\ Expansion)$:

ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً ومستمراً على المجال $[0, \pi]$، أو على المجال $[-\pi, 0]$، ولنفرض أنه قابل للنشر وفق سلسلة فورييه المثلثية، إذا مددنا هذا التابع بشكل فردي أو زوجي على المجال $[-\pi, 0]$ أو على المجال $[0, \pi]$ سنحصل على نشرين مختلفين لهذا التابع، وهذا ممكن طبعاً اعتماداً على خواص التوابع الفردية والزوجية ، ويمكن **تعميم هذه الفقرة** بالشكل التالي.

إن النتائج التي حصلنا عليها في نشر تابع فردي أو تابع زوجي متوقعة لأنه يمكن التعبير عن تابع فردي بدلالة توابع فردية فقط، كما يمكن التعبير عن تابع زوجي بتوابع زوجية فقط، ولهذه النتائج أهمية كبيرة في التطبيقات العملية في مجال هندسة الاتصالات والتحكم الآلي وغير ذلك من العلوم الهندسية والفيزيائية.

كثيراً ما يطلب أن نعبر عن تابع $\phi(x)$ **معرف** في مجال ما وليكن $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ بدلالة سلسلة جيوب تمام حيث $T = \frac{2\pi}{w}$، مع العلم أن التابع $\phi(x)$ ليس زوجياً، ولكي يتم ذلك نعرف تابعاً جديداً وليكن $\psi(x)$ وهو تابع دوري ودوره T وزوجي، ومعرف في مجال الدور $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ بالشكل التالي:

$$\psi(x) = \phi(x) \text{ من أجل } 0 \le x \le \frac{T}{2}$$

$$\psi(x) = \phi(-x) \text{ من أجل } -\frac{T}{2} \le x \le 0$$

عندئذٍ تكون سلسلة فورييه للتابع الزوجي $\psi(x)$ في المجال $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ بدلالة جيوب التمام فقط، وهي نفسها للتابع $\phi(x)$ في المجال $\left[0, \frac{T}{2}\right]$، وهذا النشر يسمى **عادة بالنشر ذي نصف المدى.**

بنفس الطريقة يمكن أن نعبر عن التابع $\phi(x)$ بدلالة سلسلة جيوب فقط ، فيما إذا عرفنا التابع الفردي $\psi(x)$ بالشكل: $\psi(x)=\phi(x)$ من أجل $0\le x\le \frac{T}{2}$
$\psi(x)=-\phi(-x)$ من أجل $-\frac{T}{2}\le x\le 0$، عندئذٍ تكون سلسلة فورييه للتابع $\psi(x)$ في المجال $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ بدلالة جيوب فقط، وهي نفسها للتابع $\phi(x)$ في المجال $\left[0,\frac{T}{2}\right]$.

ملاحظة (7):

إن النشر الناتج للتابع المحدد على نصف مجال آخر يكون صحيحاً فقط من أجل قيم x المنتمية إلى نصف مجال المنطلق.

ملاحظة (8):

إن النشر ذا نصف المدى للتابع $\phi(x)$ ليس وحيداً، ويعود السبب في ذلك إلى طبيعة التمديد الذي نأخذه لهذا التابع، فتمديد التابع يمكن أن يتم بطرق متعددة، وهذا يؤثر في ثوابت أولر، وبالتالي على السلسلة الموافقة للتابع المعطى.

مثال (19):

انشر التابع $\phi(x)=x$ المعرف على المجال $[0,\pi]$ بدلالة سلسلة تحوي جيوب التمام فقط.

الحل: نعرف التابع $\psi(x)$ بالشكل التالي: $\psi(x)=|x| \;;\; -\pi\le x\le\pi$ وهو تابع زوجي، أي:

$$\psi(x)=-x \text{ ، من أجل } -\pi\le x\le 0$$

$$\psi(x)=x \text{ ، من أجل } 0\le x\le \pi$$

ولأن $\psi(x)$ تابع زوجي، فيكون $b_n=0 \;;\; n=1,2,\cdots$ و

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi xdx=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \psi(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx$$

بإجراء المكاملة بالتجزئة حيث نفرض أن $cos\,nx\,dx=dv \;,\; x=u$ نحصل على:

$$a_n=\frac{2}{n\pi^2}(cos\,n\pi-1)=\begin{cases} 0 \;;\; if \;\; n \text{ زوجي} \\ -\frac{4}{\pi n^2} \;;\; if \;\; n \text{ فردي}\end{cases}$$

وبالتالي يكون النشر المطلوب:

$$\phi(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right) \; ; \; 0 \le x \le \pi$$

مثال (20):

بفرض $\phi(x)$ تابعاً معرفاً بالشكل:

$$\phi(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < 2 \\ 0 & ; \quad \text{غير ذلك} \end{cases}$$

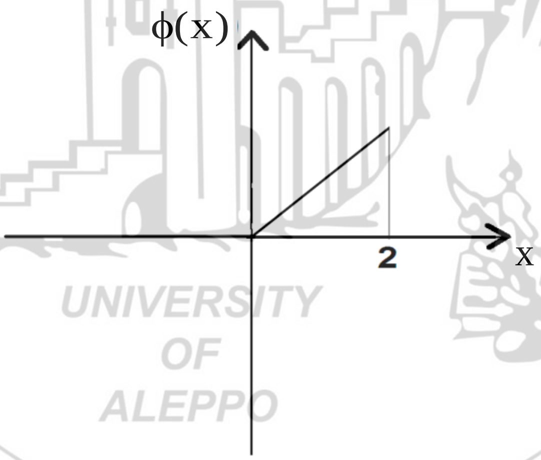
والمطلوب:

1- اكتب التابع $\phi(x)$ بدلالة سلسلة جيوب تمام فقط في المجال $]0,2[$.

2- اكتب هذا التابع $\phi(x)$ بدلالة سلسلة جيوب فقط في المجال $]0,2[$.

الحل:

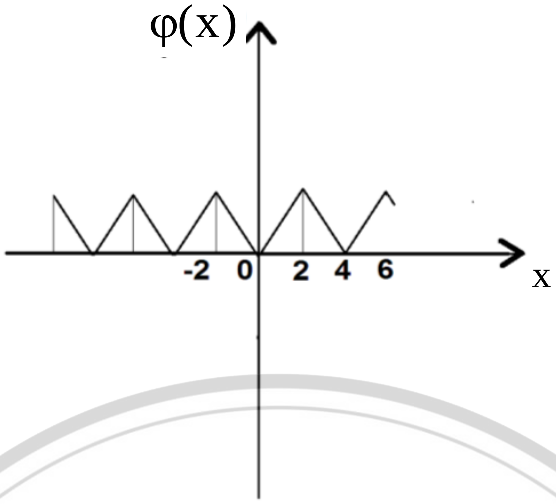
إن الخط البياني للتابع $\phi(x)$ هو:



لنعرف التابع الزوجي $\psi(x)$ ذي الدور $T = 4$ والمعرف على المجال $]-2,2[$ بالعلاقة:

$$\psi(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < 2 \\ -x & ; \quad -2 < x < 0 \end{cases}$$

إن المنحني البياني التالي هو المنحني الناتج عن تمديد التابع $\psi(x)$ دورياً من المجال $[-2,2]$ على طول المحور الحقيقي.



وبما أن $\psi(x)$ زوجي في المجال $]-2,2[$ فإن $b_n = 0$ حيث $n = 1,2,\ldots$،

كما أن:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\psi(x)dx = \frac{2}{4}\int_0^2 xdx = 1$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\psi(x)\cos nwx\,dx = \frac{4}{4}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi}{2}x\right]_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi}{2}x\,dx = 0 + \frac{4}{(n\pi)^2}\left[\cos\frac{n\pi}{2}x\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & ; \quad if \quad n \text{ زوجي} \\ -\dfrac{8}{n^2\pi^2} & ; \quad if \quad n \text{ فردي} \end{cases}$$

أي أن: $a_{2n-1} = -\frac{8}{(2n-1)^2\pi^2} \quad ; \quad n = 1,2,\cdots$

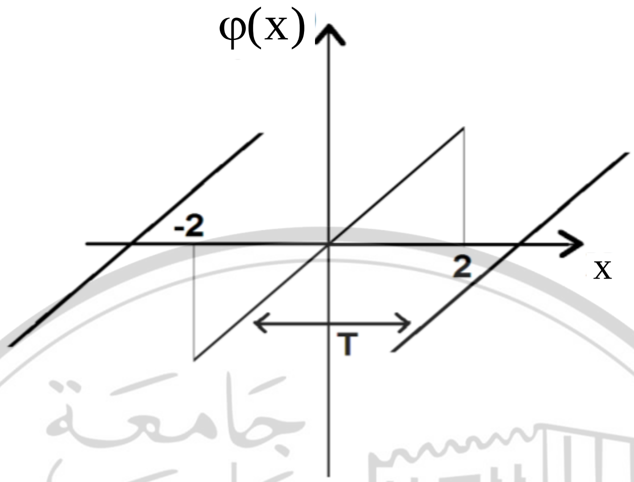
وبالتالي يكون منشور التابع $\phi(x)$ بدلالة سلسلة جيوب تمام فقط في المجال $]0,2[$:

$$\phi(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi}{2}x + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi}{2}x + \cdots\right];\ 0 \le x \le 2$$

-2 لنمدد التابع $\phi(x)$ بحيث يصبح تابعاً فردياً ودورياً دوره $T = 4$، من أجل ذلك لنعرف التابع $\psi(x)$ المعرف في المجال $]-2,2[$ بالعلاقة:

$$\psi(x) = \begin{cases} x & ; \quad if \quad 0 < x < 2 \\ -x & ; \quad if \quad -2 < x < 0 \end{cases}$$

كما أن المنحني البياني التالي هو المنحني البياني الناتج عن تمديد التابع $\psi(x)$ دورياً من المجال $[-2,2]$ على طول المحور الحقيقي.



وبما أن التابع $\psi(x)$ فردي في المجال $]-2,2[$ فسيكون

$$a_0 = 0\ ,\ a_n = 0\ \ ;\ \ n = 1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \psi(x)\, sin\, nwx\, dx = \frac{4}{4}\int_0^{2} x\, sin\frac{n\pi}{2}x\, dx = -\frac{4}{n\pi}cos\, n\pi$$

$$= -\frac{4}{n\pi}(-1)^n = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

بتعويض قيم a_0, a_n, b_n في منشور فورييه نجد:

$$\phi(x) = \frac{4}{\pi}\left[sin\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}sin\frac{2\pi}{2}x + \frac{1}{3}sin\frac{3\pi}{2}x - \ \ldots\right]$$

أو:

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}sin\frac{n\pi}{2}x \quad ; \quad 0 < x < 2$$

وهو منشور التابع $\phi(x)$ بدلالة سلسلة جيوب فقط في المجال $]0,2[$.

(9-3) التوابع المتعامدة ($Orthogonal\ Functions$):

تهدف هذه الفقرة في نشر تابع ما في سلسلة وفق جملة من التوابع المتعامدة يطلق البعض عليها اسم سلسلة فورييه العامة، بداية نقدم التعاريف التالية:

-1 **الجداء السلمي لتابعين حقيقين:** بفرض g, f تابعين معرفين ومستمرين في المجال $[a, b]$ من المحور الحقيقي، نعرف الجداء السلمي للتابعين g, f، والذي ترمز له عادة بـ

$< f(x), g(x) >$ ، حيث $x \in [a, b]$ ، بأنه العدد التالي:

$$\int_a^b f(x). g(x) dx$$

إذاً :

$$\boxed{< f(x), g(x) >= \int_a^b f(x). g(x) dx}$$

-2 **نظيم تابع:** نظيم التابع $f(x)$ في المجال $[a, b]$ ونرمز له بـ $\|f\|$ وهو الجذر التربيعي للجداء السلمي لذلك التابع بنفسه، أي إن الجذر التربيعي للتكامل: $\int_a^b f^2(x) dx$ ، إذاً يمكن القول إن:

$$\boxed{\|f(x)\| = \sqrt{< f(x), f(x) >} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}}$$

-3 **التابع المنظم** $(\boldsymbol{normeal})$: إذا كان ناتج التكامل الأخير مساوياً للواحد، عندها نقول إن التابع $f(x)$ تابعاً نظامياً (نظيمياً) في المجال $[a, b]$.

-4 **المسافة بين تابعين:** نعرف المسافة بين التابعين $g(x), f(x)$ بأنها العدد:

$$\boxed{\|f(x) - g(x)\| = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}}$$

-5 **التابعان المتعامدان:**

نقول عن التابعين g, f إنهما متعامدان في المجال $[a, b]$، إذا كان جداؤهما السلمي يساوي الصفر، أي إذا تحققت العلاقة:

$$\boxed{\int_a^b f(x). g(x) dx = 0}$$

يمكن تعميم المفاهيم السابقة على النحو التالي:

لتكن لدينا جملة التوابع $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ المعرفة والمستمرة في المجال $[a, b]$، والتي لا يطابق أي منها التابع الصفري في $[a, b]$. نقول عن جملة

التوابع هذه إنها **جملة متعامدة** في المجال $[a,b]$، إذا كانت متعامدة مثنى مثنى في $[a,b]$، أي إذا تحققت العلاقة:

$$\int_a^b f_i(x).f_j(x) = 0 \quad ; \quad i \neq j$$

ونقول عن الجملة السابقة إنها **جملة منظمة**، إذا كان كل تابع منها منظماً، أي إذا تحققت العلاقة:

$$\int_a^b f_i^2(x)dx = 1 \quad ; \quad i = 1,2,\ldots$$

ونقول إن الجملة السابقة هي **جملة متعامدة** ومنظمة إذا تحققت العلاقة:

$$\int_a^b f_i(x).f_j(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases}$$

لنقدم الآن أمثلة للتعاريف السابقة.

مثال (21):

من أهم الأمثلة للتوابع المتعامدة هي التوابع المثلثية:

$$1, \cos x , \sin x , \cos 2x , \sin 2x , \cdots , \cos nx , \sin nx , \cdots$$

في المجال $[-\pi,\pi]$، لكنها ليست منظمة.

الحل:

من أجل $n,m = 0,1,2,\cdots \quad ; \quad n \neq m$ يكون لدينا:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx . \cos mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x] \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x + \frac{1}{n+m}\sin(n+m)\,x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

كذلك:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx . \sin mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] \, dx$$

في التكامل الأخير نلاحظ أن ناتج كل تكامل فيه، يساوي الصفر: لأنه من أجل أي $k \neq 0$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = -\frac{1}{k}[\cos kx]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

أما من أجل $k = 0$ فيكون: $\sin kx = 0$، في المجال $[-\pi,\pi]$، لدينا أيضاً:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, . \sin mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x - \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

وأخيراً نرى بسهولة أن:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1. \sin nx \, dx = \left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} 1. \cos nx \, dx = \left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

نستنتج مما سبق أن جملة التوابع المعطاة هي جملة متعامدة.

لنثبت الآن أنها غير منظمة، بما أن $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi$ وبالتالي فإن نظيم كل من التوابع: $\cos kx \, , \sin kx$ هو $\sqrt{\pi}$، كما ويمكن الاثبات أن نظيم العدد 1 هو $\sqrt{2\pi}$، إذاً الجملة المعطاة ليست جملة منظمة.

مثال (22):

حدد قيمة الثوابت الحقيقية a, b, c في التابع $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ حتى يتعامد التابع $P_2(x)$ مع كل من التابعين: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$، في المجال $[-1,1]$.

الحل:

لنكتب أولاً شرط التعامد للتوابع:

$$\int_{-1}^{1}(ax^2 + bx + c). x dx = 0$$
$$\int_{-1}^{1}(ax^2 + bx + c). 1. dx = 0$$

بإجراء المكاملة نجد أن:

$$b = 0 \quad , \quad a = -3c$$

وبالتالي، فإن $P_2(x) = c(-3x^2 + 1)$، حيث c ثابت كيفي، يتعين هذا الثابت بحيث $P_2(1) = 1$، ومنه يكون $c = -\frac{1}{2}$ ، إذاً

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

ملاحظات:

1- بما أن كل تابع من التوابع $1, sin\, x\,, cos\, x\,, sin\, 2x\,, cos\, 2x\,, \dots$ دوري ودورة 2π،
إذاً مجموعة التوابع السابقة متعامدة على أي مجال من الشكل $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ وطوله 2π.

2- إن خاصة التعامد لا تتمتع بها التوابع المثلثية فقط، توجد جمل عديدة من التوابع تتمتع بخاصة التعامد، فعلى سبيل المثال التوابع: $1\ ,\ x\ ,\ \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ متعامدة على المجال $[-1,1]$ لأن:

$$\int_{-1}^{1} 1.\,xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0 \quad \& \quad \int_{-1}^{1} x\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1} 1\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)dx = 0$$

3- يمكن تحويل جملة التوابع المتعامدة $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ إلى جملة توابع متعامدة ومنظمة، وذلك بتقسيم كل تابع من التوابع السابقة على نظيمه، أي بالشكل:

$$\frac{f_1(x)}{\|f_1(x)\|}, \frac{f_2(x)}{\|f_2(x)\|}, \dots, \frac{f_n(x)}{\|f_n(x)\|}, \dots$$

وبالتالي تكون جملة التوابع السابقة متعامدة منظمة.

(10-3) الصيغة المعممة لسلسلة فورييه ($\boldsymbol{Generalized\ Fourier\ Series}$):

لاحظنا من خلال ما سبق، أن سلسلة فورييه للتابع $f(x)$ تعطي هذا التابع بدلالة مجموع توابع مثلثية متعامدة، هذا الأمر يقودنا إلى تعميم سلسلة فورييه لتشمل أي مجموعة من التوابع المتعامدة على مجال ما.

تعطى الصيغة المعممة لسلسلة فورييه للتابع الحقيقي $g(x)$ المعرف على المجال $[a,b]$ والقابل للنشر ضمن المجال السابق بالشكل التالي: إذا كانت $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ مجموعة من التوابع الحقيقية المتعامدة وغير المنظمة على المجال $[a,b]$، عندئذٍ الصيغة المعممة لسلسلة فورييه للتابع $g(x)$ هي:

$$\boxed{g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n . f_n(x) \quad \cdots (*)}$$

حيث إن ثوابت النشر A_n تتعين من العلاقة:

$$\boxed{A_n = \frac{1}{\|f_n(x)\|^2}\int_a^b f_n(x)\,.\,g(x)dx --- (*') \;\; ; \;\; n = 1,2,\dots\dots\dots}$$

إن برهان العلاقة $(*')$ يتم على النحو التالي، نضرب طرفي المساواة $(*)$ بالتابع $f_m(x)$ وبمكاملة العلاقة الناتجة من a إلى b نجد:

$$\int_a^b f_m(x)g(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_a^b f_m(x).f_n(x)dx$$

وحسب تعريف جملة التوابع المتعامدة يكون لدينا:

$$\int_a^b f_n(x)g(x)dx = A_n\|f_n(x)\|^2$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$A_n = \frac{1}{\|f_n(x)\|^2}.\int_a^b f_n(x).g(x)dx$$

مثال (24):

بينا سابقاً في (ملاحظات2) أن التوابع: $1, x, \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ هي توابع متعامدة على المجال $[-1,1]$، والمطلوب أوجد الحدود الثلاثة الأولى من سلسلة فورييه للتابع $g(x) = \sin\pi x$، على المجال $[-1,1]$.

الحل:

لدينا أولاً

$$\|1\|^2 = \int_{-1}^{1}(1)^2\,dx = 2$$

$$\|x\|^2 = \int_{-1}^{1}(x)^2\,dx = \frac{2}{3} \quad , \quad \left\|\frac{1}{2}(3x^2-1)\right\|^2 = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(3x^2-1)^2\,dx = \frac{2}{5}$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1)\sin nx\,dx = 0$$

$$A_2 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x.\sin\pi x\,dx = 3\int_0^1 x.\sin\pi x\,dx = \frac{3}{\pi}$$

$$A_3 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}(3x^2-1)\right]\sin\pi x\,dx = 0$$

اذاً، الحدود الثلاثة الأولى لسلسلة فورييه هي:

$$A_1 1 \quad , \quad A_2 x \quad , \quad A_3 \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

أي هي: $\quad 0 \quad , \quad \frac{3}{\pi}x \quad , \quad 0$

مثال (25):

لتكن لدينا جملة التوابع المتعامدة غير المنظمة على المجال $[-1,1]$:

$$\sin \pi x\,, \sin 2\pi x\,, \cdots, \sin n\pi x\,, \cdots$$

المطلوب: أوجد الصيغة المعممة لسلسلة فورييه للتابع $g(x) = x$.

الحل:

لنعين أولاً ثوابت النشر A_n، وذلك بتطبيق العلاقة $(*')$:

$$A_n = \frac{1}{\|\sin n\pi x\|^2}\int_{-1}^{1}(\sin n\pi x)(x)dx$$

إن

$$\|\sin n\pi x\|^2 = \int_{-1}^{1}\sin^2 n\pi x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-\cos 2n\pi x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{4\pi n}[\sin 2n\pi x]_{-1}^{1} = 1 - 0 = 1$$

إذاً :

$$\|\sin n\pi x\|^2 = 1$$

كما أن:

$$\int_{-1}^{1}x.\sin n\pi x\,dx = \left[x - \frac{\cos n\pi x}{n}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1}\cos n\pi x\,dx$$

$$= -\frac{2(-1)^n}{n\pi} + 0 = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$A_n = \frac{1}{1}.\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

بالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أن الصيغة المعممة لسلسلة فورييه للتابع $g(x) = x$ على المجال $[-1,1]$ هي:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.\sin n\pi x$$

أو بالشكل المفصل التالي:

$$g(x) = \frac{2}{\pi}\left[\sin nx - \frac{1}{2}\sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x + \cdots\right]$$

ملاحظة(9):

إذا كانت جملة التوابع: $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ متعامدة، ومنظمة على المجال $[a, b]$، عندئذٍ تتعين ثوابت النشر A_n من العلاقة:

$$\boxed{A_n = \int_a^b f_n(x).\, g(x) dx}$$

(11-3) سلسلة فورييه بمتحولين

:(*Fourier Series with two Variables*)

يطلق عليها البعض اسم سلاسل فورييه السريعة، إن دراسة سلسلة فورييه بمتحولين حقيقين يسمح لنا بالتدخل في حل الكثير من المسائل الرياضية والهندسية، وخاصة في مجال أبحاث الاتصالات والتحكم الآلي، وكذلك في مجالات هندسية ميكانيكية وحرارية عديدة، وذلك عندما يصعب حلها باستخدام سلسلة فورييه بمتحول حقيقي واحد، بفرض $f(x, y)$ تابع للمتحولين الحقيقين y, x معرف على المربع Q التالي:$Q = \{-\pi \le x \le \pi, -\pi \le y \le \pi\}$ والقابل للمكاملة على المنطقة Q، عندئذٍ نعطى سلسلة فورييه الحقيقية للتابع $f(x, y)$ على المنطقة Q بالعلاقة:

$$f(x, y) \approx \sum_{n,m=0}^{\infty} \left[A_{n,m} \cos nx \cos my + B_{n,m} \cos nx \sin my + C_{n,m} \sin nx \cos my + D_{n,m} \sin nx \sin my\right] \cdots (*)$$

حيث إن الأمثال:

$$A_{0,0} = \frac{1}{4\pi^2}\iint_Q f(x, y) dxdy$$

$$A_{n,0} = \frac{1}{2\pi^2}\iint_Q f(x, y) \cos nx\, dxdy \quad ; \quad n = 1,2, \cdots$$

$$A_{0,m} = \frac{1}{2\pi^2}\iint_Q f(x, y) \cos my\, dxdy \quad ; \quad m = 1,2, \cdots$$

$$B_{0,m} = \frac{1}{2\pi^2}\iint_Q f(x, y) \sin my\, dxdy \quad ; \quad m = 1,2, \cdots$$

$$C_{n,0} = \frac{1}{2\pi^2}\iint_Q f(x, y) \sin nx\, dxdy \quad ; \quad n = 1,2, \cdots$$

أخيراً من أجل $m,n = 1,2,\cdots$ يكون لدينا:

$$\left.\begin{aligned} A_{n,m} &= \frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(x,y)\cos nx \cos my \, dxdy \\ B_{n,m} &= \frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(x,y)\cos nx \sin my \, dxdy \\ C_{n,m} &= \frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(x,y)\sin nx \cos my \, dxdy \\ D_{n,m} &= \frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(x,y)\sin nx \sin my \, dxdy \end{aligned}\right\} \cdots (**)$$

ملاحظة (10):

يمكن كتابة الصيغة $(*)$ السابقة بالشكل التالي:

$$f(x,y) \approx \sum_{n,m=0}^{\infty} \lambda_{n,m}\left[A_{n,m}\cos nx \cos my + B_{n,m}\cos nx \sin my + C_{n,m}\sin nx \cos my + D_{n,m}\sin nx \sin my\right]$$

حيث إن:

$$\lambda_{n,m} = \begin{cases} \frac{1}{4} \; ; & n = m = 0 \\ \frac{1}{2} \; ; & n = 0 \;\; Or \;\; m = 0 \;\; but \;\; n \neq m \\ 1 \; ; & n.m > 0 \end{cases}$$

عندئذٍ في هذه الحالة تحسب أمثال فورييه من العلاقات $(**)$ مباشرة.

لنعرف الآن سلسلة فورييه للتابع $f(x,y)$ بدلالة توابع الجيب وتوابع التجيب على الترتيب بالشكل التالي:

ليكن $f(x,y)$ تابعاً بمتحولين حقيقين y,x معرفاً في المجال $[t_1,t_2]$ حيث t_1,t_2 أعداد حقيقية، تعرف سلسلة فورييه للتابع $f(x,y)$ بالشكل التالي:

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}\sin\frac{m\pi x}{t_1}\sin\frac{n\pi x}{t_2}$$

حيث $B_{m,n}$ ثابت فورييه، ويحسب من التكامل الثنائي التالي:

$$B_{m,n} = \frac{a}{t_1.t_2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{t_1}.\sin\frac{n\pi x}{t_2}\,dxdy$$

حيث a ثابت حقيقي.

نلاحظ من التعريف السابق أن سلسلة فورييه للتابع $f(x,y)$ إنها سلسلة مضاعفة لسلسلة فورييه بالجيب، أما سلسلة فورييه للتابع $f(x,y)$ بالتجيب على المجال $[t_1,t_2]$ فتعطى بالعلاقة:

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{m,n}\cos\frac{m\pi x}{t_1}.\cos\frac{n\pi x}{t_2}$$

حيث $C_{m,n}$ ثابت فورييه، ويحسب من التكامل الثنائي التالي:

$$C_{m,n}=\frac{a}{t_1.t_2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}f(x,y)\cos\frac{m\pi x}{t_1}.\cos\frac{n\pi x}{t_2}dxdy$$

وهناك سلاسل فورييه تتضمن في بعض حدودها الجيب والتجيب معاً.

نقدم الآن سلسلة فورييه العقدية للتابع $f(x,y)$:

بفرض $f(x,y)$ تابعاً حقيقياً بالمتحولين y,x، معرفاً وقابلاً للمكاملة على المنطقة المربعة Q التالية: $Q=[-\pi,\pi\ \ ;\ \ -\pi,\pi]$

تعطى سلسلة فورييه العقدية للتابع $f(x,y)$ بالصيغة التالية:

$$f(x,y)\approx\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\gamma_{n,m}e^{(nx+my)i}$$

حيث أن ثابت فورييه $\gamma_{n,m}$ يحسب وفق التكامل الثنائي التالي:

$$\gamma_{n,m}=\frac{1}{4\pi^2}\iint_Q f(x,y)e^{-(mx+ny)i}dxdy\ \ ;\ n,m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

(12-3) حساب أمثال فورييه بشكل تقريبي:

إن طرق حساب أمثال فورييه بشكل تقريبي (عددي) تسمى بـ التحليل التوافقي العددي وتعتمد هذه الطرق على الحساب العددي للتكامل.

نفرض أن $y=f(x)$ تابعاً معطى بشكل جدول (تابع تجريبي) على النحو التالي:

x_i	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_i	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

حيث $h=x_{i+1}-x_i\ \ ;\ \ i=0,1,2,\cdots$ ثابت أو أن يكون التابع f معطى بشكل صريح مثل $y=ln\,x$ أو $y=e^{x^2-1}$ وذلك في نقاط معينة، لحساب أمثال

فورييه في هذه الحالة تستخدم عادة إحدى الطرق العددية لحساب التكاملات، مثل طريقة المستطيلات، طريقة سيميسون، طريقة شبه المنحرف، وغير ذلك من الطرق.

لنأخذ المجال $[-\pi,\pi]$ والذي طوله 2π، لتقسمه إلى n من الأقسام المتساوية بواسطة النقاط

$$x_0 = -\pi, x_1, x_2, \cdots, x_n = \pi$$

بحيث يكون طول كل جزء هو $\Delta x = \frac{2\pi}{n}$ ، ولنفرض أن قيم التابع المدروس في هذه النقاط هي على الترتيب $y_0, y_1, \cdots, y_n$ (نحصل على هذه إما من الجدول وإما من معادلة التابع المعطى).

لنطبق الآن إحدى الطرق العددية للحساب التكاملي، ولتكن طريقة المستطيلات، والتي تعطى بإحدى الصيغتين:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1})$$

أو:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

ونجد أن أمثال فورييه للتابع الدوري f على $[-\pi,\pi]$ هي:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_n &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \cos nx_i \\ b_n &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \sin nx_i \end{aligned}\right\} \cdots (*)$$

مثال (26):

أوجد أمثال فورييه للتابع $y = \ln x$ في المجال $[1,2]$، معتبراً $n = 10$.

الحل: لنشكل أولاً الجدول: حيث $a = 1, b = 2, n = 10$

x_i	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y_i	1	0.90909	0.83333	0.76923	0.71429	0.66667	0.62500	0.58824	0.55556	0.52632	0.50000

لنطبق الآن العلاقات $(*)$ السابقة:

$$a_0 = \frac{2}{10}(0.90909 + 0.83333 + 0.76923 + \cdots + 0.50000) = 1.33754$$

$$a_n = \frac{2}{10}\Big(0.90909\,cos\big(1(1.1)\big) + 0.83333\,cos\big(2(1.2)\big) + 0.76923\,cos\,3(1.3) + 0.71429\,cos\big(4(1.4)\big) + \cdots + 0.50000\,cos\big(10(2)\big)\Big) = 0.98511$$

$$b_n = \frac{2}{10}\Big(0.90909\,sin\big(1(1.1)\big) + 0.83333\,sin\big(2(1.2)\big) + 0.76923\,sin\big(3(1.3)\big) + \cdots + 0.50000\,sin\big(10(2)\big)\Big) = 0.095398$$

(13-3) مكاملة واشتقاق سلاسل فورييه:

الشروط الكافية لنشر تابع دوري وفق سلسلة فورييه هو تحقق شروط ديرخليه التالية بفرض $f(x)$ تابع دوري، دوره $2T$، فإن:

1- التابع $f(x)$ معرفاً وحيد القيمة في مجال دوره.

2- أن يكون $f(x)$ ومشتقه $f'(x)$ مستمرين أو مستمرين جزئياً على مجال الدور. وبالتالي تكون سلسلة فورييه سلسلة تابعية متقاربة بانتظام، وبالتالي يمكن تطبيق جميع المبرهنات والنتائج المتعلقة بسلاسل التوابع المتقاربة بانتظام على سلاسل فورييه وبشكل خاص يمكن اشتقاق ومكاملة سلسلة فورييه حداً حداً.

فإذا كان التابع الدوري $f(x)$ ذو الدور $\frac{2\pi}{w}$ مجموعاً لسلسلة فورييه في مجال دوره، أي إذا كان:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,cos\,nwx + b_n\,sin\,nwx)$$

فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n\,cos\,nwx + b_n\,sin\,nwx)dx$$

وذلك مهما يكن a و b من مجال دور التابع $f(x)$ ، وبشكل عام نكتب:

$$F(x) = \int_{-T}^{x} f(x)dx \quad ; \quad x \in]-T, T[$$

كذلك الأمر بالنسبة للاشتقاق:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [nwb_n \cos nwx + (-nwa_n) \sin wnx]$$

مثال (27):

أوجد تكامل سلسلة فورييه للتابع الدوري والمعرف على المجال $(-\pi, \pi)$ بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{x}{2} \quad ; \quad -\pi < x < \pi$$

الحل:

لنوجد أولاً سلسلة فورييه للتابع المعطى، نلاحظ أنه دوري ودوره $2T = 2\pi$ ويحقق أيضاً شروط ديرخليه على المجال $]-\pi, \pi[$، لنحسب أمثال فورييه:

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\, dx = \frac{1}{2n\pi}[x \sin nx]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = \frac{1}{4\pi}[x^2]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx = \frac{1}{2n\pi}[x \cos nx]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx$$

$$= -\frac{1}{2n\pi}[\pi \cos n\pi + \pi \cos n\pi] + \frac{1}{2n^2\pi}[\sin n\pi]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{(-1)^n}{n}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

وبالتالي فإن سلسلة فورييه للتابع المعطى هي:

$$f(x) = \frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \cdots$$

حيث $x \in]-\pi, \pi[$ أو بالشكل المختصر:

$$f(x) = \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.\frac{\sin nx}{n}$$

لنوجد الآن تكامل سلسلة فورييه للتابع المعطى، وذلك بتطبيق العلاقة:

$$F(x) = \int_{-T}^{x} f(x)dx \quad ; \quad x \in]-\pi, \pi[$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{x} xdx = \int_{-\pi}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_{-\pi}^{x} \frac{\sin nx}{n} dx =$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[-\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{x}$$

$$=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left[\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\cos n\pi}{n^2}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left[\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{(-1)^n}{n^2}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

وبما أن $\sum\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$، فيكون لدينا:

$$\frac{x^2}{4}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{n^2}$$

وبالتالي فإن نشر فورييه للتابع $\frac{x^2}{4}$ هو:

$$\frac{x^2}{4}=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{n^2}$$

ملاحظة (11) إن شرط استمرار التابع $f(x)$ لازم للتمكن من اشتقاق سلسلة فورييه، ففي المثال السابق إن سلسلة فورييه للتابع $\frac{x}{2}$ على $]-\pi,\pi[$ متقاربة إلى التابع $f(x)$ من أجل $x\in]-\pi,\pi[$، في حين أن سلسلة المشتقات:

$$\cos x-\cos 2x+\cos 3x-\ \dots+(-1)^{n+1}\cos nx+\ \dots$$

هي سلسلة متباعدة من أجل $x\in]-\pi,\pi[$، ومرد ذلك أنه عند تمديد التابع $f(x)$ دورياً على طول المحور الحقيقي، يؤدي إلى تابع غير مستمر في النقاط $x=\pm\pi,\pm3\pi$، وهذا ما يبين لنا أن شرط الاستمرار هو شرط لازم لاشتقاق سلسلة فورييه لتابع دوري. ومن أجل ذلك نورد المبرهنة التالية:

مبرهنة (4): إذا كان $f(x)$ تابعاً مستمراً ودوره $2T$، وأملس (أي إن مشتقه الأول مستمر أيضاً) فإنه يمكن الحصول على سلسلة فورييه للتابع $f'(x)$ باشتقاق سلسلة فورييه للتابع $f(x)$.

ملاحظة (12): يمكن تطبيق المبرهنة السابقة للحصول على سلسلة فورييه الممثلة للمشتقات من مراتب عليا للتابع $f(x)$، والمحقق لشروط المبرهنة السابقة، فإذا كان التابع $f'(x)$ مستمراً وأملس فإن سلسلة فورييه للتابع $f''(x)$ نحصل عليها باشتقاق سلسلة فورييه للتابع $f'(x)$ حداً حداً.

تمرينات محلولة

{**1**} حدد نصف دور التابع: $f(x) = cos\frac{x}{2} + cos\frac{x}{3} \;\; ; \;\; x \in R$.

الحل:

نفرض $2T$ هو دور التابع المعطى، عندئذٍ حسب تعريف التابع الدوري يكون:

$$cos\frac{1}{2}(x+2T) + cos\frac{1}{3}(x+2T) = cos\frac{x}{2} + cos\frac{x}{3}$$

ونعلم أنه من أجل أي عدد صحيح $(n \in Z)$ يكون لدينا:

$$cos(x+2n\pi) = cos\,x \;\; ; \;\; x \in R$$

وبالتالي يكون لدينا: $T = 2n\pi$ و $\frac{2}{3}T = 2m\pi \;\; ; \;\; m,n \in Z$، وبالتالي يكون لدينا: $T = 2n\pi = 3m\pi$ وبالتالي أصغر الأعداد n, m والمحققة للمساواة الأخيرة هي $n = 3\,, m = 2$ ، إذن نصف دور التابع المعطى $T = 6\pi$.

{**2**} بين فيما إذا كان التابع g المعرف على R^* بالشكل: $g(t) = 6\int_0^t sin^2 x\,dx$ دورياً أم لا.

الحل:

التابع $6\,sin^2 x$ دوري ودوره π (لاحظ المثال(1) في قسم النظري)، وبتطبيق الخاصة (6) من خواص التوابع الدورية يكون لدينا:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} 6\,sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi} (3 - 3\,cos\,2x)\,dx$$

$$= \left[3x - \frac{3}{2}sin\,2x\right]_0^{\pi} = 3\pi \neq 0$$

إذن حسب الخاصة (6) يكون التابع g غير دوري.

{3} برهن أنه إذا كانت السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال $I \subseteq R$، وكان التابع g محدوداً على نفس المجال I، عندئذٍ السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} g(x) f_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال I.

البرهان:

بما أن التابع g محدود على المجال الحقيقي R، فيوجد عدد حقيقي موجب وليكن M بحيث يكون $|g(x)| < \mathrm{M}$ لكل x من I. ليكن $0 < \varepsilon$ (عدداً حقيقياً موجباً)،

عندئذٍ $\frac{\varepsilon}{M}$ عدد حقيقي موجب أيضاً، وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام فرضاً على I، يوجد عدد $N(\varepsilon)$ من N بحيث

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{M}\,, \quad \text{حيث} \quad n \geq N(\varepsilon)\,;\, x \in I$$

إذاً يوجد من أجل العدد الحقيقي الموجب ε عدد طبيعي $N(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} g(x).f_n(x)\right| = \left|g(x).\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right| \quad \text{بحيث} \quad n \geq N(\varepsilon)\,;\, x \in I$$

$$= |g(x)|.\left|\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right| < M.\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

وهذا يعني حسب تعريف التقارب المنتظم للسلاسل التابعية أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} g(x).f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I.

{4} ليكن f تابعاً دورياً ودوره 2π ، معرف على المجال $]-\pi,\pi[$ بالشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = 0 \\ arctg\dfrac{1}{x} & ; \quad x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[\end{cases}$$

هل تتحقق شروط دير خليه لهذا التابع ، في حالة الإيجاب أوجد مجموع سلسلة فورييه للتابع $f(x)$ في المجال $]-\pi,\pi[$.

الحل:

إن للتابع المعطى نقطة انقطاع واحدة من النوع الأول وهي $x = 0$ حيث

$$f(0-0) = -\frac{\pi}{2} \quad , \quad f(0+0) = \frac{\pi}{2}$$

وكذلك توجد للتابع f نهايتان حديتان ضمن المجال$]-\pi,\pi[$، وأخيراً لدينا.

$$f(-\pi+0) = -0.308 \quad , \quad f(\pi-0) = 0.308$$

وبالتالي، فإن شروط ديرخليه محققة، وهذا يعني أن سلسلة فورييه للتابع المعطى متقاربة على $]-\pi,\pi[$ ومجموعها هو:

1- $arctan\frac{1}{x}$ من أجل $0 \neq x \in]-\pi,\pi[$.

2- صفراً عند النقطة $x = 0$.

3- صفراً عن كل طرف من أطراف المجال $]-\pi,\pi[$ وذلك بحسب العلاقة:

$$\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=0\ ,\ \ \frac{f(-\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=0$$

{5} انشر وفق سلسلة فورييه التابع $f(x)=e^{ax}$، حيث a ثابت لا يساوي الصفر في المجال $]-\pi,\pi[$.

الحل:

بتطبيق العلاقات التالية ، نحصل على ثوابت فورييه b_n, a_n, a_0:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad ;\quad n=1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad ;\quad n=1,2,\cdots$$

وذلك على النحو التالي:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}dx=\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{a\pi}=\frac{2sh\,a\pi}{a\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}.\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{a\cos nx+n\sin nx}{a^2+n^2}e^{ax}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=(-1)^n\frac{1}{\pi}\frac{2a}{a^2+n^2}sh\,a\pi$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}.\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{a\sin nx-n\cos nx}{a^2+n^2}e^{ax}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{1}{\pi}\frac{2n}{(a^2+n^2)}sh\,a\pi$$

وبالتالي فإن سلسلة فورييه للتابع e^{ax} حيث $-\pi<x<\pi$ هي:

$$e^{ax}=\frac{2}{\pi}sh\,a\pi\left\{\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}[a\cos nx-n\sin nx]\right\}$$

{6} اكتب سلسلة فورييه للتابع $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ في المجال $]0,2\pi[$.

الحل:

لنوجد أولاً ثوابت فورييه:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=\frac{1}{2\pi}\left[\left(\pi x-\frac{1}{2}x^2\right)\right]_0^{2\pi}=0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\cos nx\,dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx = 0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\left[(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx = \frac{1}{n}$$

وبالتالي تكون سلسلة فورييه للتابع المفروض هي:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \quad ; \quad x \in]0,2\pi[$$

لاحظ أنه إذا كان $x = 0$ أو $x = 2\pi$ ، فإن مجموع السلسلة يساوي الصفر.

لاحظ أيضاً أنه إذا كان $x = \frac{\pi}{2}$ فسنحصل على السلسلة العددية التالية:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

{7} بين فيما إذا كان التابع: $f(x) = 2\pi x - x^2$، المعرف على المجال $[0,2\pi]$ فردياً أو زوجياً، ثم أوجد ثوابت فورييه له، استخدم تفاضل سلسلة فورييه له لإيجاد منشور فورييه للتابع $\pi - x$.

الحل:

بما أن:

$$f(-x) = 2\pi(-x) - (-x)^2 = -2\pi x - x^2 = -(2\pi x + x^2) \neq f(x)$$

وكذلك: $f(-x) \neq -f(x)$ فإن التابع المعطى ليس فردياً ولا زوجياً.

لنوجد الآن أمثال فورييه:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi x - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi x - x^2)\cos nx\,dx = -\frac{4}{n^2} \quad \text{(كاملنا مرتين بطريقة التجزئة)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi x - x^2)\sin nx dx = 0$$

من أجل إيجاد منشور فورييه للتابع $\pi - x$، نوجد أولاً سلسلة فورييه للتابع الأصلي وبملاحظة أنه يحقق شروط ديرخليه، فيكون:

$$2\pi x - x^2 = \frac{2}{3}\pi^2 - 4\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots\right]$$

بما أن التابع المعطى مستمر من أجل جميع قيم x من $[0,2\pi]$، فإنه بتفاضل المساواة الاخيرة بالنسبة لـ x نجد:

$$\pi - x = 2\left[\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots\right]$$

{8} ليكن لدينا التابع:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & ; \quad 0 < x < a \\ 0 & ; \quad a < x < \pi \end{cases}$$

حيث $a \in]0,\pi[$ ، والمطلوب انشر التابع $f(x)$ وفق سلسلة فورييه ، ثم أوجد مجموع السلسلة، في النقط التالية: $-\pi, \pi, a, 0$

الحل:

نلاحظ من تعريف التابع المعطى أنه يحقق شروط ديرخليه، وبالتالي يمكن نشره وفق سلسلة فورييه، وهو تابع ليس فردياً وليس زوجياً، وبالتالي يكون لدينا:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0.\,dx + \int_{0}^{a} 1.\,dx + \int_{a}^{\pi} 0.\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{a} 1.\,dx = \frac{a}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{a} 1.\cos nx\,dx = \left[\frac{\sin n\pi}{n\pi}\right]_0^a = \frac{\sin na}{n\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{a} 1.\sin nx\,dx = \left[-\frac{\cos nx}{\pi n}\right]_0^a$$

$$= \frac{1 - \cos na}{n\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na\cos nx + (1-\cos na)\sin nx}{n}\right] \; ; \; -\pi < x < \pi$$

إن مجموع السلسلة في النقطتين $\pi, -\pi$ هو:

$$f(-\pi + 0) + f(\pi - 0) = 0 + 0 = 0$$

أما المجموع في النقطة a، فهو:

$$\frac{1}{2}[f(a+0)+f(a-0)]=\frac{1}{2}(0+1)=\frac{1}{2}$$

ومجموعها في النقطة 0 هو:

$$\frac{1}{2}[f(0+0)f(0-0)]=\frac{1}{2}(1+0)=\frac{1}{2}$$

وبالتالي:

$$f(x)=\begin{cases}0 & ; \quad -\pi\le x<0\\ \frac{1}{2} & ; \qquad x=0\\ 1 & ; \quad 0<x<a\\ \frac{1}{2} & ; \qquad x=a\\ 0 & ; \quad a<x\le\pi\end{cases}$$

{9} أوجد منشور فورييه للتابع: $f(x)=cos\,ax \quad ; \quad a\in R^*$ في المجال $[-\pi,\pi]$.

الحل:

$$\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}cos\,ax\,dx=\frac{sin\,a\pi}{a\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}cos\,ax\,.\,cos\,nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[cos(a+n)x+cos(a-n)x]\,dx$$

$$=$$

$$=(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}.\frac{sin\,a\pi}{\pi} \quad ; \quad n>0\ ,\ a\neq n$$

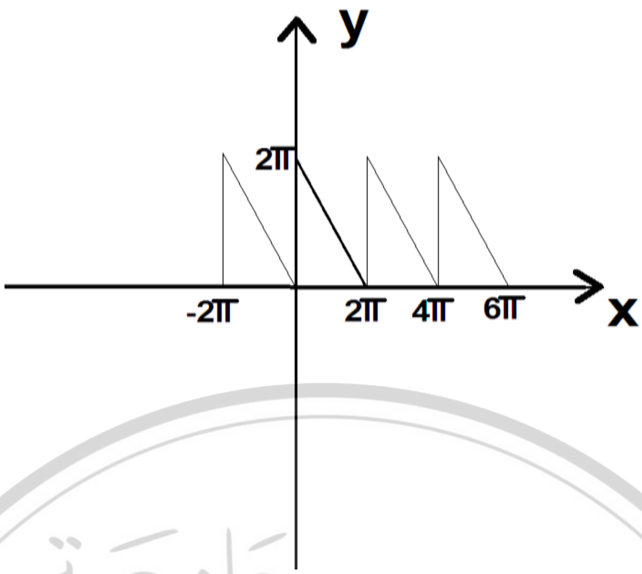
وبالتالي:

$$\frac{\pi}{2}.\frac{cos\,ax}{sin\,ax}=\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{acos\,nx}{a^2-n^2} \quad ; \quad x\in[-\pi,\pi]$$

{10} استنتج من رسم التابع المعرف على المجال $[0,2\pi]$ ذي الدور 2π هل هو زوجي أو فردي، ثم أوجد منشور فورييه له: $f(x)=2\pi-x$

الحل:

إن الخط البياني للتابع $2\pi-x$ هو:



بما أن الخط البياني للتابع المعطى غير متناظر بالنسبة لمحور التراتيب ولا بالنسبة للمبدأ، لذا فإنه ليس فردياً وليس زوجياً. لنحسب أمثال فورييه له:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (2\pi - x)dx = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (2\pi - x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[2\pi\frac{\sin nx}{n} - \frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{2\pi} = 0 \quad ; \quad n = 1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (2\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{2}{n}$$

وبالتالي تكون سلسلة فورييه للتابع المعطى والمحقق لشروط ديرخليه هي:

$$f(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

{**11**} أثبت أن منشور فورييه للتابع الذي دوره 2π والمعرف بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad -\pi \le x \le 0 \\ -2 & ; \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$$

هو:

$$f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi}\sin x - \frac{6}{3\pi}\sin 3x - \frac{6}{9\pi}\sin 5x + \cdots$$

الحل:

لنوجد أولاً أمثال فورييه للتابع المعطى علماً أنه ليس فردياً ولا زوجياً .

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 1.\,dx - \int_{0}^{\pi} 2dx\right] = -\frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \cos nx\,dx - \int_{0}^{\pi} 2\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{0} - \frac{2}{n}\left[(\cos nx)\right]_{0}^{\pi}\right\} = 0$$

حيث $n = 1,2,\cdots$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \sin nx\,dx - \int_{0}^{\pi} 2\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}(1-\cos n\pi) + \frac{2}{n}(\cos n\pi - 1)\right] = \frac{1}{n\pi}(3\cos n\pi - 3)$$

فإذا كان n عدداً فردياً، فإن $b_n = -\frac{6}{n\pi}$ وإذا كان n عدداً زوجياً، فإن: $b_n = 0$ لكل $n = 1,2,\cdots$ وبالتالي يكون منشور فورييه للتابع المعطى هو:

$$f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

أو بالشكل:

$$f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi}\sin x - \frac{6}{3\pi}\sin 3x - \frac{6}{9\pi}\sin 5x - \ \ldots$$

{12} انشر في سلسلة فورييه التابع $y = |\sin x|$ ، علماً أن دوره π.

الحل:

التابع المعطى زوجي، ودوره $2T = \pi$ ومنه $T = \frac{\pi}{2}$، وبالتالي فإن سلسلة فورييه له هي:

$$|\sin x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx$$

من أجل ذلك لنوجد أولاً أمثال فورييه له:

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{4}{\pi}\left[-\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 2nx\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)\,xdx + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)\,xdx$$

$$= -\frac{4}{\pi(4n^2-1)}$$

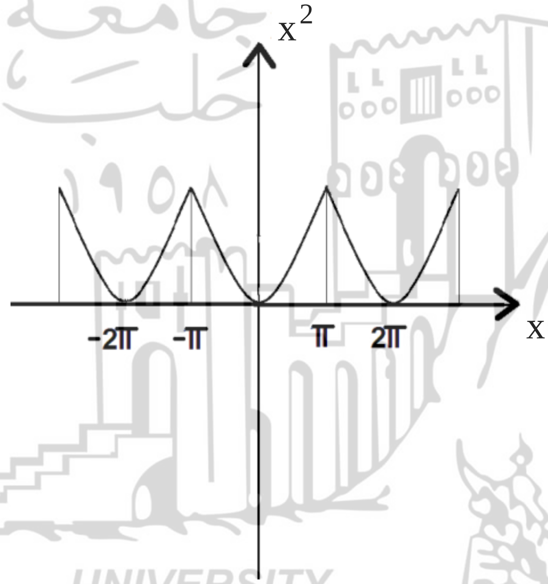
وبالتالي فإن سلسلة فورييه للتابع $|sin\, x|$ هي:

$$|sin\, x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos\, 2nx}{4n^2-1}$$

{13} استنتج من رسم التابع $f(x) = x^2$ ذي الدور 2π، المعرف في $[-\pi,\pi]$ طبيعته، ثم أوجد منشور فورييه له.

الحل:

إن الخط البياني للتابع x^2 هو:



نلاحظ أن منحني هذا التابع متناظر بالنسبة لمحور التراتيب، فهو تابع زوجي على $[-\pi,\pi]$، وبالتالي فإن: $b_n = 0 \;\; ; \;\; n = 1,2,\dots$ لذلك فإن:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, cos\, nx\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[x^2\,\frac{sin\, nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x.\, sin\, nx\, dx = (-1)^n\left(\frac{4}{n^2}\right)\; ;\; n = 1,2,\cdots$$

وبالتالي، فإن سلسلة فورييه للتابع المعطى تأخذ الشكل:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[cos\, x - \frac{cos\, 2x}{2^2} + \frac{cos\, 3x}{3^2} - \;\dots\right]$$

{**14**} انشر وفق سلسلة فورييه العقدية التابع $a>0 \quad ; \quad f(x)=|\sin ax|$، ثم استنتج مجموع السلسلة العددية: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}$

الحل:

التابع دوري ودوره $T=\frac{\pi}{a}$، وبما أن التابع المعطى يحقق $f(x)=f(x+\pi)$ أي إنه يكرر نفسه في مجالات طول كل منها π، ويحقق أيضاً شروط ديرخليه على المجال $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$، فهو يمثل مجموع سلسلة فورييه العقدية على هذا المجال، لنحسب الآن أمثال فورييه العقدية، لدينا:

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|\sin ax|.e^{-i\frac{2\pi n}{T}x}\,dx=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|\sin ax|.e^{-i2nwx}dx$$

وحسب المبرهنة: إذا كان $f(x)$ تابعاً دورياً ودوره $2T$ وقابلاً للمكاملة على المجال $[-T,T]$ عندئذٍ يكون التابع $f(x)$ قابلاً للمكاملة على أي مجال يملك نفس الطول، ويتحقق:

$$\int_{-T}^{T}f(x)dx=\int_{a}^{a+2T}f(x)dx \quad ; \quad \forall a\in R$$

ولتسهيل حساب التكامل الأخير، نكامل على المجال $[0,T]$، أي إن:

$$C_n=\frac{1}{T}\int_0^T \sin ax\, e^{-2inax}dx$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T \sin ax\cos 2n\,ax\,dx-\frac{i}{T}\int_0^T \sin ax\sin 2n\ ax\,dx$$

$$=\frac{1}{2T}\int_0^T[\sin(1+2n)ax+\sin(1-2n)\,ax]\,dx$$

$$-\frac{i}{2T}\int_0^T[\cos(1-2n)ax-\cos(1+2n)\,ax]\,dx$$

$$=\int_0^T \sin(1+2n)\,ax\,dx=-\left[\frac{\cos(1+2n)\,ax}{(1+2n)a}\right]_0^T=$$

$$=-\left[\frac{\cos(1+2n)\,\pi-1}{(1+2n)a}\right]=\frac{2}{(1+2n)a}$$

وكذلك فإن:

$$\int_0^T \sin(1-2n)\,axdx=\frac{2}{(1-2n)a}$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\int_0^T cos(1-2n)\, axdx = \left[\frac{sin(1-2n)\, ax}{(1-2n)a}\right]_0^T = 0$$

إذاً :

$$C_n = \frac{1}{2T}\left[\frac{2}{(1+2n)a} + \frac{2}{(1-2n)a}\right] = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-2n+1+2n}{1-4n^2}\right)$$

$$C_n = \frac{2}{\pi(1-4n^2)} \quad ; \quad n \in Z$$

وبالتالي فإن النشر العقدي لسلسلة فورييه للتابع المعطى:

$$f(x) = |sin\, ax| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2nax} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} e^{i2nax}; x \in \left[-\frac{T}{2a}, \frac{T}{2a}\right]$$

وبما أن $a > 0$ فإن مجموع النشر العقدي لفورييه للتابع المعطى يساوي $f(x)$ لجميع قيم x من R.

يمكن الحصول على نشر التابع المعطى بالشكل التالي:

بما أن: $a_n = C_n + C_{-n}$ فإن:

$$a_n = \frac{2}{\pi(1-4n^2)} + \frac{2}{\pi(1-4n^2)} = \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \;\; ; \;\; n = 1,2,\cdots$$

ومن أجل $n = 0$ يكون لدينا: $a_0 = \frac{4}{\pi}$

ولنحسب b_n من العلاقة $b_n = i(C_n - C_{-n})$ ومنه يكون بعد التعويض: $b_n = 0$

إذاً المنشور المثلثي لفورييه للتابع $f(x)$ هو:

$$f(x) = |sin\, ax| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2} cos\, 2nax \quad ; \quad x \in R$$

ومن أجل $x = 0$ يكون لدينا:

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2} = 0$$

وبالتالي يكون:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}=-\frac{1}{2}$$

{15} انشر التابع $\phi(x)=\sin x \quad ; \quad 0<x<\pi$، وفق سلسلة جيب التمام لفورييه.

الحل:

التابع $\sin x$ ليس فردياً وليس زوجياً على المجال $]0,\pi[$، لنمدده تمديداً زوجياً على المجال $]-\pi,0[$، من أجل ذلك نعرف التابع $\psi(x)$ على المجال $]-\pi,\pi[$ بالشكل:

$$\psi(x)=\begin{cases}\sin x & ; \ 0<x<\pi\\ \sin|x| & ; \ -\pi<x<0\end{cases}$$

إن هذا التابع زوجي ضمن المجال $]-\pi,\pi[$ ودوري ودوره $2T=2\pi$، وهو أيضاً يحقق شروط ديرخليه على هذا المجال، بما أنه زوجي فإن:

$$b_n=0 \quad ; \quad n=1,2,\cdots$$

كما أن:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx$$

وبالاستفادة من دساتير التحويل من جداء إلى مجموع، نجد أن ناتج التكامل هو:

$$a_n=\frac{2(1+\cos n\pi)}{(1-n^2)\pi} \quad ; \quad n\neq 1$$

لاحظ أن المثل a_1 لا يمكن حسابه من a_n مباشرة لذا نستخدم علاقة a_n من جديد، من أجل $n=1$ لنجد:

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin^2 x}{2}\right]_0^{\pi}=0$$

حيث فرضنا $\sin x=t$ ومنه $dt=\cos x\,dx$.

أما المثل a_0 يمكن حسابه مباشرة من عبارة a_n، التي حصلنا عليها سابقاً، بوضع $n=0$ نجد: $a_0=\frac{4}{\pi}$

بتعويض قيم الأمثال a_0,a_n,b_n في سلسلة فورييه من أجل $0<x<\pi$ نجد أن:

$$\psi(x)=\phi(x)=\sin x=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{(1-2^2)\pi}\cos 2x+\frac{4}{(1-4^2)\pi}\cos 4x+\cdots$$
$$=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{4}\left(\frac{\cos 2x}{3}+\frac{\cos 4x}{15}+\cdots\right)$$

أو بالشكل:

$$\sin x=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(1+\cos n\pi)}{(1-n^2)\pi}\cos nx$$

{**16**} انشر في سلسلة فورييه وفق تابع الجيب التابع الدوري المعطى على نصف مجال الدور بالشكل التالي:

$$f(x)=4x-x^2 \quad ; \quad x\in[0,4]$$

الحل:

نمدد التابع على المجال $[-4,0]$ بشكل فردي ، ومن نص المسألة نجد أن:

$$a_n=0\ ;\ n=0,1,2,\cdots$$

لنحسب الآن b_n حيث $n=1,2,\cdots$:

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T(4x-x^2)\sin\frac{n\pi x}{T}dx$$

بالمكاملة بالتجزئة مرتين متتاليتين نجد أن:

$$b_n=\frac{4T^2}{\pi^3.n^3}\left[\cos\frac{n\pi}{T}x\right]_0^T=\frac{64}{n^3\pi^3}(1-\cos n\pi)$$

وبما أن $T=4$، فيكون:

$$b_n=\begin{cases}0 & ; \quad n \text{ زوجياً}\\ \dfrac{128}{n^3\pi^3} & ; \quad n \text{ فردياً}\end{cases}$$

وبالتالي تأخذ سلسلة فورييه للتابع المفروض الشكل:

$$4x-x^2=\frac{128}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{4}}{(2n+1)^3}$$

{**17**} أوجد أمثال فورييه فقط للتابع $f(x)=x(\pi-x)$ وفق توابع الجيب على المجال $[0,\pi]$.

الحل:

لنمدد التابع المفروض على المجال $[-\pi,0]$ بشكل فردي، وبالتالي:

$$a_n = 0 \; ; \; n = 0,1,2,\cdots$$

لذا تحسب الأمثال b_n من أجل $n = 1,2, \ldots$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\, sin\, nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi x - x^2)\, sin\, nx\, dx$$

بالمكاملة بالتجزئة نجد:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi x + x^2}{n} cos\, nx\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi (\pi - 2x)\, cos\, nx\, dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi (\pi - 2x)\, cos\, nx\, dx = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\pi - 2x}{n} sin\, nx\right]_0^\pi - \frac{2}{n}\int_0^\pi sin\, nx\, dx$$

$$= \frac{4}{\pi n^3}(1 - cos\, n\pi)$$

{**18**} انشر في سلسلة فورييه التابع الدوري:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad -\pi < x < 0 \\ 0 & ; \quad x = 0, x = \pi \\ 1 & ; \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

إذا الدور 2π.

الحل:

نلاحظ أولاً أن التابع المعطى يحقق شروط ديرخليه، وبما أنه فردي فإن $a_n = 0$ من أجل $n = 0,1,2,\cdots$ ، لذا نحسب b_n فقط:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sin\, nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-1)\, sin\, nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (1)\, sin\, nx\, dx$$

$$= \left[\frac{cos\, nx}{\pi n}\right]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{cos\, nx}{\pi n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}(1 - cos\, n\pi) = \begin{cases} 0 & ; \quad n \text{ زوجياً} \\ \dfrac{4}{n\pi} & ; \quad n \text{ فردياً} \end{cases}$$

وبالتالي فإن سلسلة فورييه للتابع $f(x)$ هي من الشكل:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(sin\, x + \frac{sin\, 3x}{3} + \frac{sin\, 5x}{5} + \ldots + \frac{sin(2k+1)}{2k+1} + \cdots\right)$$

{**19**} أثبت أن $\|cos\, nx\| = \|sin\, nx\| = \sqrt{\pi}$ ، على المجال $[-\pi, \pi]$.

الحل:

حسب تعريف نظيم تابع لدينا:

$$\|\cos nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2} dx} = \sqrt{\pi}$$

كما أن:

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2} dx} = \sqrt{\pi}$$

{20} برهن أن متتالية التوابع التالية:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \cdots$$

المعرفة على المجال $[0,2\pi]$ تشكل جملة (نظيماً) متعامداً على المجال $[0,2\pi]$.

الحل:

نلاحظ بسهولة أن:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} \sin mx\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} \cos mx\, dx = 0$$

وأن:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0 \quad ; \quad m \neq n$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0 \quad ; \quad m \neq n$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0 \quad ; \quad m \neq n$$

وبالتالي فإن متتالية التوابع الحقيقية المعطاة تشكل نظاماً متعامداً ، كما نلاحظ أيضاً أن:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 mx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 mx\, dx = 1$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = 1$$

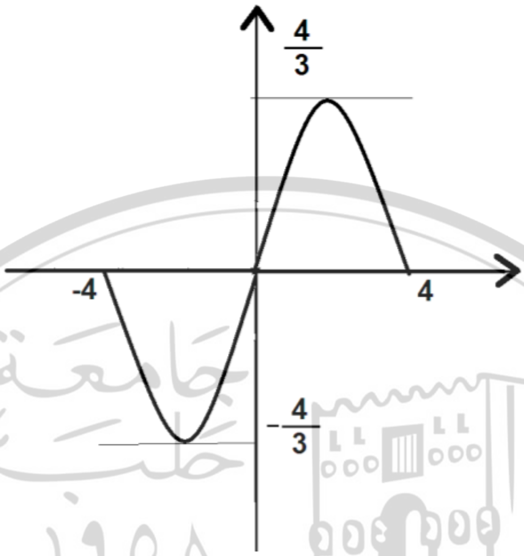
{**21**} بين من خلال رسم التابع:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x(4+x) & ; \; -4 \leq x < 0 \\ \frac{1}{3}x(4-x) & ; \; 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

أنه فردي أو زوجي ثم أوجد سلسلة فورييه له.

الحل:

إن الخط البياني للتابع المعطى هو:



وبسبب تناظره بالنسبة للمبدأ فهو تابع فردي، وبالتالي $a_n = 0$ حيث $n = 0,1,2,\cdots$ لنحسب الآن b_n حيث $n = 1,2,\cdots$

$$b_n = \frac{2}{4}\int_0^4 \frac{1}{3}x(4-x)\sin\frac{n\pi x}{4}dx$$

بالمكاملة بالتجزئة نجد أن:

$$b_n = \frac{128}{3n^3\pi^2}\left(1+(-1)^{n-1}\right)$$

وبالتالي فإن سلسلة فورييه للتابع المعطى هو:

$$f(x) = \frac{128}{3\pi^2}\left(\sin\frac{\pi}{4}x + \frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi}{4}x + \frac{1}{5^3}\sin\frac{5\pi}{4}x + \cdots\right)$$

وذلك من أجل كل $x \in]-4,4[$.

{22} أوجد سلسلة فورييه العقدية للتابع:

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad |x| < \pi \\ 0 & ; \quad |x| = \pi \end{cases}$$

ثم انتقل منه إلى النشر الحقيقي.

الحل:

التابع المعطى دوري، ودوره $2T = 2\pi$، وهو يحقق شروط ديرخليه على المجال $[-\pi,\pi]$، وبالتالي يمثل مجموع سلسلة فورييه العقدية على المجال المذكور، لنحسب الآن الأمثال العقدية للنشر المطلوب:

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, e^{-inx}dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(\cos nx - i\sin nx)\, dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\, dx - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\, dx$$
$$= \frac{1}{2n\pi}[x\sin x]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2n^2\pi}[\cos nx]_{-\pi}^{\pi} + \frac{i}{2n\pi}[x\cos nx]_{-\pi}^{\pi}$$
$$- \frac{i}{2n^2\pi}[\sin nx]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2n^2\pi}(\cos n\pi - \cos n\pi) + \frac{i}{2n\pi}[\pi\cos n\pi + \pi\cos n\pi]$$
$$= \frac{i}{n}\cos n\pi = (-1)^n\frac{i}{n} \quad ; \quad n \in Z^*$$

لنحسب الآن C_0، وذلك من العلاقة:

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = \frac{1}{4\pi}[x^2]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

وبالتالي فإن منشور فورييه العقدي للتابع المعطى هو:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{inx} = i\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{inx}}{n} \quad ; \quad n \neq 0\ , x \in [-\pi,\pi]$$

للانتقال من هذا النشر العقدي إلى النشر الحقيقي (الشكل المثلثي لسلسلة فورييه) للتابع المفروض، نطبق علاقات أولر، أي:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} ie^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} i(\cos nx + i\sin nx) \ ;\ n \neq 0$$
$$= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(i\cos nx - \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx \quad ;$$
$$x \in [-\pi,\pi]$$

ملاحظة:

كان بالإمكان التعويض مباشرة بالعلاقات:

$$a_0 = 2C_0 = 0, a_n = C_n + C_{-n} = 0, b_n = i(C_n - C_{-n}) = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

في سلسلة فورييه للتابع $f(x)$ التالية:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

{23} ليكن التابع $f(x) = x$ والمعرف في المجال $]0,2[$ ، والمطلوب:

1- نشر التابع المعطى في سلسلة مثلثية (فورييه) لا تحوي إلا جيوباً فقط.

2- استخدم الناتج السابق في نشر التابع $F(x) = x^2$ في المجال $]0,2[$ في سلسلة مثلثية.

3- استنتج قيمة مجموع السلسلة العددية المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

4- هل يمكن إيجاد المشتق الأول للسلسلة المثلثية للتابع x^2 في $]0,2[$.

الحل:

التابع x دوري ودوره $L = 2$ ، وأنه من أجل $n = 1,2,\cdots$ يكون لدينا:

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x.\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi$$

وبالتالي فإن السلسلة المثلثية للتابع المعطى هي:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi\,.\sin\frac{n\pi}{2}x$$

أو:

$$x = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \ \dots\right)$$

لإيجاد السلسلة المثلثية للتابع $F(x) = x^2$ على المجال $]0,2[$، تكامل طرفي السلسلة الأخيرة حداً حداً من الصفر إلى x، ثم ضرب الطرفين بالعدد 2 نجد:

$$x^2 = A - \frac{16}{\pi^2}\left(\cos\frac{nx}{2} - \frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi}{2}x + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi}{2}x - \ \dots\right) \qquad (*)$$

حيث: $A = \frac{16}{\pi^2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ \dots\right)$

وبما أن الصيغة (*) هي نشراً لـ x^2 في سلسلة مثلثية ولا تحوي إلا جيوب تمام، وذلك في المجال $]0,2[$ فإنه يكون:

$$A = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L F(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3}$$

وبالتالي فإن:

$$x^2 = \frac{4}{3} - \frac{16}{\pi^2}\left(cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2^2}cos\frac{2\pi}{2}x + \frac{1}{3^2}cos\frac{3\pi}{2}x - \ \dots\right)$$

3- لنوجد أخيراً قيمة مجموع السلسلة العددية المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ \dots = \frac{\pi^2}{16}A = \frac{\pi^2}{16}.\frac{4}{3} = \frac{\pi^2}{12}$$

4- لا يمكن أن نشتق السلسلة المثلثية للتابع x^2 في $]0,2[$ حداً حداً ، لأن السلسلة الناتجة عن الاشتقاق هي:

$$2\left(cos\frac{\pi x}{2} - cos\frac{2\pi}{2}x + cos\frac{3\pi}{2}x - \ \dots\right)$$

والتي حدها العام لا يسعى نحو الصفر عندما n تسعى نحو ∞ ، أي إنها متباعدة من أجل كل قيمة لـx.

تمرينات غير محلولة

(1)- انشر في سلسلة فورييه على المجال $[-\pi,\pi]$ التابع الدوري ودوره 2π التالي $f(x)=e^x$.

(2)- انشر في سلسلة فورييه التابع $f(x)=\frac{x}{|x|}$ والذي دوره 2π والمعرف على المجال $[-\pi,\pi]$.

(3)- ارسم الخط البياني للتابع:

$$f(x)=\begin{cases}0 & ; \quad -2\le x\le -1\\ C & ; \quad -1<x<1\\ 0 & ; \quad 1\le x\le 2\end{cases}$$

ثم اكتب سلسلة فورييه له.

(4)- انشر وفق سلسلة فورييه التابع الدوري والذي دوره 2π، والمعرف على $[0,\pi]$ بالشكل:

$$f(x)=x^2$$

(5)- انشر التابع:

$$f_1(x)=\begin{cases}1 & ; \quad 0\le x\le h\\ 0 & ; \quad h<x\le \pi\end{cases}$$

في $[0,\pi]$ وفق سلسلة تحوي تابع جيب التمام.

(6)- أعد حل التمرين السابق، من أجل التابع

$$f_2(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2h} & ; \quad 0\le x\le 2h\\ 0 & ; \quad 2h<x\le \pi\end{cases}$$

(7)- انشر التابع $f(x)=x \quad ; \quad 0<x<2$، في نصف المدى:

أ- سلسلة تحوي توابع الجيب.

ب- سلسلة تحوي توابع التجيب.

(8)- حدد قيم الثوابت a,b,c,d في $P_3(x)=ax^3+bx^2+cx+d$، بحيث يتعامد $P_3(x)$ مع كل كثيرات الحدود التالية:

$$P_0(x)=1 \quad , \quad P_1(x)=x \quad , \quad P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

المحققة للشرط: $P_3(1)=1$.

(9)- أثبت ان التوابع التالية:

$$1, sin\frac{\pi}{T}x, cos\frac{\pi}{T}x\,, sin\frac{2\pi}{T}x, cos\frac{2\pi}{T}x\,, \cdots$$

متعامدة في المجال $[-T, T]$.

(10)- أثبت أن التوابع:

$$sin\,x\,, sin\,2x\,, \cdots, sin\,nx\,, \cdots$$

متعامدة على المجال $[0, \pi]$.

(11)- عبر عن التابع المعرف على المجال $0 \le x \le \pi$ بالعلاقة:

$$\varphi(x) = \pi x - x^2$$

بدلالة سلسلة جيوب فقط في المجال $(0, \pi)$.

(12)- أعد حل التمرين السابق، لكن بدلالة سلسلة تجيبات فقط في المجال $(0, \pi)$.

(13)- أوجد النشر العقدي للتابع الدوري $f(x)$ ذي الدور $T = 2L = 1$، والمعرف في المجال $0 < x < 1$ بالعلاقة:

$$f(x) = e^x$$

ثم انتقل من النشر العقدي إلى النشر الحقيقي لهذا التابع.

(14)- ليكن التابع:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\pi \le x < 0 \\ a & ; \qquad x = 0 \\ 1 & ; \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$$

المطلوب: تحقق من أن

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_n = 0 \quad , \quad b_n = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \quad ; \quad n = 1,2, \cdots$$

(15)- أوجد سلسلة فورييه العقدية للتابع:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & ; \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

ثم استنتج منه الشكل المثلثي (الشكل الحقيقي).

(16)- اكتب نشر فورييه للتابع: $-1 < x < 1 \quad ; \quad f(x) = \mathrm{e}^{-x}$، ثم استنتج منه النشر المثلثي لفورييه.

(17)- ليكن التابع الحقيقي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; \ x = 0 \quad or \quad x = T \\ \frac{x}{T} & ; \quad x \in]0, T[\end{cases}$$

والمطلوب أثبت أن:

$$C_n = \frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{n}\pi} \quad ; \quad n \in Z^* \text{ و } C_0 = \frac{1}{2}$$

ثم اكتب سلسلة فورييه العقدية له.

(18)- أوجد نشر فورييه العقدي للتابع:

$$f(x) = |\sin wx| \ ; \ \ w > 0$$

واستنتج منه مجموع السلسلة العددية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 4n^2}$$

ثم اكتب السلسلة المثلثية لفورييه (الشكل الحقيقي) له.

الفصل الرابع

تكامل فورييه ـ تحويل فورييه

Fourier Integral – Fourier Transforms

بينا في الفصل الثالث أنه إذا كان التابع $f(x)$ دورياً ويحقق شروط ديرخليه، فإنه يمكننا تمثيله بسلسة فورييه.

سنبين في هذا الفصل أنه إذا لم يكن التابع $f(x)$ دورياً ويحقق شروطاً معينة، فإنه يمكننا تمثيل هذا التابع بوساطة تكامل ثنائي معتل يشابه سلسلة فورييه للتابع الدوري. بكلام آخر يمكن تعميم تمثيل سلسلة فورييه للتابع الدوري $f(x)$ ليشمل التوابع اللادورية، وهذا ما يسمى **بتكامل فورييه**. هذا التعميم يتركز على أنه بإمكاننا اعتبار التابع اللادوري$f(x)$ نهاية لتابع دوري $f(x)$، وذلك عندما ينتهي الدور T إلى اللانهاية، أي إن: $lim_{T\to\infty} f_T(x) = f_T(x)$

(1-4) تكامل فورييه $(Fourier\ Integral)$

لنعرف بداية: التابع القابل للمكاملة إطلاقاً على $R =]-\infty, \infty[$. نقصد بقولنا أن التابع $f(x)$ قابل للمكاملة إطلاقاً على المجال $]-\infty, \infty[$ هو أن يكون كل من التكاملات المعتلة التالية موجوداً:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \quad , \int_{-\infty}^{a} |f(x)|dx \quad ; \quad a \in R$$

أي إذا كانت كل من النهايتين التاليتين موجودتين ومحدودتين:

$$\lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)dx \ , \quad \lim_{c\to-\infty} \int_c^a |f(x)|dx$$

واختصاراً نقول: عن التابع $f(x)$ إنه قابل للمكاملة إطلاقاً إذا تحقق:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$$

لنقدم أولاً **الشروط الكافيه لتمثيل تابع في تكامل فورييه**

ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً على R، ويحقق الشروط التالية، والمسماة **بشروط ديرخليه:**

1- $f(x)$ قابل للمكاملة إطلاقاً على المجال $(-\infty,\infty)$.

2- التابع $f(x)$ قابل للنشر في سلسلة فورييه في أي مجال محدود.

ملاحظة (1):

يمكن صياغة شروط ديرخليه السابقة للتابع $f(x)$ بالشكل التالي:

1- التابع $f(x)$ معرف على R.

2- منحني التابع $f(x)$ أملس أو أملس جزئياً على $[a,b] \subset \mathrm{R}$.

3- التابع $f(x)$ قابل للمكاملة إطلاقاً على R.

مثال (1):

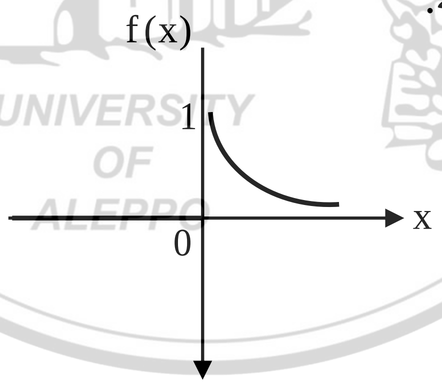
هل يمكن تمثيل التابع $f(x)$ بتكامل فورييه التالي:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & if \quad x<0 \\ e^{-x} & if \quad x\geq 0 \end{cases}$$

الحل: نلاحظ أولاً أنه من أجل: $x \geq 0$ يكون $e^{-x} \leq 1$ كما أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx=[-e^{-x}]_0^{\infty}=-e^{-\infty}+e^{0}=1$$

وهذا يعني أن التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$ موجود، وبما أن التابع e^{-x} متناقص باطراد لاحظ الشكل (1) وبالتالي فهو يحقق شروط ديرخليه، إذاً يمكن تمثيل هذا التابع $f(x)$ بتكامل فورييه.



الشكل (1)

نورد الآن **صيغة فورييه التكاملية**، وذلك من خلال مبرهنة فورييه التالية:

مبرهنة فورييه (***Fourier Theorem***): إذا كان التابع $f(x)$ محدوداً، وقابلاً للمكاملة إطلاقاً على المجال $(-\infty,\infty)$ ويحقق شروط ديرخليه في كل نقطة من نقاط المجال $(-\infty,\infty)$ فإن العلاقة الآتية:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, cos(x-u)\, du\right)dx}$$

تتحقق في جميع نقاط استمرار التابع $f(x)$ عندما L يسعى إلى اللانهائية، وحيث α متحول جديد تابع لـ x.

البرهان:

لنأخذ سلسلة فورييه للتابع $f(x)$ في المجال $[-L, L]$ بالشكل:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\, cos\frac{n\pi}{L}x + b_n\, sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

حيث:

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(u)du$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(u)\, cos\frac{n\pi}{L}udu \quad ; \quad n = 1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(u)\, sin\frac{n\pi}{L}udu \quad ; \quad n = 1,2,\cdots$$

بتعويض أمثال فورييه السابقة في سلسلة فورييه السابقة نجد:

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(u)du + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(u)\, cos\frac{n\pi}{L}udu\right)\cos\frac{n\pi}{L}x \\ + \left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(u)\, sin\frac{n\pi}{L}udu\right)\sin\frac{n\pi}{L}x\right]$$

أو بالشكل:

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(u)du + \\ + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(u)\left(\cos\frac{n\pi}{L}u\cos\frac{n\pi}{L}x + \sin\frac{n\pi}{L}u\sin\frac{n\pi}{L}x\right)du$$

بالاستفادة من العلاقة المثلثية التالية:

$$cos(x+y) = cos\, x\, cos\, y - sin\, x\, sin\, y$$

تكتب السلسلة الأخيرة بالشكل:

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(u)du + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(u)\cos\frac{n\pi}{L}(x-u)du$$

بفرض $\alpha_n = \alpha$ متحول جديد تابع لـ n معرف بالعلاقة: $\frac{n\pi}{L} = \alpha_n = \alpha$

وبوضع: $\Delta\alpha = \frac{\pi}{L} = \frac{n\pi}{L} - \frac{(n+1)\pi}{L} = \alpha_{n+1} - \alpha_n$ نجد:

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(u)du + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-L}^{L} f(u)\cos\alpha_n(x-u)du\right)\Delta\alpha \cdots (1)$$

نلاحظ أنه كلما كبرت L، أصبح الفرق بين التكاملين التاليين:

$$\int_{-L}^{L} f(u)\cos\alpha(x-u)\,du \ , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(x-u)\,du$$

صغيراً، كما أن المجموع الموجود في الطرف الأيمن من العلاقة (1) يذكرنا بالمجموع التكاملي، وهو يسعى إلى التكامل التالي بالنسبة لـ α:

$$\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(x-u)\,du\right)dx$$

ونلاحظ أيضاً أن الحد الثاني من الطرف الأيمن من العلاقة (1) يسعى إلى الصفر عندما L يسعى إلى اللانهاية، أي أن:

$$\left|\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(u)du\right| \le \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}|f(u)du| \le \frac{1}{2L}.P \longrightarrow 0$$

عندما L تسعى إلى اللانهاية، حيث:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx \quad \left(\text{شرط التكامل المطلق للتابع } f(x)\right)$$

وبالتالي العلاقة (1) تأخذ الشكل:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(x-u)\,du\right)d\alpha \cdots (2)}$$

حيث إن $L \to \infty$، وهو المطلوب.

نسمي العلاقة الأخيرة (2) **بصيغة فورييه التكاملية للتابع** $\boldsymbol{f(x)}$، ويسمى التكامل في الطرف الأيمن **بتكامل فورييه** $(Fourier\ Integral)$ كما تسمى المساواة (2) بتمثيل التابع $f(x)$ في تكامل فورييه.

ملاحظات:

1- التكامل الداخلي الموجود في العلاقة (2) تابع لـ α، وبما أن هذا التابع يتعلق بجيب التمام لـ α فهو تابع زوجي، لذلك يمكن كتابة العلاقة (2) بالشكل التالي:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\alpha(x-u)\,du\right)d\alpha$$

2- إن كل ما تمت دراسته سابقاً يختص بالنقاط x التي يكون فيها التابع $f(x)$ مستمراً أما من أجل نقاط الانقطاع للتابع $f(x)$ فتأخذ صيغة فوربيه التكاملية الشكل التالي:

$$\boxed{\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\alpha(x-u)\,du\right)d\alpha}$$

عادة وللسهولة نرمز للتكامل الداخلي من العلاقة (2) بالرمز $I(x,\alpha)$، أي:

$$I(x,\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\alpha(x-u)\,du$$

3- في سياق برهان مبرهنة فوربيه السابقة، استخدمنا سلسلة فوربيه للتابع $f(x)$:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

حيث:

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(u)\,du$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(u)\cos\frac{n\pi}{L}u\,du\quad;\quad n=1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(u)\sin\frac{n\pi}{L}u\,du\quad;\quad n=1,2,\cdots$$

أما إذا استخدمنا سلسلة فوربيه للتابع $f(x)$ التالية:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

حيث إن:

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(u)du$$

ويبقى الثابتان b_n, a_n كما سبق تماماً، حيث $n = 1,2,\cdots$ ففي هذه الحالة تكون صيغة فورييه التكاملية للتابع $f(x)$ في $[-L, L]$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(x-u)\,du\right)d\alpha}$$

مثال (2):

ليكن التابع التالي: $f(x) = \begin{cases} 1 & if \quad |x| < 1 \\ 0 & if \quad |x| > 1 \end{cases}$، والمطلوب أوجد تكامل فورييه له، استنتج قيمة التكامل $\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x \sin\alpha}{\alpha}d\alpha$، ثم أثبت أن $\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha = \frac{\pi}{2}$.

الحل:

نلاحظ أولاً أن التابع يحقق شروط التمثيل لكتابته بتكامل فورييه. لنحسب الآن التكامل:

$$I(x,\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(x-u)\,du$$
$$= \int_{-1}^{1} 1.\cos\alpha(x-u)\,du = \left[-\frac{1}{\alpha}\sin\alpha(x-u)\right]_{-1}^{1}$$
$$= -\frac{1}{\alpha}[\sin\alpha(x-u)]_{-1}^{1} = -\frac{1}{\alpha}[\sin\alpha(x-1) - \sin\alpha(x+1)]$$
$$= -\frac{1}{\alpha}\left[2\cos\frac{\alpha(x-1)+\alpha(x+1)}{2}.\sin\frac{\alpha(x-1)-\alpha(x+1)}{2}\right]$$
$$= -\frac{2}{\alpha}\cos\alpha x\sin(-\alpha) = \frac{2}{\alpha}\cos\alpha x\sin\alpha \quad ; \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

بالتعويض في صيغة تكامل فورييه للتابع $f(x)$ نجد:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x\sin\alpha}{\alpha}d\alpha$$

أو بالشكل:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{2}.f(x)$$

وهذا يعني:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x\sin\alpha}{\alpha}d\alpha = \frac{\pi}{2}\begin{cases} 1 & if \quad |x| < 1 \\ 0 & if \quad |x| > 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & if \quad |x| < 1 \\ 0 & if \quad |x| > 1 \end{cases}$$

وباستخدام العلاقة:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos\alpha(x-u)\,du\right)d\alpha$$

نجد أن:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\sin\alpha}{\alpha}d\alpha=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & if \quad |x|<1\\ \frac{\pi}{4} & if \quad |x|=1\\ 0 & if \quad |x|>1\end{cases}$$

بوضع $x=0$ في المساواة الأخيرة (لأن التكامل الأخير يصعب إيجاده بالطرق العادية) نجد:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha=\frac{\pi}{2}$$

ملاحظة (2):

التكامل $\int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha=\frac{\pi}{2}$ يمثل نهاية تابع الجيب التكاملي والذي نرمز له بـ $Si(x)$ عندما x تسعى نحو اللانهاية ، أي إن:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha=\lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha=\lim_{x\to\infty}Si(x)$$

مثال (3):

مثل بتكامل فورييه التابع:

$$f(x)=\begin{cases}1 & if \quad 0<x<1\\ \frac{1}{2} & if \quad x=0 \ or \ x=1\\ 0 & if \quad x<0 \quad or \quad x>1\end{cases}$$

الحل:

بتطبيق صيغة تكامل فورييه:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos\alpha(x-u)\,du\right)d\alpha$$

نجد:

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^1 1.\cos\alpha\,(x-u)du=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{\sin\alpha(x-u)}{-\alpha}\right]_0^1 d\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha(1-x)+\sin\alpha x}{\alpha}d\alpha$$

أو بالشكل:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha(1-2x)}{2}}{\alpha}d\alpha \quad ; \quad \forall\, x\in R$$

بملاحظة أن $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{2}=f(x)$ في كل من نقطتي الانقطاع $x=1\ ,\ x=0$

لندرس الآن بعض الحالات الخاصة لتكامل فورييه للتابع $f(x)$:

(2-4) تكامل فورييه للتوابع الزوجية والفردية

(Fourier Integral for odd and even Functions)

بما أن $|\cos\alpha x|\le 1$ ، مهما تكن قيمة α فإن:

$$\int_{-L}^{L}|f(u)\cos\alpha u|du\le\int_{-L}^{L}|f(u)|du$$

ومنه، إذا كان التابع $f(x)$ قابلاً للمكاملة مطلقاً على المجال $(-\infty,\infty)$، فإن التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\alpha u\,du$ يكون موجوداً، وبشكل مشابه يكون التكامل $\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\alpha u\,du$ موجوداً أيضاً.

وبما أن:

$$\cos\alpha(x-u)=\cos\alpha x\cos\alpha u+\sin\alpha x\sin\alpha u$$

وبعد التعويض في صيغة تكامل فورييه (2) نجد:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\alpha u\,du\right)\cos\alpha x\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\alpha u\,du\right)\sin\alpha x\,d\alpha \cdots (3)$$

فإذا كان التابع $f(x)$ زوجياً، فإن $f(u)\cos\alpha u$ هو أيضاً تابع زوجي أما التابع $f(u)\sin\alpha u$ فهو فردي، وبالتالي يكون:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\alpha u\,du=2\int_0^\infty f(u)\cos\alpha u\,du$$

بالتعويض في العلاقة (3) نجد:

$$\boxed{f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(u)\cos\alpha u\,du\right)\cos\alpha x\,d\alpha \ \cdots (4)}$$

وهي **صيغة تكامل فورييه للتابع الزوجي $f(x)$.**

أما إذا كان التابع $f(x)$ فردياً، فإن التابع $f(u)\, sin\, \alpha u$ زوجي بينما التابع $f(u)\, cos\, \alpha u$ زوجي، وبالتالي يكون:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, sin\, \alpha u\, du = 2\int_{0}^{\infty} f(u)\, sin\, \alpha u\, du$$

وبالتعويض في العلاقة (3) نجد:

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} f(u)\, sin\, \alpha u\, du\right) sin\, \alpha x\, d\alpha \quad \cdots (5)}$$

وهي **صيغة فورييه التكاملية للتابع الفردي $f(x)$.**

يمكن كتابة صيغة فورييه التكاملية للتابع $f(x)$ بالشكل:

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} [A(\alpha)\, cos\, \alpha x + B(\alpha)\, sin\, \alpha x]$$

حيث:

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, cos\, \alpha x\, dx \ \ \&\ \ B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, sin\, \alpha x\, dx$$

حيث إن التابع $f(x)$ مستمر في جميع النقاط x ويحقق شروط التمثيل بتكامل فورييه، أما إذا كانت x نقطة انقطاع له نستبدل التابع $f(x)$ بالتابع:

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

ملاحظة (3):

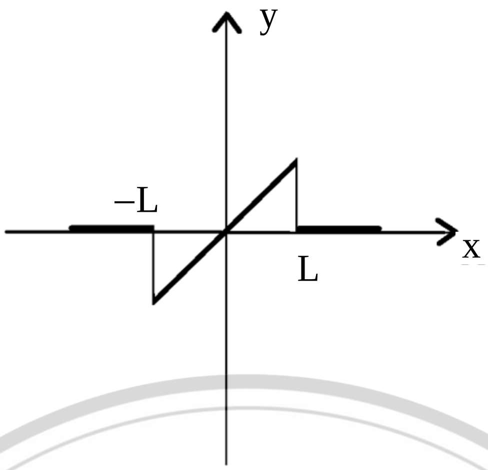
في كل نقطة انقطاع x للتابع $f(x)$ يجب وضع $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ بدلاً من $f(x)$ في الطرف الأيسر من العلاقة (4) و (5).

مثال (4):

ارسم التابع: $f(x) = \begin{cases} 0 & if\ \ |x| > L \\ x & if\ \ |x| \le L \end{cases}$، ثم مثله بتكامل فورييه.

الحل:

إن الخط البياني للتابع المعطى هو:



نلاحظ أنه متناظر بالنسبة للمبدأ، فهو تابع فردي، التابع المفروض يحقق شروط ديرخليه على مجاله.

لنحسب أولاً التكامل الداخلي:

$$\int_0^\infty f(u)\sin\alpha u\,du$$

$$\int_0^\infty f(u)\sin\alpha u\,du = \int_0^L u.\sin\alpha u\,du$$

بالمكاملة بالتجزئة نجد:

$$= \left[-\frac{1}{\alpha}\cos\alpha u\right]_0^L + \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \cos\alpha u\,du = \frac{-L\cos\alpha L}{\alpha} + \frac{\sin\alpha L}{\alpha^2}$$

وبتطبيق العلاقة (5) نجد أن تكامل فورييه للتابع المعطى هو:

$$f(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha L\cos\alpha L - \sin\alpha L}{\alpha^2}\sin\alpha x\;d\alpha$$

مثال (5):

مثل بتكامل فورييه التابع التالي: $f(x) = e^{-k|x|}\ ;\ k > 0$ ثم استنتج قيمة التكامل

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\alpha^2 + k^2}dx$$

الحل:

التابع $e^{-k|x|}$ زوجي ويحقق شروط ديرخليه لتمثيل التابع بتكامل فورييه. وبالتالي فإن نشره في تكامل فورييه يعطى بالعلاقة:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(u)\cos\alpha u\ du\right)\cos\alpha u\,d\alpha$$

لنحسب أولاً التكامل الداخلي:

$$I=\int_0^\infty f(u)\cos\alpha u\ du=\int_0^\infty e^{-ku}\cos\alpha u\ du$$

وبالمكاملة بطريقة التجزئة مرتين متتاليتين نجد:

$$I=\left[-\frac{1}{k}e^{-ku}\cos\alpha u\right]_0^\infty-\int_0^\infty\left(-\frac{1}{k}e^{-ku}\right)(-\alpha)\sin\alpha u\ du$$

$$=\frac{1}{k}-\frac{\alpha}{k}\int_0^\infty e^{-ku}\sin\alpha u\ du$$

$$=\frac{1}{k}-\left[\left[\frac{\alpha}{k}-\frac{1}{k}e^{-ku}\sin\alpha u\right]_0^\infty-\int_0^\infty\left(-\frac{1}{k}e^{-ku}\right)\alpha.\cos\alpha u\ du\right]$$

$$=\frac{1}{k}-\frac{\alpha^2}{k^2}\int_0^\infty e^{-ku}\cos\alpha u\,du\ \Longrightarrow$$

$$I=\frac{1}{k}-\frac{\alpha^2}{k^2}I\quad\Longrightarrow\quad I=\frac{k}{\alpha^2+k^2}$$

ومنه، فإن تكامل فورييه للتابع المعطى هو:

$$f(x)=\frac{2k}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\alpha^2+k^2}\cos\alpha x\,d\alpha$$

من المساواة الأخيرة ، نجد أن قيمة التكامل: $\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+k^2}dx$ هي $\frac{\pi}{2k}e^{-k|x|}$ أي أن:

$$\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+k^2}dx=\frac{\pi}{2k}e^{-k|x|}\quad;\quad k>0$$

لاحظ أن حساب التكامل $\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+k^2}dx$ صعب جداً ، ومن هنا تأتي أهمية تكاملات فورييه.

ولندرس الآن الصيغة العقدية لتكامل فورييه

$(\boldsymbol{Complex\ form\ Of\ Fourier\ integral})$

نعلم أن صيغة أولر للتابع $\cos\alpha(x-u)$ هي:

$$\cos\alpha(x-u)=\frac{e^{i\alpha(x-u)}+e^{-i\alpha(x-u)}}{2}$$

والآن بتعويض الصيغة السابقة في صيغة فورييه التكاملية:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\,cos\,\alpha(x-u)\,du\right)d\alpha$$

نجد:

$$f(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\,cos\,\alpha(x-u)\,du\right)d\alpha$$

ومنه نجد:

$$f(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\left(e^{i\alpha(x-u)}+e^{-i\alpha(x-u)}\right)du\right)d\alpha$$

أو بالشكل:

$$f(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{i\alpha(x-u)}du\right)d\alpha + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\alpha(x-u)}du\right)d\alpha$$

بما أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{i\alpha(x-u)}du\right)d\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\alpha(x-u)}du\right)d\alpha$$

لأنه إذا وضعنا $z=\alpha-$ نجد تحقق المساواة السابقة.

وبالتالي نجد:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{i\alpha(x-u)}du\right)d\alpha\ \cdots(6)}$$

نسمي عادة العلاقة الأخيرة (6) **بالصيغة العقدية لتكامل فورييه للتابع $f(x)$.**

يمكن كتابة العلاقة (6) بالشكل التالي:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}\,d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\,e^{-i\alpha u}du$$

مثال (6):

أوجد الصيغة العقدية لتكامل فورييه للتابع $f(x)$ المعرف بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases}0 & if\ \ |x|>L\\ 1 & if\ \ |x|\le L\end{cases}$$

الحل:

لنحسب أولاً التكامل $\int_{-L}^{L}e^{i\alpha(x-u)}\,du$

$$\int_{-L}^{L} e^{i\alpha(x-u)}\, du = -\frac{1}{i\alpha}\left[e^{i\alpha(x-u)}\right]_{-L}^{L} = -\frac{1}{i\alpha}\left(e^{i\alpha(x-L)} - e^{i\alpha(x+L)}\right)$$

$$= \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha}\left(\frac{e^{i\alpha L} - e^{-i\alpha L}}{i}\right) = \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha} . 2 \sin \alpha L$$

بالتعويض في العلاقة (6) نجد:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha L}{\alpha} e^{i\alpha x} d\alpha$$

وهي الشكل العقدي لتكامل فورييه للتابع $f(x)$.

(3-4) تحويل فورييه ($Fourier\ Transforms$):

بما أن: $e^{-i\alpha u} = \cos \alpha u - i \sin \alpha u$ فإن:

$$f(u)e^{-i\alpha u} = f(u) \cos \alpha u - i f(u) \sin \alpha u$$

بمكاملة طرفي العلاقة الأخيرة من $-\infty$ إلى ∞ بعد ضربها بالعدد $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ نجد:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha u} f(u)\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha u\, du - \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \alpha u\, du$$

لنتكتب العلاقة السابقة على الشكل:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha u} f(u) du = F(\alpha) - iH(\alpha) \cdots (7)$$

حيث:

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} f(u) \cos \alpha u\, du$$

$$H(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} f(u) \sin \alpha u\, du$$

وهذا ممكن وذلك حسب العلاقة (4).

تكتب العلاقة (7) بالشكل:

$$F^*(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha u} f(u)\, du$$

نسمي عادة $F^*(\alpha)$ **تحويل فورييه للتابع** $f(x)$ ونرمز له عادة $T[f(x)]$ إذاً

$$\boxed{T[f(x)] = F^*(\alpha)}$$

وبالتالي يكون:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F^*(\alpha)e^{-i\alpha u}\,d\alpha}$$

ملاحظة (4):

يمكن استنتاج ما سبق من علاقة تمثيل تابع في تكامل فوريبه بالشكل العقدي ، وذلك باستبدال α بـ $-\alpha$ في العلاقة (6) لنحصل على العلاقة:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{i\alpha u}\,du\right)e^{-i\alpha u}d\alpha$$

وبوضع:

$$\boxed{F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{i\alpha u}\,du \cdots (8)}$$

في الصيغة السابقة نجد:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)e^{-i\alpha x}\,du=f(x)$$

إن الانتقال من التابع $f(x)$ إلى التابع $F(\alpha)$ المعطى بالعلاقة (8) **يسمى بتحويل فوريبه للتابع $f(x)$**، ونسمى عادة التابع $F(\alpha)$ نفسه بتحويل فوريبه للتابع $f(x)$. أما الانتقال المعاكس من التابع $F(\alpha)$ إلى التابع $f(x)$ المعطى بالعلاقة الأخيرة فيسمى **بتحويل فوريبه المعاكس**، ونعبر عن التحويل المعاكس بـ

$$\boxed{T^{-1}[F(\alpha)]=f(x)}$$

سنستخدم هذا الرمز عند دراسة بعض خواص تحويلات فوريبه.

مثال (7):

أوجد تحويل فوريبه للتابع:

$$f(x)=\begin{cases}0 & if \quad |x|<a\\ 1 & if \quad |x|>a\end{cases}$$

الحل:

إن تحويل فوريبه للتابع $f(x)$ يعطى بالعلاقة $F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{i\alpha u}du$

بالتعويض بها نجد:

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}1.e^{i\alpha u}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{i\alpha u}}{i\alpha}\right]_{-a}^{a}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{i\alpha u}-e^{-i\alpha a}}{i\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \frac{2 \sin \alpha a}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} . \frac{\sin \alpha a}{\alpha} \quad ; \quad \alpha \neq 0$$

بعض خواص تحويلات فورييه:

1- لتكن $F_1(\alpha), F_2(\alpha), \dots, F_n(\alpha)$ تحويلات فورييه للتوابع: $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ على الترتيب وإذا كانت a_i أعداداً حقيقية حيث $i = 1,2, \dots, n$، عندئذٍ يتحقق ما يلي:

$$T\left[\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i F_i(\alpha)$$

$$T^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i F_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)$$

البرهان:

بما أن:

$$T\left[\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) e^{-i\alpha x} dx$$

$$= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-i\alpha x} dx + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) e^{-i\alpha x} dx$$

$$+ \cdots + a_n \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) e^{-i\alpha x} dx$$

استناداً إلى خواص التكامل المحدد فإن:

$$= a_1 F_1(\alpha) + a_2 F_2(\alpha) + \ \dots + a_n F_n(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i F_i(\alpha)$$

وبنفس الطريقة تماماً نبرهن على العلاقة الثانية.

2- إذا $T[f(x)] = F(\alpha)$ ، فإن $T[f'(x)] = i\alpha F(\alpha)$.

البرهان: لبرهان هذه الخاصة نستخدم المبرهنة التالية والتي نقبلها من دون برهان مبرهنة(2):

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً وقابلاً للاشتقاق على R، وكان التكاملان:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

موجودين، عندئذٍ يكون:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$$

ولنبرهن الآن الخاصة الثانية: إن تحويل فورييه للتابع $f'(x)$ يكتب بالشكل:

$$T[f'(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\alpha x}dx$$

للمكاملة بالتجزئة نفرض: $u=e^{-i\alpha x} \quad \Longrightarrow \quad du=-i\alpha e^{-i\alpha x}dx$

$$f'(x)dx=dv \quad \Longrightarrow \quad v=f(x)$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$T[f'(x)]=\left[f(x)e^{-i\alpha x}\right]_{-\infty}^{\infty}+i\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\,dx$$

وحسب المبرهنة السابقة يكون: $lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ وبالتالي يكون:

$$T[f'(x)]=i\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx=i\alpha F(\alpha)$$

ملاحظة (5):

يمكن تعميم الخاصة السابقة بالشكل التالي: إذا كان المشتق من المرتبة (k) للتابع $f(x)$ أي $f^{(k)}(x)$ يقبل تحويل فورييه فإن:

$$T\left[f^{(k)}(x)\right]=(i\alpha)^k F(\alpha) \ ; \quad k=1,2,\cdots$$

ونبرهن بطريقة الاستقراء الرياضي على k.

3- إذا كان: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)=0$ و $T[f(x)]=F(\alpha)$، فإن:

$$T\left[\int_{-\infty}^{x} f(u)du\right]=\frac{\mathrm{F}(\alpha)}{i\alpha}$$

البرهان: إن:

$$T\left[\int_{-\infty}^{x} f(u)du\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x} f(u)du\right)e^{-i\alpha x}dx$$

وبإجراء عملية المكاملة بالتجزئة نحصل:

$$T\left[\int_{-\infty}^{x} f(u)du\right]=\left[\left(\frac{e^{-i\alpha x}}{i\alpha}\right)\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du\right]_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{i\alpha}\int_{-\infty}^{x} f(x)e^{-i\alpha x}dx$$

ومن شرط الخاصة المدروسة يكون لدينا:

$$=0+\frac{1}{i\alpha}\int_{-\infty}^{x} f(x)e^{-i\alpha x}dx$$

إذاً :

$$T\left[\int_{-\infty}^{x} f(u)du\right] = \frac{F(\alpha)}{i\alpha}$$

4- إذا كان: $T[f(x)] = F(\alpha)$، فإن:

$$T[f(x-a)] = e^{-i\alpha x}F(\alpha) \;\; ; \;\; a > 0$$

البرهان:

حسب تعريف تحويل فورييه للتابع $f(x-a)$ نكتب.

$$T[f(x-a)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i\alpha x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha(u+a)}du$$

حيث فرضنا $x - a = u$ ومنه $dx = du$، إذاً:

$$T[f(x-a)] = \mathrm{e}^{-i\alpha a}F(\alpha)$$

بالطريقة نفسها يمكن إثبات أن:

$$T[f(x+a)] = e^{i\alpha a}F(\alpha) \;\; ; \;\; a \geq 0$$

5- نفرض أن: $T[f(x)] = F(\alpha)$ ، عندئذٍ تتحقق العلاقة:

$$T\left[e^{-i\alpha x}f(x)\right] = F(\alpha + a) \; ; \;\; a \geq 0$$

البرهان:

$$T\left[e^{-i\alpha x}f(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}f(x)e^{-i\alpha x}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(a+\alpha)x}dx = F(\alpha + a)$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن:

$$T\left[e^{i\alpha x}f(x)\right] = F(\alpha - a) \;\; ; \;\; a \geq 0$$

6- إذا كان $T[f(x)] = F(\alpha)$ ، فإن:

$$T\left[f\left(\frac{x}{a}\right)\right] = aF(a\alpha) \;\; ; \;\; a > 0$$

البرهان: لدينا:

$$T\left[f\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a}\right)e^{-i\alpha x}\,dx$$

نفرض أن $x = au$، ومنه $dx = a\,du$، وبالتالي يكون:

$$T\left[f\left(\frac{x}{a}\right)\right] = a\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i(\alpha a)u}\,du = aF(a\alpha)$$

(4-4) تحويل فورييه للتوابع الزوجية والفردية

$(\boldsymbol{Fourier\ transforms\ for\ odd\ and\ even\ functions})$

أولاً : بفرض $f(x)$ تابعاً زوجياً، نعلم أن صيغة تكامل فورييه للتوابع الزوجية هي من الشكل:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(u)\cos\alpha u\,du\right)\cos\alpha x\,dx$$

والتي يمكن كتابتها أيضاً بالشكل:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(u)\cos\alpha u\,du\right)\cos\alpha x\,dx$$

بوضع: $F_1(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(u)\cos\alpha u\,du$ في المساواة السابقة نجد:

$$\boxed{f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_1(\alpha)\cos\alpha x\,dx}$$

نطلق على العلاقة $F_1(\alpha)$ **بتحويل جيب التمام فورييه للتابع الزوجي $f(x)$** بينما نسمي العلاقة $f(x)$ الأخيرة **بتحويل جيب التمام فورييه المعاكس**.

ثانياً: إذا كان التابع $f(x)$ فردياً وجدنا أن صيغة فورييه التكاملية للتابع الفردي $f(x)$ هي من الشكل:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(u)\sin\alpha u\,du\right)\sin\alpha x\,d\alpha$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(u)\sin\alpha u\,du\right)\sin\alpha x\,d\alpha$$

فإذا وضعنا: $F_2(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(u)\sin\alpha u\,du$ في المساواة السابقة نجد:

$$\boxed{f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_2(\alpha)\sin\alpha x\,dx}$$

نسمي الصيغة $F_2(\alpha)$ **بتحويل جيب فورييه للتابع الفردي $f(x)$** ويطلق على العلاقة $f(x)$ الأخيرة **بتحويل جيب فورييه المعاكس**.

مثال (8):

أوجد تحويل فورييه للتابع $f(x) = e^{-mx} \;;\; m > 0$، والمعرف فقط من أجل $x > 0$.

الحل:

نمدد التابع المعطى من أجل القيم السالبة لـ x حتى يكون زوجياً أو فردياً، لنمدده حتى نحصل على التابع الفردي:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-mx} & if \quad x > 0 \\ -e^{-mx} & if \quad x < 0 \end{cases}$$

وبالتالي يكون تحويل فورييه للتابع الناتج بالشكل:

$$F_2(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-mu} \sin \alpha u \; du$$

وللسهولة نرمز بـ $I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-mu} \sin \alpha u \; du$

وبإجراء عملية المكاملة بالتجزئة مرتين متتاليتين لـ $I(\alpha)$ نجد:

$$I(\alpha) = \left[-\frac{1}{m} e^{-mu} \sin \alpha u\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{m} e^{-mu} (\alpha \cos \alpha u) du$$

$$= \frac{\alpha}{m} \int_0^{\infty} e^{-mu} \cos \alpha u \, du$$

$$= \frac{\alpha}{m}\left[\left[-\frac{1}{m} e^{-mu} \cos \alpha u\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{m} e^{-mu} (\alpha \sin \alpha u) du\right]$$

$$= \frac{\alpha}{m}\left[\frac{1}{m} - \frac{\alpha}{m} I(\alpha)\right]$$

إذاً: $I(\alpha)\left(1 + \frac{\alpha^2}{m^2}\right) = \frac{\alpha}{m^2} \;\; \Rightarrow \;\; I(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + m^2}$

وبالتالي فإن تحويل فورييه المطلوب هو:

$$F_2(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} . \frac{\alpha}{\alpha^2 + m^2}$$

مثال(9):

أوجد تحويل جيب التمام (تجيب) فورييه للتابع $f(x) = e^{-mx} \;;\; m > 0$، ثم استخدم النتيجة التي ستحصل عليها في إثبات صحة العلاقة:

$$\int_0^\infty \frac{\cos Pv}{v^2+\beta^2}\,dv = \frac{\pi}{2\beta} e^{-P.\beta} \quad ; \quad P>0\,,\beta>0$$

الحل:

لنمدد التابع المعطى من أجل القيم السالبة لـ x حتى يكون التابع زوجياً، وبالتالي يكون تحويل فورييه المطلوب هو:

$$F_1(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(u)\cos\alpha u\,du$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-mu}\cos\alpha u\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, I(\alpha) \;;\; I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-mu}\cos\alpha u\,du$$

وبإجراء عملية المكاملة بالتجزئة مرتين متتاليتين لـ $I(\alpha)$ نحصل على:

$$I(\alpha) = \frac{m}{\alpha^2+m^2}$$

وبالتالي يكون تحويل فورييه للتابع المعطى في هذه الحالة بالشكل:

$$F_1(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} . \frac{m}{\alpha^2+m^2}$$

لنثبت الآن صحة العلاقة الواردة في نص المثال:

لدينا حسب تحويل فورييه المعاكس:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_1(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha$$

أي:

$$e^{-mx} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{m}{\alpha^2+m^2}\cos\alpha x\,d\alpha$$

ومنه يكون:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+m^2}\,d\alpha = \frac{\pi}{2m} e^{-mx}$$

وباستبدال α بـ v و x بـ P و m بـ β نحصل على:

$$\int_0^\infty \frac{\cos Pv}{v^2+\beta^2}\,dv = \frac{\pi}{2\beta} e^{-P.\beta} \quad ; \quad P>0\,,\beta>0$$

وهو المطلوب.

نسمي عادة التكامل من الطرف الأيسر من المساواة السابقة **بتكامل لابلاس.**

(5-4) متطابقات بارسيفال $(Parseval`s\ identity)$

أولاً : متطابقة بارسيفال لسلسلة فورييه

$(\boldsymbol{Parseval`s\ identity\ for\ Fourier\ Series})$

بفرض أن سلسلة فورييه للتابع $f(x)$ متقاربة في المجال $]-L,L[$، وإذا كانت $a_0, a_n, b_n\ ; n=1,2,\cdots$ أمثال فورييه للتابع $f(x)$، عندئذٍ تعطى متطابقة بارسيفال للتابع $f(x)$ بالعلاقة:

$$\boxed{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\big(f(x)\big)^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)}$$

لنبرهن الآن على صحة علاقة بارسيفال السابقة. بضرب طرفي سلسلة فورييه للتابع $f(x)$ التالية:

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$ بـ $f(x)$ نجد:

$$\big(f(x)\big)^2=f(x)\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

وبإجراء عملية المكاملة لطرفي المساواة السابقة من $-L$ إلى L نجد:

$$\int_{-L}^{L}\big(f(x)\big)^2\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}f(x)dx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx+b_n\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

وبما أن: $\int_{-L}^{L}f(x)dx=a_0L\ ,\ \ \int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=a_nL$

$$\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=b_nL\quad ;\quad n=1,2,\cdots$$

تأخذ العلاقة التكاملية السابقة الشكل:

$$\int_{-L}^{L}\big(f(x)\big)^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}L+L\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

أخيراً بتقسيم طرفي المساواة الأخيرة على L نجد:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\big(f(x)\big)^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

وهي علاقة بارسيفال للتابع $f(x)$ المطلوبة.

ثانياً: متطابقات بارسيفال لتكاملات فورييه

$(\boldsymbol{Parseval`s\ identity\ for\ Fourier\ integral})$

بفرض $F_s(\alpha)$ و $G_s(\alpha)$ تحويلات جيب فورييه للتابعين $f(x)$ و $g(x)$ على الترتيب عندئذٍ:

$$\int_0^\infty F_s(\alpha).G_s(\alpha)d\alpha = \int_0^\infty f(x).g(x)dx$$

وبالمثل، إذا كان $G_c(\alpha), F_c(\alpha)$ تحويلات تجيب فورييه للتابعين $f(x)$ و $g(x)$ على الترتيب، عندئذٍ يكون:

$$\int_0^\infty F_c(\alpha).G_c(\alpha)d\alpha = \int_0^\infty f(x).g(x)dx$$

وفي الحالة الخاصة: إذا كان $f(x) = g(x)$ ، عندها تأخذ العلاقتان السابقتان الشكل:

$$\int_0^\infty \left(F_s(\alpha)\right)^2 d\alpha = \int_0^\infty \left(f_s(x)\right)^2 dx$$

و

$$\int_0^\infty \left(F_c(\alpha)\right)^2 d\alpha = \int_0^\infty \left(f(x)\right)^2 dx$$

تسمى العلاقات السابقة **بمتطابقات بارسيفال لتكامل فورييه.**

ملاحظة (6):

إذا كان $G(\alpha), F(\alpha)$ تحويلات للتابعين $f(x)$ و $g(x)$ على الترتيب عندئذٍ يتحقق:

$$\int_{-\infty}^\infty F(\alpha)\overline{G(\alpha)}d\alpha = \int_{-\infty}^\infty f(x)\overline{g(x)}dx$$

حيث $\overline{G(\alpha)}$ و $\overline{g(x)}$ مرافقا التابعين $G(\alpha)$ و $g(x)$ على الترتيب.

(4-6) مبرهنة الالتفاف (الطي): $(\boldsymbol{Convolution\ theorem})$

بفرض $F(\alpha)$ و $G(\alpha)$ تحويل فورييه للتابعين $f(x)$ و $g(x)$ على الترتيب، عندها تتحقق المساواة:

$$\boxed{\int_{-\infty}^\infty F(\alpha).G(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha = \int_{-\infty}^\infty f(u)g(x-u)du}$$

يرمز عادة لآلية اللف بالرمز f^*g لتابعين f و g، عندئذٍ تأخذ العلاقة الأخيرة الشكل:

$$\boxed{f^*g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du}$$

المساواة الأخيرة تأخذ الشكل التالي:

$$T[f^*g] = T(f).T(g) = F(\alpha).G(\alpha)$$

أي إن تحويل فورييه للف تابعين يساوي جداء تحويل فورييه لهما.

لنبرهن الآن على **صحة مبرهنة الالتفاف** $(The\ Convolution\ Theorem)$

أي لنبرهن على صحة المساواة الأخيرة.

من تعريف تحويل فورييه للتابعين $f(x), g(x)$ نكتب:

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u}du \quad \& \quad G(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v)\, e^{-i\alpha v}dv$$

ومن العلاقتين السابقتين يكون لدينا:

$$F(\alpha).\mathrm{G}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u).g(v)e^{-i\alpha(u+v)}dudv \quad \cdots (*)$$

نفرض أن $u + v = x$ ، وبالانتقال من المتحولين v, u إلى المتحولين x, u وباستخدام المحدد اليعقوبي:

$$dudv = \frac{\partial(u,v)}{\partial(u,x)}dudx$$

حيث إن المحدد اليعقوبي له الشكل:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(u,x)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial u} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial u} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix}$$

يكون لدينا:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(u,x)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

وبالتالي ستأخذ العلاقة $(*)$ (بعد تطبيق دستور تغيير في المتحولات للتكامل الثنائي) الشكل التالي:

$$F(\alpha).G(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(x-u)e^{-i\alpha x}dudx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(x-u)du\right)dx$$
$$=\mathrm{T}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(x-u)du\right]=T(f^{*}.g)$$

حيث إن:

$$f^{*}.g=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(x-u)du$$

ملاحظة (7):

يمكن برهان المبرهنة السابقة، والتي يمكن صياغتها بالشكل التالي، إذا كان: $T[f(x)]=F(\alpha)$ و $T[g(x)]=G(\alpha)$، فإن تحويل فورييه للف التابعين $f(x)$ و $g(x)$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$\boxed{T[f^{*}(x)g(x)]=F(\alpha)G(\alpha)}$$

البرهان:

من تعريف تحويل فورييه لدينا:

$$T[f^{*}(x)g(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}g(x-u)f(u)du\right)e^{-i\alpha x}dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\left(\int_{-\infty}^{\infty}g(x-u)e^{-i\alpha x}\,dx\right)du$$

لنجر تغييراً في المتحول، فبفرض أن $x-u=s$ أي إن $x=u+s$ ومنه $dx=ds$، وبالتالي نجد:

$$T[f^{*}(x)g(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\left(\int_{-\infty}^{\infty}g(s)e^{-i\alpha(u+s)}ds\right)du$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\alpha u}du\int_{-\infty}^{\infty}g(s)e^{-i\alpha s}ds=F(\alpha)G(\alpha)$$

نتيجة (1):

بالاستفادة من المبرهنة السابقة، إن $f^{*}g=g^{*}f$.

البرهان:

حسب مبرهنة الالتفاف السابقة نكتب:

$$f^*g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-v)g(v)dv$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(v)f(x-v)dv = g^*f$$

مثال (10):

أثبت صحة ما يلي: بفرض $a,b \in R$ فإن:

1) $(af \pm bg)^*h = a(f^*h) \pm b(g^*h)$

2) $(f^*g)^*h = f^*(g^*h)$

الحل:

(1

$$(af \pm bg)^*h = \int_{-\infty}^{\infty} [af(x-u) \pm bg(x-u)]h(u)du$$
$$= a\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)h(u)du \pm b\int_{-\infty}^{\infty} g(x-u)h(u)du$$
$$= a(f^*h) \pm b(g^*h)$$

2) نفرض للسهولة أن: $G = g^*.h$ و $F = f^*g$، ولنثبت أن $F^*h = f^*G$، من أجل ذلك:

$$F^*h = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-u)h(u)du = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u-s)g(s)ds\right)h(u)du$$

نفرض أن $u+s=r$ فيكون $ds = dr$، وبالتالي يكون:

$$F^*h = \int_{-\infty}^{\infty}(f(x-r)g(r-u)dr)h(u)du$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-r)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(r-u)h(u)du\right)dr = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-r)G(u)du$$
$$= f^*G$$

تمرينات محلولة

{1} انشر التابع التالي في تكامل فورييه:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & if \ \ x < 0 \\ e^{-x} & if \ \ x \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

إن شروط مبرهنة فورييه محققة، راجع المثال (1) من القسم النظري.

لإيجاد منشور هذا التابع في تكامل فورييه، نحسب أولاً التكامل:

$$I(x,\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha(x-u) \, du$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-x} \cos \alpha(x-u) \, du$$

وبالمكاملة بطريقة التجزئة مرتين متتاليتين نجد:

$$I(x,\alpha) = \cos \alpha x + \alpha \sin \alpha x - \alpha^2 I(x,\alpha)$$

ومنه يكون:

$$I(x,\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2}(\cos \alpha x + \alpha \sin \alpha x)$$

وبالتعويض في صيغة فورييه التكاملية نجد:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\cos \alpha x + \alpha \sin \alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha \quad ; \quad x \in R \backslash \{0\}$$

وهو تكامل فورييه المطلوب.

{2} أوجد تكامل فورييه للتابع:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-kx} & if \ \ x > 0 \\ -e^{kx} & if \ \ x < 0 \end{cases}$$

ثم استنتج قيمة التكامل $\int_{0}^{\infty} \frac{\alpha \sin \alpha x}{\alpha^2 + x^x} d\alpha$.

الحل:

التابع المعطى فردي لأنه يحقق $f(-x) = -f(x)$ ، وبالتالي نستخدم العلاقة:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} f(u) \sin \alpha u \, du\right) \sin \alpha u \, d\alpha$$

لنحسب أولاً التكامل الداخلي

$$I = \int_{0}^{\infty} f(u) \sin \alpha u \, du = \int_{0}^{\infty} e^{-ku} \sin \alpha u \, du$$

وبالمكاملة بطريقة التجزئة نجد:

$$I = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \implies f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha \sin \alpha x}{\alpha^2+k^2}dx$$

ومن أجل $u > 0$ يكون لدينا:

$$-e^{-ku} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha \sin \alpha x}{\alpha^2+k^2}d\alpha \implies \int_0^\infty \frac{\alpha \sin \alpha x}{\alpha^2+k^2}d\alpha = \frac{\pi}{2}e^{-ku}$$

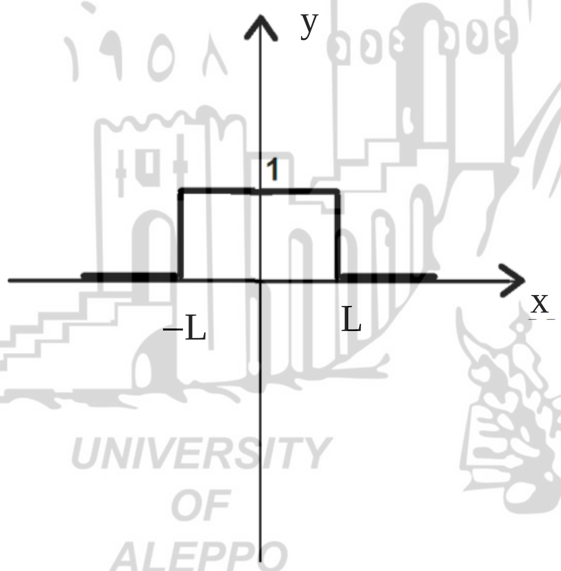
{3} استنتج من الخط البياني للتابع:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & if \quad |x| > L \\ 1 & if \quad |x| \le L \end{cases}$$

طبيعته ثم مثله بتكامل فورييه.

الحل:

إن الخط البياني للتابع المعطى هو:



بما أنه متناظر بالنسبة لمحور التراتيب، فهو تابع زوجي على المجال $[-L, L]$.

كما أن شروط النشر وفق تكامل فورييه له محققة أيضاً وبالتالي لنحسب أولاً التكامل الداخلي:

$$\int_0^\infty f(u)\cos \alpha u\, du = \int_0^L 1.\cos \alpha u\, du = \frac{1}{\alpha}\sin \alpha L$$

وباستخدام العلاقة (4) الواردة في القسم النظري يكون منشوره وفق تكامل فورييه هو:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \alpha L}{\alpha}\cos \alpha x\, d\alpha$$

{4} مثل بتكامل فوربيه التابع التالي:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2} & if \quad x \in [0,2] \\ 0 & if \quad x > 2 \end{cases}$$

وذلك بتمديده زوجياً إلى المجال $]-\infty,\infty[$ ، ثم استنتج قيمة $\int_0^\infty \frac{sin^2 \alpha}{\alpha^2}$.

الحل: إن

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(u)\, cos\, \alpha u\, du\right) cos\, \alpha x\, d\alpha$$

أي إن:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty cos\, \alpha x\, d\alpha \int_0^2 \left(1 - \frac{u}{2}\right) cos\, \alpha u\, du$$

لنكامل بطريقة التجزئة لنجد:

$$\int_0^2 \left(1 - \frac{u}{2}\right) cos\, \alpha u\, du = \left[\left(1 - \frac{u}{2}\right)\frac{sin\, \alpha u}{\alpha}\right]_0^2 + \frac{1}{2\alpha}\int_0^2 sin\, \alpha u\, du$$

$$= \left[-\frac{1}{2\alpha^2} cos\, \alpha u\right]_0^t = \frac{1 - cos\, 2\alpha}{2\alpha^2} = \frac{sin^2 \alpha}{\alpha^2}$$

إذاً تكامل فوربيه المطلوب هو:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{sin^2 \alpha}{\alpha^2} cos\, \alpha x\, d\alpha$$

وذلك مهما تكن x من $[0,\infty[$.

بوضع $x = 0$ في طرفي العلاقة الأخيرة نجد:

$$f(0) = 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{sin^2 \alpha}{\alpha^2} d\alpha$$

ومنه نجد:

$$\int_0^\infty \frac{sin^2 \alpha}{\alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{2}$$

{5} مثل بتكامل فوربيه التابع التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \cos x & if \quad x \in [0,\pi[\\ -\dfrac{1}{2} & if \quad x = \pi \\ 0 & if \quad x > \pi \end{cases}$$

وذلك بتمديده بشكل فردي إلى المجال $]-\infty,\infty[$.

الحل: إن:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(u)\,sin\,\alpha u\,du\right)sin\,\alpha x\,d\alpha$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} sin\,\alpha\,d\alpha\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,cos\,u\,sin\,\alpha u\,du$$

أو:

$$\int_0^{\pi} sin\,\alpha u\,cos\,u\,du=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[sin(\alpha+1)\,u+sin(\alpha-1)\,u]du$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha^2-1}(cos\,\alpha\pi+1)$$

إذن:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2-1}(cos\,\alpha\pi+1)\,sin\,\alpha x\,d\alpha$$

وذلك من أجل جميع قيم x من $[0,\infty[\backslash\{\pi\}$.

{6} أوجد تحويل فورييه للتابع: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ ، وماذا تستنتج.

الحل:

لنستخدم علاقة التحويل التالية:

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha u}du$$

$$F(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}e^{i\alpha u}du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}+i\alpha u}du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u+i\alpha)^2-\frac{\alpha^2}{2}}\,du=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u+i\alpha)^2}\,du$$

لنرمز بـ $I(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u+i\alpha)^2}\,du$ وبالتالي:

$$I(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u+i\alpha)^2}\,du=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} e^{-\frac{1}{2}(u+i\alpha)^2}\,du$$

وبإجراء التحويل التالي: $z=u+i\alpha$ نجد:

$$I(\alpha)=\lim_{A\to\infty}\int_{-A+i\alpha}^{A+i\alpha} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz$$

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة لـ α حيث إن النهاية تتقارب بانتظام في أي مجال مغلق محدود (هذا ما يسمح لنا بعملية الاشتقاق ما بعد رمز النهاية) لنجد:

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = \lim_{A \to \infty} \frac{d}{d\alpha} \int_{-A+i\alpha}^{A+i\alpha} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$$

وبإجراء الاشتقاق للتكامل وفق حدية العلوي والسفلي نحصل:

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = \lim_{A \to \infty} \left(i e^{-\frac{1}{2}(A+i\alpha)^2} - i e^{-\frac{1}{2}(-A+i\alpha)^2} \right)$$

وبما أن:

$$e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

وبالانتقال إلى النهايات نجد أن:

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = 0 \quad \Longrightarrow \quad I(\alpha) = const$$

وفي حالة خاصة نجد $I(\alpha) = I(0)$، لذلك نوجد التكامل $I(0)$ من أجل ذلك نكتب $I(0)$ مرتين بالشكل:

$$I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \ , \ I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

ومنه يكون:

$$I^2(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)} dx dy$$

وبالانتقال إلى الإحداثيات القطبية نجد:

$$I^2(0) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \right) d\theta = \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi \left[-e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^{\infty} \quad \Longrightarrow \quad I(0) = \sqrt{2\pi}$$

وبالتالي يكون:

$$F(\alpha) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} . \sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

نلاحظ التطابق بين صيغة التابع المفروض وتحويل فورييه له.

{7} أوجد تحويل فورييه بالجيب، ثم بالتجيب للتابع التالي:

$$f(x) = 2x \quad ; \quad 0 < x < 4$$

الحل:

بما أن $L=4$ وبالتالي يكون:

$$F_s(\alpha)=\int_0^L f(x)\sin\frac{\alpha\pi}{L}x\,dx=\int_0^4 2x\sin\frac{\alpha\pi}{4}x\,dx$$

وبإجراء عملية التكامل بطريقة التجزئة نجد:

$$F_s(\alpha)=-\frac{22}{\alpha\pi}\cos\alpha\pi$$

إذا كان $\alpha>0$، فإن:

$$F_c(\alpha)=\int_0^L f(x)\cos\frac{\pi\alpha}{L}x\,dx=\int_0^4 2x\cos\frac{\pi\alpha}{4}x\,dx$$
$$=32\left[\frac{\cos\alpha\pi-1}{\alpha^2\pi^2}\right]$$

أما من أجل $\alpha=0$ فيكون:

$$F_s(\alpha)=F_c(\alpha)=\int_0^4 2x\,dx=16$$

{8} نرمز لسلسلة المجاميع الجزئية لسلسلة فورييه بـ $S_M(x)$ وكل حد فيها عبارة عن مجموع عدد منته من حدود سلسلة فورييه، أي:

$$S_M(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{M}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

حيث a_0,a_n,b_n أمثال فورييه و $n=1,2,\cdots$

أثبت أنه من أجل أي عدد موجب M ، يتحقق:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f^2(x)\,dx$$

حيث $f(x)$ تابع مستمر جزئياً في المجال $]-L,L[$.

الحل: ليكن:

$$S_M(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{M}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)\cdots(1)$$

والتي هي من أجل $M=1,2,\ldots$ مجاميع جزئية من سلسلة فورييه للتابع $f(x)$، وبما أن

$$\int_{-L}^{L}\left(f(x)-S_M(x)\right)^2dx\ge 0\quad\cdots(2)$$

فمنه نجد:

$$2\int_{-L}^{L} f(x).S_M(x)dx - \int_{-L}^{L} S_M^2(x)dx \le \int_{-L}^{L} \big(f(x)\big)^2\,dx \quad \cdots (3)$$

نضرب طرفي العلاقة (1) بـ $2f(x)$ وبإجراء المكاملة من $-L$ إلى L وبالاستفادة من (2) نحصل على:

$$2\int_{-L}^{L} f(x)S_M(x)dx = 2L\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{M}(a_n^2 + b_n^2)\right] \cdots (4)$$

أو بالشكل:

$$\int_{-L}^{L} S_M^2\,dx = L\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{M}(a_n^2 + b_n^2)\right]$$

بتعويض (2) و (4) في (3) وبالتقسيم على L نجد المطلوب.

ملاحظة:

إذا أخذنا النهاية عندما M تسعى إلى اللانهاية فإننا نحصل على **علاقة بيسل** التالية:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx$$

تمرينات غير محلولة

(1) أوجد تكامل فورييه للتابع المعرف بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & if \quad x \notin [-\pi, \pi] \\ \sin x & if \quad x \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

(2) أوجد تكامل فورييه للتابع المعرف بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & if \quad |x| < 1 \\ 0 & if \quad |x| > 1 \end{cases}$$

ثم استنتج منه قيمة التكامل $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \sin \alpha x}{\alpha} d\alpha$.

(3) أوجد تحويل فورييه للتابع $f(x)$ المعرف بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & if \quad x \geq 0 \\ 0 & if \quad x < 0 \end{cases}$$

وحيث $a > 0$.

(4) أوجد تحويل فورييه العكسي للتابع:

$$F(\alpha) = \frac{1}{(a + i\alpha)(b + i\alpha)} \quad ; \quad a, b > 0$$

استفد من التمرين السابق (3).

(5) أوجد $F(x)$ في الحالتين التاليتين:

a. $T_s[F(x)] = \frac{16(-1)^{n-1}}{n^3} \quad ; \quad n = 1,2,\cdots \; ; \; 0 < x < 8$

b. $$T_c[F(x)] = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n} & if \quad n = 1,2,\cdots \\ \frac{\pi}{4} & if \quad n = 0 \; ; \; 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

(6) حسب صيغة فورييه التكاملية أثبت صحة العلاقة:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2 + 1} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-x} \; ; \quad x \geq 0$$

(7) أوجد تحويل فورييه للتابع

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & if \quad |x| < 1 \\ 0 & if \quad |x| > 1 \end{cases}$$

ثم احسب التكامل:

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\right) \cos\frac{x}{2}\, dx$$

(8) أوجد تحويل جيب فورييه للتابع $x \geq 0 \quad ; \quad e^{-x}$، ثم استنتج قيمة التكامل:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{x^2+1}\, dx$$

(9) مستخدماً متطابقة بارسيفال احسب كلاً من التكاملات التالية:

$$(a) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} \quad , \quad (b) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$$

ارشاد للحل: استخدم تحويل الجيب والتجيب فورييه للتابع $x > 0 \; ; \; e^{-x}$.

المراجع العلمية

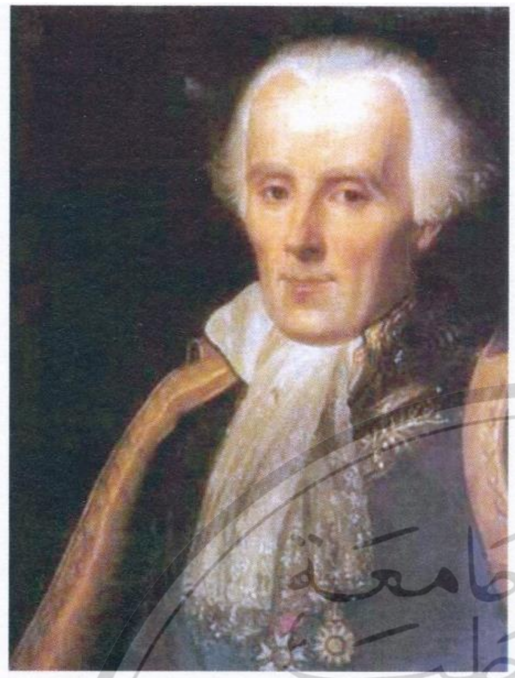
أ- المراجع العربية:

1. د. الأسدي شحادة، د. جبور فؤاد: الرياضيات(5) – كلية الهندسة المدنية جامعة حلب 1985–1986.
2. د. حمدان اسماعيل: الرياضيات(4) – كلية العلوم – جامعة البعث 1993–1994.
3. د. عرابي هيثم، د. حنبلاس نديم: رياضيات (4) – كلية العلوم – جامعة حلب.
4. د. عويرة صفوان، د زريق نعيم: الرياضيات(4) – كلية الهندسة المدنية جامعة البعث 2003–2004.
5. د. عويرة صفوان، د. حمود منجد: الرياضيات(2) – كلية الهندسة البترولية والكيميائية – جامعة البعث 1999–2000.
6. د. عويرة صفوان: التفاضل والتكامل الجزء الثاني والأول باستخدام برنامج الـ $Mapl$ – كلية العلوم– جامعة الدمام 2011–2012.
7. د. نقار حسن، د. عرابي عرابي: تحليل (3) –كلية العلوم – جامعة حلب 1996–1997.

ب- المراجع الأجنبية:

1. Calcuus, Swokowski, Olinick, Pence USA 1994.
2. Alan, Jeffrey. Mathematik fur Naturwissenschaftler Unof Inyenieare. Berlin, 1999 , B and I , B and II.
3. Kurt Schroder, Mathematik fur du Praxis, Berlin 1964.
4. Marray R.Spiegel, laplaa transferms, Newyork, 1965.
5. Calcuus, N.Piskunov, Moscow, 1969.
6. Thurman S.Petersan, College Algebra, Third edition London, 1978.
7. James Stwart, Calculus, USA, 1987.
8. Earlw.Swokowski, Calculus, Second Edition London, 2002.

بيير لابلاس:



بيير سيمون لابلاس (23 مارس 1749 – 5 مارس 1827)، رياضي وفلكي فرنسي، لأعماله حول تطور الرياضيات الفلكية فضل يستحق الثناء. لخّص ووسع أعمال سابقيه في هذا المجال في مؤلفه المكون من خمسة مجلدات (ميكانيكا الأجرام السماوزية Mecanique celeste (بالإنكليزية Celestial mechanics ، (1799-1825)، هذا العمل الجوهري حوّل دراسة الهندسة من الطريقة التقليدية إلى طريقة تعتمد على التفاضل والتكامل، فاتحاً المجال أمام المزيد من التحدي.

جون باتيست جوزيف فورييه

(21 مارس 1768 في أوسير – 16 مايو 1830 في باريس)، رياضياتي وفيزيائي فرنسي، كان ابناً لحائك، وتربى وترعرع في المدرسة العسكرية في أوسير حيث تم اكتشافه كطفل نابغة. في سن لايجاوز 18 سنة بدء العمل كأستاذ في نفس المدرسة التي تربى فيها، وبعدها انتقل إلى المدرسة البوليتكنيكية المشهورة في باريس، في نهاية القرن الثامن عشر ذهب مع نابليون بونابرت إلى مصر حيث كان سكرتيراً في المعهد المصري. بعد عودته من مصر عمل منذ سنة 1802 كوالي لمنطقة الإيزر، وفي سنتن 1808 أصبح بارون. في سنة 1815 صار والياً لمنطقة الرون وعين سكرتيراً مدى الحياة في الأكاديمية الفرنسية للعلوم.

المصطلحات العلمية

A

Absolute	مطلق
Absolute Convergence	تقارب مطلق
Absolute Value	قيمة مطلقة
Alternating Series	سلسلة متناوبة
Approximate Value	قيمة تقريبية
Application	تقريب
Asymptotic expansion	نشر مقارب
Axioms	مبادئ أساسية

B

Bessel Function	تابع بيسل
Binomial Series	سلسلة ذي الحدين
Bound	حد
Bounded interval	مجال محدود

C

Cartesion	ديكارتي
Caushy Critertion	اختبار كوشي
Center	مركز
Closed interval	مجال مغلق
Coefficients	عوامل _ أمثال
Complementary	متمم
Complex	عقدي _ مركب
Complex Variable	متحول عقدي
Complex Fourier Series	سلسلة فورييه العقدية
Complex Series	سلسلة عقدية

Computing methods	طرق حسابية
Condition	شرط
Conditional Convergent Of Series	التقارب الشرطي لسلسلة
Continuous	مستمر
Convergence	تقارب
Convolution	الطي _ الالتفاف
Convolution theorem	نظرية الطي
Convergent Series	سلسلة متقاربة
Cosine Series	سلسلة تجيب
Curve	منحني

D

Data	معطيات
Decreasing Series	سلسلة متناقصة
Definite	محدد ، منتهي
Definition	تعريف
Definite integral	تكامل محدد
Derivative	مشتق
Determinant	محدد
Differences	فروق
Dirichleh`s theorem	نظرية ديرخليه
Domain	منطقة
Double integral	تكامل ثنائي

E

Element	عنصر
Equation	معادلة
Error Function	تابع الخطأ

Euler`s Formulas	علاقات أولر
Euler _ Fourier Cofficients	ثوابت أولر _ فورييه
Even	زوجي
Even Function	تابع زوجي
Example	مثال
Expansion	نشر
Exponent	أسي

F

Factorial	عاملي
Finite Series	سلسلة محدودة
First degree	درجة اولى
Fourier integral	تكامل فورييه
Formula	صيغة
Fourier Transform invers	تحويل فورييه المعاكس
Fourier Series	سلسلة فورييه
Fraction	كسر
Function	تابع
Function Series	سلسلة تابعية
Fundamental	أساسي

G

Geometric Series	سلسلة هندسية
General	عام
Greatest Value	قيمة أعظمية

H

Harmonic	توافقي
Heat equation	معادلة الحرارة

Homogeneous	متجانس
Hypergeometric	فوق هندسي

I

Image	صورة
Imaginary	تخيلي
Imaginary Part	جزء تخيلي
Increasing Function	تابع متزايد
Indefinite	غير محدود
Independent	مستقل
Infinite Series	سلسلة غير محدودة
Interval	مجال
Inverse	مقلوب عكسي

J

Jacobian matrix	مصفوفة عكسية
Jacobian determinat	محدد يعقوبي

L

Limite	نهاية
Linear	خطي
Linear Operator	مؤثر خطي
Logarithm	لوغاريتم

M

Maclaurin Series	سلسلة ماكلوران
Matrix	مصفوفة
Method	طريقة
Monotone Function	تابع مضطرد

Multiplication	ضرب

N

Natural	طبيعي
Negative	سالب
Neighborhood	جوار
Numeric	عددي
Numerical Series	سلسلة عددية

O

Odd	فردي
Odd Function	تابع فردي
Open	مفتوح
Open interval	مجال مفتوح
Order	مرتبة
Ordinary	عادي
Orthogonal Functions	توابع متعامدة

P

Parameter	وسيط
Parseval`s theorem	نظرية بارسيفال
Partial	جزئي
Partial derivative	مشتق جزئي
Partial Sum	مجموع جزئي
Periodic Function	تابع دوري
Point	نقطة
Polynomial	كثيرة حدود
Power Series	سلسلة صحيحة (قوى)

R

Radius	نصف قطر

Radius of Convergence	نصف قطر التقارب
Ratio Test	اختبار النسبة
Real	حقيقي
Regular	نظامي
Remainder of Series	باقي سلسلة
Result	نتيجة

S

Scalar	سلمي
Sequence	متتالية
Series	سلسلة
Set of Points	مجموعة نقط
Shift	سحب
Simple	بسيط
Sine integral	الجيب التكاملي
Solution	حل
Sulsequence	متتالية جزئية
Symetric	متناظر

T

Taylor Series	سلسلة تايلور
Term	حد
Test	اختبار
Transfor	تحويل

U

Uniform Convergence	تقارب منتظم
Unique	وحيد

V

Value	قيمة
Variable	متحول
Variable independent	متحول مستقل
Vector	شعاع

W

Wave equation	معادلة موجية
Weiestrass theorem	نظرية فايرشتراس
Weight	وزن

Z

Zero	صفر

تم تدقيق الكتاب علمياً من قبل:

أ.د. شحادة الأسدي **أ.د. بشير نور خراط** **م. محمد كردي**

تم تدقيق الكتاب لغوياً من قبل:

الدكتورة
حنان عكو