التبولوجيا (٢)

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السنة الثالثة

فصل دراسي ثاني

التبولوجيا (٢)

منشورات جامعة حلب

كلية العلوم

التبولوجيا (٢)

الدكتور

محمد خير أحمد

أستاذ في قسم الرياضيات

الدكتور

بسام ضغيم

مدرس في قسم الرياضيات

لطلاب السنة الثالثة

قسم الرياضيات

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

١٤٣٠هـ - ٢٠٠٩م

الفهرس

الموضـــــــــــــوع	رقم الصفحة
مقدمة في أساسيات نظرية المجموعات	١٣
§.1- المجموعة وطرق كتابتها	١٣
§.2- رموز ومصطلحات	١٤
§.3- قوانين جبر المجموعات الناتجة عن العمليات $\cup,\cap,\setminus$	١٧
§.4- الضرب الديكارتي للمجموعات	٢٠
§.5- العلاقات	٢٢
§.6- التوابع	٣١
§.7- تكافؤ المجموعات، المجموعات المنتهية، المجموعات القابلة للعد	٣٥
الفصل الأول	
مفهوم الفضاء التبولوجي	
§.1- تعاريف وخواص أولية	٣٩
§.2- مقارنة التبولوجيات على مجموعة X	٤٨
§.3- بعض مكونات الفضاء التبولوجي	٥٠
§.4- النقط الداخلية والمجموعات المفتوحة وخواصها	٥٦
§.5- النقط اللاصقة والمجموعات المغلقة وخواصها	٦٠
§.6- التبولوجيا المولدة بتابع	٧٥
§.7- الأساس وتحت الأساس	٧٩
تمارين على مواضيع الفصل الأول	٩٢

الموضـــــــــــــــوع	رقم الصفحة

الفصل الثاني

التوابع واستمرارها وفضاءات الضرب التبولوجية

الفصل الثالث

مسلمات الفصل وقابلية العد

الفصل الرابع

نظرية التقارب

الموضـــــــــــــوع	رقم الصفحة

الفصل الخامس

التراص

الفصل السادس

الترابط

مقدمة

قبل أن ندرس هذه المادة ، نجيب عن السؤالين الآتيين:

ما هو علم التبولوجيا؟

ماذا سندرس من هذا العلم في هذا الكتاب؟

إن الإجابة المختصرة عن السؤال الأول هي :

إن علم التبولوجيا هو العلم الذي يدرس بنية رياضية تتألف من مجموعة خاضعة لفرضيات معينة، نطلق عليها فضاءً تبولوجيا ، وهو علم يدرس الهندسة التحليلية والتحليل الرياضي والتابعي، بطريقة ترتكز كلياً على مواضيع نظرية المجموعات.

والتبولوجيا العامة هي حصيلة التطور الكبير لعلم التحليل والجبر الذي ظهر إثر التطور الكبير لنظرية المجموعات على يد كانتور وريمان في النصف الثاني من القرن التاسع عشر.

وكان أول من استخدم كلمة تبولوجيا الرياضي ليستنغ Listing ، في كتابه Vorstudien Zur Topologie ، الذي ألفه عام 1847.

ولكن هذا العلم ظهر بشكل واضح في مطلع القرن العشرين على يد الفرنسي M.Frechet ، الذي قدم مفهوم الفضاء المتري وبنيته عام 1906 ، وعلى يد الألماني F.Hausdorff ، الذي قدم مفهوم الفضاء التبولوجي عام 1914.

ولقد كان للرياضيين الروس، وعلى رأسهم A.Tychonoff ، أثر هام في تطوير علم التبولوجيا ودراسة مفاهيم التراص.

كما أن الرياضي الفرنسي H.Cartan ، أسهم بشكل فعّال في حل المسائل التبولوجية من خلال تقديمه لمفهوم المرشحات ونظرية التقارب.

ومن الرياضيين البارزين الذين كان لهم أثر في تأسيس هذا العلم وتطويره نذكر: Klein و B.Riman و R.Dedekind و C.Jordan و H.Poinkaré و J.Hadmar و E.Borel و Hilbert وغيرهم كثير.

والإجابة عن السؤال الثاني هي:

سندرس في هذا الكتاب من علم التبولوجيا المواضيع الآتية:

- بنية الفضاء التبولوجي والمفاهيم الأساسية المرتبطة بهذه البنية.
- نظرية التقارب ،حيث نقدم مفاهيم المرشحات وتقاربها والشبكات وتقاربها.
- توابع الفضاءات التبولوجية واستمرارها ، ونعرض بشكل خاص مفاهيم الهوميومورفيزمات وأثرها في دراسة الخواص التبولوجية.
- التراص في الفضاءات التبولوجية ، حيث ندرس الفضاءات المتراصة، والمتراصة موضعياً ، والمتراصة عداً.
- الترابط في الفضاءات التبولوجية ، حيث ندرس الفضاءات التبولوجية المترابطة ، والمجموعات المترابطة ، والمركبات المترابطة.

وحرصنا على عرض مواضيع هذا الكتاب بصياغة تنسجم مع صياغة مثيلاتها الواردة في التبولوجيا (1) ، وذلك لكي نساعد الطالب في فهم هذه المواضيع.

وحاولنا أن نعالج المواضيع بصورة مبسطة وواضحة، حيث أتبعنا كل تعريف وكل مبرهنة بجملة من الملاحظات والأمثلة التي توضح ذلك التعريف وتشرح تلك المبرهنة.

وختمنا كل فصل من فصول الكتاب بعدد وافر من التمارين غير المحلولة التي تساعد الطالب ، الذي يقوم بحلها ، على فهم موضوع ذلك الفصل بشكل جيد.

وإننا ننصح الطالب ، الذي سيدرس هذه المادة ، بمراجعة موضوعات مادتي: نظرية المجموعات، والتبولوجيا (1) ، لما لهاتين المادتين من ارتباط وثيق بموضوعات هذا الكتاب.

في الختام : نأمل أن نكون قد وفقنا في عرض محتويات هذا الكتاب بشكل واضح ومفيد ومرض لأبنائنا الطلاب.

ونرجو من قراء هذا الكتاب تزويدنا بأية ملاحظة يرونها ضرورية لجعل هذا الكتاب أفضل وأكثر فائدة.

والله الموفق

المؤلفان

مقدمة في أساسيات نظرية المجموعات

تمهيد:

يفترض في كل من يريد أن يدرس مادة التبولوجيا (2) ، أن يكون قد درس مادة المنطق ونظرية المجموعات ، وألِف كل أساسيات نظرية المجموعات: مفهوم المجموعة وطرق تعريفها ، والعمليات على المجموعات ، والضرب الديكارتي للمجموعات ، والعلاقات الثنائية ، ومفهوم التابع ، وغير ذلك...

ولكننا سنذْكر هنا – بإيجاز – هذه المواضيع ، تسهيلاً على القارئ وتوضيحاً للرموز والمصطلحات التي سنستخدمها في هذا الكتاب.

لقد وُضعت هذه المقدمة لتذكير الطالب بأساسيات نظرية المجموعات ، وهي **للمطالعة فقط.**

§.1- **المجموعة وطرق كتابتها:**

1.1- **تعريف:**

- المجموعة هي جملة من كائنات تشترك فيما بينها بصفة (أو عدة صفات) . نسمي هذه الكائنات عناصر (أو نقط) المجموعة.

ونعْرِف المجموعة ، فيما لو استطعنا أن نحكم على كائن ما x بأنه ينتمي إليها أو لاينتمي.

ويُرمز عادة للمجموعات بأحرف كبيرة من الشكل A,Y,X ,... ، بينما يُرمز لعناصر المجموعة بأحرف صغيرة من الشكل b,a,y,x,...

- إذا كانت X مجموعة ما ، وأردنا التعرف عليها ، فإننا نكتبها بإحدى الطريقتين:

1- **طريقة القائمة:** وهي أن نكتب قائمة بين قوسين من الشكل { } ، تتألف من كل عناصر المجموعة X (أو بعضاً من هذه العناصر ثم نضع نقط ..... ، إن كان هناك استقراء في معرفة بقية العناصر).

أمثلة:

- إذا كانت X مجموعة أحرف كلمة topology ، فإننا نكتب $X = \{ t,o,p,l,g,y\}$ ولايكتب الحرف المتكرر أكثر من مرة واحدة في المجموعة.
- إذا كانت $\mathbb{N}$ مجموعة كل الأعداد الطبيعية ، فإننا نكتب:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

2- **طريقة ذكر الخواص التي تميز عناصر المجموعة:** فإذا كانت p خاصة تميز عناصر المجموعة X ، فإننا نكتب X على الشكل:

X = { x : p يحقق الخاصة x }

مثال:

إذا كانت X مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ، التي هي أقل من 10، فإننا نكتب:

X = { x : 10 > x عدد صحيح موجب و x }

§.2- **رموز ومصطلحات:**

نستخدم عادة في دراسة المجموعات الرموز والمصطلحات التالية:

- رمز الانتماء : $\in$ (أو $\ni$): حيث نعبر عن القول: العنصر x ينتمي إلى المجموعة X بالكتابة $x \in X$ أو $X \ni x$ (وينفى الانتماء بالرمز $\notin$).
- رمز الاحتواء: $\subseteq$ (أو $\supseteq$): حيث نعبر عن القول: إن المجموعة A محتواة في المجموعة X (أو أن المجموعة A هي مجموعة جزئية من المجموعة X) بالكتابة

$A \subseteq X$ أو $X \supseteq A$. وهذا يعني أن كل عنصر من A هو عنصر من X (وينفى الاحتواء بالرمز $\not\subseteq$).

- نقول عن مجموعتين B, A إنهما متساويتان ، ونكتب $A = B$ ،إذا وفقط ، إذا كان $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

- رمز الاحتواء التام: $\subset$ (أو $\supset$): حيث نعبر عن القول: إن المجموعة A محتواة تماماً في المجموعة X (أي أن A محتواة في X ولاتساويها) بالكتابة: $A \subset X$ أو $X \supset A$ (وينفى الاحتواء التام بالرمز $\not\subset$).

- رمز المجموعة الخالية: $\varnothing$: يعبر عن المجموعة الخالية من العناصر.

- الرمز $|X|$: يعبر عن كاردينال المجموعة X ، أي عن "عدد" عناصر المجموعة X ، أي أن $|X| = \text{card } X$.

- الرمز $\mathcal{P}(X)$: يعبر عن مجموعة المجموعات الجزئية من X ، أي:

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$$

ويبرهن في نظرية المجموعات على أن:

$$|X| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(X)| = 2^n$$

- رمز التقاطع $\bigcap$: نستخدم الرمز $A \bigcap B$ للتعبير عن المجموعة الناتجة عن تقاطع المجموعة A مع المجموعة B ، أي أن:

$$A \bigcap B = \{x : x \in A \quad \& \quad x \in B\}$$

- إذا كان $A \bigcap B = \varnothing$ ، فإننا نقول عن المجموعتين B,A إنهما غير متقاطعتين.

- رمز الاجتماع $\bigcup$: نستخدم الرمز $A \bigcup B$ للتعبير عن المجموعة الناتجة عن اجتماع المجموعة A مع المجموعة B، أي أن:

$$A \bigcup B = \{x : x \in A \quad \text{أو} \quad x \in B\}$$

- رمز الفرق \: نستخدم الرمز A\B للتعبير عن المجموعة الناتجة عن فرق A عن B، أي أن:

$$A \setminus B = \{ x \; : \; x \in A \quad \& \quad x \notin B \}$$

- إذا كانت $A \subseteq B$ ، فإننا نسمي A\B بمتممة B في A.

المجموعات العددية الشهيرة:

المجموعة العددية: هي مجموعة جميع عناصرها أعداد. ويوجد بعض المجموعات العددية الشهيرة التي اتفق الرياضيون على إعطائها رموزاً محددة نذكر منها:

- مجموعة الأعداد الطبيعية، رمزها $\mathbb{N}$، وهي:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

- مجموعة الأعداد الصحيحة، رمزها $\mathbb{Z}$، وهي:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- مجموعة الأعداد النسبية (أو العادية)، رمزها $\mathbb{Q}$، وهي:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \quad ; \quad p, q \in \mathbb{Z} \; , \; q \neq 0 \right\}$$

- مجموعة الأعداد الحقيقية، رمزها $\mathbb{R}$، وتتألف من جميع الأعداد الحقيقية (العادية وغير العادية).

المجموعات المرقمة: إذا كانت I مجموعة ما ، وإذا ربطنا كل عنصر i من عناصر I بمجموعة محددة A_i، فإننا نحصل على أسرة المجموعات:

$$\{A_i \; : i \in I\} = \{A_i\}_{i \in I}$$

التي نسميها أسرة المجموعات المرقمة بالمجموعة I.

ونسمي I مجموعة الأرقام أو الأدلة. وعناصر I ليس من الضروري أن تكون أعداداً.

أمثلة:

1- إذا كانت $I=\{2,a,5\}$، فإن:

$$\{A_i\}_{i\in I}=\{A_2,A_a,A_5\}$$

2- إذا كانت $I=\left\{-1,\frac{1}{2},4,x\right\}$، فإن:

$$\{A_i\}_{i\in I}=\{A_{-1}\ ,\ A_{1/2}\ ,\ A_4\ ,\ A_x\}$$

– إذا كانت $\{A_i\}_{i\in I}$ أسرة مجموعات مرقمة ، فإن الرمز $\bigcup_{i\in I}A_i$ يمثل المجموعة الناتجة عن اجتماع جميع أفراد الأسرة $\{A_i\}_{i\in I}$.

والرمز $\bigcap_{i\in I}A_i$ يمثل المجموعة الناتجة عن تقاطع جميع أفراد الأسرة $\{A_i\}_{i\in I}$.

– نقول عن أسرة $\{A_i\}_{i\in I}$ إنها غير متقاطعة ، مثنى مثنى ، إذا كان $A_i\bigcap A_j=\varnothing$ لكل $j\neq i$ من I.

– إذا كانت $I=\{1,2,...,n\}$، فإن:

$$\bigcup_{i\in I}A_i=A_1\cup A_2\cup...\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

$$\bigcap_{i\in I}A_i=A_1\cap A_2\cap...\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$$

§.3- قوانين جبر المجموعات الناتجة عن العمليات : $\cup,\cap,\backslash$

إذا كانت C,B,A و $\{A_i\}_{i\in I}$ مجموعات جزئية من مجموعة X، فإن الخواص التالية صحيحة (يمكن الرجوع إلى براهينها في كتب نظرية المجموعات).

1) خواص العنصر$\varnothing$:

$$A\cap\varnothing=\varnothing\quad,\quad A\cup\varnothing=A$$

2) خواص الجمود:

$$A\cap A=A\ ,\ A\cup A=A$$

3) خواص التبديل:

$$A \cap B = B \cap A \quad , \quad A \cup B = B \cup A$$

4) خواص التجميع:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

5) خواص التوزيع:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

وبشكل أعم:

$$B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$$
$$B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$$

6) خواص أخرى للتقاطع والاجتماع:

$$A \cup B = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B$$
$$A \cap B = A \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B$$

- إذا كانت $I = \varnothing$ ، فإن:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in \varnothing} A_i = \varnothing$$

وإن:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in \varnothing} A_i = X$$

(وتبرهن هذه المساواة الأخيرة اعتماداً على قوانين المتممات التالية)

7) خواص المتممات:

$$X\setminus(X\setminus A)=A$$
$$A\subseteq B \Leftrightarrow X\setminus B\subseteq X\setminus A$$

قوانين دومورغان:

$$X\setminus(A\cup B)=(X\setminus A)\cap(X\setminus B)$$
$$X\setminus(A\cap B)=(X\setminus A)\cup(X\setminus B)$$

وتعمم قوانين دومورغان ، كما يلي:

$$X\setminus\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)=\bigcap_{i\in I}(X\setminus A_i)$$
$$X\setminus\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)=\bigcup_{i\in I}(X\setminus A_i)$$

8) خواص الفرق:

$$A\setminus B=A\cap(X\setminus B)$$
$$(A\setminus B)\cup C\supseteq(A\cup C)\setminus(B\cup C)$$
$$(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$$
$$(A\setminus B)\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$$
$$(A\setminus B)\cup B=A\cup B$$
$$(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$$
$$(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$$
$$(A\setminus B)\cup(A\cap B)=A$$
$$(A\setminus B)\cap(A\cap B)=\varnothing$$

وبشكل أعم:

$$\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\setminus B=\bigcup_{i\in I}(A_i\setminus B)$$
$$\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\setminus B=\bigcap_{i\in I}(A_i\setminus B)$$

• إذا كانت : $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_i \supset \ldots$ وكان $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$، فإن:

$$A_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(A_i \setminus A_{i+1} \right)$$

حيث إن: $\{A_i \setminus A_{i+1}\}_{i=1}^{\infty}$ تشكل أسرة غير متقاطعة ، مثنى مثنى.

§.4- الضرب الديكارتي للمجموعات :

4.1- تعريف:

إذا كانت X , Y مجموعتين ما ، فإن الضرب الديكارتي لـ X في Y هو المجموعة:

$$X \times Y = \{(x, y) \; ; \; x \in X \;\&\; y \in Y\}$$

4.2- ملاحظات:

1) إن عناصر المجموعة $X \times Y$ هي أزواج مرتبة، بمعنى أنها خاضعة للشرط:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \;\&\; y_1 = y_2$$

2) بما أن:

$$A \, , B \in \mathcal{P}(X) \quad \not\Rightarrow \; A \times B \in \mathcal{P}(X)$$

فإن الضرب الديكارتي ليس عملية ثنائية على $\mathcal{P}(X)$.

4-3- خواص الضرب الديكارتي:

1) $X \times Y = Y \times X \Leftrightarrow X = Y$

2) $(X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z)$

ولكن يوجد بين هاتين المجموعتين تقابل ، ولذلك يكتب، عادة، بدلاً من هاتين المجموعتين، المجموعة:

$$X \times Y \times Z = \{(x, y, z) \; ; \; x \in X, y \in Y, z \in Z\}$$

وهكذا فإن:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \; ; \; a_i \in A_i\}$$

(3 $$X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$$

(4 $$X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)$$

(5 $$X \times (Y \setminus Z) = (X \times Y) \setminus (X \times Z)$$

(6 $$X \times Y = \varnothing \Leftrightarrow X = \varnothing \quad \text{أو} \quad Y = \varnothing$$

7) إذا كانت X و Y مجموعتين منتهيتين، فإن:

$$|X \times Y| = |X| \, . \, |Y|$$

(8 $$\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(\prod_{i=1}^{n} B_i\right) = \prod_{i=1}^{n} (A_i \cup B_i)$$

(9 $$\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) \cap \left(\prod_{i=1}^{n} B_i\right) = \prod_{i=1}^{n} (A_i \cap B_i)$$

4.4 - الضرب الديكارتي غير المنتهي للمجموعات:

لتكن $\{X_i\}_{i \in I}$ أسرة ما من المجموعات. إن الضرب الديكارتي لمجموعات هذه الأسرة يعرف بالشكل:

$$\prod_{i \in I} X_i = \{(x_1, x_2, ..., x_i, ...) \; ; \; x_i \in X_i \; , \; \forall i \in I\}$$

حيث اعتبرنا عناصر مجموعة الأدلة I مرتبة بالشكل:

$$I = (1, 2, ..., i, ...)$$

- إذا كان $x = (x_1, x_2, ..., x_i, ...)$ عنصراً من الضرب الديكارتي $\prod_{i \in I} X_i$، فإننا نسمي x_i بالمركبة i للعنصر x. ونسمي X_i بالمركبة i للجداء $\prod_{i \in I} X_i$.

- يمكن أن نكتب ، اختصاراً ، $(x_i)_{i \in I}$ بدلاً من $(x_1, x_2, ..., x_i, ...)$

§.5- **العلاقات :**

5.1- **تعريف:**

إذا كانت X و Y مجموعتين غير خاليتين ما ، فإن كل مجموعة جزئية غير خالية ρ من الضرب الديكارتي $X \times Y$ ، تسمى علاقة من X إلى Y.

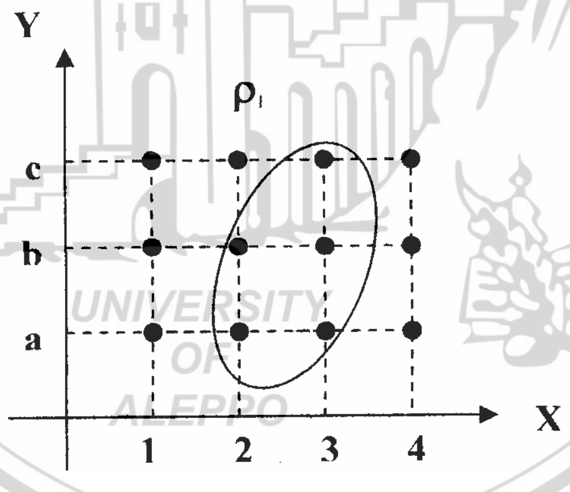
وإذا كان $(x,y) \in \rho$ فإننا نقول: إن العنصر x من X يرتبط بالعنصر y من Y بالعلاقة ρ ، ونعبرعن ذلك بالكتابة $x\rho y$.

5.2- **ملاحظات وأمثلة:**

1- إذا كانت $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{a,b,c\}$ ، فإن الضرب الديكارتي $X \times Y$ هو:

$$X \times Y = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),...,(4,c)\}$$

ويمكن تمثيل المجموعة $X \times Y$ على المستوي كما في الشكل:



إن المجموعة ρ_1 الممثلة بالشكل هي:

$$\rho_1 = \{(2,a),(2,b),(3,a),(3,b),(3,c)\}$$

هي مجموعة جزئية من $X \times Y$ ، فهي علاقة من X إلى Y ، ونلاحظ أن:

$$3\,\rho_1\,c\ ,\ 3\,\rho_1 b\ ,\ 3\,\rho_1\,a\ ,\ 2\rho_1\,b\ ,\ 2\rho_1\,a$$

كما أن:

$$\rho_2 = \{ (1,b) , (1,c) , (2,c) \}$$

هي علاقة ثانية من X إلى Y.

وهكذا يمكن أن نجد العديد من العلاقات من X إلى Y.

2- إذا كانت ρ علاقة من مجموعة X إلى مجموعة Y ، فإننا نسمي المجموعة:

$$\{ x \in X : \exists\, y \in Y ; (x,y) \in \rho \}$$

بمنطقة العلاقة ρ ، ونرمز لها بـ D_ρ، ونسمي المجموعة:

$$\{ y \in Y ; \exists\, x \in X ; (x,y) \in \rho \}$$

بمدى العلاقة ρ ، ونرمز لها بـ R_ρ .

ففي المثال السابق ، لدينا:

$$D_{\rho_1} = \{2,3\} , \quad R_{\rho_1} = \{a,b,c\}$$
$$D_{\rho_2} = \{1,2\} , \quad R_{\rho_2} = \{b,c\}$$

3- إذا كانت ρ علاقة من مجموعة X إلى مجموعة Y ، فإن العلاقة العكسية لـ ρ ، ونرمز لها عادة بـ ρ^{-1} ، هي علاقة من Y إلى X ، وتعرف كما يلي:

$$(x,y) \in \rho \Leftrightarrow (y,x) \in \rho^{-1}$$

فمثلاً ؛ إذا كانت $\rho = \{(1,2),(1,3),(2,4)\}$ علاقة من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}$، فإن العلاقة العكسية لها $\rho^{-1} = \{(2,1),(3,1),(4,2)\}$

4- يوجد بعض العلاقات الهامة التي تلزمنا في دراسة التبولوجيا وهي: علاقة التكافؤ وعلاقة الترتيب و التوابع ، وسنعرض فيما يلي هذه العلاقات باختصار، لأن دراستها تتم بشكل مفصل في مادة نظرية المجموعات.

5.3- علاقة التكافؤ

تعريف:

نقول عن علاقة ρ، من مجموعة X إلى X ، إنها علاقة تكافؤ على X ، إذا كانت تحقق الخواص الثلاثة التالية:

1) $(x,x)\in\rho$ لكل x من X . ونسمي هذه الخاصة بخاصة الانعكاس.

2) إذا كان $(x,y)\in\rho$ فإن $(y,x)\in\rho$. ونسمي هذه الخاصة بخاصة التناظر.

3) إذا كان $(x,y)\in\rho$، وكان $(y,z)\in\rho$، فإن $(x,z)\in\rho$. ونسمي هذه الخاصة بخاصة التعدي.

5.4- ملاحظات وأمثلة:

1- يعبر عن الخواص الثلاثة ، الواردة في التعريف السابق ، رياضياً، كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \ x\rho x \quad \forall x\in X\\
&2)\ \ x\rho y \ \Rightarrow\ y\rho x\\
&3)\ \ x\rho y\ \&\ y\rho z\ \Rightarrow\ x\rho z
\end{aligned}
$$

2- ليكن n عدداً صحيحاً محدداً وأكبر من 1 ، ولنعرف على المجموعة $\mathbb{Z}$ العلاقة $\equiv$ كما يلي:

$$x\equiv y \bmod n \Leftrightarrow\ \ x-y \text{ يقسم } n$$

$$\Leftrightarrow \exists q\in\mathbb{Z}\ ;\ x-y=qn$$

عندئذ نجد أن $\equiv$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$، لأن:

- $x\equiv x \bmod n$ لأنه يوجد 0 من $\mathbb{Z}$ ويحقق $x-x=o.n$ ، وهذه العلاقة انعكاسية.

- إذا كان $x\equiv y \bmod n$ ، فإنه يوجد q من $\mathbb{Z}$ بحيث يكون $x-y=qn$ ومنه $y-x=(-q)n$ حيث $(-q)$ من $\mathbb{Z}$، ولذلك فإن $y\equiv x \bmod n$. وهذه العلاقة تحقق خاصة التناظر.

- إذا كان $x\equiv y \bmod n$ ، وكان $y\equiv z \bmod n$ ، فإنه يوجد q و q' من $\mathbb{Z}$ بحيث إن:

$$y-z=q'n \quad , \quad x-y=qn$$

وبجمع هاتين المعادلتين نجد أن: $x-z=(q+q')n$ حيث $q+q'$ من $\mathbb{Z}$، ولذلك فإن $x\equiv z \bmod n$ ، وهذه العلاقة تحقق خاصة التعدي.

إذن : العلاقة $\equiv$ هي علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$، تسمى عادة علاقة التكافؤ قياس n .

3- إذا كانت ρ علاقة تكافؤ على مجموعة X ، فإنه لكل عنصر x من X نعرّف صف تكافؤ x بأنه المجموعة:

$$\overline{x}=\{y\in X:\ y\rho x\}$$

ففي المثال السابق نلاحظ أنه إذا أخذنا $n=4$ ، فإن:

$$\begin{aligned}
\overline{0}&=\{y\in \mathbb{Z}\ ;\ y\equiv 0 \bmod 4\}\\
&=\{y\in \mathbb{Z}\ ;\ y-0=q\times 4\ ;\ q\in \mathbb{Z}\}\\
&=\{y\in \mathbb{Z}\ ;\ y=4q\ ;\ q\in \mathbb{Z}\}\\
&=\{\dots,-12,-8,-4,0,4,8,12,\dots\}\\
\overline{1}&=\{y\in \mathbb{Z}\}\ ;\ y\equiv 1 \bmod 4\}\\
&=\{y\in \mathbb{Z}\ ;\ y-1=q\times 4\ ;\ q\in \mathbb{Z}\}\\
&=\{y\in \mathbb{Z}\ ;\ y=4q+1\ ;\ q\in \mathbb{Z}\}\\
&=\{\dots,-11,-7,-3,1,5,9,13,\dots\}
\end{aligned}$$

وهكذا نجد أن:

$$\begin{aligned}
\overline{2}&=\{\dots,-10,-6,-2,2,6,10,14,\dots\}\\
\overline{3}&=\{\dots,-9,-5,-1,3,7,11,15,\dots\}
\end{aligned}$$

أما صفوف تكافؤ بقية عناصر $\mathbb{Z}$، فإنها تكرر هذه الصفوف حيث نجد أن: $\overline{0}=\overline{4}$ و $\overline{1}=\overline{5}$ و $\overline{2}=\overline{6}$ و $\overline{3}=\overline{7}$ و $\overline{3}=-\overline{1}$ و $\overline{2}=-\overline{2}$ و ...

4- يبرهن في نظرية المجموعات على أن مجموعة صفوف التكافؤ ، التي تعينها علاقة تكافؤ ρ على مجموعة X ، تشكل تجزئة لـ X ، بمعنى أن اجتماع جميع صفوف

التكافؤ يساوي المجموعة X ، وأن تقاطع أي صفي تكافؤ غير متساويين هو المجموعة الخالية.

وبالعكس فكل تجزئة لـ X تعرّف علاقة تكافؤ على X، وعناصر هذه التجزئة هي صفوف التكافؤ.

5.5- علاقة الترتيب

تعريف:

نقول عن علاقة ρ ، من مجموعة X إلى X ، إنها علاقة ترتيب جزئي على X ، إذا كانت تحقق الخواص الثلاثة التالية:

1) $x\rho x$ لكل x من X (الخاصة الانعكاسية).

2) $x\rho y \ \& \ y\rho x \Rightarrow x = y$ (الخاصة التخالفية).

3) $x\rho y \ \& \ y\rho z \Rightarrow x\rho z$ (خاصة التعدي).

5.6- ملاحظات وأمثلة:

1) نقول عن علاقة ترتيب ρ على مجموعة X إنها علاقة ترتيب كلي على X ، إذا كانت علاقة ترتيب جزئي على X ، وكان لكل عنصرين x و y من X، لدينا : إما $x\rho y$ أو $y\rho x$.

2) إن العلاقة $\leq$ المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ :

$x \leq y \Leftrightarrow y - x$ عدد غير سالب.

هي علاقة ترتيب كلي ، كما نعلم.

وقد تآلف الرياضيون على أن يرمزوا لأي علاقة ترتيب على مجموعة X بالرمز $\leq$ أو بالرمز $\geq$ الذي يعرف بـ $y \geq x \Leftrightarrow x \leq y$.

3) يرتبط بكل علاقة ترتيب $\leq$ على X ، علاقة يرمز لها بـ $<$ ، وتعرّف بـ:

$$x \neq y \quad \text{و} \quad x \leq y \Leftrightarrow x < y$$

ويجب أن نتنبّه إلى أن العلاقة > ليست انعكاسية ، وليست متناظرة ، أي إذا كان $x < y$ فإن $y \not< x$ ، ولكن العلاقة > متعدية. في حال $x < y$ نقول إن x أصغر تماماً من y.

5.7- بعض المفاهيم التي ترتبط بعلاقة الترتيب:

1) العنصر الأصغر والعنصر الأكبر للمجموعات المرتبة:

إذا كانت $(X,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً ، فإن العنصر الأصغر في X، إن وجد ، هو عنصر s من X يحقق $s \leq x$ لكل x من X.

وإن العنصر الأكبر في X ، إن وجد ، هو عنصر ℓ من X يحقق $x \leq \ell$ لكل x من X.

- إن العنصر الأصغر والعنصر الأكبر في X ، في حال وجودهما ، يكونان وحيدين. ولكن قد لايوجدا.

فمثلاً ؛ $(\mathbb{R},\leq)$ لاتملك عنصراً أصغراً ولاعنصراً أكبراً.

- نقول عن مجموعة X إنها مرتبة جيداً ، إذا كان يوجد على X علاقة ترتيب كلي ، وكان لكل مجموعة جزئية من X يوجد عنصر أصغر.

فمثلاً ؛ $\mathbb{N}$ مرتبة جيداً بعلاقة الترتيب العادية. ولكن $\mathbb{R}$ غير مرتبة جيداً بهذه العلاقة.

2) العناصر الأصغرية والعناصر الأعظمية للمجموعات المرتبة:

إذا كانت $(X,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً ، فإننا نقول عن عنصر m من X إنه عنصر أصغري في X ، إذا حقق الشرط التالي:

$$x \in X \quad \& \quad x \leq m \quad \Rightarrow \quad x = m$$

ونقول عن عنصر M من X إنه عنصر أعظمي في X ، إذا حقق الشرط التالي:

$$x \in X \ \& \ M \leq x \Rightarrow x = M$$

ويلاحظ أن:

- إذا كانت X تملك عنصراً أصغراً ، فإن هذا العنصر سيكون عنصراً أصغرياً ، وهو وحيد في هذه الحالة.

وإذا كانت X تملك عنصراً أكبراً ، فإن هذا العنصر سيكون عنصراً أعظمياً ، وهو وحيد في هذه الحالة.

ولكن إذا كانت X تملك عنصراً أصغرياً وحيداً ، فليس من الضروري أن يكون هذا العنصر عنصراً أصغراً في المجموعة X. وكذلك الحال بالنسبة إلى العنصر الأكبر.

- قد لايوجد في المجموعة المرتبة جزئياً عناصر أصغرية ، ولا عناصر أعظمية مثل $(\mathbb{Z}, \leq)$.

- قد يوجد في المجموعة المرتبة جزئياً أكثر من عنصر أصغري ، وأكثر من عنصر أعظمي.

مثال: لتكن $A = \{1,2,3,4\}$ ، ولتكن $X = \mathcal{P}(A) \setminus \{ \varnothing , A \}$ مرتبة بعلاقة الاحتواء، عندئذ نجد أن كلٍ من $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$ عناصر أصغرية في X ، كما أن $\{1,2,3\}$ ، $\{1,3,4\}$ ، $\{2,3,4\}$، $\{1,2,4\}$ عناصر أعظمية في X.

3) المجموعات الجزئية المحدودة في $(\mathbb{R}, \leq)$، وخواص الحد الأعلى الأصغري والحد الأدنى الأعظمي.

إن هذا المفهوم يدرس ، عادة ، في جميع المجموعات المرتبة جزئياً ، ولكننا سنكتفي بدراسته في مجموعة الأعداد الحقيقية، لأن التبولوجيا تحتاج لهذا فقط.

لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}$.

- نقول عن A إنها محدودة مـن الأعلـى ، إذا وجـد عـدد k مـن $\mathbb{R}$ بحيـث يكـون $x \le k$ لكل x من A. ونقول عن k ، في هذه الحالة ، إنه حد أعلى للمجموعة A.

ويلاحظ أنه ، إذا كان لـ A حداً أعلى k ، فإنه يكون لها عدد غيرمنتهٍ من الحـدود العليا، وهي كل الأعداد التي تكون أكبر من k.

- إذا كانت A محدودة من الأعلى ، فإننا نسمي أصغر حدودها العليا بالحد الأعلـى الأصـغري ، ونرمـز لـه بـــ $\operatorname{Sup} A$ (أو $l.u.b(A)$) . ويـبرهن علـى أن كـل مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ محدودة من الأعلى ، تملك حداً أعلى أصغرياً.

وإذا كانت A غير محدودة من الأعلى ، فإننا سنضع $\operatorname{Sup} A = +\infty$. وينتج من تعريـف $\operatorname{Sup} A$ ما يلي :

a) $M = \operatorname{Sup} A \Leftrightarrow$ تحقق الشرطان:

1) $x \le M$ لكل x من A.

2) إذا كان $x \le k$ لكل x من A ، فإن $M \le k$. وهذا يكافئ الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x \in A \ ; \ M - \varepsilon < x \le M \ ^{(*)}$$

b) إذا كانت $A \subseteq B$ ، فإن $\operatorname{Sup} A \le \operatorname{Sup} B$

c) $\operatorname{Sup}(A \cup B) = \operatorname{Sup}\{\operatorname{Sup} A, \operatorname{Sup} B\}$

- لدينا تعريف مماثل للمجموعة المحدودة من الأدنى ، ومنه نحصل على تعريف الحد الأدنى لـ A.

ومنه نحصل علـى تعريـف الحـد الأدنـى الأعظمـي ، الـذي نرمـز لـه بـــ $\operatorname{Inf} A$ (أو $g.l.b(A)$) .

(*) **لاحظ الحقيقة التالية:** $a \le b \Leftrightarrow a \le b + \varepsilon \ \ \forall \varepsilon > 0$

ويبرهن على أن كل مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$، محدودة من الأدنى، تملك حداً أدنى أعظمي.

وإذا كانت A غير محدودة من الأدنى، فإننا سنضع $\operatorname{Inf}A=-\infty$. وينتج عن تعريف $\operatorname{Inf}A$ ما يلي:

a) $m=\operatorname{Inf}A \Leftrightarrow$ تحقق الشرطان:

1) $m\le x$ لكل x من A

2) إذا كان $k\le x$ لكل x من A، فإن $k\le m$. وهذا يكافئ الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon>0 \;\; \exists \;\; x\in A \; ; \; m\le x<m+\varepsilon$$

b) إذا كانت $A\subseteq B$، فإن $\operatorname{Inf}B\le \operatorname{Inf}A$

c) $\operatorname{Inf}(A\bigcup B)=\operatorname{Inf}\{\operatorname{Inf}A,\operatorname{Inf}B\}$

5.8- لمحة تذكيرية عن المجالات في $\mathbb{R}$ (وفي كل مجموعة مرتبة كلياً $((X,\le))$):

إذا كان a و b عددين حقيقيين بحيث إن $a\le b$، فإنه لدينا:

1) مجال مفتوح ومحدود، طرفاه b,a، يعرّف بـ

$$]a,b[=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$$

a b

2) مجال مفتوح ومحدود، من الأدنى فقط، بـ a، يعرّف بـ

$$]a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}: a<x\}$$

3) مجال مفتوح ومحدود، من الأعلى فقط، بـ b، يعرّف بـ:

$$]-\infty,b[=\{x\in\mathbb{R}: x<b\}$$

4) مجال مفتوح وغير محدود، من الطرفين، يعرّف بـ: $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

5) مجال محدود، طرفاه b,a، مفتوح من الأعلى ومغلق من الأسفل:

$$[a,b[=\{x\in\mathbb{R}: a\le x<b\}$$

6) مجال مفتوح، طرفاه b,a، مغلق من الأعلى ومفتوح من الأسفل:

$$]a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \ : a < x \leq b \}$$

7) مجال محدود ، طرفاه b,a ، مغلق:

$$[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \ : a \leq x \leq b \}$$

8) مجال مغلق ومحدود من الأعلى فقط:

$$]-\infty, b] = \{ x \in \mathbb{R} : \ x \leq b \}$$

9) مجال مغلق ومحدود من الأدنى فقط:

$$[a, \infty[= \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \}$$

10) مجال مغلق وغير محدود من الطرفين:

$$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

- ويمكن أن نلاحظ ما يلي:

- إذا كانت $a = b$ ، فإن $]a, a[= \varnothing$ ، ولذلك يمكن عَدُّ المجموعة الخالية مجالاً مفتوحاً. كما أن $[a,a] = \{a\}$ ، ولذلك يمكن عَدُّ المجموعة المؤلفة من نقطة واحدة مجالاً مغلقاً.

- يبرهن ، بسهولة ، على أن تقاطع أي مجالين مفتوحين هو مجال مفتوح، وأن تقاطع أي مجالين مغلقين هو إما $\varnothing$ ، أو أنه مجال مغلق ، وأن الفرق بين مجالين هو اجتماع لمجالات غير متقاطعة.

6.§- التوابع :

إن موضوع التوابع هو من المواضيع الهامة في الرياضيات، بل قد يكون هو الموضوع الأهم ، لأننا نصادفه في كل فروع الرياضيات ، وفي كل المستويات.

في فقرتنا هذه سنذكّر بالمفاهيم الأولية للتوابع من مجموعة إلى أخرى ، والتي يعرفها الطلاب من نظرية المجموعات.

وسنعود إلى دراسة التوابع ، في الفضاءات التبولوجية ، بشكل معمق في فصول قادمة.

6.1- تعريف:

نقول عن علاقة f من مجموعة X إلى مجموعة Y إنها تابع من X إلى Y، ونعبر عن ذلك بالكتابة:

$$f : X \to Y$$

إذا تحقق الشرطان التاليان:

1- $D_f = X$ أي أن منطقة تعريف f هو X بكاملها.

2- لكل عنصر x من X يوجد عنصر وحيد y من Y يرتبط بـ x ، ونرمز لـ y هذا ، عادة ، بالرمز f(x) ، ونسميه صورة x.

6.2- ملاحظات:

1) ينتج عن التعريف السابق ، أن التابع من X إلى Y هو علاقة ثنائية f من X إلى Y تحقق شرطين:

1- f(x) موجودة لكل x من X.

2- $x_1 = x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)$.

2) إذا كان $g : X \to Y$, $f : X \to Y$ تابعين ، فإن $f = g$ ، إذا وفقط ، إذا كان $f\left(x\right) = g\left(x\right)$ لكل x من X.

6.3- تعريف:

إذا كان $f : X \to Y$ تابعاً ، فإن:

a) إذا كان $f(x) = c$ لكل من x من X وحيث c نقطة ثابتة في Y ، فإننا نسمي f تابعاً ثابتاً.

b) إذا كانت $X \subseteq Y$ ، وكان $f(x) = x$ لكل x من X ، فإننا نسمي f تابع الاحتواء.

c) إذا كان $X = Y$ ، وكان $f(x) = x$ لكل x من X ، فإننا نسمي f التابع المطابق. ونرمز له بـ I_X .

d) إذا كان $f(X) = Y$ ، فإننا نقول : إن f تابع غامر، أي أن f يكون غامراً إذا تحقق الشرط التالي:

لكل y من Y يوجد x من X بحيث يكون $f(x) = y$.

e) نقول عن f إنه تابع متباين ، إذا حقق الشرط التالي:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

أو:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

f) إذا كان f غامراً ومتبايناً ، فإننا نسميه تابع تقابل.

6.4- التابع العكسي:

إذا كان $f : X \to Y$ تابعاً ، فإنه علاقة من X إلى Y. ولذلك فإن لـ f علاقة عكسية f^{-1} ، عرفناها سابقاً كما يلي:

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$$

والعلاقة العكسية f^{-1} تكون تابعاً من المجموعة $f(X)$ إلى المجموعة X تحت شرط كون f تابع متباين. وإذا كان f تابع تقابل، فإن f^{-1} تكون تابعاً من Y إلى X، وهو تابع تقابل أيضاً ، ونعرّفه كما يلي:

$$f^{-1} : Y \to X$$

حيث : $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

5.6- تعريف:

إذا كان $f: X \to Y$ تابعاً ، وكانت $\varnothing \neq A \subseteq X$ ، فإن مقصور f على A هو تابع $f_{|A} : A \to Y$، نعرّفه بـ $f_{|A}(x) = f(x)$ لكل x من A.

6.6- تعريف:

إذا كان $f: X \to Y$ تابعاً ما ، وكان $g: Y \to Z$ تابعاً آخر، فإن التابع gof الذي نقرؤه: g يلي f أو تركيب g إلى f ، يعرفّ كما يلي:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

حيث $gof(x) = g(f(x))$ لكل x من D_{gof}

ويلاحظ أن:

$$D_{gof} = \{x \in X \; ; \; f(x) \in D_g\}$$

6.7- ملاحظات:

يبرهن في نظرية المجموعات على أنه:

a- إذا كان $f: X \to Y$ و $g: Y \to X$ بحيث إن $gof = I_X$، فإن f متباين و g غامر.

b- إذا كان $f: X \to Y$ و $g: Y \to X$ بحيث إن $gof = I_X$ و $fog = I_Y$، فإن f تابع تقابل و $f^{-1} = g$

c) إذا كانت $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ و $h: Z \to W$ توابع ، فإن:

$$ho(gof) = (hog)of$$

6.8- تعريف:

إذا كانت X و Y مجموعتين ما ، وكان $f: X \to Y$ تابعاً ، وكانت $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ ، فإن الصورة المباشرة لـ A هي:

$$f(A) = \{f(x) \;\; ; \;\; x \in A\}$$

والصورة العكسية لـ B هي:

$$f^{-1}(B)=\{x\in X\ ;\ f(x)\in B\}$$

6.9- بعض خواص الصورة المباشرة و الصورة العكسية:

1) $A_1\subseteq A_2\Rightarrow f(A_1)\subseteq f(A_2)$

2) $B_1\subseteq B_2\Rightarrow f^{-1}(B_1)\subseteq f^{-1}(B_2)$

3) $f(\bigcap_{i\in I} A_i)\subseteq\bigcap_{i\in I} f(A_i)$

4) $f(\bigcup_{i\in I} A_i)=\bigcup_{i\in I} f(A_i)$

5) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i)=\bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

6) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i)=\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

7) $f^{-1}(Y\setminus B)=X\setminus f^{-1}(B)$

8) إذا كانت Z مجموعة ثالثة ، وكان

$$g:Y\to Z$$

تابعاً آخر، وكانت $C\subseteq Z$، فإن:

$$(gof)^{-1}(C)=f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right)$$

9) $A\subseteq f^{-1}\left(f(A)\right)$ ، وإذا كان f متبايناً ، فإننا نحصل على مساواة.

10) $f\left(f^{-1}(B)\right)\subseteq B$، وإذا كان f غامراً ، فإننا نحصل على مساواة .

§.7- تكافؤ المجموعات، المجموعات المنتهية، المجموعات القابلة للعد :

1) نقول عن مجموعتين B,A إنهما متكافئتان بالقدرة ، ونكتب $A\sim B$ ، إذا وجد بينهما تابع تقابل.

2) نقول عن مجموعة A إنها منتهية ، إذا كانت $A=\varnothing$، أو إذا كان يوجد $n\in\mathbb{N}$ بحيث يكون:

$$A \sim \{1, 2, 3, ..., n\}$$

وفي الحالة المخالفة نقول عن A إنها مجموعة غير منتهية.

- إذا كانت A و B مجموعتين منتهيتين ، فإن:

$A \sim B \Leftrightarrow$ عدد عناصر A = عدد عناصر B

$$\Leftrightarrow \text{cardinal}A = \text{Cardinal } B$$

$$\Leftrightarrow |A| = |B|$$

ويعمم هذا المفهوم على المجموعات غير المنتهية حيث لدينا:

$$A \sim B \Leftrightarrow |B| = |A|$$

- لدينا نظرية برنشتاين التي تقول:

إذا كانت $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A_o$، وكانت $A_2 \sim A_o$، فإن $A_1 \sim A_o$. وينتج عن ذلك أن:

$|A| \leq |B|$ و $|B| \leq |A| \Rightarrow A \sim B$

حيث $|X|$ يرمز، كما قلنا، إلى كاردينال X ، وهو عدد حقيقي أو قياسي **"عدد عناصر X"**.

3) نقول عن مجموعة A إنها غير منتهية عدياً أو إنها ذات كاردينال يساوي α_o، إذا كانت $A \sim \mathbb{N}$.

4) نقول عن مجموعة A إنها قابلة للعد ، إذا كانت A إما منتهية أو غير منتهية عدياً.

5) نقول إن للمجموعة A قدرة المستمر (أو الكاردينال المستمر) ، إذا كانت $A \sim \mathbb{R}$ ، وفي هذه الحالة نكتب $|A| = c$.

ويبرهن في نظرية المجموعات على صحة النتائج التالية:

6) إذا كانت A قابلة للعد ، فإن $A \times A$ قابلة للعد.

7) إن أي اجتماع قابل للعد ، لمجموعات كل منها قابل للعد ، يعطي مجموعة قابلة للعد.

8) $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ كلها مجموعات غير منتهية عدياً.

9) إذا كانت A غير منتهية عدياً ، وكانت $B \subseteq A$ فإن B قابلة للعد.

10) كل مجموعة غير منتهية تحوي على مجموعة جزئية غير منتهية عدياً.

11) إذا كانت A مجموعة غير منتهية ، وكانت B مجموعة قابلة للعد ، فإن $A \cup B \sim A$.

12) نظرية كانتور: إذا كانت A مجموعة ما ، وكانت $\mathcal{P}(A)$ أسرة المجموعات الجزئية من A فإن:

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|$$

13) التابع $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$ المعرف بـ $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ هو تابع تقابل، ولذلك فإن $]-1,1[\sim \mathbb{R}$.

وينتج عن هذا أن المجموعة غير المنتهية قد تكافئ مجموعة جزئية منها ولاتساويها. بينما لايتحقق هذا الأمر في المجموعات المنتهية.

(*) وبالحقيقة يبرهن على أن كل مجال من $\mathbb{R}$، طرفاه غير متساويين ، يكافئ $\mathbb{R}$ ، وله قدرة المستمر.

الفصل الأول

مفهوم الفضاء التبولوجي

تمهيد:

إذا كانت X مجموعة ما ، فإن الرياضيات تهتم بدراسة نوعين من البنى، التي تنشأ على X:

- بنية جبرية ؛ وهي ناجمة عن عمليات ثنائية على X ، حيث ندرس في هذه البنية لـ X الخواص الجبرية لهذه العمليات على X مثل: الخواص التبديلية، والتجميعية، ووجود عنصر محايد... وما يترتب على ذلك من بنى جبرية لـ X مثل زمرة، وحلقة، وحقل، ...
- بنية تبولوجية ؛ وهي ناجمة عن أسرة مجموعات جزئية من X تحقق جملة من الشروط ، حيث نسمي مثل هذه الأسرة من المجموعات الجزئية بتبولوجيا على X. ندرس في هذه البنية لـ X مفاهيم تختلف عن المفاهيم التي تدرس في البنية الجبرية لـ X. حيث ندرس في هذه البنية مفاهيم: حدود مجموعة، وداخل مجموعة، وخارج مجموعة، ... وما يترتب على ذلك من مفاهيم مثل مفهوم المسافة، ومفهوم المتتاليات وتقاربها ، والتوابع واستمرارها، ...

§1.- **تعاريف وخواص أولية:**

1.1- تعريف:

لتكن $X \neq \varnothing$ مجموعة ما ، ولتكن τ أسرة مجموعات جزئية من X (أي $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$) . نقول إن τ تشكل تبولوجيا على X ، إذا حققت الشروط التالية:

1) $\varnothing, X \in \tau$.

2) إذا كان T_2, T_1 عنصرين من τ، فإن $T_1 \bigcap T_2$ ينتمي إلى τ.

3) إذا كانت $\{T_i\}_{i\in I}$ مجموعة جزئية من τ، فإن $\bigcup_{i\in I} T_i$ ينتمي إلى τ.

وفي هذه الحالة نقول عن الزوج (X,τ)، إنه فضاء تبولوجي ، ونقـول عـن كـل عنصر من عناصر τ، إنه مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ).

1.2- ملاحظات وأمثلة:

1. يعبر عن الشرط (2) من التعريف السابق – أحيانـاً – بـالقول: إن أي تقـاطع منتـه لعناصر من τ ، هو عنصر من τ، ويعبر عـن الـشرط (3) بـالقول: إن أي اجتمـاع لعناصر من τهو عنصر من τ.

2. ينتج عن التعريف السابق أنه ، إذا كانت $T \subseteq X$ ، فإن:

T مفتوحة في الفضاء $(X,\tau) \Leftrightarrow T\in \tau$.

3. إذا كان (X,τ)فضاءً تبولوجياً ، وكانت F مجموعـة جزئيـة مـن X ، فإننـا نـسمي F مجموعة مغلقة ، إذا كانت $X\backslash F$ مجموعة مفتوحة ،وسنرمز بـ $\mathscr{F}$ لأسرة المجموعات المغلقة في الفضاء (X,τ).

إذن:

$$\tau=\{ T\subseteq X;\ \ T \text{ مفتوحة في } (X,\tau) \}$$

$$\mathscr{F}=\{F\subseteq X;\ \ F \text{ مغلقة في } (X,\tau) \}$$

4. إذا كانت $X \neq \varnothing$ مجموعة ما ، فإن الأسرة $\tau=\{\varnothing,X\}$ تشكل تبولوجيا علـى X . نسميها ،عادة ، التبولوجيا المبتذلة أو التبولوجيا غير المتقطعة، أو التبولوجيا الضعيفة، ويرمز لها بـ τ_{ind} ، كما إن الأسرة $\tau = \mathscr{P}(X)$ تشكل تبولوجيا ثانية على X، نسميها ،عادة ، التبولوجيا المتقطعة أو التبولوجيا القوية، ويرمز لها بـ τ_{dis} . وينتج عن هـذه

الملاحظة ، أن لكل مجموعة X، فيها أكثر من عنصر واحد ، يوجد على الأقل تبولوجيان. وقد يوجد أكثر، من ذلك بكثير ، كما يوضح المثال التالي:

5. لتكن $X = \{a,b,c\}$. يمكن أن نرى أن كلاً من الأسر التالية تشكل تبولوجيا على X:

$$\tau_1 = \{\varnothing, X\}$$
$$\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a,b\}\}$$
$$\tau_3 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$
$$\tau_4 = \mathscr{P}(X)$$

وغير ذلك.

لكن الأسرة $\{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a,c\}\}$ لاتشكل تبولوجيا على X.

6. ينتج عن التعريف السابق أنه : في كل تبولوجيا τ على X ، تكون كل من $\varnothing$ و X مفتوحة ومغلقة بآن واحد في الفضاء (X,τ)، لأن $X = X \setminus \varnothing$ و $\varnothing = X \setminus X$.

كما يمكن أن توجد فضاءات تبولوجية لـ X ، تحوي مجموعات مفتوحة ومغلقة بآن واحد ، وهي تختلف عن X و $\varnothing$، وقد تحوي مجموعات مفتوحة وغير مغلقة، وقد تحوي مجموعات مغلقة وليست مفتوحة، وقد تحوي مجموعات ليست مفتوحة وليست مغلقة . كما توضح الأمثلة التالية:

- لتكن $X = \{1,2,3,4\}$ ، ولتكن τ التبولوجيا التالية على X :

$$\tau = \{\varnothing, X, \{1\}, \{1,2\}\}$$

نلاحظ أن المجموعة {1} مفتوحة وليست مغلقة ، لأن $X \setminus \{1\} = \{2,3,4\}$ ليست مفتوحة وإن المجموعة {2,3,4} مغلقة وليست مفتوحة ، وأن المجموعة {2} ليست مفتوحة وليست مغلقة.

- لتكن $X \neq \varnothing$ مجموعة ما، ولتكن $\tau = \mathcal{P}(X)$ التبولوجيا القوية على X. إن كل مجموعة جزئية من X هي مفتوحة ومغلقة بآن واحد في الفضاء (X, τ).

3-1- بعض الأمثلة الهامة عن الفضاءات التبولوجية:

سنذكر فيما يلي بعض الأمثلة الشهيرة من الفضاءات التبولوجية التي سترد معنا كثيراً في معطياتنا القادمة.

1. التبولوجيا العادية على $\mathbb{R}$: إن المجموعة المعتبرة في هذا المثال هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، وأما التبولوجيا τ فإننا نعرفها كما يلي:

$T \in \tau \Leftrightarrow T$ تساوي اجتماع لمجالات مفتوحة في $\mathbb{R}$.

سوف نبرهن فيما يلي على أن τ هذه تشكل تبولوجيا على $\mathbb{R}$:

- واضح أن $\tau \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ثم إن:

1) $\varnothing =]a, a[\in \tau$ و $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[\in \tau$

2) إذا كان T ، T' عنصرين من τ ، فإن:

$T = \bigcup_{i \in I} A_i$ حيث A_i مجال مفتوح لكل i من I ، و $T' = \bigcup_{j \in J} B_j$ حيث B_j مجال مفتوح لكل j من J . ونلاحظ أن:

$$\begin{aligned} T \cap T' &= \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) \\ &= \bigcup_{j \in J}\left[\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B_j\right] \\ &= \bigcup_{j \in J}\left[\bigcup_{i \in I} \left(A_i \cap B_j\right)\right] \\ &= \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} \left(A_i \cap B_j\right) \end{aligned}$$

إن $A_i \cap B_j$ مجال مفتوح لكل i و j ، لأنه تقاطع مجالين مفتوحين.

إذن $T \bigcap T'$ هو اجتماع لمجالات مفتوحة، ولذلك فإنه من τ.

3) إذا كانت $\{T_i\}_{i\in I}$ أسرة عناصر من τ، فإنه لكل i من I يكون $T_i = \bigcup_{j\in J} A_{ij}$ حيث A_{ij} مجال مفتوح لكل j من J.

ومنه

$$\bigcup_{i\in I} T_i = \bigcup_{i\in I} \left(\bigcup_{j\in J} A_{ij}\right) = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J} A_{ij}$$

أي أن $\bigcup_{i\in I} T_i$ هو اجتماع لمجالات مفتوحة، ولذلك فإنه من τ.

إذن: τ حققت شروط التعريف 1.1 ، فهي تبولوجيا على $\mathbb{R}$، و $(\mathbb{R}, \tau)$ فضاء تبولوجي. نسميه ،عادة ،الفضاء التبولوجي العادي لـ $\mathbb{R}$، ونرمز له بـ $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

- لقد أطلق على هذا الفضاء اسم الفضاء التبولوجي العادي لأنه ، على المجموعة $\mathbb{R}$ يمكن أن ننشئ عدداً كبيراً من التبولوجيات ، ولكن الفضاء الذي اعتاد الرياضيون على استخدام خواصه في دراسة التحليل الرياضي والهندسة الإقليدية وغيرها من الرياضيات ، هو هذا الفضاء.
- يمكن إنشاء فضاءات تبولوجية مماثلة للفضاء السابق على أي مجموعة مرتبة كلياً $(X, \leq)$، حيث تعرف المجالات المفتوحة والمغلقة على X بطريقة مماثلة تماماً لما ذكرناه في المجموعة $\mathbb{R}$ ، وعندئذ تعرف τ كما ورد في التبولوجيا العادية لـ $\mathbb{R}$، ونحصل على الفضاء (X, τ).

يطلق على هذا النوع من التبولوجيات، أحياناً ، التبولوجيا الترتيبية . فمثلاً يمكن أخذ $X = \mathbb{N}$ أو $X = \mathbb{Z}$ أو ...

2. تبولوجيا الطرف الأيسر :

إن المجموعة المعتبرة في هذا المثال هي $\mathbb{R}$ أيضاً (أو أي مجموعة مرتبة كلياً) ، وأما التبولوجيا τ فإننا نعرفها كما يلي:

إذا كان $a\in\mathbb{R}$، فإننا سنضع $T_a=]-\infty,a[$، ونضع :

$$\tau=\{T_a\ ;\ a\in\mathbb{R}\}\cup\{\mathbb{R}\}\cup\{\varnothing\}$$

إن τ تشكل تبولوجيا على $\mathbb{R}$ ، لأن:

- واضح أن $\tau\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ، ثم إن:

1) $\varnothing,\mathbb{R}\in\tau$ من تعريف τ.

2) إذا كان T_b,T_a عنصرين من τ، فإن:

$$T_a\cap T_b=]-\infty,a[\cap]-\infty,b[=]-\infty,\min\{a,b\}[\in\tau$$

ثم إن:

$$T_a\cap\varnothing=\varnothing\in\tau \quad \text{و} \quad T_a\cap\mathbb{R}=T_a\in\tau \quad \text{و} \quad \mathbb{R}\cap\varnothing=\varnothing\in\tau$$

أي أن تقاطع أي عنصرين من τ هو عنصر من τ.

3) لنأخذ أسرة ما S من عناصر τ ،ولنبرهن على أن اجتماع أفراد هـذه الأسـرة هو أيضاً من τ ، من أجل ذلك نميز الحالات التالية:

- إذا كانت $\mathbb{R}$ هي أحد أفراد الأسرة S ، فإن اجتماع أفراد S سيكون $\mathbb{R}$، ولذلك فهو من τ.

- إذا كانت S لاتحوي إلاّ $\varnothing$ ، فإن اجتماع أفراد S هو $\varnothing$ ، ولذلك فهو من τ.

- إذا كانت S هي من الشكل $S=\{T_a\ ;\ a\in\wedge\}$، فإن اجتمـاع أفـراد S هـو إمـا $\mathbb{R}$، وبالتالي فهو من τ ، أو أن اجتماع أفراد S هو من الشكل T_b

حيث $b=\text{Sup}\ \{a\}_{a\in\wedge}$ ، ومنه T_b من τ. إذن اجتماع أفراد الأسرة S هو دوماً من τ.

والخلاصة : إن τ تحقق شروط التعريف 1.1 ، فهي تبولوجيا على $\mathbb{R}$، و $(\mathbb{R},\tau)$ فـضاء تبولوجي. نسميه ، عادة ، فضاء الطرف الأيسر على $\mathbb{R}$ ، ونرمز له بـ $(\mathbb{R},\tau_{\ell.r})$.

- يمكن إنشاء مثل هذه التبولوجيا على كل مجموعة مرتبة كلياً مثل $\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$ ....

3. تبولوجيا المتممات المنتهية :

لتكن $X \neq \varnothing$ مجموعة ما ، ولتكن τ أسرة المجموعات الجزئية من X المعرفة كما يلي:

$$T \in \tau \Leftrightarrow T = \varnothing \text{ أو } X \setminus T \text{ مجموعة منتهية.}$$

إن τ تشكل تبولوجيا على X ، لأن:

1) $\varnothing \in \tau$ من التعريف. ثم إن $X \setminus X = \varnothing$ مجموعة منتهية ، ولذلك فإن $X \in \tau$.

2) إذا كان T_1, T_2 عنصرين من τ ، فإنه إما $T_1 \cap T_2 = \varnothing$ وبالتالي $T_1 \cap T_2 \in \tau$ ، أو أن

$$X \setminus (T_1 \cap T_2) = (X \setminus T_1) \cup (X \setminus T_2) = \text{ مجموعة منتهية}$$

لأن $T_1 \in \tau$ يعني أن $X \setminus T_1$ مجموعة منتهية ، و$T_2 \in \tau$ يعني أن $X \setminus T_2$ مجموعة منتهية ، وإن اجتماع مجموعتين منتهيتين هو مجموعة منتهية.

إذن $X \setminus (T_1 \cap T_2)$ هو مجموعة منتهية ، ولذلك فإن $T_1 \cap T_2 \in \tau$.

3) إذا كانت $\{T_i\}_{i \in I}$ أسرة عناصر من τ، فإن:

$$X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} T_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus T_i) \subseteq X \setminus T_i \ ; i \in I$$

وبما أن $X \setminus T_i$ مجموعة منتهية لأن T_i من τ ، فإن $X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} T_i \right)$ مجموعة منتهية ، ولذلك فإن $\bigcup_{i \in I} T_i \in \tau$.

إذن: τ تشكل تبولوجيا على X، نسميها تبولوجيا المتممات المنتهية ، ونضع $\tau = \tau_{cof}$.

- واضح أنه إذا كانت X مجموعة منتهية ، فإن $\tau_{cof} = \mathcal{P}(X)$.

- إذا كانت $X \neq \varnothing$ مجموعة ما غير خالية ، فإننا نستطيع أن نعرف على X تبولوجيا شبيهة بالتبولوجيا الواردة في المثال السابق، نسميها تبولوجيا المتممات القابلة للعد ، وهذه التبولوجيا تعرف بـ :

$$T \in \tau \Leftrightarrow T = \varnothing \text{ أو } X \backslash T \text{ قابلة للعد}$$

ونبرهن على أن τ تشكل تبولوجيا على X ، كما برهنّا المثال السابق تماماً. ونكتب: $\tau = \tau_{con}$.

- إذا عرفنا τ كما يلي:

$$\tau \ni T \Leftrightarrow T = \varnothing \text{ أو } X \backslash T \text{ قابلة للعد وغير منتهية}$$

فإن τ ليس من الضروري أن تكون تبولوجيا على X : وكتوضيح لذلك نأخذ $X = \mathbb{N}$، فنجد أن: $T_1 = \{4, 6, 8, ...\} \in \tau$ لأن $\mathbb{N} \setminus T_1 = \{1, 2, 3, 5, 7, ...\}$ قابلة للعد وغير منتهية. كما أن:

$T_2 = \{5, 7, 9, ...\} \in \tau$ لأن $\mathbb{N} \setminus T_2 = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, ...\}$ قابلة للعد وغير منتهية. ولكن

$$T_1 \cup T_2 = \{4, 5, 6, 7, 8, ...\} \notin \tau \text{ لأن } \mathbb{N} \setminus (T_1 \cup T_2) = \{1, 2, 3\}$$

مجموعة منتهية.

4. التبولوجيا المترية:

إذا كانت $X \neq \varnothing$ مجموعة ما، وكان:

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

تابعاً يحقق الشروط التالية:

$$\left\{\begin{array}{ll} 1) & x=y \Leftrightarrow d(x,y)=0 \\ 2) & d(x,y)=d(y,x) \\ 3) & d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y) \end{array}\right.$$ أياً كانت z,y,x من X

فإننا نسمي d تابع مسافة على X، ونسمي (X,d) فضاءً مترياً.

أمثلة:

$d(x,y)=|x-y|$ تابع مسافة على $\mathbb{R}$. نسميه تابع المسافة العادية.

$d(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{if } x=y \\ 1 & \text{if } x\neq y \end{cases}$ تابع مسافة على $X\neq\varnothing$

إذا كانت $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ نقطتين من $\mathbb{R}^n$ فإن:

$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ تابع مسافة على $\mathbb{R}^n$

وهكذا يوجد فضاءات مترية كثيرة. (راجع التبولوجيا (1)) .

- إذا كان (X,d) فضاءً مترياً وكانت c ∈ X و ρ عدداً حقيقياً موجباً ، فإننا نسمي المجموعة:

$$B(c,\rho)=\{x\in X \; : \; d(c,x)<\rho\}$$

كرة مفتوحة ، مركزها c ونصف قطرها ρ

- نقول عن مجموعة T ، جزئية من X ، إنها مجموعة مفتوحة في الفضاء المتري (X,d) ، إذا كانت كل نقطة من T مركزاً لكرة مفتوحة محتواة في T ، وسنرمز لأسرة المجموعات المفتوحة في (X,d) بالرمز τ_d، وهكذا نجد أن:

$$T\in\tau_d \Leftrightarrow \forall x\in T\ \exists \rho_x>0\ ;\ B(x,\rho_x)\subseteq T$$

- يبرهن ، بدون عناء ، على أن الأسرة τ_d تحقق الشروط التالية:

1) $\varnothing, X\in\tau_d$.

2) تقاطع أي عنصرين من τ_d هو عنصر من τ_d.

3) أي اجتماع لعناصر من τ_d هو عنصر من τ_d.

وبالتالي فإن τ_d تشكل تبولوجيا على X . نسميها التبولوجيا على X المولدة بتابع المسافة d ، ويكون (X, τ_d) فضاءً تبولوجياً مترياً.

- يمكن أن نرى ، بسهولة ،أن التبولوجيا العادية على $\mathbb{R}$، التي رمزنا لها بـ τ_u، هي نفس التبولوجيا على $\mathbb{R}$، الناتجة عن تابع المسافة العادية $d(x, y) = |x - y|$

§.2- مقارنة التبولوجيات على مجموعة X:

لاحظنا أنه على مجموعة واحدة X قد نجد أكثر من تبولوجيا.

مثال: إذا كانت $X = \{a,b,c\}$ ، فإن كلاً من المجموعات التالية تشكل تبولوجيا على X:

$$\tau_1 = \{\varnothing, X\}$$
$$\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$$
$$\tau_3 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$$
$$\tau_4 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\}$$
$$\tau_5 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, c\}\}$$
$$\tau_6 = \mathcal{P}(X)$$

وغير ذلك. ونلاحظ أن بعض هذه التبولوجيات محتوى في بعضها الآخر، وبعضها غير محتوى بالآخر. فمثلاً : $\tau_2 \subseteq \tau_4$، ولكن $\tau_2 \not\subseteq \tau_3$ و $\tau_3 \not\subseteq \tau_2$.

2.1- تعريف:

إذا كان τ_2, τ_1 تبولوجيين على مجموعة X. وإذا كان $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ، فإننا نقول إن τ_1 هو أصغر (أو أضعف) من τ_2 ، أو أن τ_2 أكبر (أو أقوى) من τ_1، ونكتب $\tau_1 \leq \tau_2$.

2.2- ملاحظات وأمثلة :

1) إذا كان τ_2, τ_1 تبولوجيين على مجموعة X ، فإن:

$$\tau_1 \subseteq \tau_2 \Leftrightarrow \tau_1 \leq \tau_2$$

وإذا كان $\tau_1 \not\subseteq \tau_2$ و $\tau_2 \not\subseteq \tau_1$ ، فإننا نقول إن τ_1 و τ_2 غير متقارنين.

2) إن العلاقة $(\leq)$ تشكل علاقة ترتيب جزئي على مجموعة التبولوجيات ، التي يمكن تشكيلها على مجموعة X.

3) واضح أنه على المجموعة $\mathbb{R}$ لدينا:

$\tau_{\ell.r} \leq \tau_u$، ولكن $\tau_{\ell.r}$ و τ_{cof} غير متقارنين.

4) إن التبولوجيا الضعيفة على X هي أصغر تبولوجيا على X ، وإن التبولوجيا القوية هي أكبر تبولوجيا على X.

2.3- مبرهنة:

إذا كانت $\{\tau_i\}_{i\in I}$ أسرة تبولوجيات على مجموعة غير خالية X، وإذا كانت $\tau = \bigcap_{i\in I} \tau_i$ ، فإن τ تشكل تبولوجيا على X ، وهي الحد الأدنى الأعظمي للمجموعة $\{\tau_i\}_{i\in I}$.

البرهان:

1) $\varnothing, X \in \tau_i \ \forall i \in I \Rightarrow \varnothing, X \in \bigcap_{i\in I} \tau_i = \tau$

2) لتكن $\{T_j\}_{j\in J}$ أسرة من عناصر τ، ولتكن $T = \bigcup_{j\in J} T_j$، ولنبرهن على أن $T \in \tau$.

$$\{T_j\}_{j\in J} \subseteq \tau \Rightarrow \{T_j\}_{j\in J} \subseteq \tau_i \ \forall i \in I$$
$$\Rightarrow \bigcup_{j\in J} T_j \in \tau_i \ \forall i \in I \Rightarrow T \in \tau_i \ \ \forall i \in I$$
$$\Rightarrow T \in \bigcap_{i\in I} \tau_i \Rightarrow T \in \tau$$

3) ليكن T_2, T_1 عنصرين من τ، ولنبرهن على أن $T_1 \cap T_2 \in \tau$.

$$\{T_1, T_2\} \subseteq \tau \Rightarrow \{T_1, T_2\} \subseteq \tau_i \ \ \forall i \in I$$
$$\Rightarrow T_1 \cap T_2 \in \tau_i \ \ \forall i \in I$$
$$\Rightarrow T_1 \cap T_2 \in \bigcap_{i\in I} \tau_i \Rightarrow T_1 \cap T_2 \in \tau$$

إذن : τ تشكل تبولوجيا على X.   ونلاحظ أن : $\forall i \in I \quad \tau_i \subseteq \tau_i = \bigcap_{i\in I} \tau_i = \tau$

أي أن $\tau \le \tau_i$ لكل $i \in I$.

ثم إنه إذا كانت τ' تبولوجيا على X ، وكانت $\tau' \le \tau_i$ لكل $i \in I$، فإن $\tau' \subseteq \tau_i$ لكل $i \in I$، وبالتالي $\tau' \subseteq \bigcap_{i\in I} \tau_i = \tau$ ، أي أن $\tau' \le \tau$.

إذن: τ يمثل حداً أدنى أعظمى للمجموعة $\{\tau_i\}_{i\in I}$

2.4- ملاحظة:

إن اجتماع تبولوجيات على مجموعة X ليس من الضروري أن يكون تبولوجيا على X ، كما يوضح المثال التالي:

لتكن $X = \{a,b,c\}$. واضح أن

$$\tau_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\} \ , \ \tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$$

تشكل تبولوجيات على X ، ولكن

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$$

ليست تبولوجيا على X.

§.3- بعض مكونات الفضاء التبولوجي:

سوف ندرس في هذا الفصل بعض الأسر من المجموعات ، التي تشكل بنية الفضاء التبولوجي ، والتي نستفيد منها في دراسة المفاهيم الرياضية التي نراها ،عادة ، في التحليل الرياضي كمفهوم المتتاليات وتقاربها ، ومفهوم التابع واستمراره ، وما إلى ذلك.

3.1- تعريف:

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً ، ولتكن x نقطة من X.

نقول عن مجموعة v ، جزئية من X ، إنها مجاورة للنقطة x ، إذا وجدت مجموعة مفتوحة T بحيث يكون $x \in T \subseteq v$.

3.2- ملاحظات وأمثلة:

1) إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً ، وإذا كانت $x\in X$ ، فإن:

$$v \subseteq X \ \& \ \exists\, T\in\tau \,;\, x\in T\subseteq v \ \Leftrightarrow \ x \text{ مجاورة لـ } v$$

2) إذا كانت $x\in X$ ، فإن X مجاورة لـ x ،لأن:

$$X\subseteq X \ \& \ \exists\, X\in\tau \ ;\ x\in X\subseteq X$$

وبالتالي فإن X مجاورة لكل نقطة من نقاطها. وبالتالي فإنه لكل نقطة x من X يوجد مجاورة ، واحدة على الأقل ،هي X ، ولكن قد يوجد أكثر من مجاورة واحدة للنقطة الواحدة ، كما يوضح المثال التالي:

لتكن $X=\{0,1,2\}$ ، ولتكن $\tau=\{\varnothing,X,\{0\},\{0,1\}\}$.

نجد بسهولة أن τ تشكل تبولوجيا على X ، ونلاحظ:

إن X مجاورة للنقطة 0 ، لأن $0\in X\subseteq X$.

إن $\{0\}$ مجاورة للنقطة 0 ،لأن $0\in\{0\}\subseteq\{0\}$.

إن $\{0,1\}$ مجاورة للنقطة 0 ،لأن $0\in\{0\}\subseteq\{0,1\}$.

إن $\{0,2\}$ مجاورة للنقطة 0 ،لأن $0\in\{0\}\subseteq\{0,2\}$.

وهكذا نرى أن للنقطة 0 العديد من المجاورات، بعض هذه المجاورات عبارة عن مجموعات مفتوحة ، وبعضها الآخر مجموعات غير مفتوحة مثل المجاورة $\{0,2\}$.

3) إذا كانت x نقطة من فضاء تبولوجي X ، فإننا سنرمز لأسرة مجاورات x بالرمز $V(x)$. وعليه يصبح التعريف السابق كما يلي:

$$v\in V(x) \Leftrightarrow v\subseteq X \quad \& \quad \exists\ T\in\tau \,;\, x\in T\subseteq v$$

4) في الفضاء العادي لـ $\mathbb{R}$ ، الذي رمزنا له بـ $(\mathbb{R},\tau_u)$، تكون v مجاورة للنقطة x ، إذاوفقط، إذا وجد مجال مفتوح J بحيث يكون $x\in J\subseteq v$ ، لأن:

v مجاورة لـ x $\Leftrightarrow$ يوجد مجموعة مفتوحة T بحيث يكون $x \in T \subseteq v$.

ولكن في الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_u)$ تكون $T = \bigcup_{i \in I} A_i$ حيث A_i مجال مفتوح لكل i من I.

وبما أن $x \in T$ ، فإنه يوجد $i_o \in I$ بحيث يكون $x \in A_{i_o}$، ومنه

$$x \in A_{i_o} \subseteq T \subseteq v$$

نضع $J = A_{i_o}$، فنجد أن $x \in J \subseteq v$.

إن العكس واضح ، لأن كل مجال مفتوح هو مجموعة مفتوحة في هذا الفضاء.

3.3- مبرهنة:

إذا كان (X, τ) فضاء تبولوجياً ، وكانت $A \subseteq X$، فإن

A مفتوحة $\Leftrightarrow A$ مجاورة لكل نقطة من نقاطها.

البرهان:

$(\Leftarrow)$: لتكن x نقطة من A . عندئذ $x \in A \subseteq A$ و $A \in \tau$ ولذلك فإن A مجاورة لـ x.

$(\Rightarrow)$: لتكن H تساوي اجتماع كل المجموعات المفتوحة المحتواة في A. عندئذ H مفتوحة و $H \subseteq A$ ،ثم إنه ، إذا كانت $x \in A$، فإن A مجاورة لـ x ، ولذلك توجد مجموعة مفتوحة T بحيث يكون $x \in T \subseteq A$. وبحسب تعريف H نجد أن $T \subseteq H$، ومنه $x \in H$. أي أن $A \subseteq H$، وبالتالي $A = H$ ، ولذلك فإن A مفتوحة.

3.4- مبرهنة (خواص المجاورات):

إذا كان (X, τ) فضاءً تبولوجياً ، وكانت $x \in X$، فإن الأسرة $V(x)$ تحقق الخواص التالية:

1) $X \in V(x)$ وبالتالي $V(x) \neq \varnothing$

2) $v \in V(x) \;\&\; v \subseteq A \subseteq X \Rightarrow A \in V(x)$

3) $v \in V(x) \Rightarrow x \in v$

4) $v_1, v_2 \in V(x) \Rightarrow v_1 \cap v_2 \in V(x)$

5) $v \in V(x) \Rightarrow \exists u \in V(x) \quad ; \quad v \in V(y) \quad \forall y \in u$

البرهان:

1) رأينا هذا في (2) من الملاحظات 3.2.

2) $v \in V(x) \Rightarrow \exists T \in \tau \quad ; \quad x \in T \subseteq v$

وبما أن $v \subseteq A$ ، فإن $x \in T \subseteq A$، ومنه $A \in V(x)$

3) $v \in V(x) \Rightarrow \exists T \in \tau \, ; \, x \in T \subseteq v \Rightarrow x \in v$

4) $v_1, v_2 \in V(x) \Rightarrow \exists T_1, T_2 \in \tau \quad ; \quad x \in T_1 \subseteq v_1 \quad , \, x \in T_2 \subseteq v_2$

ومنه

$$x \in T_1 \cap T_2 \subseteq v_1 \cap v_2$$

حيث $T_1 \cap T_2 \in \tau$، ولذلك فإن $v_1 \cap v_2 \in V(x)$

5) $v \in V(x) \Rightarrow \exists T \in \tau \, ; \, x \in T \subseteq v$

نضع $u = T$ فنجد أن u مفتوحة ، ولذلك فإنها مجاورة لكل y حيث y من u (وبشكل خاص $u \in V(x)$).

وبما أن $u \subseteq v$، فإنه ينتج عن (2) من هذه المبرهنة أن v مجاورة لكل y حيث y من u ، أي $v \in V(y)$ لكل y من u.

3.5- ملاحظات وأمثلة:

1) ينتج عن (2) من المبرهنة السابقة أن : أي اجتماع لمجاورات لـ x هو مجاورة لـ x.
لكن التقاطع غير المنتهي لمجاورات x ليس من الضروري أن يكون مجاورة لـ x ، كما يوضح المثال التالي:

مثال: في الفضاء $(\mathbb{R},\tau_u)$ لدينا $v_n =]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[$ مجاورة للنقطة 0 لكل n من $\mathbb{N}$، ولكن $\bigcap_{n=1}^{\infty} v_n = \{0\}$ ليست مجاورة للصفر، لأن المجموعة $\{0\}$ لاتحوي مجالاً مفتوحاً وحاوياً على النقطة 0.

3.6- مبرهنة (عكس المبرهنة السابقة):

لتكن $X \neq \varnothing$ مجموعة ما، ولنفرض أنه، من أجل كل نقطة x من X توجد أسرة غير خالية V_x من المجموعات الجزئية من X تحقق الشروط الأربعة الواردة في المبرهنة السابقة ، أي:

1. $v \in V_x \ \& \ v \subseteq A \subseteq X \Rightarrow A \in V_x$
2. $v_1, v_2 \in V_x \Rightarrow v_1 \cap v_2 \in V_x$
3. $v \in V_x \Rightarrow x \in v$
4. $v \in V_x \Rightarrow \exists u \in V_x \quad ; \quad v \in V_y \ \forall y \in u$

عندئذ توجد تبولوجيا τ، وحيدة، على X يكون فيها $V_x = V(x)$.

البرهان:

لنعرف τ كما يلي:

$$\tau = \{T \ ; \ T \subseteq X \ \& \ T \in V_x \ \ \forall x \in T\}$$

1) إن τ هذه وحيدة، وذلك ناتج من قاعدة تعريفها التي هي:

$$T \in \tau \Leftrightarrow T \subseteq X \ \ \& \ T \in V_x \ \ \forall x \in T$$

2) إن τ تشكل تبولوجيا على X ، لأن:

- إن $\varnothing \in \tau$ ، لأنه إذا كان $x \in \varnothing$ (وهذا غير ممكن) فإن $\varnothing \in V_x$ (على نمط: الرجل طويل إذا كان أطول من كل أولاده. رجل لايملك أولاد هو رجل طويل). ثم إن $X \in \tau$، لأنه إذا كان $x \in X$، فإن $V_x \neq \varnothing$، ولذلك يوجد $v \in V_x$ ولكن $v \subseteq X$، ولذلك $X \in V_x$ ثم $X \subseteq X$، وبالتالي $X \in \tau$.

- إذا كان $T_1, T_2 \in \tau$، وكانت $T = T_1 \bigcap T_2$، فإن $T \in \tau$، لأنه إذا كان $T = \varnothing$، فإن $T \in \tau$ كما بيّنّا أعلاه. وإذا كانت $T \neq \varnothing$، فإنه لكل x من T يكون x من T_1 و x من T_2 ، وبالتالي $T_1 \in V_x$ و $T_2 \in V_x$، وبحسب الشرط (2) يكون $T_1 \bigcap T_2 \in V_x$، وبالتالي $T \in V_x$ لكل x من T، وبالتالي $T \in \tau$.
- إذا كانت $\{T_i\}_{i \in I}$ أسرة عناصر من τ، وكانت $T = \bigcup_{i \in I} T_i$، فإن $T \in \tau$، لأنه إذا كان x عنصراً من T، فإنه يوجد $i_o \in I$ بحيث إن $x \in T_{i_o}$، وبما أن T_{i_o} من τ، فإن $T_{i_o} \in V_x$، وبما أن $T_{i_o} \subseteq T$، فإن T من V_x . إذن $T \in V_x$ لكل x من T ، ولذلك فإن T من τ . إذن τ تبولوجيا على X.
- لنبرهن الآن على أنه، من أجل كل x من X لدينا $V_x = V(x)$:

نلاحظ أولاً أن:

$$\begin{aligned} v \in V(x) &\Rightarrow \exists T \in \tau \;;\; x \in T \subseteq v \\ &\Rightarrow T \in V_x \;\; \& \; T \subseteq v \\ &\Rightarrow v \in V_x \end{aligned}$$

إذن $V(x) \subseteq V_x$

العكس: لتكن $v \in V_x$، ولتكن $T = \{y \in X \;;\; v \in V_y\}$

عندئذ نجد أن $x \in T$، لأن $v \in V_x$، ثم إن $T \subseteq v$، لأن :

$$y \in T \Rightarrow v \in V_y \;\;\Rightarrow\;\; y \in v \quad (\text{بحسب الشرط } (3))$$

ثم إن $T \in \tau$، لأن $T \subseteq X$ ولكل z من T لدينا:

$$z \in T \Rightarrow v \in V_z \Rightarrow \exists u \in V_z \quad ; \quad v \in V_y \;\; \forall y \in u$$

إن $u \subseteq T$ ، لأن : $y \in u \Rightarrow v \in V_y \Rightarrow y \in T$

وبما أن $u \in V_z$، فإن $T \in V_z$ بحسب الشرط (1) .

إذن:

$$T \in V_z \quad \forall \; z \in T$$

وهذا يعني أن $T \in \tau$.

وبما أن $x \in T \subseteq v$، فإن $v \in V(x)$.

إذن $V_x \subseteq V(x)$، وبالتالي $V(x) = V_x$ لكل x من X.

§.4- النقط الداخلية والمجموعات المفتوحة وخواصها:

4.1- تعريف

ليكن (X, τ) فضاءً تبولوجياً، ولتكن $A \subseteq X$.

نقول عن نقطة x من X إنها نقطة داخلية للمجموعة A، إذا تحقق الشرط التالي:

$$\exists \, T \in \tau \quad ; \quad x \in T \subseteq A$$

وسنرمز لمجموعة النقط الداخلية لـ A بالرمز $\overset{\circ}{A}$، ونسمي $\overset{\circ}{A}$ بداخل المجموعة A.

4.2- ملاحظات وأمثلة:

1) ينتج عن التعريف السابق أن:

$$x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A \in V(x)$$

2) $\overset{\circ}{A} \subseteq A$ مهما كانت $X \supseteq A$.

3) لتكن $X = \{a, b, c, d, e\}$، ولتكن

$$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

واضح أن (X, τ) فضاء تبولوجي. لتكن $A = \{a, b, c\}$ ولنوجد $\overset{\circ}{A}$:

إن $a \in \overset{\circ}{A}$ لأنه يوجد $\{a\}$ من τ بحيث $a \in \{a\} \subseteq A$

إن $b \notin \overset{\circ}{A}$ لأنه لايوجد T من τ بحيث $b \in T \subseteq A$.

كذلك الأمر، فإن $c \notin \overset{\circ}{A}$.

إذن $\overset{\circ}{A} = \{a\}$.

4) في الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_u)$. إذا كانت A مجموعة منتهية ، فإن $\overset{\circ}{A} = \varnothing$، لأنه لاتوجد مجموعة مفتوحة T غير خالية في هذا الفضاء بحيث يكون $T \subseteq A$ (المجموعة المفتوحة غير الخالية في هذا الفضاء، سوف تحوي على مجال مفتوح ، ولذلك فإنها مجموعة غير منتهية).

5) إذا كانت $A = \mathbb{Q}$ في الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$، فإن $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \varnothing$، لأنه إذا كانت $\varnothing \neq T \in \tau_{cof}$، فإن $\mathbb{R} \setminus T$ منتهية ، ولذلك فإن T غير قابلة للعد ، ولذلك فإن $\varnothing \neq T \not\subseteq \mathbb{Q}$.

6) إذا كانت $A = [-1,1]$ في الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_{\ell.r})$، فإن $\overset{\circ}{A} = \varnothing$، لأنه إذا كانت $\varnothing \neq T \in \tau_{\ell.r}$ ، فإن T غير محدودة من الأسفل $(T =]-\infty, a[)$، ولذلك فإن $T \not\subseteq A$ أياً كانت T من $\tau_{\ell.r}$.

4.3- مبرهنة:

إن $\overset{\circ}{A}$ تساوي اجتماع كل المجموعات المفتوحة المحتواة في A.

البرهان:

لتكن $\{T_i\}_{i \in I}$ أسرة المجموعات المفتوحة المحتواة في A ، ولتكن $T = \bigcup_{i \in I} T_i$

ولنبرهن على أن $\overset{\circ}{A} = T$:

إذا كانت x نقطة من $\overset{\circ}{A}$، فإنه يوجد مجموعة مفتوحة T' بحيث إن $x \in T' \subseteq A$، ومنه فإن T' هي أحد أفراد الأسرة $\{T_i\}_{i\in I}$، ولذلك فإن $T' \subseteq T$.

وينتج عن ذلك أن $x \in T$، أي أن $\overset{\circ}{A} \subseteq T$.

وبالعكس: فإذا كان $x \in T$، فإنه يوجد T_{i_o} من الأسرة $\{T_i\}_{i\in I}$ بحيث إن $x \in T_{i_o}$. ولكن T_{i_o} مفتوحة ومحتواة في A، وأصبح لدينا $x \in T_{i_o} \subseteq A$. إذن $x \in \overset{\circ}{A}$، أي أن $T \subseteq \overset{\circ}{A}$، وبالتالي $\overset{\circ}{A} = T$.

4.4- ملاحظات:

1) إن T المذكورة في برهان المبرهنة السابقة هي اجتماع لمجموعات مفتوحة، كما رأينا، ولذلك فإنها مجموعة مفتوحة. وبما أن $\overset{\circ}{A} = T$ فإن $\overset{\circ}{A}$ مجموعة مفتوحة أياً كانت A.

2) إذا كانت S مجموعة مفتوحة، وكانت $S \subseteq A$، فإن $S \subseteq \overset{\circ}{A}$، لأن S هي أحد أفراد الأسرة $\{T_i\}_{i\in I}$ الواردة في برهان المبرهنة السابقة.

3) A مفتوحة $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$، لأن:

إذا كانت $A = \overset{\circ}{A}$، فإن A مفتوحة، لأن $\overset{\circ}{A}$ مفتوحة.

إذا كانت A مفتوحة، فإنه ينتج ،عن كون $A \subseteq A$، وعن الملاحظة السابقة، أن $A \subseteq \overset{\circ}{A}$، ولكن لدينا دوماً $\overset{\circ}{A} \subseteq A$. إذن $A = \overset{\circ}{A}$.

4) $\overset{\circ}{X} = X \,,\, \overset{\circ}{\varnothing} = \varnothing$، لأن $X, \varnothing$ مفتوحتان.

5) $A \subseteq B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$، لأن:

$$x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow \exists T \in \tau;\ x \in T \subseteq A \subseteq B \Rightarrow x \in \overset{\circ}{B}$$

6) $(A \cap B)^{\circ} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$، لأن:

$$\left.\begin{array}{l} A\cap B\subseteq A\Rightarrow (A\cap B)^{o}\subseteq \overset{o}{A} \\ A\cap B\subseteq B\Rightarrow (A\cap B)^{o}\subseteq \overset{o}{B} \end{array}\right\}\Rightarrow (A\cap B)^{o}\subseteq \overset{o}{A}\cap \overset{o}{B} \qquad (1)$$

العكس:

$$x\in X\setminus (A\cap B)^{o}\Rightarrow x\notin (A\cap B)^{o}\Rightarrow A\cap B\notin V(x)$$

$$\Rightarrow A\notin V(x) \text{ أو } B\notin V(x)\Rightarrow x\notin \overset{o}{A} \text{ أو } x\notin \overset{o}{B}\Rightarrow x\notin \overset{o}{A}\cap \overset{o}{B}$$

$$\Rightarrow x\in X\setminus (\overset{o}{A}\cap \overset{o}{B})$$

إذن $X\setminus (A\cap B)^{o}\subseteq X\setminus (\overset{o}{A}\cap \overset{o}{B})$ ، وبالتالي

$$\overset{o}{A}\cap \overset{o}{B}\subseteq (A\cap B)^{o} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن $(A\cap B)^{o}=\overset{o}{A}\cap \overset{o}{B}$

7) $\overset{o}{A}\cup \overset{o}{B}\subseteq (A\cup B)^{o}$ والاحتواء المعاكس غير ضروري ، لأن:

$$\left.\begin{array}{l} A\subseteq A\cup B\Rightarrow \overset{o}{A}\subseteq (A\cup B)^{o} \\ B\subseteq A\cup B\Rightarrow \overset{o}{B}\subseteq (A\cup B)^{o} \end{array}\right\}\Rightarrow \overset{o}{A}\cup \overset{o}{B}\subseteq (A\cup B)^{o}$$

مثال عن العكس:

لتكن $X=\{a,b\}$ ، ولتكن $\tau=\{\varnothing,X\}$.

ولتكن $A = \{a\}$ ، $B = \{b\}$. عندئذ نجد أن:

$\overset{o}{A}=\varnothing$, $\overset{o}{B}=\varnothing$ ، وبالتالي $\overset{o}{A}\cup \overset{o}{B}=\varnothing$

ولكن $A\cup B=X$، وبالتالي $(A\cup B)^{o}=\overset{o}{X}=X\neq\varnothing$

ومنه $\overset{o}{A}\cup \overset{o}{B}\subsetneqq (A\cup B)^{o}$

8) مهما كانت المجموعة A ، فإن $\overset{o}{\overset{o}{A}}=\overset{o}{A}$ ، لأن $\overset{o}{A}$ مفتوحة.

4.5- **تعريف:**

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً ، ولتكن A مجموعة جزئية من X. نقول عن نقطة x من X إنها نقطة خارجية لـ A ، إذا كانت $x \in (X\setminus A)^{o}$ ، وسنرمز لمجموعة النقط الخارجية لـ A بـ ext A ، ونسميها خارج A.

– ينتج عن التعريف أن $\text{ext}\, A = (X\setminus A)^{o}$، ولذلك فإن دراسة النقط الخارجية تعتمد على دراسة النقط الداخلية.

§.5- النقط اللاصقة والمجموعات المغلقة وخواصها:

* ذكرنا في 3 من الملاحظات 1.2 أنه ، إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً ، وكانت F مجموعة جزئية من X ، فإننا نسمي F مجموعة مغلقة ، إذا كانت X\F مجموعة مفتوحة ، ورمزنا بـ $\mathcal{F}$ لأسرة المجموعات المغلقة في (X,τ).

5.1- **مبرهنة:**

1) $\varnothing, X \in \mathcal{F}$.

2) أي تقاطع لعناصر من $\mathcal{F}$ هو عنصر من $\mathcal{F}$.

3) أي اجتماع منته لعناصر من $\mathcal{F}$ هو عنصر من $\mathcal{F}$.

البرهان:

1- نعلم أن $X \in \tau$، وبما أن $\varnothing = X\setminus X$ ، فإن $\varnothing \in \mathcal{F}$.

كما أن $\varnothing \in \tau$، وبما أن $X = X\setminus\varnothing$، فإن $X \in \mathcal{F}$.

2- إذا كانت $\{F_i\}_{i\in I}$ أسرة عناصر من $\mathcal{F}$، فإن $\{X\setminus F_i\}_{i\in I}$ هي أسرة عناصر من τ. وبما أن أي اجتماع لعناصر من τ هو عنصر من τ، فإن $\bigcup_{i\in I} X\setminus F_i$ عنصر من τ، ولكن $\bigcup_{i\in I} X\setminus F_i = X\setminus\bigcap_{i\in I} F_i$ ، ولذلك فإن $X\setminus\bigcap_{i\in I} F_i$ عنصر من τ. وينتج عن هـذا أن $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathcal{F}$.

3- إذا كانت F_1 و F_2 عنصرين من $\mathcal{F}$ ، فإن $X \setminus F_1$ و $X \setminus F_2$ عنصران من τ. وبما أن تقاطع عنصرين من τ هو عنصر من τ ، فإن $(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2)$ هو عنصر من τ.

ولكن $(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$، ولذلك فإن $X \setminus (F_1 \cup F_2)$ عنصر من τ ، وينتج عن هذا أن $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$. وبالاستقراء نعمم هذا التقاطع إلى عدد منته من عناصر $\mathcal{F}$.

5.2- ملاحظات وأمثلة:

1) إذا كانت $\{x\}$ مجموعة مؤلفة من نقطة واحدة في الفضاء العادي لـ $\mathbb{R}$، الذي هو $(\mathbb{R}, \tau_u)$، فإننا نلاحظ أن:

$$\mathbb{R} \setminus \{x\} =]-\infty , x[\cup]x, +\infty[$$

ولذلك فإن $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ مجموعة مفتوحة، أي أن $\{x\}$ مجموعة مغلقة في هذا الفضاء.

– إذا كانت $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ مجموعة منتهية في هذا الفضاء، فإن

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$$

أي أن A هي اجتماع منته لمجموعات مغلقة ، فهي مجموعة مغلقة بحسب المبرهنة السابقة.

إذن: في الفضاء العادي لـ $\mathbb{R}$ لدينا : كل مجموعة منتهية هي مجموعة مغلقة، وهي غير مفتوحة لأن $A \neq \overset{o}{A} = \varnothing$.

2) المجموعات المنتهية ، في الفضاءات المترية ، هي مجموعات مغلقة (رأينا ذلك في التبولوجيا (1)) .

3) المجموعات المنتهية في الفضاء (X, τ_{cof}) هي مجموعات مغلقة ، لأنه إذا كانت A مجموعة منتهية في هذا الفضاء ، فإن $X \setminus A$ مجموعة مفتوحة ، وبالتالي A مغلقة.

5.3- تعريف:

ليكن (X, τ) فضاءً تبولوجياً ، ولتكن $A \subseteq X$.

نقول عن نقطة x من X إنها نقطة لاصقة بـ A، إذا تحقق الشرط التالي:

$$v\bigcap A \neq \varnothing \quad \forall\, v\in V(x)$$

وسنرمز لمجموعة النقط اللاصقة بـ A بالرمز $\bar{A}$، ونسميها لصاقة A.

5.4- ملاحظات وأمثلة:

1) ينتج عن التعريف السابق أن:

$$x\in \bar{A} \Leftrightarrow v\bigcap A \neq \varnothing \quad \forall\, v\in V(x)$$

$$x\notin \bar{A} \Leftrightarrow \exists\, v\in V(x) \;;\; v\bigcap A = \varnothing$$

2) لتكن $X = \{0,1,2\}$ ، ولتكن $\tau=\{\varnothing,X,\{0\},\{0,1\}\}$، ولتكن $A = \{1\}$ ، ولنوجد $\bar{A}$:

إن $1\in \bar{A}$، لأنه إذا كانت $v\in V(1)$ ، فإن $1\in v$، وبما أن $1\in A$، فإن $v\bigcap A \neq \varnothing$.

نبحث في وضع النقطة 0 ، ومن أجل ذلك نوجد مجموعة مجاورات 0:

$$V(0)=\{\{0\},\{0,1\},\{0,2\},X\}$$

ونلاحظ أن $\{0\}\in V(0)$ وتحقق $\{0\}\bigcap A=\varnothing$ ، ولذلك فإن $0\notin \bar{A}$.

نبحث في وضع النقطة 2 ، فنوجد V(2):

$$V(2)=\{X\}$$

وبالتالي $A\bigcap v \neq \varnothing$ لكل v من V(2).

إذن $2\in \bar{A}$. وإذن $\bar{A}=\{1,2\}$

3) من التعريف نجد أنه ، إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاءٍ تبولوجي (X,τ)، وكان $x\in A$، فإنه لكل v من V(x) لدينا $v\ni x$، ولذلك فإن $v\bigcap A \neq \varnothing$. ومعنى هذا أن $x\in \bar{A}$. إذن $A\subseteq \bar{A}$.

4) ينتج من تعريف المجاورة ، ومن تعريف النقطة اللاصقة أن:

$$x\in \bar{A} \Leftrightarrow T\cap A\neq\varnothing \ \forall\, T\in\tau \ \&\ x\in T$$

5.5- مبرهنة:

إن $\bar{A}$ تساوي إلى تقاطع كل المجموعات المغلقة الحاوية على A.

البرهان:

لتكن $\{F_i\}_{i\in I}$ أسرة كل المجموعات المغلقة الحاوية على A ، ولتكن ، $F=\bigcap_{i\in I} F_i$ ولنبرهن على أن $F=\bar{A}$:

$$x\in X\setminus\bar{A}\Rightarrow x\notin\bar{A}\Rightarrow \exists\, v\in V(x);\ v\cap A=\varnothing$$

$$\Rightarrow \exists T\in\tau\ ;\ x\in T\ \ \&\ T\cap A=\varnothing$$

لتكن $F'=X\setminus T$، عندئذ تكون F' مجموعة مغلقة.

وبما أن $T\cap A=\varnothing$، فإن $F'=(X\setminus T)\supseteq A$، أي أن F' هي أحد أفراد الأسرة $\{F_i\}_{i\in I}$ ، وبما أن x من T ، فإن $F'\not\ni x$، وبالتالي $F=\bigcap_{i\in I} F_i\not\ni x$، أي أن $X\setminus F\ni x$.

إذن $X\setminus\bar{A}\subseteq X\setminus F$، وبالتالي $F\subseteq\bar{A}$.

العكس:

$$x\in X\setminus F\Rightarrow x\notin F\Rightarrow\exists\, F_{i_o}\in\{F_i\}_{i\in I}\ ;\ x\notin F_{i_o}$$
$$\Rightarrow A\subseteq F_{i_o}\ \ \&\ \ x\notin F_{i_o}$$

لتكن $T=X\setminus F_{i_o}$ عندئذ $T\cap A=\varnothing$ و $V(x)\ni T$ ، وهذا يعني أن $\bar{A}\not\ni x$، وبالتالي $X\setminus\bar{A}\ni x$.

إذن $X\setminus F\subseteq X\setminus\bar{A}$، أي أن $\bar{A}\subseteq F$. والنتيجة هي أن $\bar{A}=F$.

5.6- **ملاحظات:**

1) إن F ،المذكورة في برهان المبرهنة 5.5 ،هي مجموعة مغلقة ، لأنها تقاطع لمجموعات مغلقة. وبما أن $\bar{A}=F$ ، فإن $\bar{A}$ مجموعة مغلقة أياً كانت المجموعة A.

2) إذا كانت S مجموعة مغلقة ، وكانت $A\subseteq S$ ، فإن $\bar{A}\subseteq S$ ، لأن S هي أحد أفراد الأسرة $\{F_i\}_{i\in I}$ الواردة في برهان المبرهنة السابقة.

3) A مغلقة $\Leftrightarrow \bar{A}=A$ ، لأن:

إذا كانت $A=\bar{A}$ ، فإن A مغلقة ، لأن $\bar{A}$ مغلقة.

إذا كانت A مغلقة ، فإنه ينتج عن كون $A\subseteq A$ ، وعن الملاحظة السابقة أن $\bar{A}\subseteq A$ ، وبالتالي $A=\bar{A}$.

4) $\bar{\varnothing}=\varnothing$ و $\bar{X}=X$ لأن $\varnothing$ و X مجموعتان مغلقتان.

5) $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$ أياً كانت المجموعة A ، لأن $\bar{A}$ مغلقة.

6) $A\subseteq B\Rightarrow \bar{A}\subseteq\bar{B}$ ، لأن:

$$x\in\bar{A}\Rightarrow v\cap A\neq\varnothing\ \forall\ v\in V(x)\Rightarrow v\cap B\neq\varnothing\ \forall\, v\in V(x)$$

وهذا يعني أن $x\in\bar{B}$

7) $\overline{A\cap B}\subseteq\bar{A}\cap\bar{B}$ ، ولكن المساواة غير ضرورية ،لأن:

$$\left.\begin{array}{l}A\cap B\subseteq A\Rightarrow\overline{A\cap B}\subseteq\bar{A}\\ A\cap B\subseteq B\Rightarrow\overline{A\cap B}\subseteq\bar{B}\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{A\cap B}\subseteq\bar{A}\cap\bar{B}$$

مثال عن العكس:

لتكن $X=\{1,2\}$ ، ولتكن $\tau=\{\varnothing,X\}$.

لتكن $A=\{1\}$ و $B=\{2\}$.

نلاحـــظ أن $\mathscr{F}=\{X,\varnothing\}$ ، ولـــذلك فـــإن $\bar{A}=X$ و $\bar{B}=X$ ، ومنـــه $\bar{A}\cap\bar{B}=X$، ولكن $A\cap B=\varnothing$ ، ولذلك فإن $\overline{A\cap B}=\varnothing$.

ونلاحظ أن $\overline{A\cap B}\neq\bar{A}\cap\bar{B}$.

8) $\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{A\cup B}$ ، لأن:

$$\left.\begin{array}{l} A\subseteq A\cup B\Rightarrow \bar{A}\subseteq\overline{A\cup B} \\ B\subseteq A\cup B\Rightarrow \bar{B}\subseteq\overline{A\cup B}\end{array}\right\}\Rightarrow \bar{A}\cup\bar{B}\subseteq\overline{A\cup B} \qquad (1)$$

ومن جهة ثانية:

$$\begin{aligned} & x\in X\setminus\left(\bar{A}\cup\bar{B}\right)\Rightarrow x\notin\bar{A}\cup\bar{B}\Rightarrow x\notin\bar{A}\ \&\ x\notin\bar{B} \\ & \Rightarrow\exists v_1,v_2\in V(x)\ ;\ v_1\cap A=\varnothing\ \&\ v_2\cap B=\varnothing \\ & \Rightarrow v_1\cap v_2\in V(x)\ \&\ (v_1\cap v_2)\cap(A\cup B)= \\ & \left[(v_1\cap v_2)\cap A\right]\cup\left[(v_1\cap v_2)\cap B\right]\subseteq(v_1\cap A)\cup(v_1\cap B) \\ & =\varnothing\cup\varnothing=\varnothing \end{aligned}$$

إذن:

$$(v_1\cap v_2)\cap(A\cup B)=\varnothing \quad \& \quad (v_1\cap v_2)\in V(x)$$

ومعنى هذا أن $x\notin\overline{A\cup B}$، ولذلك فإن $x\in X\setminus\left(\overline{A\cup B}\right)$،

وبالتالي فإن $X\setminus\left(\bar{A}\cup\bar{B}\right)\subseteq X\setminus\overline{A\cup B}$، ومنه فإن

$$\overline{A\cup B}\subseteq\bar{A}\cup\bar{B} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن $\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{A\cup B}$

(لاحظ أنه يمكن البرهان على الاحتواء (2) بطريقة ثانية ؛ ماهي ؟)

5.7- **تعريف:**

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً ، ولتكن $A\subseteq X$.

نقول إن A مجموعة كثيفة في هذا الفضاء ، إذا كان $\bar{A}=X$.

5.8- ملاحظات وأمثلة:

1) لتكن $X \neq \varnothing$ مجموعة ما ، ولتكن $\tau = \{\varnothing, X\}$ التبولوجيا الضعيفة. ولتكن $\varnothing \neq A \subseteq X$.

عندئذ نجد أن $\mathscr{F} = \{X, \varnothing\}$ ، ولذلك فإن أصغر مجموعة مغلقة تحوي A هي X ، أي أن $\bar{A} = X$ ، ولذلك فإن A كثيفة.

إذن: كل مجموعة جزئية غير خالية من هذا الفضاء هي مجموعة كثيفة.

2) لتكن $X \neq \varnothing$ مجموعة ما ، ولتكن $\tau = \mathscr{P}(X)$ التبولوجيا القوية ، ولتكن $A \subsetneqq X$، عندئذ $X \setminus A \in \tau$ ، ولذلك فإن A مغلقة ، وبالتالي $X \neq A = \bar{A}$، أي أن A غير كثيفة.

المجموعة الكثيفة الوحيدة في هذا الفضاء هي X ، لأن $\bar{X} = X$.

3) لتكن $X = \{a,b,c,d,e\}$، ولتكن $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$

ولتكن $A = \{a,b,c\}$. ولنرى إن كانت A كثيفة أم لا في الفضاء (X, τ).

نلاحظ أن أسرة المجموعات المغلقة في هذا الفضاء هي:

$$\mathscr{F} = \{X, \varnothing, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e\}, \{a\}\}$$

وإن أصغر مجموعة مغلقة تحوي A هي X ، ولذلك فإن $\bar{A} = X$، ولذلك فإن A كثيفة .

4) إذا كان (X, τ) فضاءً تبولوجياً ، وكانت $A \subsetneqq X$، وكانت A مغلقة ، فإن A غير كثيفة لأن $\bar{A} = A \neq X$.

5) ليكن $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ تبولوجيا المتممات المنتهية ، ولتكن $A =]-\infty\ , 2[\bigcup]2, +\infty[$

عندئذ نجد أن $\bar{A} = \mathbb{R}$، لأن: $A \subseteq \bar{A}$، ثم إن $2 \in \bar{A}$،لأنه إذا كانت $v \in V(2)$، فإنه يوجد $T \in \tau$ بحيث $2 \in T \subseteq v$، ونلاحظ أن $\mathbb{R} \setminus T$ منتهية و $\mathbb{R} \setminus v \subseteq \mathbb{R} \setminus T$ منتهية ، وينتج عن هذا أن v غير منتهية، ولذلك فإن $A \bigcap v \neq \varnothing$.

(لو كان $v \cap A = \varnothing$ لوجدنا أن $A \subseteq \mathbb{R} \setminus v$، وبالتالي تصبح A منتهية وهو غير ممكن).

- يمكن أخذ $A =]-\infty\,, 2[\cup]2,3[\cup]3,+\infty[$ لنجد أن $\bar{A} = \mathbb{R}$، وهكذا...

5.9- مبرهنة:

إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X,τ)، فإن:

A كثيفة $\Leftrightarrow$ $A \cap T \neq \varnothing$ لكل $\varnothing \neq T \ni \tau$.

البرهان:

$\Leftarrow$: بما أن A كثيفة ، فإن $\bar{A} = X$.

إذا كانت $\varnothing \neq T \ni \tau$، فإنه يوجد $x \ni T$، ولكن $x \ni X = \bar{A}$.

ولذلك فإن $A \cap T \neq \varnothing$ ، لأن T مجاورة لـ x.

$\Rightarrow$: لدينا $\bar{A} \subseteq X$، ثم إنه إذا كانت $x \ni X$، وكانت v مجاورة لـ x ، فإنه يوجد $T \ni \tau$ بحيث $x \in T \subseteq v$. وبحسب الفرض يكون $A \cap T \neq \varnothing$، ومنه $A \cap v \neq \varnothing$، ومعنى هذا أن $x \ni \bar{A}$.

إذن $\bar{A} \supseteq X$، وبالتالي $\bar{A} = X$ ، أي أن A كثيفة.

5.10- ملاحظات وأمثلة:

1) إذا كانت $X = \{1,2,3,4,5\}$ ، وكانت $\tau = \{\varnothing, X, \{1\}, \{1,4\}\}$، فإن كل مجموعة جزئية A من X ، تحوي 1، هي مجموعة كثيفة ، لأن تقاطع A مع أي مجموعة مفتوحة وغير خالية سوف يحوي 1.

2) إذا كان r عدداً حقيقياً يحقق $r > 0$ ، فإنه يوجد عدد طبيعي m بحيث يكون $0 < \frac{1}{m} < r$ ، لأنه في الحالة المخالفة يكون $r \leq \frac{1}{m}$ لكل $m \ni \mathbb{N}$.

ومنه $m \le \frac{1}{r}$ لكل $m \in \mathbb{N}$، وتكون $\mathbb{N}$ محدودة من الأعلى بـ $\frac{1}{r}$، وهذا غير ممكن.

3) إن مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ هي مجموعة كثيفة في الفضاء العادي لـ $\mathbb{R}$.

البرهان:

بحسب المبرهنة السابقة، يكفي أن نبرهن على أن تقاطع كل مجال مفتوح من الشكل $]a,b[$ حيث $a < b$ مع $\mathbb{Q}$ هو تقاطع غير خالٍ، أي أن كل مجال من الشكل $]a,b[$ يحوي على عدد نسبي:

بما أن $a < b$ فإن $\frac{b-a}{2} > 0$، وبحسب الملاحظة السابقة فإنه يوجد $m \in \mathbb{N}$ بحيث إن $0 < \frac{1}{m} < \frac{b-a}{2}$.

لنعتبر المتتالية (u_n) التي حدها العام $u_n = \frac{n}{m}$. نلاحظ أن $u_1 = \frac{1}{m} < b$ وأن هذه المتتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى. ليكن $n_o \in \mathbb{N}$ بحيث يكون u_{n_o} هو أول حد من (u_n) يحقق $b \le u_{n_o}$. عندئذ يكون

$$u_{n_o-1} < b \qquad (1)$$

من جهة ثانية مهما كانت $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{m} - \frac{n}{m} = \frac{1}{m} < \frac{b-a}{2}$$

وينتج عن هذا أن: $a < u_{n_o-1}$ ، لأنه إذا كان $u_{n_o-1} \le a$ ، فإن $-a \le -u_{n_o-1}$ ومنه

$$u_{n_o} - a \le u_{n_o} - u_{n_o-1}$$

وينتج عن هذا أن:

$$b - a \le u_{n_o} - a \le u_{n_o} - u_{n_o-1} = \frac{1}{m} < \frac{b-a}{2}$$

وهذا يعطي $1 < \frac{1}{2}$ ، وهو أمر غير ممكن.

إذن:

$$a < u_{n_o - 1} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن $a < u_{n_o - 1} < b$

أي أن:

$$a < \frac{n_o - 1}{m} < b$$

أي أنــه يوجــد $q = \frac{n_o - 1}{m}$ مــن $\mathbb{Q}$ بحيــث إن $q \in]a, b[$ ، وبالتــالي فــإن $\mathbb{Q} \cap]a, b[\neq \varnothing$ لكل $a < b$.

وبحسب المبرهنة السابقة تكون $\mathbb{Q}$ كثيفة في الفضاء العادي لـ $\mathbb{R}$.

4) إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X, τ)، فإن :

A غير كثيفة $\Leftrightarrow \exists \varnothing \neq T \in \tau \,;\, T \cap A = \varnothing$

5) إن $\mathbb{Z}$ غير كثيفة في الفضاء العادي لـ $\mathbb{R}$، لأن:

$\varnothing \neq T =]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[\in \tau$، ولدينا $T \cap \mathbb{Z} = \varnothing$.

5.11- **تعريف:**

ليكن (X, τ) فضاءً تبولوجياً ، ولتكن $A \subseteq X$.

نقــول عــن نقطــة $x \in X$ إنهــا نقطــة جبهيــة أو حدوديــة لــ A ، إذا كانــت $x \in \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$، وسنرمز بـ bdA لمجموعة الـنقط الحدودية لــ A ، ونـسميها حـدود المجموعة A أو جبهية A.

5.12- ملاحظات وأمثلة:

1) ينتج عن التعريف السابق أن $bdA=\bar{A}\cap\overline{X\setminus A}$ ، ولذلك فإن bdA مجموعة مغلقة (تقاطع مغلقتين) وذلك أياً كانت المجموعة A.

2) يمكن صياغة التعريف السابق كما يلي:

$$x\in bdA \Leftrightarrow v\cap A\neq\varnothing \quad \& \quad v\cap(X\setminus A)\neq\varnothing \quad \forall\ v\in V(x)$$

3) إذا كانت $X=\{a,b,c,d\}$ ، وكان $\tau=\{\varnothing,X,\{a,b\},\{c,d\}\}$، وكانت $A=\{a,c\}$ فإن:

$$\overline{X\setminus A}=X \qquad , \qquad \bar{A}=X$$

لأن كل من A و X\A كثيفة، ولذلك فإن $bdA=X$.

وإذا كانت $B=\{a,b,c\}$ ، فإن $\bar{B}=X$ و $\overline{X\setminus B}=\{c,d\}$ ،

ومنه $bd\,B=\{c,d\}$

4) إذا كانت $A=\{1,2\}$ من الفضاء العادي لـ $\mathbb{R}$ ، فإن: $\bar{A}=A$، لأن A مغلقة و $\mathbb{R}\setminus A=]-\infty,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$ كثيفة ، ومنه $\overline{\mathbb{R}\setminus A}=\mathbb{R}$، ومنه $bdA=A\cap\mathbb{R}=A$.

* وهكذا نجد أنه لدراسة المجموعة الحدودية يكفي أن نعرف جيداً كيف نوجد لصاقة المجموعات.

5.13- تعريف:

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً ، ولتكن $A\subseteq X$.

- نقول عن نقطة $X\ni x$ إنها نقطة تراكم لـ A، إذا تحقق الشرط التالي:

$$v\cap A\setminus\{x\}\neq\varnothing \qquad \forall\ \ v\in V(x)$$

وسنرمز لمجموعة نقط تراكم A بـ 'A ، ونسميها المجموعة المشتقة لـ A.

- نقول عن نقطة $A\ni x$ إنها نقطة منعزلة في A ، إذا تحقق الشرط التالي:

$$\exists\ v\in V(x)\quad ;\quad v\bigcap A=\{x\}$$

وسنرمز لمجموعة النقط المنعزلة في A بالرمز IsA ، ونسميها منعزلة A.

5.14- ملاحظات وأمثلة:

1) ينتج عن التعريف السابق أن:

$$\begin{aligned}
&x\in A'\Leftrightarrow v\bigcap\left(A\setminus\{x\}\right)\neq\varnothing\ \forall\ v\in V(x)\\
&x\notin A'\Leftrightarrow\exists\ v\in V(x)\ ;\ v\bigcap\left(A\setminus\{x\}\right)=\varnothing\\
&x\in \mathrm{IsA}\Leftrightarrow x\in A\ \&\ \exists\ v\in V(x)\ ;\ v\bigcap A=\{x\}\\
&\qquad\Leftrightarrow x\in A\ \&\ \exists\ v\in V(x)\ ;\ v\bigcap\left(A\setminus\{x\}\right)=\varnothing
\end{aligned}$$

2) ينتج عن الملاحظة السابقة أن كل نقطة من A هي إما نقطة تراكم لـ A ، أو أنها نقطة منعزلة في A ، أي أن $A\subseteq A'\bigcup \mathrm{IsA}$، وأن $A'\bigcap \mathrm{Is}\ A=\varnothing$.

3) إذا كانت $X=\{1,2,3,4,5\}$، وكانت $\tau=\wp(X)$ ، وكانت $A=\{2,3,5\}$، فإن:

$2\in \mathrm{Is}\,A$ ، لأن $V(2)\ni v=\{2\}$ وتحقق $v\bigcap A=\{2\}$. وبالمثل نجد أن $\mathrm{Is}\,A=A$، كما أن $A'=\varnothing$.

4) في الفضاء العادي لـ $\mathbb{R}$ لدينا كل نقطة من $\mathbb{Z}$ هي نقطة منعزلة ، فمثلاً $1\in \mathrm{Is}\mathbb{Z}$ لأن $V(1)\ni v=]0,2[$ وتحقق $v\bigcap\mathbb{Z}=\{1\}$.

في حين أن $\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$ لأنه ، إذا كان $\mathbb{R}\ni x$، وكانت $v\in V(x)$ فإنه يوجد $V(x)\ni T=]a,b[$ بحيث $x\in T\subseteq v$.

وبما أن $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$، فإنه يوجد في T عدد غير منته من عناصر $\mathbb{Q}$، ولذلك فإن:

$$\varnothing\neq T\bigcap\mathbb{Q}\setminus\{x\}\ \subseteq\ v\bigcap\mathbb{Q}\setminus\{x\}$$

ولذلك فإن $x\in\mathbb{Q}'$.

5) إذا كانت A={x} من فضاء تبولوجي (X,τ)، فإن $x\notin A'$ ، ولكن $x\in A\subseteq\overline{A}$.

5.15- مبرهنة:

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً، ولتكن $A \subseteq X$. عندئذ لدينا:

1) $\bar{A} = A \cup A'$.

2) A مغلقة $\Leftrightarrow$ $A' \subseteq A$.

3) $\overline{X \setminus A} = X \setminus \overset{\circ}{A}$ كما أن $(X \setminus A)^{\circ} = X \setminus \bar{A}$

4) $bdA = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

5) A مغلقة $\Leftrightarrow$ $bdA \subseteq A$

6) $\bar{A} = A \cup bdA = \overset{\circ}{A} \cup bdA$

7) $X = \overset{\circ}{A} \cup extA \cup bdA$

البرهان:

1) نعلم أن $A \subseteq \bar{A}$، ومن التعاريف نجد مباشرة أن $A' \subseteq \bar{A}$، ولذلك فإن

$$A \cup A' \subseteq \bar{A} \qquad (1)$$

ليكن $\bar{A} \ni x$، ولنفرض أن $A \not\ni x$ $[A \ni x \Leftarrow A \cup A' \ni x]$، عندئذ $A \setminus \{x\} = A$. وبما أن $\bar{A} \ni x$ فإن $v \cap A \neq \varnothing$ لكل $V(x) \ni v$، ولذلك فإن $v \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ لكل v من $V(x)$، وهذا يعني أن $A' \ni x$، ومنه $A \cup A' \ni x$.

إذن:

$$\bar{A} \subseteq A \cup A' \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن $\bar{A} = A \cup A'$

2) $\Leftarrow$: إذا كانت A مغلقة، فإن $\bar{A} = A$، ومنه $A \cup A' = A$، وهذا يعني أن $A' \subseteq A$.

$\Rightarrow$: إذا كانت $A' \subseteq A$ فإن $A \cup A' \subseteq A$، أي $\bar{A} \subseteq A$، وبالتالي $\bar{A} = A$.

ومعنى هذا أن A مغلقة.

3) لدينا :

$$\mathring{A} \subseteq A \Rightarrow X \setminus \mathring{A} \supseteq X \setminus A \Rightarrow \overline{X \setminus \mathring{A}} \supseteq \overline{X \setminus A}$$

وبما أن $\mathring{A}$ مفتوحة ، فإن $X \setminus \mathring{A}$ مغلقة ، ولذلك فإن $\overline{X \setminus \mathring{A}} = X \setminus \mathring{A}$ ومنه

$$X \setminus \mathring{A} \supseteq \overline{X \setminus A} \qquad (1)$$

من جهة ثانية:

$$A \subseteq \bar{A} \Rightarrow X \setminus A \supseteq X \setminus \bar{A} \Rightarrow (X \setminus A)^{o} \supseteq (X \setminus \bar{A})^{o}$$

وبما أن $\bar{A}$ مغلقة، فإن $X \setminus \bar{A}$ مفتوحة ، ولذلك فإن $(X \setminus \bar{A})^{o} = X \setminus \bar{A}$

إذن $(X \setminus A)^{o} \supseteq X \setminus \bar{A}$، وهذا صحيح لأي مجموعة جزئية B من X، أي أن

$$(X \setminus B)^{o} \supseteq X \setminus \bar{B}$$

وبأخذ $B = X \setminus A$ نحصل على

$$\mathring{A} = (X \setminus (X \setminus A))^{o} \supseteq X \setminus \left(\overline{X \setminus A}\right)$$

وبأخذ متمم الطرفين نجد أن

$$X \setminus \mathring{A} \subseteq \overline{X \setminus A} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن $X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A}$.

وبالمثل نجد أن $X \setminus \bar{A} = (X \setminus A)^{o}$.

4) نعلم أن $bdA = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A} = \bar{A} \cap (X \setminus \mathring{A})$ ومنه

$$x \in bdA \Leftrightarrow x \in \bar{A} \;\&\; x \in X \setminus \mathring{A}$$

$$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \;\&\; x \notin \mathring{A} \Leftrightarrow x \in \bar{A} \setminus \mathring{A}$$

ومنه $bdA = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

5) $\Rightarrow:$ $\quad bdA \subseteq A \Rightarrow \bar{A} \setminus \overset{o}{A} \subseteq A \Rightarrow (\bar{A} \setminus \overset{o}{A}) \cup \overset{o}{A} \subseteq A \cup \overset{o}{A}$

$$\Rightarrow \bar{A} \subseteq A \; ; \left(\overset{o}{A} \subseteq A \subseteq \bar{A} \right)$$

$\Rightarrow$ مغلقة A

$\Leftarrow:$ مغلقة $A \Rightarrow \bar{A} \subseteq A \Rightarrow \bar{A} \setminus \overset{o}{A} \subseteq A \Rightarrow bdA \subseteq A$

6) من جهة أولى $\bar{A} = (\bar{A} \setminus \overset{o}{A}) \cup \overset{o}{A} = bdA \cup \overset{o}{A}$

من جهة ثانية : $\begin{cases} bdA = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A} \subseteq \bar{A} \\ A \quad \subseteq \bar{A} \end{cases}$

ومنه $\bar{A} \supseteq bdA \cup A$.

كما أن $\bar{A} = bdA \cup \overset{o}{A} \subseteq bdA \cup A$. ولذلك فإن $\bar{A} = bdA \cup A$

(7

$$\overset{o}{A} \cup ext\, A \cup bdA = \overset{o}{A} \cup (X \setminus A)^o \cup (\bar{A} \setminus \overset{o}{A})$$
$$= (\bar{A} \setminus \overset{o}{A}) \cup \overset{o}{A} \cup (X \setminus \bar{A})$$
$$= \bar{A} \cup (X \setminus \bar{A}) = X$$

5.16- ملاحظة:

إذا كانت T مجموعة مفتوحة في فضاء تبولوجي (X,τ)، وكانت $A \subseteq X$ بحيث $T \cap A = \varnothing$ ، فإن $T \cap \bar{A} = \varnothing$، لأنه:

$$T \cap A = \varnothing \Rightarrow A \subseteq X \setminus T = X \setminus T^o = \overline{X \setminus T}$$
$$\Rightarrow \bar{A} \subseteq \overline{X \setminus T} = X \setminus T^o = X \setminus T \Rightarrow \bar{A} \cap T = \varnothing$$

6.§- التبولوجيا المولدة بتابع:

6.1- مبرهنة:

ليكن (X,τ_X) فضاءً تبولوجياً ولتكن $Y \neq \varnothing$ مجموعة ما، وليكن $f : X \to Y$ تابعاً.

إن أسرة المجموعات $\tau_Y = \{u : u \subseteq Y \ \ \& \ \ f^{-1}(u) \in \tau_X\}$

تشكل تبولوجيا على Y، نسميها التبولوجيا على Y المولدة بالتابع f والفضاء (X,τ_X).

البرهان:

1) $\tau_X \ni f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$، ولذلك فإن $\varnothing \in \tau_Y$، كما أن $f^{-1}(Y) = X \in \tau_X$، ولذلك فإن $Y \in \tau_Y$.

2) إذا كان u_1 و u_2 من τ_Y فإن $f^{-1}(u_1)$ و $f^{-1}(u_2)$ من τ_X، وبالتالي $f^{-1}(u_1 \cap u_2) = f^{-1}(u_1) \cap f^{-1}(u_2)$ من τ_X، ولذلك فإن $u_1 \cap u_2 \in \tau_Y$.

3) إذا كانت $\{u_i\}_{i\in I}$ أسرة عناصر من τ_Y، فإن $f^{-1}(u_i) \in \tau_X$ لكل $i \in I$، ومنه

$$\tau_X \supseteq \bigcup_{i\in I} f^{-1}(u_i)$$

ولكن $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} u_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(u_i)$، ولذلك فإن $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} u_i\right) \in \tau_X$

ومنه:

$$\bigcup_{i\in I} u_i \in \tau_Y$$

بالتالي τ_Y تشكل تبولوجيا على Y و (Y,τ_Y) فضاءً تبولوجياً.

6.2- مبرهنة:

ليكن (Y,τ_Y) فضاءً تبولوجياً، ولتكن $X \neq \varnothing$ مجموعة ما، وليكن $f : X \to Y$ تابعاً.

إن أسرة المجموعات $\tau_X = \{f^{-1}(T)\ ;\ T \in \tau_Y\}$

تشكل تبولوجيا على X، نسميها التبولوجيا على X المولدة بالتابع f والفضاء (Y,τ_Y).

البرهان:

1) $\varnothing \in \tau_Y$، ولذلك فإن $\tau_X \ni \varnothing = f^{-1}(\varnothing)$. كما أن $Y \in \tau_Y$. ولذلك فإن $\tau_X \ni X = f^{-1}(Y)$.

2) إذا كان $u_1, u_2 \in \tau_X$، فإنه يوجد $T_1, T_2 \in \tau_Y$ بحيث إن

$$u_1 = f^{-1}(T_1)\ ,\ \ u_2 = f^{-1}(T_2)$$

ومنه $T_1 \cap T_2 \in \tau_Y$، ثم إن

$$\tau_X \ni u_1 \cap u_2 = f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2) = f^{-1}(T_1 \cap T_2)$$

3) لتكن $\{u_i\}_{i\in I}$ أسرة عناصر من τ_X. عندئذ لكل $i \in I$ يوجد $T_i \in \tau_Y$ بحيث إن $u_i = f^{-1}(T_i)$، ومنه

$$\bigcup_{i\in I} u_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(T_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} T_i\right)$$

وبما أن τ_Y تبولوجيا، فإن $\bigcup_{i\in I} T_i \in \tau_Y$، وبالتالي فإن $\bigcup_{i\in I} u_i \in \tau_X$.

إذن τ_X تشكل تبولوجيا على X و (X,τ_X) فضاءً تبولوجياً.

6.3- ملاحظات وأمثلة:

1) لتكن $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{1,2,3,4,5\}$. ولـيكن التـابع $f\ :\ X\to Y$ المعرف بـ $f(a)=5$, $f(b)=7$, $f(c)=7$.

a) إذا كانت $\tau_Y=\{\varnothing,Y,\{5\},\{5,7\}\}$، فإن التبولوجيا على X المولدة بـ f و (Y,τ_Y) هي:

$$\begin{aligned}\tau_X&=\left\{f^{-1}(\varnothing),f^{-1}(Y),f^{-1}(\{5\}),f^{-1}\left(\{5,7\}\right)\right\}\\&=\{\varnothing,X,\{a\}\}\end{aligned}$$

b) إذا كانت $\tau_X=\{\varnothing,X,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$، فإن التبولوجيا على Y المولـدة بـ f و (X,τ_X) هي:

$$\begin{aligned}\tau_Y&=\left\{u\subseteq Y\ ;\ f^{-1}(u)\in\tau_X\right\}\\&=\{\varnothing,Y,\{5\},\{5,7\},\{5,3\},\{5,4\},\{5,1\},\{5,2\},\{5,1,2\},\{5,1,3\},\{5,1,4\}\\&\quad\{5,2,3\},\{5,2,4\},\{5,3,4\},\{5,1,2,3\},\{5,1,2,4\},\{5,1,3,4\},\{5,2,3,4\}\\&\quad\{5,7,1\},\{5,7,2\},\{5,7,3\},\{5,7,4\},\{5,7,1,2\},\{5,7,1,3\},\{5,7,1,4\}\\&\quad\{5,7,2,3\},\{5,7,2,4\},\{5,7,3,4\}\}\end{aligned}$$

2) حالة خاصة:

إذا كانت $\varnothing\neq A\subseteq X$، وكان (X,τ) فضاءً تبولوجياً ، فإنه لدينا ، دومـاً، تـابع الاحتواء

$$i:A\ \to\ (X,\tau)$$

ولذلك تتولد عن i و (X,τ) تبولوجيا على A هي:

$$\tau_A=\left\{i^{-1}(T)\ ;\ T\in\tau\right\}$$

وتسمى أثر التبولوجيا τ على A.

ونسمي الفضاء (A,τ_A) بفضاء جزئي من الفضاء (X,τ).

• ويلاحظ أنه ، إذا كانت $u \subseteq A$ فإن:

$$\exists T \in \tau \,;\, u = A \bigcap T \;\Leftrightarrow\; u \in \tau_A$$

لأنه إذا كانت $B \subseteq X$ فإن $i^{-1}(B) = A \bigcap B$

$$[x \in i^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in A \;\&\; i(x) \in B \Leftrightarrow x \in A \;\&\; x \in B \Leftrightarrow x \in A \bigcap B]$$

وبالتالي فإن $\tau_A = \{T \bigcap A \;;\; T \in \tau\}$.

• إذا كانت $A \in \tau$، فإن $\tau_A \subseteq \tau$ ،لأن:

$$u \in \tau_A \Rightarrow \exists T \in \tau \,;\; u = A \bigcap T$$
$$\Rightarrow u \in \tau \qquad (\text{لآن } T \text{ و } A \text{ من } \tau)$$

3) إذا كانت $X = \{1,2,3,4\}$ ،وكانت $\tau = \{\varnothing, X, \{1\}, \{1,3\}, \{1,3,4\}\}$، وكانت $A = \{2,3,4\}$ ، فإن:

$$\tau_A = \{\varnothing, A, \{3\}, \{3,4\}\}$$

وإذا كانت $B = \{1,3,4\}$ ، فإن:

$$\tau_B = \{\varnothing, B, \{1\}, \{1,3\}\}$$

ونلاحظ أن $B \in \tau$ ، ولذلك $\tau_B \subseteq \tau$.

4) إذا كانت A و B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من فضاء تبولوجي (X,τ)، وكانت $H \subseteq A$ و $H \subseteq B$ ، عندئـذ ؛ إذا كانـت H مفتوحـة (مغلقـة) في (A, τ_A) وفي (B, τ_B) ، فإن H تكون مفتوحة (مغلقة) في الفضاء $(A \bigcup B, \tau_{A \cup B})$.

البرهان:

بما أن H مفتوحة في الفضاء الجزئي (A, τ_A)، فإنه يوجد $T_1 \in \tau$ بحيث إن $H = T_1 \bigcap A$.

وبما أن H مفتوحة في الفضاء الجزئي (B,τ_B) فإنه يوجد $T_2 \in \tau$ بحيث إن $H = T_2 \cap A$.

لدينا:

$$\begin{aligned} H = H \cap H &= (T_1 \cap A) \cap (T_2 \cap B) \\ &= (T_1 \cap T_2) \cap (A \cap B) \subseteq (T_1 \cap T_2) \cap (A \cup B) \end{aligned}$$

وكذلك:

$$\begin{aligned} (T_1 \cap T_2) \cap (A \cup B) &= \left[(T_1 \cap T_2) \cap A\right] \cup \left[(T_1 \cap T_2) \cap B\right] \\ &\subseteq (T_1 \cap A) \cup (T_2 \cap B) = H \cup H = H \end{aligned}$$

ومنه ينتج أن $H = (T_1 \cap T_2) \cap (A \cup B)$

وبما أن $T_1 \cap T_2 \in \tau$، فإن H تكون مفتوحة في الفضاء الجزئي $(A \cup B, \tau_{A\cup B})$.

وبنفس الطريقة نبرهن حالة H مغلقة.

§.7- الأساس وتحت الأساس:

7.1- تعريف:

نقول عن أسرة مجموعات مفتوحة $\mathscr{B}$ من فضاء تبولوجي (X,τ) إنها تشكل أساساً للتبولوجيا τ (أو للفضاء التبولوجي (X,τ))، إذا كان كل عنصرمن τ اجتماعاً لعناصر من $\mathscr{B}$.

7.2- ملاحظات وأمثلة:

1) $\mathscr{B}$ أساس لـ τ ، إذا وفقط ، إذا تحقق الشرطان:

- $\mathscr{B} \subseteq \tau$
- $T \in \tau \Rightarrow T = \bigcup_{i\in I} B_i \ ; \ B_i \in \mathscr{B}$

2) أسرة المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$ تشكل أساساً للتبولوجيا العادية على $\mathbb{R}$.

3) إذا كانـت $X = \{a,b,c\}$ ، وكانـت $\tau = \mathscr{P}(X)$، فـإن الأسـرة $\mathscr{B} = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$ تشكل أساساً لـ τ.

4) أياً كان الفضاء التبولوجي (X,τ) ، فإن τ تشكل أساساً لـ τ.

5) إذا كانت $\mathscr{B}$ أساساً للتبولوجيا τ على X ، وكانـت $\mathscr{B}^*$ أسـرة مجموعـات مفتوحـة تحوي $\mathscr{B}$، فإن $\mathscr{B}^*$ هي أيضاً أساس لـ τ ، لأن:

- من الفرض لدينا $\mathscr{B}^* \subseteq \tau$.

- ثم إنه إذا كانت $T \in \tau$، فإن $T = \bigcup_{i \in I} B_i$ حيث $B_i \in \mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}^*$، ولذلك فإن $\mathscr{B}^*$ أساس لـ τ .

7.3- مبرهنة:

لتكن $\mathscr{B}$ أسرة مجموعات مفتوحة من الفـضاء التبولـوجي (X,τ). إن الـشرطين التاليين متكافئان:

1) $\mathscr{B}$ أساس لـ τ.

2) لكل T من τ ، ولكل x من T ، يوجد B من $\mathscr{B}$ بحيث يكون: $x \in B \subseteq T$.

البرهان:

$1 \Rightarrow 2$: لتكن T من τ وليكن x من T . عندئذ ينتج عن الملاحظة (1) أعلاه أن:

$$x \in T = \bigcup_{i \in I} B_i \quad ; \qquad B_i \in \mathscr{B}$$

وبالتالي يوجد $B_{i_o} \ni \mathscr{B}$ بحيث $x \in B_{i_o} \subseteq T$.

$2 \Rightarrow 1$:

لتكن $T \neq \varnothing$ من τ. عندئذ ينتج عن (2) أنه:

$$\forall\ x \in T \quad ,\ \exists\ B_x \in \mathscr{B} \quad ;\ \ x \in B_x \subseteq T$$

وبالتالي $\{x\} \subseteq B_x \subseteq T$، ومنه $T = \bigcup_{x \in T}\{x\} \subseteq \bigcup_{x \in T} B_x \subseteq T$، وبالتالي

$T=\bigcup_{x\in T} B_x$ حيث $B_x \in \mathscr{B}$ ، وبما أن $\mathscr{B}\subseteq\tau$ من الفرض ، فإن $\mathscr{B}$ أساس لـ τ.

نتيجة:

لتكن $\mathscr{B}_1$ أسرة مجموعات مفتوحة من الفضاء (X,τ) ، و $\mathscr{B}$ أساساً لـ τ . فإن $\mathscr{B}_1$ تكون أساساً لـ τ إذا تحقق الشرط:

لكل B من $\mathscr{B}$ ولكل x من B يوجد B_1 من $\mathscr{B}_1$ بحيث يكون: $x\in B_1\subseteq B$

البرهان:

لتكن T من τ وليكن x من T . بما أن $\mathscr{B}$ أساس لـ τ ، فإنه حسب المبرهنة السابقة يوجد B من $\mathscr{B}$ بحيث $x\in B\subseteq T$.

وحسب الفرض يوجد B_1 من $\mathscr{B}_1$ بحيث $x\in B_1\subseteq B$ أي أنه $x\in B_1\subseteq T$. وحسب المبرهنة السابقة ، فإن $\mathscr{B}_1$ أساس لـ τ.

7.4- مبرهنة:

لتكن $\mathscr{B}$ أسرة مجموعات جزئية من مجموعة X. تكون $\mathscr{B}$ أساساً لتبولوجيا τ على X ، إذا وفقط ، إذا تحقق الشرطان التاليان:

1) X اجتماع لعناصر من $\mathscr{B}$.

2) إذا كانت B و B^* من $\mathscr{B}$ ، فإن $B\cap B^*$ تكون اجتماع لعناصر من $\mathscr{B}$.

البرهان:

لنفرض أولاً أن $\mathscr{B}$ أساس لتبولوجيا τ على X .عندئذ ينتج عن كون $X\in\tau$ وعن التعريف 7.1 أن X هي اجتماع لعناصر من $\mathscr{B}$.

كما ينتج عن كون $\mathscr{B}\subseteq\tau$ أن $B\cap B^*\in\tau$، ولذلك فإن $B\cap B^*$ هي اجتماع لعناصر من $\mathscr{B}$ (تعريف 7.1).

العكس: لنفرض أن $\mathscr{B}$ أسرة مجموعات جزئية من X تحقق الشرطين (1) و (2). ولتكن

$$\tau=\{\varnothing, T : T \subseteq X \quad \& \quad \text{هي اجتماع لعناصر من } \mathscr{B} \text{ } T\}$$

إن τ تشكل تبولوجيا على X ، وإن $\mathscr{B}$ تشكل أساساً لـ τ لأن:

1) من الشرط (1) تكون $X \in \tau$، وإن $\varnothing \in \tau$ من الفرض.

2) إذا كانت T_2, T_1 من τ، فإنه:

- إذا كانت إحداهما $\varnothing$، فإن $\tau \ni T_1 \cap T_2 = \varnothing$.

- إذا كانت $T_1 \neq \varnothing \,,\, T_2 \neq \varnothing$، فإنه ينتج من تعريف τ

$$T_1 = \bigcup_{i \in I} B_{1i} \quad ; \quad B_{1i} \in \mathscr{B}$$

$$T_2 = \bigcup_{j \in J} B_{2j} \quad ; \quad B_{2j} \in \mathscr{B}$$

ومنه:

$$T_1 \cap T_2 = \left(\bigcup_{i \in I} B_{1i}\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_{2j}\right) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} \left(B_{1i} \cap B_{2j}\right)$$

وبحسب الشرط (2)، فإن $B_{1i} \cap B_{2j}$ هي اجتماع لعناصر من $\mathscr{B}$، وبالتالي فإن $T_1 \cap T_2$ اجتماع لعناصر من $\mathscr{B}$. إذن $T_1 \cap T_2 \in \tau$.

3) إذا كانت $\{T_i\}_{i \in I}$ أسرة عناصر من τ ، فإنه:

- إذا كانت X إحدى عناصر هذه الأسرة ، فإن $\bigcup_{i \in I} T_i = X \in \tau$.

- إذا كان كل عنصر من عناصر هذه الأسرة يساوي $\varnothing$، فإن $\bigcup_{i \in I} T_i = \varnothing \in \tau$.

- إذا كان $T_i = \bigcup_{j \in J} B_{ij}$ حيث $\mathscr{B} \ni B_{ij}$، فإن $\bigcup_{i \in I} T_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} B_{ij}$ ، أي أن $\bigcup_{i \in I} T_i$ هي اجتماع لعناصر من $\mathscr{B}$، ولذلك فإنها من τ.

إذن τ تشكل تبولوجيا على X . ومن تعريف τ نجد أن $\mathcal{B} \subseteq \tau$ (كل عنصر من $\mathcal{B}$ هو اجتماع مع نفسه)، وإن كل عنصر من τ هو اجتماع لعناصر من $\mathcal{B}$، ولذلك فإن $\mathcal{B}$ تشكل أساساً لـ τ.

7.5- ملاحظات وأمثلة:

1) إن الشرط الأول من المبرهنة السابقة ، مع الشرط التالي :

إذا كانت B و B^* من $\mathcal{B}$ فإن $B \cap B^*$ عنصر من $\mathcal{B}$.

يكفي لكي تكون $\mathcal{B}$ أساساً لتبولوجيا τ على X .

2) إذا كانت S أسرة مجموعات جزئية من مجموعة X، فإنه توجد تبولوجيات على X تحوي الأسرة S ، أحدها مثلاً $\tau = \mathcal{P}(X)$.

إن تقاطع كل التبولوجيات على X الحاوية على S هو أصغر تبولوجيا على X تحوي S. نسمي هذه التبولوجيا بالتبولوجيا على X المولدة بالأسرة S ، ونرمز لها بـ $\tau(S)$.

3) إذا كانت $X = \{a,b,c,d\}$، وكانت $S = \{\{a\},\{b,d\}\}$، فإن التبولوجيات على X الحاوية على S هي:

$$\tau_1 = \mathcal{P}(X)$$
$$\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b,d\}, \{a,b,d\}\}$$
$$\tau_3 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b,d\}, \{a,b\}, \{a,b,d\}\}$$
$$\tau_4 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b,d\}, \{a,d\}, \{a,b,d\}\}$$
$$\tau_5 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b,d\}, \{b,d,c\}, \{a,b,d\}\}$$
$$\tau_6 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b,d\}, \{a,c\}, \{a,b,d\}\}$$

ونلاحظ أن تقاطع جميع هذه التبولوجيات هو

$$\tau(S) = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b,d\}, \{a,b,d\}\}$$

فهو أصغر تبولوجيا على X تحوي S.

4) لنأخذ الفضاء العادي $(\mathbb{R},\tau_u)$.

نعلم أن $\mathscr{B}$ ، أسرة كل المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$، تكون أساساً لـ τ_u .

إذا كانت $\mathscr{B}_1$ أسرة كل المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$، التي أطرافها أعداد عادية ، فإن $\mathscr{B}_1$ تكون أساساً لـ τ_u، لأنه:

لتكن $B=]a,b[$ من $\mathscr{B}$ ، وليكن x من B. إن المجال $]a,x[$ يحوي عدداً عادياً مثل p ، أي $a<p<x$ ، والمجال $]x,b[$ يحوي عدداً عادياً مثل q ، أي $x<q<b$. أي أنه يوجد في $]a,b[$ عددان عاديان p و q بحيث $p<x<q$ وبالتالي فالمجموعة $B_1=]p,q[$ تنتمي للأسرة $\mathscr{B}_1$ وتحقق $x\in B_1\subseteq B$.

وبحسب النتيجة الواردة بعد المبرهنة 7.3 ، فإن $\mathscr{B}_1$ تكون أساساً لـ τ_u .

5) إذا كانت S أسرة مجموعات جزئية من مجموعة X ، فإننا سنرمز بـ $S[\overset{n}{\bigcap}]$ لمجموعة كل التقاطعات المنتهية لعناصر S ، أي أن:

$$u\in S[\overset{n}{\bigcap}]\Leftrightarrow u=\bigcap_{i=1}^{m} S_i \ ;\ S_i\in S\ ,\ m\in\mathbb{N}$$

واضح أن $S\subseteq S[\overset{n}{\bigcap}]$ لأن:

$$s\in S\Rightarrow s=s\cap s\in S[\overset{n}{\bigcap}]$$

7.6- تعريف:

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً ، ولتكن S أسرة مجموعات جزئية من X.

نقول إن S تشكل تحت أساس للتبولوجيا τ (أو للفضاء التبولوجي (X,τ))، إذا كانت المجموعة $S[\overset{n}{\bigcap}]$ تشكل أساساً لـ τ.

7.7- ملاحظات وأمثلة:

1) إذا كانت S تحت أساس لتبولوجيا τ على مجموعة X، فإن:

$$S \subseteq S[\overset{n}{\bigcap}] = \mathcal{B} \subseteq \tau$$

2) إن الأسرة $S = \{\ ]-\infty, b[\ ,\ ]a, +\infty[\ \ ;\ a, b \in \mathbb{R}\}$

تشكل تحت أساس للفضاء $(\mathbb{R}, \tau_u)$، لأن: كل مجال مفتوح $]a,b[$ هو تقاطع منته لعناصر من S

$$]a, b[\ =\ ]-\infty\ , b[\bigcap]a, +\infty[$$

وبالتالي فإن أسرة كل المجالات المفتوحة التي تشكل أساساً للفضاء $(\mathbb{R}, \tau_u)$، محتواة في الأسرة $S[\overset{n}{\bigcap}]$ ولذلك فإن $\tau_u \supseteq S[\overset{n}{\bigcap}]$ تشكل أساساً لـ τ_u (بحسب 5 من الملاحظات 7.2)، وبالتالي فإن S تشكل تحت أساس لـ τ_u.

3) إذا كانت S أساساً لتبولوجيا τ على X، فإن S هي تحت أساس للتبولوجيا τ. أي أن كل أساس هو تحت أساس، لأننا رأينا أنه، إذا كانت $\mathcal{B}$ أساساً لـ τ، وكانت $\mathcal{B}^*$ أسرة مجموعات جزئية من X بحيث $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^* \subseteq \tau$، فإن $\mathcal{B}^*$ هي أيضاً أساس لـ τ.

وهنا لدينا $S \subseteq S[\overset{n}{\bigcap}] \subseteq \tau$، و S أساس لـ τ، ولذلك فإن $S[\overset{n}{\bigcap}]$ هي أيضاً أساس لـ τ، ولذلك فإن S تحت أساس لـ τ.

- إن عكس هذه الملاحظة غير صحيح بشكل عام . فليس من الضروري أن يكون تحت الأساس أساساً، كما يوضح المثال التالي:

4) لتكن $X = \{1,2,3,4\}$، ولتكن

$$\tau = \{\varnothing, X, \{2\}, \{4\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3\}\}$$

إن $S = \{\{1,2,\}, \{2,3\}, \{4\}\}$ تشكل تحت أساس لـ τ، لأن

$$\mathcal{B} = S[\overset{n}{\bigcap}] = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{4\}, \{2\}\}$$

تشكل أساساً لـ τ، ولكن S ليست أساساً لـ τ، لأن $\{2,4\} \in \tau$، ولكن $\{2,4\}$ ليست اجتماعاً لعناصر من S.

7.8- **مبرهنة:**

لتكن X مجموعة غير خالية ، ولتكن S أسرة من المجموعات الجزئية من X. إذا كانت المجموعة X تساوي اجتماعاً لعناصرمن الأسرة S ، فإن الأسرة S تكون تحت أساس لتبولوجيا τ على X ، وهذه التبولوجيا τ هي التبولوجيا الوحيدة على X التي تكون S تحت أساس لها.

البرهان :

واضح أن الأسرة $S[\overset{n}{\bigcap}]$ تحقق شرطي المبرهنة 7.4 ، ولذلك فإنه توجد تبولوجيا وحيدة τ على X بحيث تكون $S[\overset{n}{\bigcap}]$ اساساً لها . وهذا يعني أن الأسرة S تشكل تحت أساسٍ لـ τ .

7.9- **ملاحظات وأمثلة:**

1) إذا كانت X مجموعة غير خالية، وS أسرة من المجموعات الجزئية من X فإن الأسرة $S\cup\{X\}$ تكون تحت أساس لتبولوجيا τ على X وهذه التبولوجيا هي التبولوجيا الأصغرية التي تكون فيها عناصر S مجموعات مفتوحة.

البرهان:

من المبرهنة 7.8 نجد أن الأسرة $S\cup\{X\}$ تشكل تحت أساس لتبولوجيا τ على X تكون فيها عناصر S مجموعات مفتوحة. كما أنه إذا كانت τ^* تبولوجيا أخرى على X حاوية للأسرة S، فإن τ^* سوف تحوي التبولوجيا τ، وبالتالي فإن التبولوجيا τ أصغرية ضمن التبولوجيات الحاوية للأسرة S.

2) إذا كانت X مجموعة غير خالية ، و S أسرة من المجموعات الجزئية من X ، فإن الأسرة $\mathscr{B}=S[\overset{n}{\bigcap}]\cup\{X\}$ تكون أساساً لتبولوجيا τ على X ، وهذه التبولوجيا هي التبولوجيا الأصغرية ، التي تكون فيها عناصر الأسرة S مجموعات مفتوحة.

7.10- مبرهنة:

إذا كانت S أسرة مجموعات جزئية من مجموعة X ، فإن S تشكل تحت أساس للتبولوجيا $\tau(S)$.

البرهان:

لنضع $\mathscr{B}=S[\overset{n}{\cap}]$ ، ولنضع :

$$\tau=\{T : T\subseteq X \quad \& \quad \text{اجتماع لعناصر من } \mathscr{B} \text{ } T\}$$

ثم نبرهن المبرهنة على مرحلتين:

المرحلة الأولى: نبرهن على أن τ تبولوجيا على X ، وينتج عن هذا مباشرة أن $\mathscr{B}$ أساس لـ τ (من تعريف الأساس).

المرحلة الثانية: نبرهن على أن $\tau=\tau(S)$ فنحصل على أن $\mathscr{B}$ أساس لـ $\tau(S)$ وبالتالي S تحت أساس لـ $\tau(S)$.

المرحلة الأولى:

1) إن $\left(X=\bigcap_{i\in\varnothing}s_i \ ; \ s_i\in S\right)$ ولذلك فإن $X\in\mathscr{B}\subseteq\tau$. كما أن $\left(\varnothing=\bigcup_{i\in\varnothing}B_i \ ; \ B_i\in\mathscr{B}\right)$، ولذلك فإن $\varnothing\in\tau$.

2) إذا كان T^*,T عنصرين من τ ، فإن:

$$T=\bigcup_{i\in I}B_i \ ; \ B_i\in\mathscr{B} \ \ \& \ \ T^*=\bigcup_{j\in J}B_j^* \ ; \ B_j^*\in\mathscr{B}$$

ومنه:

$$T\cap T^*=\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)\cap\left(\bigcup_{j\in J}B_j^*\right)=\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J}\left(B_i\cap B_j^*\right)$$

ولكن $B_i\in\mathscr{B}$ يعني أن: $B_i=\bigcap_{s=1}^{n}s_{is} \ ; \ s_{is}\in S$

$B_j^* = \bigcap_{t=1}^{m} s_{jt}^* \; ; \; s_{jt}^* \in S$ يعني أن: $B_j^* \in \mathscr{B}$

ومنه:

$$B_i \cap B_j^* = \left(\bigcap_{s=1}^{n} s_{is} \right) \cap \left(\bigcap_{t=1}^{m} s_{jt}^* \right)$$

أي أن $B_i \cap B_j^*$ هو تقاطع منته لعناصر من S، فهو بالتالي عنصر من $\mathscr{B} = S[\bigcap^{n}]$. وينتج عن ذلك أن $T \cap T^*$ هو اجتماع لعناصر من $\mathscr{B}$، وبالتالي $(T \cap T^*) \ni \tau$.

3) إذا كانت $\{T_i\}_{i \in I}$ أسرة عناصر من τ، فمعنى ذلك أن لكل i من I لدينا:

$$T_i = \bigcup_{j \in J_i} B_{ij} \; ; \; B_{ij} \in \mathscr{B}$$

ومنه:

$$\bigcup_{i \in I} T_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} B_{ij}$$

أي أن $\bigcup_{i \in I} T_i$ هو اجتماع لعناصر من $\mathscr{B}$، فهو عنصر من τ.

إذن τ تشكل تبولوجيا على X و $\mathscr{B}$ تشكل أساساً لهذه التبولوجيا.

المرحلة الثانية:

إن $\tau \subseteq S$، ولذلك فإن $\tau \subseteq \tau(S)$ لأن $\tau(S)$ هو أصغر تبولوجيا تحوي S.

من جهة ثانية: إذا كانت T من τ، فإن $T = \bigcup_{i \in I} B_i$ حيث B_i من $\mathscr{B}$ لكل i من I، ولذلك فإن $B_i = \bigcap_{j=1}^{n_i} s_{ij}$ حيث s_{ij} من S لكل i و j. ولكن:

$$\begin{aligned} s_{ij} \in S &\Rightarrow s_{ij} \in \tau(S) \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n_i} s_{ij} \in \tau(S) \\ &\Rightarrow B_i \in \tau(S) \Rightarrow \bigcup_{i \in 1} B_i \in \tau(S) \\ &\Rightarrow T \in \tau(S) \end{aligned}$$

إذن $\tau \subseteq \tau(S)$ ، وبالتالي $\tau = \tau(S)$.

7.11- ملاحظات وأمثلة:

1) من المرحلة الثانية في برهان المبرهنة السابقة نستنتج أنه ، إذا كانت S تحت أساس لتبولوجيا τ على X ، فإن $\tau = \tau(S)$، وبالتالي فإن τ هي أصغر تبولوجيا على X تحوي S.

2) رأينا في المثال 4 من 7.7 أن:

$$\tau = \{\varnothing, X, \{2\}, \{4\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3\}\}$$

تشكل تبولوجيا على $X = \{1,2,3,4\}$ ، وأن $S = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{4\}\}$ تشكل تحت أساس لـ τ ، ولذلك فإن τ هذه تساوي $\tau(S)$ ، وهي أصغر تبولوجيا على X تحوي S.

3) من المثال 2 في 7.7 نستنتج أيضاً أن τ_u هي أصغر تبولوجيا على $\mathbb{R}$ تحوي أسرة المجالات التي من الشكل $]a, +\infty[$ أو $]-\infty, b[$ ، لأن هذه الأسرة تشكل تحت أساس لـ τ_u.

4) إذا كانت $\{\tau_i\}_{i\in I}$ أسرة تبولوجيات على مجموعة X ، وكانت $S = \bigcup_{i\in I} \tau_i$ ، فإننا نعلم أنه ليس من الضروري أن تكون S تبولوجيا على X، ولكن $\tau(S)$ هي تبولوجيا على X . ويمكن أن نرى بسهولة أن $\tau(S)$ هو حد أعلى أصغري للأسرة $\{\tau_i\}_{i\in I}$.

7.12- تعريف:

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً ، ولتكن x نقطة من X.

نقول عن أسرة مجموعات مفتوحة $\mathcal{L}_x$، جزئية من X ، إنها أساس موضعي للنقطة x ، إذا وفقط ، إذا تحقق الشرطان التاليان:

1) $x \in L$ لكل L من $\mathcal{L}_x$.

2) إذا كانت T من τ ، وكان x من T ، فإنه يوجد L من $\mathcal{L}_x$ بحيث إن $x \in L \subseteq T$.

7.13- ملاحظة:

في الفضاء العادي $(\mathbb{R}, \tau_u)$. الأسرة

$$\mathcal{L}_x = \left\{ \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[\;\; ; \;\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

تشكل أساساً موضعياً لـ x أياً كان x من $\mathbb{R}$،لأن:

$\mathcal{L}_x \subseteq \tau$ واضح . ثم إن $x \in L$ لكل L من $\mathcal{L}_x$ واضح أيضاً.

وإذا كانت $T =]a, b[$ من τ ، وكـان x مـن T ، فـإن $a < x < b$ ، ولـذلك فـإن $o < x - a$ و $o < b - x$. ليكن $r = \min\{ x - a \;,\; b - x \}$.

عندئذ $o < r$ ، ولذلك يوجـد $n \in \mathbb{N}$ بحيـث إن $o < \frac{1}{n} < r$ (بحسب الملاحظـة 2 مـن 5.10) ، ومنه نجد أن:

$$L = \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[\subseteq]a, b[= T$$

حيث L من $\mathcal{L}_x$.

- يمكن أن نبرهن بالأسلوب نفسه ،على أنه في الفضاء العادي لـ $\mathbb{R}$ تكون الأسرة

$$\mathcal{L}_x = \{]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\; ; \varepsilon > o \}$$

أساساً موضعياً لـ x ، أياً كان x من $\mathbb{R}$.

7.14- مبرهنة:

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً ، ولتكن $\mathcal{B}$ أسرة مجموعات مفتوحة في هذا الفضاء. ومن أجل كل x من X لنضع $\mathcal{L}_x = \{B \in \mathcal{B} \; ; \; x \in B\}$. عندئذ يكون الشرطان التاليان متكافئين.

1) $\mathcal{B}$ أساس لـ τ.

2) $\mathcal{L}_x$ أساس موضعي لـ x.

البرهان:

$2 \Leftarrow 1$: ليكن x من X . بما أن $X \in \tau$، وبما أن $\mathcal{B}$ أساس لـ τ ، فإنه يوجد B من $\mathcal{B}$ بحيث $x \in B \subseteq X$، ومنه $B \in \mathcal{L}_x$، أي أن $\mathcal{L}_x \neq \varnothing$

ثم إن: $\mathcal{L}_x \subseteq \mathcal{B} \subseteq \tau$ من تعريف $\mathcal{L}_x$.

كما أن $x \in B$ لكل B من $\mathcal{L}_x$ من تعريف $\mathcal{L}_x$.

وإذا كانت $T \in \tau$، وكان x من T ، فإنه ينتج من كون $\mathcal{B}$ أساس أنه يوجد $B \in \mathcal{B}$ بحيث يكون $x \in B \subseteq T$ ، أي أنه يوجد $B \in \mathcal{L}_x$ بحيث $x \in B \subseteq T$.

ومما تقدم نجد أن $\mathcal{L}_x$ تشكل أساساً موضعياً لـ x.

$1 \Leftarrow 2$: لدينا من الفرض $\mathcal{B} \subseteq \tau$، ثم إنه:

إذا كانت T من τ ، وكان x من T ، فإنه يوجد B_x من $\mathcal{L}_x$ بحيث يكون $x \in B_x \subseteq T$ ، ومنه:

$$T = \bigcup_{x \in T} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in T} B_x \subseteq T$$

أي أن $T = \bigcup_{x \in T} B_x$. وبما أن B_x من $\mathcal{L}_x$ ، فإن B_x من $\mathcal{B}$.

إذن كل T من τ هي اجتماع لعناصر من $\mathcal{B}$. بالتالي فإن $\mathcal{B}$ تشكل أساساً لـ τ.

* ينتج عن المبرهنة السابقة ما يلي:

بما أن كل تبولوجيا τ على X تملك أساساً ، واحداً على الأقل ، $\mathcal{B}$ ، فإن كل x من X يملك أساساً موضعياً ، واحد على الأقل ، هو $\mathcal{L}_x$ الوارد في المبرهنة أعلاه.

تمارين غير محلولة

1. لتكن X مجموعة غير خالية ، ولتكن
$\tau=\{T\subseteq X\ ;\ X\backslash T$ قابلة للعد $\}\cup\{\varnothing\}$. برهن على أن τ تشكل تبولوجيا على X.

2. لتكن X مجموعة غير منتهية. أوجد تبولوجيا τ على X عدد عناصرها منته غير τ_{ind} .

3. أوجد تبولوجيا على $\mathbb{R}$ غير التبولوجيات الشهيرة الواردة في الكتاب.

4. لتكن $u_n=\{n,n+1,n+2,...\}$ ، ولتكن $\tau=\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\bigcup\{\varnothing\}$. برهن على أن τ تشكل تبولوجيا على $\mathbb{N}$.

5. لتكن X مجموعة غير خالية ، ولتكن $\{\tau_i\}_{i\in I}$ أسرة من التبولوجيات على X. برهن على أن الأسرة $\bigcap_{i\in I}\tau_i$ تشكل تبولوجيا على X.

   هل اجتماع تبولوجين على X يكون بالضروري تبولوجيا على X؟ لماذا ؟.

6. هات مثالاً على أسرة مجموعات مفتوحة في فضاء تبولوجي، ولكن تقاطعها ليس مجموعة مفتوحة.

7. لتكن A مجموعة جزئية من فضاء المتممات المنتهية (X,τ_{cof}). أوجد $\overset{o}{A},\bar{A}$.

8. لنعتبر المجموعة $A=[\,0,1\,]$ في الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{\ell.r})$. أوجد $A',\bar{A},\overset{o}{A}$.

9. هات مثالاً على أسرة مجموعات مغلقة في فضاء تبولوجي، ولكن اجتماعها ليس مجموعة مغلقة.

10. لتكن $A = [\ 0,1\ ]$ و $B = \{\ 1,2,3\ \}$ و $C = \mathbb{N}$ و $D =]5,\infty[$ في الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_{\ell.r})$. أي من هذه المجموعات مفتوحة؟ مغلقة؟ أوجد داخل ولصاقة وحدود كل من هذه المجموعات.

11. أعد السؤال السابق نفسه، ولكن في الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$.

12. أوجد في الفضاء الحقيقي $(\mathbb{R}, \tau_u)$ كلاً من المجموعات:

$$\mathrm{Is}(\mathbb{Q})\ ,\ \mathrm{ext}(\mathbb{Q})\ ,\ \mathrm{bd}(\mathbb{Q})\ ,\ \mathbb{Q}'\ ,\ \overline{\mathbb{Q}}\ ,\ \overset{\circ}{\mathbb{Q}}$$

13. لتكن A مجموعة محدودة من الأعلى في الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_u)$. برهن على أن الحد الأعلى الأصغري لـ A ينتمي إلى $\bar{A}$.

14. إذا كانت $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ أي أسرة من المجالات المفتوحة غير المتقاطعة في الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_u)$. فبرهن على أن هذه الأسرة قابلة للعد. (استفد من كون $\mathbb{Q}$ كثيفة وقابلة للعد في هذا الفضاء).

15. إذا كانت T مجموعة جزئية من الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_u)$، فبرهن على أن:

T مفتوحة $\Leftrightarrow$ T اجتماع قابل للعد لمجالات مفتوحة وغير متقاطعة.

16. إذا كانت T مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R}, \tau_u)$ و A مجموعة منتهية في هذا الفضاء. فبرهن على أن $T\backslash A$ مجموعة مفتوحة في هذا الفضاء.

17. برهن على أنه، إذا كانت T مجموعة مفتوحة، و F مجموعة مغلقة في الفضاء التبولوجي (X, τ)، فإن $T\backslash F$ مفتوحة و $F\backslash T$ مغلقة.

18. هات مثالاً على مجموعتين A و B في الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_u)$ بحيث إن A و $A\backslash B$ مفتوحتين، ولكن B غير مفتوحة.

19. هات مثالاً على مجموعة قابلة للعد في الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_u)$، ولكنها ليست مغلقة. ومثالاً على أسرة مجموعات مغلقة، ولكن اجتماعها مجموعة ليست مغلقة.

20. لتكن $A=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ o<x\le 1\}$ مجموعة جزئية من الفضاء $(\mathbb{R},\tau_u)$. برهن على أن المجموعة $u=\{x\ ;\ \frac{1}{2}<x\le 1\}$ ، مفتوحة في الفضاء الجزئي (A,τ_A)، وغير مفتوحة في الفضاء الكلي $(\mathbb{R},\tau_u)$.

21. لتكن $A=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ 1\le x\le 3\}$ مجموعة جزئية من الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{\ell.r})$. بين طبيعة المجموعة $B=\{x\ :1\le x<2\}$ ، من حيث كونها مفتوحة، مغلقة، ليست مفتوحة وليست مغلقة، وذلك في الفضاء الجزئي (A,τ_A)، وفي الفضاء الكلي $(\mathbb{R},\tau_{\ell.r})$.

22. برهن على أن أثر كل من التبولوجيا العادية τ_u على المجموعة $\mathbb{Z}$، وتبولوجيا فضاء المتممات المنتهية (X,τ_{cof}) على مجموعة جزئية منتهية Y، يطابق التبولوجيا القوية.

23. ليكن $f\ :\ (\mathbb{R},\tau_{\ell.r})\to\mathbb{R}$ التابع المعرف بـ $f(x)=\begin{cases}1 & \forall x\ge 0\\ 0 & \forall x<0\end{cases}$. أوجد التبولوجيا على $\mathbb{R}$ المولدة بالتابع f والفضاء $(\mathbb{R},\tau_{\ell.r})$. ثم كرر السؤال نفسه في حال كون فضاء المنطلق للتابع f هو $(\mathbb{R},\tau_{cof})$.

24. لتكن A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X,τ). برهن على أن:

a) A مفتوحة $\Leftrightarrow$ $\mathrm{bd}\ A\subseteq X\setminus A$.

b) A مغلقة $\Leftrightarrow$ $\mathrm{bd}A\subseteq A$.

c) $\bar{A}=A\cup \mathrm{bd}A=\mathring{A}\cup \mathrm{bd}A$

d) $\mathring{A}=A\setminus \mathrm{bd}A\quad ,\quad \mathrm{bd}A=\bar{A}\setminus\mathring{A}$

25. لتكن B , A مجموعتين من فضاء تبولوجي (X,τ). برهن على أن:

a) $\mathrm{bd}A\cap \mathrm{bd}B=\varnothing\Rightarrow (A\cup B)^{o}=\mathring{A}\cup\mathring{B}$

b) $(A\setminus B)^{o}\subseteq \mathring{A}\setminus\mathring{B}$، وهات مثال عن عدم التساوي.

c) $bd(A\bigcup B)\subseteq bd\ A\bigcup bd\ B$ ، وهات مثال عن عدم التساوي .

d) $ext(A\bigcup B)=extA\bigcap ext\ B$ و $ext\ A=ext(X\setminus ext\ A)$

26. اذكر مثالاً ، من الفضاء الحقيقي $(\mathbb{R},\tau_u)$ ، تكون فيه المجموعات الثلاث التالية مختلفة $bd(A)$, $bd(\overset{o}{A})$, $bd(\bar{A})$.

27. لتكن $A=[\,0,1\,]$ من الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{\ell.r})$. برهن على أن $1,0\in A'$ ثم أوجد A'.

28. لتكن A مجموعة كثيفة في الفضاء (X,τ)، ولتكن B مجموعة مغلقة وتحوي A . برهن على أن $B=X$.

29. برهن على أن المجموعة A تكون كثيفة في (X,τ) ، إذا وفقط ، إذا كان $(X\setminus A)^{o}=\varnothing$.

30. أوجد مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ بحيث تكون كثيفة في الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{cof})$، ولكنها غير كثيفة في الفضاء $(\mathbb{R},\tau_u)$.

31. لتكن A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X,τ). برهن على أن : $x\in A' \iff x\in\overline{A\setminus\{x\}}$.

32. برهن على أن المجموعة A من (X,τ) تكون تامة، إذا وفقط ، إذا كانت A مغلقة ولاتحوي أي نقطة منعزلة (A تامة يعني أن $A=A'$).

33. إذا كانت A و B مجموعتين من فضاء تبولوجي (X,τ)، فبرهن على أن $\bar{A}\setminus\bar{B}\subseteq\overline{A\setminus B}$، وهات مثالاً عن عدم التساوي.

34. إذا كانت $\{A_i\}_{i\in I}$ أسرة من المجموعات الجزئية من فضاء تبولوجي (X,τ)، فبرهن على أن:

$$\overline{\bigcap_{i\in I}A_i}\subseteq\bigcap_{i\in I}\bar{A}_i$$
$$\overline{\bigcup_{i\in I}A_i}\supseteq\bigcup_{i\in I}\bar{A}_i$$

35. ليكن $\mathscr{B}$ أساساً للفضاء التبولوجي (X,τ)، ولتكن $A \subseteq X$. برهن على أن الأسرة $\{B \cap A \;;\; B \in \mathscr{B}\}$ تشكل أساساً للفضاء الجزئي (A,τ_A).

36. أوجد أساساً للفضاء $(\mathbb{R},\tau_{\ell.r})$ غير $\tau_{\ell.r}$ نفسها.

37. ليكن $\mathscr{B}$ أساساً للفضاء (X,τ) ، ولتكن $A \subseteq X$. برهن على أن:

A كثيفة $\Leftrightarrow$ $A \cap B \neq \varnothing$ لكل $B \neq \varnothing$ من $\mathscr{B}$.

38. لنأخذ الفضاء الحقيقي $(\mathbb{R},\tau_u)$. برهن على أن أسرة كل المجالات المفتوحة من الشكل $\{\,]a,+\infty[\;;\; a \in \mathbb{R}\}$ أو من الشكل $\{\,]-\infty,b[\;;\; b \in \mathbb{R}\}$ تشكل تحت أساس للتبولوجيا τ_u.

39. ليكن $(Y.\tau_Y)$ فضاءً جزئياً من الفضاء التبولوجي (X,τ)، ولتكن y نقطة من Y. برهن على أنه إذا كانت $\mathscr{L}_y = \{L_i\}_{i\in I}$ أساساً موضعياً للنقطة y في الفضاء X ، فإن الأسرة $\mathscr{L}'_y = \{L_i \cap Y\}$ أساس موضعي للنقطة y في الفضاء الجزئي (Y,τ_Y).

40. برهن على أن أسرة المجموعات ، التي من الشكل $\{x \in \mathbb{R} \;;\; x \le b\} \cup \{x \in \mathbb{R} \;;\; x > a\}$ حيث a و b أعداد كسرية، تشكل تحت أساس للفضاء $(\mathbb{R},\tau_u)$.

41. لنأخذ فضاء المتممات المنتهية (X,τ_{cof}). حدد الإجابات الصحيحة:

a- $A \in \tau_{cof} \Leftrightarrow A$ مجموعة غير منتهية في X.

b- $A,B \in \tau_{cof} \Leftarrow A \cap B = \varnothing$.

c- المجموعات المغلقة في هذا الفضاء هي المجموعات المنتهية بالإضافة إلى المجموعة X.

d- إذا كانت A مجموعة جزئية منتهية من X ، فإن $\overset{o}{A} = \overline{A} = A$.

e- إذا كانت A مجموعة جزئية غير منتهية من X ، فإن $\overline{A} = X$.

42. لنأخذ الفضاء التبولوجي (X,τ) حيث $X=\{a,b,c,d,e\}$ و $\tau=\{\varnothing,\{a\},\{b,d\},\{a,b,d\},\{b,c,d,e\},X\}$، ولنأخذ فيه المجموعة $A=\{a,c,d\}$. حدد الإجابات الصحيحة:

a- $\bar{A}=A$

b- $a\in A'$.

c- إن $c\in A'$ ولكن $d\notin A'$.

d- A كثيفة.

e- A مجموعة مغلقة.

43. لنأخذ الفضاء الحقيقي العادي $(\mathbb{R},\tau_u)$. حدد الإجابات الصحيحة:

a- إذا كانت A مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$، فإنه:

A مغلقة في الفضاء الجزئي $\mathbb{Z}\Leftrightarrow A$ مغلقة في الفضاء $\mathbb{R}$.

b- $\mathbb{Z}$ مجموعة مغلقة في الفضاء $(\mathbb{R},\tau_u)$، بينما $\mathbb{Q}$ مجموعة ليست مغلقة فيه.

c- في هذا الفضاء يكون $\mathbb{N}'=\mathbb{Z}'=\mathbb{Q}'=\varnothing$.

d- في هذا الفضاء يكون $\bar{\mathbb{N}}=\mathbb{N}$ و $\bar{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}$ ، بينما $\bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$

e- في هذا الفضاء يكون $\mathbb{N}^o=\varnothing$ و $\mathbb{Z}^o=\varnothing$ ، بينما $\mathbb{Q}^o=\mathbb{Q}$.

44. ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً ، ولتكن A مجموعة جزئية منه ، و a نقطة من A. حدد الإجابة الصحيحة.

a- A مفتوحة $\Leftrightarrow$ A مجاورة لـ a.

b- A مفتوحة $\Leftrightarrow$ A مجاورة لكل نقطة من نقاطها.

c- B مجموعة مغلقة تحوي $A \Leftarrow \bar{A}\subseteq B$.

d- $\{x\}$ مفتوحة من أجل كل $x \in X \Leftrightarrow \tau$ التبولوجيا القوية على X.

e- $x \in \bar{A}$ & $x \notin A \Leftrightarrow x \in A'$

45. حدد الإجابات الصحيحة:

a- لايمكن إيجاد مجموعتين $A \neq B$ في فضاء تبولوجي بحيث إن $A' = B'$.

b- إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X, τ)، وتتقاطع مع أي مجموعة كثيفة فيه ، فإن $\overset{\circ}{A} \neq \varnothing$.

c- إذا كانت τ التبولوجيا القوية على مجموعة X ، فإن τ_Y ، أثر τ على المجموعة الجزئية Y من X ، تطابق التبولوجيا القوية على Y أيضاً.

d- إذا كانت τ التبولوجيا الضعيفة على مجموعة X ، فإن τ_Y ، أثر τ على المجموعة الجزئية Y من X ، تطابق التبولوجيا الضعيفة على Y أيضاً.

e- إذا كانت A كثيفة في فضاء تبولوجي ، فإن $\overset{\circ}{A} = \varnothing$.

الفصل الثاني

التوابع واستمرارها وفضاءات الضرب التبولوجية

1.§- الاستمرار:

1.1- تعريف:

نقول عن تابع $f:(X,\tau)\to\left(X^*,\tau^*\right)$ إنه مستمر في النقطة x من X ، إذا كان: من أجل كل مجاورة v^* لـ f(x)، تكون $f^{-1}\left(v^*\right)$ مجاورة لـ x.

ونقول عن f إنه تابع مستمر، إذا كان f مستمراً في كل نقطة من نقط X.

1.2- ملاحظات وأمثلة:

1) f مستمر في x $\Leftrightarrow$ $f^{-1}\left(v^*\right)\in V(x)$ ، لكل v^* من $V\left(f(x)\right)$.

2) f مستمر في x $\Leftrightarrow$ لكل v^* من $V\left(f(x)\right)$ ، يوجد v من V(x) بحيث يكون $f(v)\subseteq v^*$.

البرهان:

$\Leftarrow$: إذا كان f مستمراً في x ، وكانت v^* من V(f(x)) ، فإن $f^{-1}\left(v^*\right)\in V(x)$، ولذلك يوجد T من τ بحيث إن $x\in T\subseteq f^{-1}\left(v^*\right)$.

لنضع v = T ، عندئذ تكون v من V(x) ، ويكون

$$f(v)=f(T)\subseteq f\left(f^{-1}(v^*)\right)\subseteq v^*$$

$\Rightarrow$: لتكن $v^* \ni V\left(f(x)\right)$. عندئذٍ يوجد v من V(x) بحيث يكون $f(v)\subseteq v^*$.

ومنه:

$$v\subseteq f^{-1}\left(f(v)\right)\subseteq f^{-1}\left(v^*\right)$$

أي أن $f^{-1}\left(v^*\right)$ تحوي مجاورة لـ x ، وبالتالي $f^{-1}\left(v^*\right)$ تكون مجاورة لـ x. وبالتالي فإن f مستمر في x.

3) إذا كانت τ التبولوجيا القوية على X ، فإن كل تابع ينطلق من الفضاء (X,τ) ويستقر في أي فضاء آخر يكون مستمراً ، أياً كانت قاعدة ربطه.

4) إذا كان $f:(X,\tau)\to\left(X^*,\tau^*\right)$ تابعاً ما ، وكانت x نقطة منعزلة في X ، فإن f مستمر في x ، لأن:

x منعزلة في X يعني أنه توجد مجموعة مفتوحة T بحيث يكون $X\bigcap T=\{x\}$، ولما كانت $T\supseteq X$، فإن $X\bigcap T=T$ ، أي أن $T=\{x\}$، وبالتالي $\{x\}$ مفتوحة. لتكن v^* مجاورة لـ f(x) ، عندئذ $f(x)\in v^*$، ومنه $x\in f^{-1}\left(v^*\right)$، وبالتالي $x\in\{x\}\subseteq f^{-1}\left(v^*\right)$، وهذا يعني أن $f^{-1}\left(v^*\right)$ مجاورة لـ x. وبالتالي f مستمر في x.

5) إذا كان $f:(X,\tau)\to(X^*,\tau^*)$ تابعاً ثابتاً ، فإن f مستمر.

البرهان:

لتكن $x\in X$، ولتكن v^* مجاورة لـ $c=f(x)$ ، عندئذ $c\in v^*$، وبالتالي

$$X=f^{-1}(c)\subseteq f^{-1}\left(v^*\right)\subseteq X$$

أي أن $f^{-1}\left(v^*\right)=X$ ، وهي مجاورة لـ x ، وبالتالي f مستمر في x ، أي أنه مستمر.

6) إذا كان $f:(X,\tau)\to(X,\tau)$ التابع المطابق ، فإن f مستمر.(برهن على ذلك)

1.3- مبرهنة:

إذا كان $f:(X,\tau)\to\left(X^*,\tau^*\right)$ تابعاً ما ، وكانت $x\in X$، وكان $\mathcal{L}_x$ أساساً موضعياً لـ x ، وكان $\mathcal{L}_{f(x)}$ أساساً موضعياً لـ f(x) ، فإن:

f مستمر في x $\Leftrightarrow$ لكل L^* من $\mathcal{L}_{f(x)}$ ، توجد L من $\mathcal{L}_x$ بحيث يكون $f(L)\subseteq L^*$.

البرهان:

$\Leftarrow$: لتكن L^* من $\mathcal{L}_{f(x)}$. عندئذ ينتج عن تعريف الأساس الموضعي أن $f(x)\in L^*\in\tau^*$، وبحسب (2) من الملاحظات السابقة، يوجد $v\in V(x)$ بحيث $f(v)\subseteq L^*$. ولكن $v\in V(x)$ يعني أنه يوجد $T\in\tau$ بحيث $x\in T\subseteq v$، وبحسب تعريف $\mathcal{L}_x$ ، يوجد L من $\mathcal{L}_x$ بحيث $x\in L\subseteq T$ ومنه:

$$f(L)\subseteq f(T)\subseteq f(v)\subseteq L^*$$

$\Rightarrow$: لتكن v^* من $V(f(x))$. عندئذ يوجد T^* من τ^* بحيث يكون $f(x)\in T^*\subseteq v^*$، وبحسب تعريف الأساس الموضعي، يوجد L^* من $\mathcal{L}_{f(x)}$ بحيث يكون $f(x)\in L^*\subseteq T^*$. وبحسب الفرض، يوجد L من $\mathcal{L}_x$ بحيث يكون $f(L)\subseteq L^*$.

ولكن L من $\mathcal{L}_x$ يعني أن $L\in V(x)$ ، إذن: من أجل $v^*\in V(f(x))$ يوجد L من $V(x)$ بحيث إن $f(L)\subseteq L^*\subseteq T^*\subseteq v^*$ ، وهذا يعني أن f مستمر في x بحسب الملاحظة (2) من 1.2.

1.4- نتيجة:

إذا كان $f:(\mathbb{R},\tau_u)\to(\mathbb{R},\tau_u)$ تابعاً ما، فإن f مستمر في x_o من $\mathbb{R}$، إذا وفقط، إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall\varepsilon>o\ \exists\ \delta>o\ ;|x-x_o|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_o)|<\varepsilon \qquad (1)$$

(الشرط (1) هو شرط الاستمرار الذي نعرفه عند دراسة التفاضل).

البرهان:

من الملاحظة 7.13 من الفصل الأول، نعلم أن أسرة المجموعات $\mathcal{L}_{f(x_o)}=\{]f(x_o)-\varepsilon,f(x_o)+\varepsilon[\ ;\ \varepsilon>o\}$ تشكل أساساً موضعياً للنقطة $f(x_o)$ ، وأن $\mathcal{L}_{x_o}=\{]x_o-\delta,x_o+\delta[\ ;\ \delta>o\}$ تشكل أساساً موضعياً للنقطة x_o .

وإذا تذكرنا أن:

$$x \in]x_o - \delta, x_o + \delta[\Leftrightarrow |x - x_o| < \delta$$

نجد من المبرهنة السابقة أن:

f يكون مستمراً في $x_o \Leftrightarrow$ تحقق الشرط (1).

1.5- مبرهنة:

إذا كان $f:(X,\tau) \to (X^*,\tau^*)$ تابعاً ما ، فإن الشروط التالية متكافئة:

1) f مستمر.

2) الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في (X^*,τ^*) تكون مفتوحة في (X,τ).

3) الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة في (X^*,τ^*)، تكون مغلقة في (X,τ).

البرهان:

$2 \Rightarrow 1$: لتكن A مجموعة مفتوحة في الفضاء (X^*,τ^*) ، ولنبرهن على أن $f^{-1}(A)$ مفتوحة في الفضاء (X,τ) :

إذا كانت x نقطة من $f^{-1}(A)$ ، فإن $f(x) \in A$ ، وبما أن A مفتوحة ، فإن $A \in V(f(x))$ ، وبما أن f مستمر، فإن $f^{-1}(A) \in V(x)$. أي أن $f^{-1}(A)$ مجاورة لكل نقطة من نقاطها ، وبالتالي فهي مجموعة مفتوحة.

$3 \Rightarrow 2$: لتكن F^* مجموعة مغلقة في الفضاء (X^*,τ^*)، ولنبرهن على أن $f^{-1}(F^*)$ في الفضاء (X, τ) :

إن $X^* \setminus F^*$ مفتوحة في (X^*,τ^*) ، وبحسب (2) تكون $f^{-1}(X^* \setminus F^*)$ مفتوحة في (X, τ) ، ولكن $f^{-1}(X^* \setminus F^*) = X \setminus f^{-1}(F^*)$ ، وبالتالي فإن $f^{-1}(F^*)$ مغلقة في (X, τ).

$1 \Rightarrow 3$: لتكن x نقطة ما من X ، ولنبرهن على أن f مستمر في x.

لتكن $V(f(x)) \ni v^*$. عندئذ توجد $\tau^* \ni T^*$ بحيث يكون $f(x) \in T^* \subseteq v^*$.

وبأخذ الصورة العكسية نجد أن $x \in f^{-1}(T^*) \subseteq f^{-1}(v^*)$. إن $X^* \setminus T^*$ مغلقة في (X^*, τ^*)، وبحسب (3) تكون $f^{-1}(X^* \setminus T^*)$ مغلقة في (X , τ) ، وبالتالي فإن:

$X \setminus f^{-1}(T^*)$ مغلقة في (X , τ) ، أي أن $\tau \ni f^{-1}(T^*)$ ، ولذلك فإن:

$V(x) \ni f^{-1}(v^*)$ ، وبالتالي f مستمر في x . ومنه f مستمر.

1.6- ملاحظات وأمثلة:

1) إذا كان $f : (X, \tau) \to (X^*, \tau^*)$ ، فإن:

f مستمر $\Leftrightarrow$ الصورة العكسية لكل مجموعة من أساس (X^*, τ^*) هي مجموعة مفتوحة في (X, τ).

البرهان:

ليكن $\mathscr{B}^*$ أساساً لـ (X^*, τ^*).

$\Leftarrow$: إذا كانت $\mathscr{B}^* \ni B^*$، فإن $\tau^* \ni B^*$، وبما أن f مستمر، فإن $\tau \ni f^{-1}(B^*)$ (المبرهنة السابقة).

$\Rightarrow$: لتكن $\tau^* \ni T^*$. عندئذ $T^* = \bigcup_{i \in I} B_i^*$ حيث $\mathscr{B}^* \ni B_i^*$ لكل i من I ،ومنه

$$f^{-1}(T^*) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i^*\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i^*)$$

ومن الفرض لدينا $f^{-1}(B_i^*)$ مفتوحة في (X, τ)، ولذلك فإن $f^{-1}(T^*)$ مفتوحة في (X, τ)، لأنها اجتماع لمجموعات مفتوحة، أي أن الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة ، هي مجموعة مفتوحة وبالتالي f مستمر.

مثال:

التابع $f : (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ المعرف بـ $f(x) = x + 1$ مستمر، لأنه من أجل $I =]a, b[$ فإن

$$f^{-1}(I)=\{x;f(x)\in I\}=]a-1\ ,\ b-1[\in\tau_u$$

2) إذا كان $f:(X,\tau)\to(X^*,\tau^*)$ تابعاً مستمراً ، فإن الصورة المباشرة لمجموعة مفتوحة (مغلقة) ، ليس من الضروري ، أن تكون مفتوحة (مغلقة). أي أن مفهوم الاستمرار يرتبط بالصورة العكسية وليس له علاقة بالصورة المباشرة . كما يوضح المثال التالي:

ليكن $X^*=X=\{1,2,3\}$ ولتكن $\tau^*=\{\varnothing,X^*\}$ و $\tau=\mathscr{P}(X)$.

وليكن $i:(X,\tau)\to(X^*,\tau^*)$ التابع المطابق $i(x)=x$ لكل x من X .

عندئذ نجد أن i مستمر ، لأن الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة في (X^*,τ^*) هي مجموعة مفتوحة في (X,τ).

ولكن لو أخذنا $T=\{1,2\}$ من τ نجد أن $i(T)=T$ غير مفتوحة في (X^*,τ^*).

3) $f:(\mathbb{R},\tau_u)\to(\mathbb{R},\tau_u)$ المعرف بـ $f(x)=x^2$ لكل $x\in\mathbb{R}$ ، مستمر، ولكن الصورة المباشرة $f(]-1,1[)=[0,1[$ ، للمجموعة المفتوحة $]-1,1[$ ، غير مفتوحة.

4) إن تركيب تابعين مستمرين هو تابع مستمر، لأنه:

ليكن $g:(X^*,\tau^*)\to(X^{**},\tau^{**})\ ,\ f:(X,\tau)\to(X^*,\tau^*)$ تابعين مستمرين ولنأخذ تركيبهما $gof:(X.\tau)\to(X^{**}.\tau^{**})$

فإنه من أجل أي مجموعة جزئية مفتوحة A من الفضاء (X^{**},τ^{**}) تكون $g^{-1}(A)$ مفتوحة في $(X^*.\tau^*)$ (لأن g مستمر)، كما أن $f^{-1}(g^{-1}(A))$ مفتوحة في الفضاء (X,τ) (لأن f مستمر)، أي أن $(gof)^{-1}(A)$ مفتوحة في الفضاء (X,τ) وبحسب المبرهنة 1.5 ، فإن gof مستمر.

2.§- التوابع المفتوحة والمغلقة والهوميومورفيزم:

2.1- تعريف:

ليكن $f:(X,\tau)\to(X^*,\tau^*)$ تابعاً ما.

- نقول عن f إنه تابع مفتوح ، إذا كانت الصورة المباشرة لكل مجموعة مفتوحة في (X,τ) هي مجموعة مفتوحة في (X^*,τ^*).
- نقول عن f إنه تابع مغلق ، إذا كانت الصورة المباشرة لكل مجموعة مغلقة في (X,τ) هي مجموعة مغلقة في (X^*,τ^*).
- نقول عن f إنه هوميومورفيزم ، إذا كان f تابع تقابل ومستمراً، وكان معكوسه f^{-1} مستمراً.

2.2- ملاحظات وأمثلة:

1) لتكن $X=\{1,2,3,4\}$, $\tau_X=\{\varnothing,X,\{1\},\{1,2\}\}$

و $Y=\{a,b,c\}$, $\tau_Y=\{\varnothing,Y,\{a\}\}$

وليكن $f:X\to Y$ تابعاً معرفاً بـ $f(1)=f(2)=a$ و $f(3)=b$ و $f(4)=c$.

عندئذ نجد أن f مستمر، لأن الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة.

و f مفتوح ، لأن $f(\varnothing)=\varnothing$, $f(X)=Y$, $f(\{1\})=\{a\}$, $f(\{1,2\})=\{a\}$

وهو أيضاً مغلق ،ولكنه ليس هوميومورفيزم ، لأنه ليس تابع تقابل.

2) إذا كان $f:(X,\tau)\to(X^*,\tau^*)$ هوميومورفيزم ، فإننا نقول إن (X,τ) هوميومورف لـ (X^*,τ^*) ، ونكتب $(X^*,\tau^*)\sim(X,\tau)$.

ويبرهن على أن العلاقة ~ تحقق شروط علاقة تكافؤ على أي أسرة من الفضاءات التبولوجية.

3) $f:(X,\tau_{dis}) \to (X,\tau_{ind})$ هو تابع مستمر، ولكنه غير مفتوح وغير مغلق حالما تكون X حاوية على أكثر من نقطة. وأياً كانت قاعدة الربط لـ f.

4) التابع المطابق $I_X:(X,\tau) \to (X,\tau)$ هو هوميومورفيزم.

5) إذا كان $f:(X,\tau) \to (X^*,\tau^*)$ تابعاً مستمراً، فإن f يكون هوميومورفيزم ، إذا وفقط ، إذا وجد تابع مستمر $g:(X^*,\tau^*) \to (X,\tau)$ بحيث يكون

$$fog = I_{X^*} \quad , \quad gof = I_X$$

لأن وجود g هذا يعني أن f هو تابع تقابل وأن $f^{-1} = g$.

2.3- مبرهنة:

إذا كان $f:(X,\tau) \to (X^*.\tau^*)$ تابعاً ما فإنه يتحقق:

1- يكون f مستمراً ومغلقاً ، إذا وفقط ، إذا كان $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ لكل مجموعة جزئية A من X.

2- يكون f مستمراً ومفتوحاً ، إذا وفقط ، إذا كان $f^{-1}(\bar{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$ لكل مجموعة جزئية B من X^*.

البرهان:

1- $\Leftarrow$: لتكن A مجموعة جزئية من X ، عندئذً نجد أن :

$$A \subseteq \bar{A} \Rightarrow f(A) \subseteq f(\bar{A}) \Rightarrow \overline{f(A)} \subseteq \overline{f(\bar{A})}$$

ولكن $\bar{A}$ مغلقة و f مغلق ، ولذلك فإن $f(\bar{A})$ مغلقة ، فهي تساوي لصاقتها، ومنه :

$$\overline{f(A)} \subseteq f(\bar{A}) \qquad \text{(I)}$$

لدينا أيضاً:

$$f(A) \subseteq \overline{f(A)} \Rightarrow A \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right) \Rightarrow \bar{A} \subseteq \overline{f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)}$$

ولكن $\overline{f(A)}$ مغلقة و f مستمر ، وبالتالي $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ مغلقة ، فهـي تـساوي لصاقتها ، ومنه :

$$\bar{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right) \Rightarrow f\left(\bar{A}\right) \subseteq \overline{f(A)} \qquad \text{(II)}$$

من (I) و (II) ينتج أن $f\left(\bar{A}\right)=\overline{f(A)}$ ، لكل مجموعة جزئية A من X.

$\Rightarrow$: لـتكن B مجموعـة مغلقـة في $\left(X^*, \tau^*\right)$، فـإن $f^{-1}(B)$ مجموعـة جزئيـة مـن X.

وبحسب الفرض $f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)}$

$$\Rightarrow f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \bar{B} = B \Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B)$$
$$\Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)$$

إذن $f^{-1}(B)$ مغلقة في (X, τ) ، وبالتالي f مستمر.

لتكن A مجموعة مغلقة في (X, τ) ، وبحسب الفـرض $\overline{f(A)} \subseteq f\left(\bar{A}\right)$، ولكـن $A = \bar{A}$

$$\Rightarrow \overline{f(A)} \subseteq f(A) \Rightarrow \overline{f(A)} = f(A)$$

إذن f(A) مغلقة في $\left(X^*, \tau^*\right)$، وبالتالي f مغلق.

-2 $\Leftarrow$: لتكن B مجموعة جزئية من X^*، عندئذ نجد أن :

$$B \subseteq \bar{B} \Rightarrow f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}\left(\bar{B}\right) \Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} \subseteq \overline{f^{-1}\left(\bar{B}\right)}$$

ولكن $\bar{B}$ مغلقة و f مستمر، وبالتالي $f^{-1}\left(\bar{B}\right)$ مغلقة، فهي تساوي لصاقتها

$$\Rightarrow \quad \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\bar{B}\right) \qquad \text{(I)}$$

لدينا أيضاً:

$$f^{-1}(B) \subseteq \overline{f^{-1}(B)} \Rightarrow X \setminus \overline{f^{-1}(B)} \subseteq X \setminus f^{-1}(B)$$
$$\Rightarrow f\left(X \setminus \overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq f\left(X \setminus f^{-1}(B)\right) = f\left(f^{-1}(X^* \setminus B)\right) \subseteq X^* \setminus B$$
$$\Rightarrow \left(f(X \setminus \overline{f^{-1}(B)})\right)^{o} \subseteq \left(X^* \setminus B\right)^{o} = X^* \setminus \bar{B}$$

ولكن $X\setminus\overline{f^{-1}(B)}$ مفتوحة و f مفتوح، وبالتالي $f\left(X\setminus\overline{f^{-1}(B)}\right)$ مفتوحة، فهي تساوي داخليتها ، وبالتالي $f\left(X\setminus\overline{f^{-1}(B)}\right)\subseteq X^*\setminus\bar{B}$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(f(X\setminus\overline{f^{-1}(B)})\right)\subseteq f^{-1}\left(X^*\setminus\bar{B}\right)$$

$$\Rightarrow X\setminus\overline{f^{-1}(B)}\subseteq X\setminus f^{-1}(\bar{B})\Rightarrow f^{-1}(\bar{B})\subseteq\overline{f^{-1}(B)} \qquad \text{(II)}$$

من (I) و (II) ينتج أن $f^{-1}(\bar{B})=\overline{f^{-1}(B)}$

$\Rightarrow$: لتكن B مجموعة مغلقة في (X^*,τ^*)، وبحسب الفرض $\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\bar{B})$

$$\Rightarrow f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\subseteq f\left(f^{-1}(\bar{B})\right)\subseteq\bar{B}=B \quad\Rightarrow\quad f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right)\subseteq f^{-1}(B)$$

$$\Rightarrow\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(B) \quad\Rightarrow\quad \overline{f^{-1}(B)}=f^{-1}(B)$$

إذن $f^{-1}(B)$ مغلقة في (X,τ)، وبالتالي f مستمر.

لتكن A مجموعة مفتوحة في (X,τ)، فإن $X^*\setminus f(A)$ مجموعة جزئية من X^*.

وبحسب الفرض $f^{-1}\left(\overline{X^*\setminus f(A)}\right)\subseteq\overline{f^{-1}\left(X^*\setminus f(A)\right)}$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(X^*\setminus(f(A))^{o}\right)\subseteq\overline{X\setminus f^{-1}(f(A))}$$

$$\Rightarrow X\setminus f^{-1}\left((f(A))^{o}\right)\subseteq X\setminus\left(f^{-1}(f(A))\right)^{o}$$

$$\Rightarrow\left(f^{-1}(f(A))\right)^{o}\subseteq f^{-1}\left((f(A))^{o}\right)\Rightarrow A=A^{o}\subseteq f^{-1}\left((f(A))^{o}\right)$$

$$\Rightarrow f(A)\subseteq f\left(f^{-1}\left((f(A))^{o}\right)\right)\subseteq(f(A))^{o}$$

$$\Rightarrow f(A)=(f(A))^{o}$$

إذن f(A) مفتوحة في (X^*,τ^*)، وبالتالي f مفتوح.

2.4- مبرهنة:

إذا كان $f:(X,\tau)\to(X^*,\tau^*)$ تابع تقابل، فإن الشروط التالية متكافئة:

1) f هوميومورفيزم.

2) f مستمر ومفتوح.

3) f مستمر ومغلق.

البرهان:

$2 \Leftarrow 1$: f مستمر، ولنبرهن على أنه مفتوح.

إذا كانت A مجموعة مفتوحة في (X,τ)، فإنـه ينـتج عـن كـون $f^{-1}: X^* \to X$ مستمر أن $\left(f^{-1}\right)^{-1}(A)$ مجموعة مفتوحة في $\left(X^*,\tau^*\right)$ ، أي أن $f(A)$ مجموعـة مفتوحـة، ولذلك فإن f تابع مفتوح.

$3 \Leftarrow 2$: إذا كانت F مجموعة مغلقة في (X,τ)، فإن $X\setminus F$ مجموعة مفتوحة في (X,τ)، ولـذلك فـإن $f(X\setminus F)$ مفتوحـة في $\left(X^*,\tau^*\right)$، لأن f تـابع مفتـوح، أي أن $X^*\setminus f(F)$ مفتوحة، وبالتالي $f(F)$ مغلقة في $\left(X^*,\tau^*\right)$، ومنه فإن f تابع مغلق.

$1 \Leftarrow 3$: لنبرهن على أن $f^{-1}: X^* \to X$ تابع مستمر.

لـتكن B مجموعـة مغلقـة في (X,τ)، وبمـا أن f مغلـق، فـإن $f(B)$ مغلقـة في $\left(X^*,\tau^*\right)$، أي أن $\left(f^{-1}\right)^{-1}(B)$ مغلقة في $\left(X^*,\tau^*\right)$.

إذن الصورة العكسية وفق f^{-1} لأي مجموعة مغلقة هي مجموعة مغلقـة، ولـذلك فإن f^{-1} مستمر، وبالتالي f هوميومورفيزم.

2.5- مبرهنة:

إذا كان $f:(X,\tau) \to \left(X^*,\tau^*\right)$ تابع تقابل، فإن الشروط التالية متكافئة :

1- f هوميومورفيزم.

2- لكل مجموعة جزئية A من X لدينا $f\left(\bar{A}\right)=\overline{f(A)}$.

3- لكل مجموعة جزئية B من X^* لدينا $f^{-1}\left(\bar{B}\right)=\overline{f^{-1}(B)}$.

البرهان:

ينتج من التكافؤات: (الواردة في المبرهنتين 2.3 و 2.4) أن :

f هوميومورفيزم $\Leftrightarrow$ f مستمر ومغلق $\Leftrightarrow$ $f\left(\bar{A}\right)=\overline{f\left(A\right)}$ لكل مجموعة جزئية A من X.

f هوميومورفيزم $\Leftrightarrow$ f مستمر ومفتوح $\Leftrightarrow$ $f^{-1}\left(\bar{B}\right)=\overline{f^{-1}(B)}$ لكل مجموعة جزئية B من X^*.

2.6- ملاحظات وأمثلة:

1) إذا كانت $A=]a,b[$ حيث $a\neq b$ و $\left(A,\tau_A\right)$ الفضاء الجزئي من $\left(\mathbb{R},\tau_u\right)$، وإذا كانت $B=]0,1[$ و $\left(B,\tau_B\right)$ الفضاء الجزئي من $\left(\mathbb{R},\tau_u\right)$، وكان $f:A\rightarrow B$ معرفاً بـ $f\left(x\right)=\frac{x-a}{b-a}$، فإن f هوميومورفيزم، لأن f تابع تقابل، وهو مستمر ومفتوح.

2) إذا كانت $A=]a,+\infty[$، وكان $\left(A,\tau_A\right)$ الفضاء الجزئي من $\left(\mathbb{R},\tau_u\right)$، وكانت $B=]1,+\infty[$ و $\left(B,\tau_B\right)$ الفضاء الجزئي من $\left(\mathbb{R},\tau_u\right)$، وكان $f:A\rightarrow B$ معرفاً بـ $f(x)=x-a+1$ ، فإن f هوميومورفيزم.

3) إذا كانت $A=]0,1[$ و $\left(A,\tau_A\right)$ الفضاء الجزئي من $\left(\mathbb{R},\tau_u\right)$، وإذا كانت $B=]1,+\infty[$ و $\left(B,\tau_B\right)$ الفضاء الجزئي من $\left(\mathbb{R},\tau_u\right)$، فإن $f:A\rightarrow B$ المعرف بـ $f(x)=\frac{1}{x}$ هوميومورفيزم.

4) إذا كانت $A=]a,+\infty[$ و $\left(A,\tau_A\right)$ الفضاء الجزئي من $\left(\mathbb{R},\tau_u\right)$، وكانت $B=]-\infty,-a[$ و $\left(B,\tau_B\right)$ الفضاء الجزئي من $\left(\mathbb{R},\tau_u\right)$، فإن $f:A\rightarrow B$ المعرف بـ $f(x)=-x$ هوميومورفيزم.

5) إذا كانت $B=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ و $\left(B,\tau_B\right)$ الفضاء الجزئي من $\left(\mathbb{R},\tau_u\right)$، فإن $f:\left(\mathbb{R},\tau_u\right)\rightarrow\left(B,\tau_B\right)$ المعرف بـ $f\left(x\right)=\operatorname{arctg}x$ هوميومورفيزم.

6) إذا كانت $B=]-1,1[$ و $\left(B,\tau_B\right)$ الفضاء الجزئي من $\left(\mathbb{R},\tau_u\right)$، فإن $f:\left(\mathbb{R},\tau_u\right)\rightarrow\left(B,\tau_B\right)$ المعرف بـ $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ هوميومورفيزم.

7) إذا كـــــان $f:(X,\tau)\to(X^*,\tau^*)$ هوميومـــــورفيزم، فــــإن معكوســــه $f^{-1}:(X^*,\tau^*)\to(X,\tau)$ هوميومورفيزم.

§3.- فضاءات الضرب التبولوجية:

إن تعريف فضاء الضرب لفضاءات تبولوجية يعني تعريف تبولوجيا على مجموعة الضرب الديكارتي للمجموعات المبنية عليها تلك الفضاءات . ولتوضيح المفهوم سنعرفه، أولاً، من أجل فضائين تبولوجيين، ثم ندرس فضاء الضرب بشكل عام، أي من أجل أسرة ما (منتهية أو غير منتهية) من الفضاءات التبولوجية.

وقبل ذلك سنعطي تعريف تابع الإسقاط.

3.1- تعريف:

ليكن $X=\prod_{i\in I}X_i$ الضرب الديكارتي لأسرة المجموعات $\{X_i\}_{i\in I}$ و X_j المركبة j له.

من أجل كل j من I نعرف التابع: $Pr_j:\prod_{i\in I}X_i\to X_j$ بالشكل

$$Pr_j\left((x_i)_{i\in I}\right)=x_j$$

نسمي التابع Pr_j بتابع الإسقاط على المركبة X_j.

- نلاحظ أن $Pr_j\left(\prod_{i\in I}X_i\right)=X_j$ ، أي أن توابع الإسقاط تكون توابع غامرة.

3.2- مثال: لنأخذ $X=\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ، فإن $Pr_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ حيث $Pr_1(x_1,x_2)=x_1$ و $Pr_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ حيث $Pr_2(x_1,x_2)=x_2$. فمثلاً $Pr_1(3,2)=3$ و $Pr_2(3,2)=2$

3.3- ملاحظة: إذا كانت A مجموعة جزئية من المجموعة X_j وأخذنا تابع الإسقاط

$$Pr_j:\prod_{i\in I}X_i\to X_j$$

فإن

$$Pr_j^{-1}(A) = X_1 \times X_2 \times ... \times X_{j-1} \times A \times X_{j+1} \times ...$$

البرهان:

لنضع $B = X_1 \times X_2 \times ... \times X_{j-1} \times A \times X_{j+1} \times ...$

من أجل أي عنصر $x = (x_i)_{i\in I}$ من $Pr_j^{-1}(A)$، فإن $x_j = Pr_j(x) \in A$

ومنه $x \in B$، وبالتالي $Pr_j^{-1}(A) \subseteq B$.

وبما أن $Pr_j(B) = A$، فإن $B \subseteq Pr_j^{-1}(A)$، ومنه ينتج المطلوب.

3.4- فضاء الضرب لفضائين تبولوجيين:

ليكن (X_1, τ_1) و (X_2, τ_2) فضائين تبولوجيين، ولنضع $X = X_1 \times X_2$.

لنأخذ المجموعة

$$S = \{T_1 \times X_2 \ : \ T_1 \in \tau_1\} \cup \{X_1 \times T_2 \ : \ T_2 \in \tau_2\}$$

واضح أن S أسرة من المجموعات الجزئية من $X = X_1 \times X_2$، وأن X تساوي اجتماع عناصر من S، وبالتالي (حسب مبرهنة 7.8 من الفصل الأول) فإن S تكون تحت أساس لتبولوجيا τ على $X = X_1 \times X_2$، وبالتالي $S[\overset{n}{\cap}]$ أسرة كل التقاطعات المنتهية لعناصر S والتي تعطى بالشكل:

$$S[\overset{n}{\cap}] = \{\, T_1 \times T_2 \mid T_1 \in \tau_1 \ , \ T_2 \in \tau_2 \,\} = \mathscr{B}$$

تكون أساساً لتبولوجيا τ على مجموعة الضرب $X = X_1 \times X_2$، والتبولوجيا τ هي الأسرة المؤلفة من كل المجموعات الجزئية من $X_1 \times X_2$ التي كلٍ منها يساوي لاجتماع عناصر من الأساس $\mathscr{B}$.

3.5- تعريف:

نسمي التبولوجيا τ ، المعرفة في الفقرة السابقة، بتبولوجيا الضرب على $X = X_1 \times X_2$ ، ونسمي الفضاء التبولوجي الناتج (x,τ) بفضاء الضرب للفضائين التبولوجيين (X_1,τ_1) و (X_2,τ_2)، أو اختصاراً بفضاء الضرب.

3.6- ملاحظات:

1- وجدنا أن عناصر تحت الأساس S لفضاء الضرب $X_1 \times X_2$ هي من الشكل $T_1 \times X_2$ و $X_1 \times T_2$.

ولكن $T_1 \times X_2 = Pr_1^{-1}(T_1) \quad , \quad X_1 \times T_2 = Pr_2^{-1}(T_2)$

حيث

$Pr_i \ : \ X_1 \times X_2 \to X_i \quad , \quad i = 1,2$ تابع الإسقاط .

هذا يمكننا من كتابة تحت الأساس S بالشكل:

$$S = \left\{ Pr_i^{-1}(T_i) \ \mid \ T_i \in \tau_i \ , \ i = 1,2 \right\}$$

أي أن عناصر S هي الصور العكسية وفق تابع الإسقاط Pr_i لعناصر التبولوجيا τ_1 والتبولوجيا τ_2، وبما أن عناصر تحت الأساس S هي مجموعات مفتوحة في فضاء الضرب $X_1 \times X_2$، فإن الكلام السابق يعني أن الصورة العكسية وفق تابع الإسقاط Pr_i لأي مجموعة مفتوحة في المستقر X_i هي مجموعة مفتوحة في المنطلق $X_1 \times X_2$ ، أي أن تابع الإسقاط Pr_i حيث $i = 1,2$ هو تابع مستمر.

2- إذا كان (X,τ)فضاء الضرب للفضائين (X_1,τ_1) و (X_2,τ_2)، وكانت A مجموعة جزئية غير خالية من X ، فإن النقطة $x = (x_1, x_2)$ من A تكون نقطة داخلية في A، إذا وفقط، إذا وجدت مجموعة مفتوحة $T \in \tau$ بحيث يكون $x \in T \subseteq A$. وبحسب تعريف أساس لتبولوجيا الضرب يوجد عنصر B من الأساس $\mathcal{B}$ بحيث يكون $x \in B \subseteq T$.

إذن:

$$\exists\, B \in \mathscr{B}\ ;\ x \in B \subseteq A \iff x \in A^{o}$$

أو

$$\exists\, T_i \in \tau_i\ ;\ (x_1, x_2) \in T_1 \times T_2 \subseteq A \iff (x_1, x_2) \in A^{o}$$

وبما أن A تكون مفتوحة، إذا وفقط، إذا كانت $A = A^{o}$، فإن A مفتوحة، إذا وفقط ، إذا كان لكل نقطة $x = (x_1, x_2)$ من A يوجد $T_i \in \tau_i$ حيث $i = 1,2$ بحيث إن $x_i \in T_i$ وبحيث $(x_1, x_2) \subseteq T_1 \times T_2 \subseteq A$.

3.7- مبرهنة:

ليكن (X, τ) فضاء الضرب للفضائين (X_1, τ_1) و (X_2, τ_2)، ولتكن $A_1 \subseteq X_1$ و $A_2 \subseteq X_2$. عندئذ:

a) $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$

b) إذا كان (A_i, τ_{A_i}) الفضاء الجزئي من (X_i, τ_i) من أجل $i = 1,2$، فإن الفضاء الجزئي $(A_1 \times A_2, \tau_{A_1 \times A_2})$ من (X, τ) يساوي فضاء الضرب للفضائين (A_1, τ_{A_1}) و (A_2, τ_{A_2}) .

البرهان:

a) لتكن $x = (x_1, x_2)$ نقطة من $\overline{A_1 \times A_2}$. عندئذ:

$T \cap (A_1 \times A_2) \neq \varnothing$، أياً كانت المجموعة المفتوحة T من (X, τ)، وبحيث $T \ni x$،

وينتج عن هذا أنه، أياً كانت $T_1 \ni \tau_1$ و $T_2 \ni \tau$، بحيث $T_1 \ni x_1$, $T_2 \ni x_2$ ، فإن

$$(T_1 \times T_2) \cap (A_1 \times A_2) \neq \varnothing$$

وبحسب خواص الضرب الديكارتي للمجموعات (4.3) يكون

$$(T_1 \cap A_1) \times (T_2 \cap A_2) \neq \varnothing$$

وبحسب خواص الضرب الديكارتي للمجموعات أيضاً يكون

$$T_2 \cap A_2 \neq \varnothing \qquad T_1 \cap A_1 \neq \varnothing$$

وهذا يعني أن $x_1 \in \overline{A_1}$ و $x_2 \in \overline{A_2}$ ، وبالتالي $x = (x_1, x_2) \in \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$. إذن

$$\overline{A_1 \times A_2} \subseteq \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$$

وبالعكس فإنه إذا كانت $x = (x_1, x_2) \in \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$، فإن $x_1 \in \bar{A}_1 \ , \ x_2 \in \bar{A}_2$.

فإذا فرضنا أن $x \notin \overline{A_1 \times A_2}$، فإننا سنجد مجموعة مفتوحة T من τ بحيث إن

$$T \cap (A_1 \times A_2) = \varnothing \quad و \quad x \in T$$

ولكن من تعريف الأساس ينتج أنه يوجد $B \in \mathscr{B}$ بحيث إن $x \in B \subseteq T$، ولذلك فإن $B \cap (A_1 \times A_2) = \varnothing$ ، ومن تعريف أساس تبولوجيا الضرب، الوارد في (3.4) ، نجد أنه توجد $T_1 \in \tau \ , T_2 \in \tau$ بحيث إن $B = T_1 \times T_2$، وبما أن $x = (x_1, x_2) \in B$، فإن

$$x_2 \in T_2 \in \tau_2 \quad , \quad x_1 \in T_1 \in \tau_1$$

ولدينا:

$$(T_1 \cap A_1) \times (T_2 \cap A_2) = \varnothing \text{ أي ،} \varnothing = (T_1 \times T_2) \cap (A_1 \times A_2)$$

ولكن هذا يعني أنه:

إما $T_1 \cap A_1 = \varnothing$، وبالتالي $x_1 \notin \bar{A}_1$ (تناقض)

أو $T_2 \cap A_2 = \varnothing$، وبالتالي $x_2 \notin \bar{A}_2$ (تناقض)

والنتيجة هي أن $\overline{A_1 \times A_2} = \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$

2) لتكن $T \in \tau_{A_1 \times A_2}$، عندئذ يوجد $u \in \tau$ بحيث يكون $T = u \cap (A_1 \times A_2)$ أو $T = (u \times A_1) \cap (u \times A_2)$، وبحسب تعريف الأساس تكون:

$$u = \bigcup_{i \in I} B_i \quad ; \quad B_i \in \mathscr{B}$$

وبحسب تعريف أساس تبولوجيا الضرب نجد أن:

$B_i = T_{i_1} \times T_{i_2}$ حيث $T_{i_1} \in \tau_1$ و $T_{i_2} \in \tau_2$ لكل $i \in I$، ومنه

$$u = \bigcup_{i\in I} \left(T_{i_1} \times T_{i_2}\right)$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
T &= \left[\bigcup_{i\in I}\left(T_{i_1} \times T_{i_2}\right)\right] \cap \left(A_1 \times A_2\right) \\
&= \bigcup_{i\in I}\left[\left(T_{i_1} \times T_{i_2}\right) \cap \left(A_1 \times A_2\right)\right] \\
&= \bigcup_{i\in I}\left[\left(T_{i_1} \cap A_1\right) \times \left(T_{i_2} \cap A_2\right)\right] \\
&= \left[\bigcup_{i\in I}\left(T_{i_1} \cap A_1\right)\right] \times \left[\bigcup_{i\in I}\left(T_{i_2} \cap A_2\right)\right]
\end{aligned}$$

ولكن $T_{i_1} \in \tau_1$ يعني أن $T_{i_1} \cap A_1 \in \tau_{A_1}$، ولذلك فإن $\bigcup_{i\in I}\left(T_{i_1} \cap A_1\right) \in \tau_{A_1}$.

بالمثل فإن $\bigcup_{i\in I}\left(T_{i_2} \cap A_2\right) \in \tau_{A_2}$.

وبالتالي فإن T هي من أساس تبولوجيا الضرب للفضائين الجزئيين $\left(A_1, \tau_{A_1}\right)$ و $\left(A_2, \tau_{A_2}\right)$، وبالتالي فإن T من تبولوجيا الضرب للفضائين $\left(A_1, \tau_{A_1}\right)$ و $\left(A_2, \tau_{A_2}\right)$.

العكس: إذا كانت T من تبولوجيا الضرب للفضائين $\left(A_1, \tau_{A_2}\right)$ و $\left(A_2, \tau_{A_2}\right)$، فإن $T = \bigcup_{i\in I} B_i$ حيث B_i هي من أساس تبولوجيا الضرب لهذين الفضائين،

أي أن $B_i = T_{i_1} \times T_{i_2}$ حيث $T_{i_1} \in \tau_{A_1}$, $T_{i_2} \in \tau_{A_2}$، ولذلك يوجد u_{i_1} من τ_1 و u_{i_2} من τ_2 بحيث إن $T_{i_1} = u_{i_1} \cap A_1$ و $T_{i_2} = u_{i_2} \cap A_2$، ومنه

$$B_i = \left(u_{i_1} \cap A_1\right) \times \left(u_{i_2} \cap A_2\right) = \left(u_{i_1} \times u_{i_2}\right) \cap \left(A_1 \times A_2\right)$$

ولكن $u_{i_1} \times u_{i_2} \in \tau_1 \times \tau_2$، ولذلك فإن $u_{i_1} \times u_{i_2} \in \tau$، وبالتالي $B_i \in \tau_{A_1 \times A_2}$

لكل $i \in I$، وبالتالي $T = \bigcup_{i \in I} B_i \in \tau_{A_1 \times A_2}$.

إذاً $\tau_{A_1 \times A_2}$ تساوي تبولوجيا الضرب للفضائين (A_1, τ_{A_1}) و (A_2, τ_{A_2})

3.8- مبرهنة:

إذا كان (X, τ) فضاء الضرب للفضائين (X_1, τ_1) و (X_2, τ_2)، وكانت $A_1 \subseteq X_1$ و $A_2 \subseteq X_2$، فإن:

1) $(A_1 \times A_2)^{\circ} = \overset{\circ}{A}_1 \times \overset{\circ}{A}_2$

2) $(A_1 \times A_2)' = (A_1' \times \overline{A}_2) \cup (\overline{A}_1 \times A_2')$

3) $\mathrm{bd}(A_1 \times A_2) = (\mathrm{bd}A_1 \times \overline{A}_2) \cup (\overline{A}_1 \times \mathrm{bd}A_2)$

البرهان:

1) من الملاحظة 2 من 3.6 نجد أنه، إذا كانت $(x_1, x_2) \in X = X_1 \times X_2$، فإن: $(x_1, x_2) \in (A_1 \times A_2)^{\circ}$، إذا وفقط، إذا وجدت $T_1 \in \tau_1$ و $T_2 \in \tau_2$ بحيث يكون $x_1 \in T_1 \subseteq A_1$, $x_2 \in T_2 \subseteq A_2$. وهذا يعني أن $x_1 \in \overset{\circ}{A}_1$, $x_2 \in \overset{\circ}{A}_2$ ، أي أن $(x_1, x_2) \in (A_1 \times A_2)^{\circ}$، إذا وفقط، إذا $(x_1, x_2) \in \overset{\circ}{A}_1 \times \overset{\circ}{A}_2$. ومنه $(A_1 \times A_2)^{\circ} = \overset{\circ}{A}_1 \times \overset{\circ}{A}_2$.

2) من تعريف نقطة التراكم وتعريف النقطة اللاصقة نجد أن:

$$(x_1, x_2) \in (A_1 \times A_2)' \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in \overline{(A_1 \times A_2) \setminus \{(x_1, x_2)\}}$$

ولكن من خواص الضرب الديكارتي للمجموعات نجد أن:

$$A_1 \times A_2 \setminus \{(x_1, x_2)\} = \left((A_1 \setminus \{x_1\}) \times A_2 \right) \cup \left(A_1 \times (A_2 \setminus \{x_2\}) \right)$$

ولذلك فإن:

$$(x_1,x_2)\in (A_1\times A_2)' \Leftrightarrow (x_1,x_2)\in \overline{\left((A_1\setminus\{x_1\})\times A_2\right)\cup\left(A_1\times(A_2\setminus\{x_2\})\right)}$$

$$\Leftrightarrow (x_1,x_2)\in \overline{\left((A_1\setminus\{x_1\})\times A_2\right)}\cup\left(\overline{A_1\times(A_2\setminus\{x_2\})}\right)$$

$$\text{(بحسب المبرهنة السابقة)} \Leftrightarrow (x_1,x_2)\in \left(\overline{A_1\setminus\{x_1\}}\times\bar{A}_2\right)\cup\left(\bar{A}_1\times\overline{(A_2\setminus\{x_2\})}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x_1,x_2)\in \left(A_1'\times\bar{A}_2\right)\cup\left(\bar{A}_1\times A_2'\right)$$

3) يبرهن بنفس طريقة (2).

3.9- فضاء الضرب بشكل عام:

نأتي الآن لدراسة فضاء الضرب بشكل عام، أي من أجل أسرة ما (منتهية أو غير منتهية) من الفضاءات التبولوجية.

لتكن $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ أسرة من الفضاءات التبولوجية، ولنضع $X=\prod_{i\in I} X_i$.

ولنأخذ الأسرة S المؤلفة من جميع المجموعات التي من الشكل $\prod_{i\in I} T_i$ حيث $T_i\in\tau_i$ وحيث إن جميع المركبات T_i تساوي X_i ماعدا واحدة منها، تكون T_j ، أي أن:

$$\prod_{i\in I} T_i = X_1\times X_2\times\ldots\times X_{j-1}\times T_j\times X_{j+1}\times\ldots$$

واضح أن S أسرة من المجموعات الجزئية من $X=\prod_{i\in I} X_i$، وتشكل تحت أساس لتبولوجيا τ على مجموعة الضرب $\prod_{i\in I} X_i$.

وبما أن $\Pr_j^{-1}(T_j) = X_1\times X_2\times\ldots\times X_{j-1}\times T_j\times X_{j+1}\times\ldots$

حيث $\Pr_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ تابع الإسقاط على المركبة X_j، فإنه يمكن كتابة تحت الأساس S بالشكل:

$$S=\{\Pr_i^{-1}(T_i)\quad ;\quad \forall\, T_i\in\tau_i\ ,\ \forall i\in I\}$$

إن $S[\overset{n}{\cap}]$ أسرة كل التقاطعات المنتهية لعناصر S تكون مؤلفة من كل المجموعات من الشكل $\prod_{i\in I} T_i$ حيث $T_i \in \tau_i$ وحيث إن $T_i = X_i$ من أجل جميع قيم $i \in I$ ماعدا عدد منته منها، أي أن:

$$S[\overset{n}{\cap}] = \{\prod_{i\in I} T_i \ ;\ T_i \in \tau_i \ \&\ \text{ماعدا عدد منته منها } i \in I \text{ من أجل جميع قيم } T_i = X_i \} = \mathscr{B}$$

وهي تشكل أساساً لتبولوجيا τ على مجموعة الضرب $\prod_{i\in I} X_i$، وهذه التبولوجيا τ ، هي الأسرة المؤلفة من كل المجموعات الجزئية من $X = \prod_{i\in I} X_i$، التي كل منها يساوي لاجتماع عناصر من الأساس $\mathscr{B}$.

3.10- **تعريف:**

نسمي الفضاء التبولوجي $(\prod_{i\in I} X_i, \tau)$، الموضح أعلاه، بفضاء الضرب لأسرة الفضاءات التبولوجية $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$، أو اختصاراً فضاء الضرب.

3.11- **ملاحظات وأمثلة:**

1) إذا كان (X, τ) فضاء الضرب لأسرة الفضاءات التبولوجية $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$، فإننا نسمي (X_i, τ_i)، لكل $i \in I$، بفضاء عامل في فضاء الضرب (X, τ).

2) لتكن $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ أسرة من الفضاءات التبولوجية بحيث إن τ_i هي التبولوجيا الضعيفة على X_i وذلك من أجل كل $i \in I$. فإن تبولوجيا الضرب τ تطابق التبولوجيا الضعيفة على $X = \prod_{i\in I} X_i$.

البرهان:

لتكن $T = \prod_{i\in I} T_i$ مجموعة من أساس فضاء الضرب مختلفة عن X ، وبالتالي توجد $T_j \in \tau_j$ بحيث $T_j \neq X_j$.

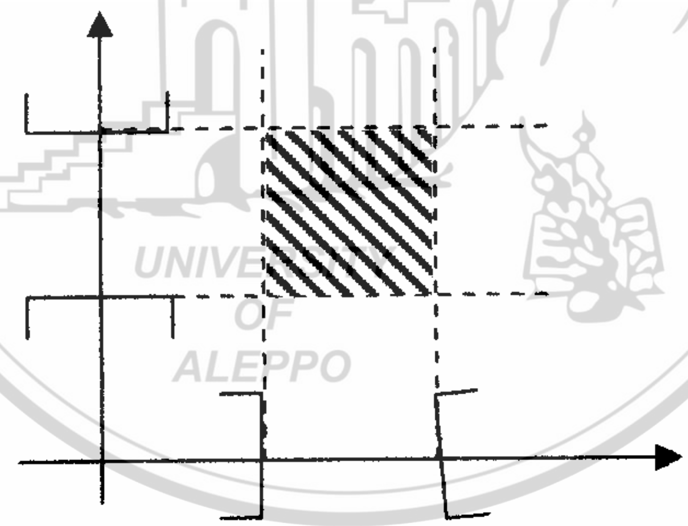
وبما أن τ_j هي التبولوجيا الضعيفة على X_j، فإن $\tau_j=\{\varnothing,X_j\}$، وبالتالي $T_j=\varnothing$، وبالتالي $T=\varnothing$.

أي أن أساس تبولوجيا الجداء τ هي الأسرة $\{\varnothing,X\}$، لذلك فإن $\tau=\{\varnothing,X\}$، أي أن τ هي التبولوجيا الضعيفة.

3) لنأخذ الفضاء العادي لـ $\mathbb{R}$ ولنشكل فضاء الضرب $\mathbb{R}^n$ الناتج عن ضرب $\mathbb{R}$ بنفسه n مرة، والذي نسميه بالفضاء الحقيقي (أو الفضاء الإقليدي) ذي n بعداً.

إن أساس فضاء الضرب $\mathbb{R}^n$ يتألف من المجموعات التي من الشكل $L_1\times L_2\times\ldots\times L_n$ حيث L_i مجالاً مفتوحاً في $\mathbb{R}$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

- في المستوى $\mathbb{R}^2$، على سبيل المثال، أسرة المستطيلات المفتوحة تشكل أساساً للفضاء التبولوجي الإقليدي ثنائي البعد $\mathbb{R}^2$. (مستطيل مفتوح في $\mathbb{R}^2$ نعني به جداء مجالين مفتوحين في $\mathbb{R}$).



3.12- مبرهنة:

لتكن $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ أسرة من الفضاءات التبولوجية. إن تابع الإسقاط $Pr_j:\prod_{i\in I}X_i\to X_j$ لفضاء الضرب $\prod_{i\in I}X_i$ على المركبة X_j هو تابع مستمر ومفتوح.

البرهان:

لتكن T_j مجموعة مفتوحة في الفضاء X_j.

إن المجموعة $Pr_j^{-1}(T_j)$ عنصر من تحت الأساس لفضاء الضرب، فهي مجموعة مفتوحة، وبالتالي Pr_j مستمر.

ثم إنه إذا كانت $T = \prod_{i\in I} T_i$ مجموعة من الأساس لفضاء الضرب $\prod_{i\in I} X_i$، فإن $Pr_j(T) = T_j$ ، وبما أن T_j مجموعة مفتوحة في (X_j, τ_j) فإن $Pr_j(T)$ مجموعة مفتوحة في (X_j, τ_j)، وبالتالي Pr_j تابع مفتوح.

3.13- مبرهنة:

لتكن $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ أسرة من الفضاءات التبولوجية، وليكن (Y, τ_Y) فضاءً تبولوجياً ما.

وليكن $f : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ تابعاً للفضاء (Y, τ_Y) في فضاء الضرب $\prod_{i\in I} X_i$.

إن التابع f يكون مستمراً، إذا وفقط ، إذا كانت جميع التوابع $\{Pr_i \, o f\}_{i\in I}$ مستمرة.

البرهان:

$\Leftarrow$: لنفرض أن f مستمراً.

بما أن Pr_i مستمر (بحسب المبرهنة السابقة)، فإن $Pr_i \, o f$ مستمر من أجل كل $i \in I$.

$\Rightarrow$: لنفرض أن $\{Pr_i \, o f\}_{i\in I}$ توابع مستمرة.

لتكن T مجموعة من تحت الأساس لفضاء الضرب $\prod_{i\in I} X_i$. ولنبرهن أن $f^{-1}(T)$ مجموعة مفتوحة في الفضاء Y، فيكون f مستمراً (كنتيجة سهلة للملاحظة 1 من 1.6).

إن $T=Pr_j^{-1}(T_j)$ حيث T_j مجموعة مفتوحة في الفضاء (X_j,τ_j)، ويكون:

$$f^{-1}(T)=f^{-1}\left(Pr_j^{-1}(T_j)\right)=\left(Pr_j\ o\ f\right)^{-1}(T_j)$$

بما أن T_j مجموعة مفتوحة و $Pr_j\ o\ f$ مستمر، فإن $\left(Pr_j\ o\ f\right)^{-1}(T_j)$ مجموعة مفتوحة، وبالتالي $f^{-1}(T)$ مجموعة مفتوحة في الفضاء Y ، وبالتالي f تابع مستمر.

3.14- مبرهنة:

لتكن $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ أسرة من الفضاءات التبولوجية، ولنأخذ فضاء الضرب $\prod_{i\in I}X_i$، عندئذ يكون:

$$\overline{\prod_{i\in I}A_i}=\prod_{i\in I}\bar{A}_i \quad ; \quad A_i\subseteq X_i\ ,\ \forall i\in I$$

البرهان:

لنضع $A=\prod_{i\in I}A_i$، ولنبرهن أن : $\bar{A}=\prod_{i\in I}\bar{A}_i$.

ليكن $x=(x_i)_{i\in I}$ عنصراً ما من $\bar{A}$.

نعلم أن تابع الإسقاط Pr_i مستمر من أجل كل $i\in I$، وبالتالي (بحسب البرهان على (1) من المبرهنة 2.3) ، فإن $Pr_i(\bar{A})\subseteq\overline{Pr_i(A)}$.

ويكون:

$$x_i=Pr_i(x)\in Pr_i(\bar{A})\subseteq\overline{Pr_i(A)}=\bar{A}_i\Rightarrow x_i\in\bar{A}_i\ ,\forall i\in I$$
$$\Rightarrow x\in\prod_{i\in I}\bar{A}_i$$

وبالتالي $\bar{A}\subseteq\prod_{i\in I}\bar{A}_i$

ولنبرهن الاحتواء المعاكس.

إذا كان $x\notin\bar{A}$، فإنه توجد مجاورة لـ x لاتتقاطع مع A ، وبالتالي يوجد عنصر من الأساس $T=\prod_{i\in I}T_i$ يحوي x وبحيث $A\cap T=\varnothing$، وبالتالي توجد مركبة T_j لـ T

بحيث يكون $A_j \cap T_j = \varnothing$، وبما أن T_j مجموعة مفتوحة في الفضاء (X_j, τ_j) وتحوي x_j، فإن $x_j \notin \overline{A}_j$، وبالتالي $x \notin \prod_{i\in I} \overline{A}_i$، وهذا يعني أن $\prod_{i\in I} \overline{A}_i \subseteq \overline{A}$، ومنه نحصل على المساواة المطلوبة .

نتيجة:

ينتج من المبرهنة السابقة أن المجموعة $A = \prod_{i\in I} A_i$ تكون مغلقة في فضاء الضرب ،إذا وفقط ، إذا كانت A_i مغلقة في الفضاء (X_i, τ_i) الحاوي لها، من أجل كل $i \in I$. أي أن ضرب مجموعات مغلقة هو دوماً مجموعة مغلقة، وذلك لأن $A = \overline{A}$، إذا وفقط ، إذا كان $\prod_{i\in I} A_i = \prod_{i\in I} \overline{A}_i$، وهذه تتحقق، إذا وفقط ، إذا كان $A_i = \overline{A}_i$ من أجل كل $i \in I$.

4.§- فضاء القسمة:

- نعلم أنه إذا كانت ρ علاقة تكافؤ على مجموعة X ، فإننا نسمي مجموعة صفوف التكافؤ، بمجموعة القسمة، ونرمز لها بـ X/ρ

أي أن $X/\rho = \{\overline{x} \;;\; x \in X\}$

ونلاحظ أن صف التكافؤ $\overline{x}$ هو عنصر من مجموعة القسمة X/ρ ، بينما يكون $\overline{x}$ مجموعة جزئية من X.

ونسمي التابع $i : X \to X/\rho$ والمعرف بالشكل $i(x) = \overline{x}$ لكل x من X بالتابع القانوني.

4.1- مبرهنة:

إذا كان (X, τ) فضاءً تبولوجياً و ρ علاقة تكافؤ على X ، و X/ρ مجموعة القسمة و $i : X \to X/\rho$ التابع القانوني، فإن أسرة كل المجموعات الجزئية من مجموعة القسمة X/ρ، والتي صورها العكسية وفق التابع القانوني i هي مجموعات مفتوحة في (X, τ)، أي الأسرة $\{ A \subseteq X/\rho \;;\; i^{-1}(A) \in \tau \}$ تشكل تبولوجيا

على مجموعة القسمة X/ρ ، نرمز لها بـ τ/ρ ، وهي أقوى تبولوجيا على X/ρ تجعل التابع القانوني i مستمراً، وبالتالي $(X/\rho,\tau/\rho)$ فضاء تبولوجي، نسميه فضاء القسمة.

البرهان:

- إذا كانت $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ أسرة من عناصر τ/ρ، فإن

$$A_\alpha \subseteq X/\rho \quad \& \quad i^{-1}(A_\alpha)\in\tau \qquad \forall\alpha\in I$$
$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \subseteq X/\rho \quad \& \quad i^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I} i^{-1}(A_\alpha)\in\tau$$
$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\in \tau/\rho$$

- ليكن A_2, A_1 عنصرين من τ/ρ، فإن

$$A_1,A_2\subseteq X/\rho \quad \& \quad i^{-1}(A_1),\, i^{-1}(A_2)\in\tau$$
$$\Rightarrow A_1\cap A_2\subseteq X/\rho \quad \& \quad i^{-1}(A_1\cap A_2)=i^{-1}(A_1)\cap i^{-1}(A_2)\in\tau$$
$$\Rightarrow A_1\cap A_2\in \tau/\rho$$

- $X/\rho\in\tau/\rho$ ، لأن $X/\rho\subseteq X/\rho \;\; \& \;\; i^{-1}(X/\rho)=X\in\tau$

$\varnothing\in\tau/\rho$ ، لأن $\varnothing\subseteq X/\rho \;\; \& \;\; i^{-1}(\varnothing)=\varnothing\in\tau$

وبالتالي τ/ρ تبولوجيا على X/ρ.

- إذا كانت A مجموعة مفتوحة في $(X/\rho,\tau/\rho)$، فإن $A\in\tau/\rho$، وبالتالي $i^{-1}(A)\in\tau$ ، أي أن $i^{-1}(A)$ مجموعة مفتوحة في (X,τ)، وبالتالي i مستمر.
- كما أن τ/ρ هي أقوى تبولوجيا على X/ρ تجعل من i مستمراً، لأنه إذا كانت τ^* تبولوجيا على X/ρ تجعل من i مستمراً، فإن $\tau^*\subseteq\tau/\rho$، لأنه: إذا كانت $T^*\in\tau^*$، فإن T^* مفتوحة في $(X/\rho,\tau^*)$، وبما أن i مستمر، فإن $i^{-1}(T^*)$ مفتوحة في (X,τ) ، أي أن $i^{-1}(T^*)\in\tau$، وبالتالي $T^*\in\tau/\rho$.

* يمكن الوصول إلى برهان هذه المبرهنة بالاعتماد على المبرهنة 6.1 في الفصل الأول

4.2- أمثلة وملاحظات:

1) إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء القسمة $(X/\rho, \tau/\rho)$، فإنه ينتج من تعريف τ/ρ أن: $A \in \tau/\rho \Leftrightarrow i^{-1}(A) \in \tau$.

2) إذا كانت F مجموعة جزئية من فضاء القسمة $(X/\rho, \tau/\rho)$، فإن F تكون مغلقة في $(X/\rho, \tau/\rho)$، إذا وفقط ، إذا كانت $i^{-1}(F)$ مغلقة في (X, τ).

البرهان:

$\Leftarrow$: إذا كانت F مغلقة في $(X/\rho, \tau/\rho)$، فإنه ينتج عن كون i مستمراً أن $i^{-1}(F)$ مغلقة في (X, τ).

$\Rightarrow$: إذا كانت $i^{-1}(F)$ مغلقة في (X, τ)، فإن $X \setminus i^{-1}(F)$ مفتوحة في (X, τ)، وبالتالي $i^{-1}((X/\rho) \setminus F)$ مفتوحة في (X, τ). وحسب (1) فإن $(X/\rho) \setminus F$ مفتوحة في $(X/\rho, \tau/\rho)$، وبالتالي F مغلقة في $(X/\rho, \tau/\rho)$.

3) إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X, τ)، وإذا عرفنا على X العلاقة ρ كما يلي:

إذا كان $x \in X \setminus A$، فإن $x \rho x$ فقط.

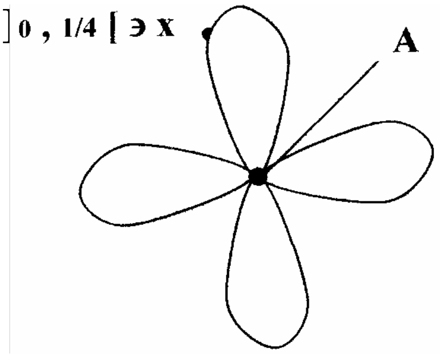
وإذا كان $x \in A$، فإن $x \rho a$ لكل $a \in A$.

واضح أن ρ علاقة تكافؤ على X ، وأن مجموعة القسمة X/ρ تتألف من الصف A وجميع الصفوف $\{x\}$ حيث $x \in X \setminus A$.

سنرمز في هذه الحالة الخاصة لمجموعة القسمة X/ρ بـ X/A ، ولتبولوجيا القسمة τ/ρ بـ τ/A، وبالتالي سنحصل على فضاء القسمة $(X/A, \tau/A)$.

ولتوضيح هذه الحالة الخاصة نعرض المثال التالي:

نأخذ الفضاء $X = [0,1]$ الجزئي من الفضاء الحقيقي $(\mathbb{R}, \tau_u)$



ونأخذ $A=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right\}$. فنجد أن X/A تتألف من الصف A وجميع الصفوف $\{x\}$ حيث $x\in X\setminus A$.

وبالتالي فإن نقط المجموعة A ينطبق بعضها على بعض في فضاء القسمة X/A لتمثل نقطة واحدة من هذا الفضاء هي الصف A، ولذلك يمكن تمثيل هذا الفضاء بالشكل الجانبي.

4) لنأخذ الفضاء الحقيقي $(\mathbb{R},\tau_u)$، ولنعرف على $\mathbb{R}$ علاقة تكافؤ ρ بالشكل:

$$x\rho y \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Q} \qquad \forall\, x,y\in\mathbb{R}$$

ليكن x عنصر ما من $\mathbb{R}$، فإن صف التكافؤ الممثل له هو:

$$\begin{aligned}\bar{x}&=\{y\in\mathbb{R}\ ;\ y\rho x\}\\ &=\{y\in\mathbb{R}\ ;\ y-x\in\mathbb{Q}\}\\ &=\{x+q\ ;\ \forall\, q\in\mathbb{Q}\}=x+\mathbb{Q}\end{aligned}$$

وبالتالي مجموعة القسمة هي:

$$\mathbb{R}/\rho=\{\bar{x}\ ;\ x\in\mathbb{R}\}=\{x+\mathbb{Q}\ ;\ x\in\mathbb{R}\}$$

إن تبولوجيا القسمة على $\mathbb{R}/\rho$ تطابق التبولوجيا الضعيفة (برهن على ذلك)، أي أن $\tau_u/\rho=\{\varnothing\ ,\ \mathbb{R}/\rho\}$

تمارين غير محلولة

1. لتكن $X=[0,2]\cup[3,10]$، وليكن التابع $f:\ (X,\tau_u)\to(\mathbb{R},\tau_u)$ معرفاً بـ:

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \forall \quad o\le x\le 2 \\ 6 & \forall \quad 3\le x\le 8 \\ 10 & \forall \quad 8<x\le 10 \end{cases}$$

برهن على أن f مستمر في كل نقطة من نقط X إلاّ في النقطة $a = 8$ ، وبشكل خاص برهن على أن f مستمر في النقطة $x = 2$.

2. لتكن $X = \{\ a,b,c\ \}$ خاضعة للتبولوجيا $\tau_X=\{\varnothing,X,\{a\},\{b,c\}\}$، ولتكن $Y=\{x,y,z\}$ خاضعة للتبولوجيا $\tau_Y=\{\varnothing,Y,\{y\},\{z\},\{y,z\}\}$، وليكن التابع $f:\ (X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ معرفاً بـ:

$$f(c)=z \quad , \quad f(b)=z \quad , \quad f(a)=x$$

هل f تابع مستمر؟. أوجد جميع التوابع المستمرة من X في Y.

3. ليكن $f:(\mathbb{Z},\tau_u)\to(\mathbb{Z},\tau_u)$ حيث $(\mathbb{Z},\tau_u)$ هو الفضاء الجزئي من $(\mathbb{R},\tau_u)$. معرفاً بـ : $f(x) = 2x$ لكل x من $\mathbb{Z}$. هل f تابع مستمر؟ ولماذا؟

4. ليكن $f:\ (X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ تابعاً مستمراً، ولتكن $A\subseteq X$ ولتكن $a\in A'$. برهن على أن $f(a)\in f(A)\cup(f(A))'$، وهات مثالاً تبين فيه أن $f(a)\notin(f(A))'$.

5. ليكن $f:(X,\tau_X)\to(\mathbb{R},\tau_u)$ تابعاً ما. برهن على أن f يكون مستمراً، إذا وفقط ، إذا لكل a من $\mathbb{R}$ تكون المجموعتان $\{x\in X\ ;\ f(x)<a\}$ و $\{x\in X\ ;\ f(x)>a\}$ مفتوحتين في (X,τ_X).

6. لتكن $X=\{a,b,c\}$ خاضعة للتبولوجيا $\tau_X=\{\varnothing,X,\{a\},\{b,c\}\}$، ولتكن $Y=\{x,y,z\}$ خاضعة للتبولوجيا $\tau_Y=\{\varnothing,Y,\{y\}\}$، وليكن التابع $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ معرفاً بـ: $f(a)=x\ ,\ f(b)=f(c)=y$.

برهن على أن f مستمر، ولكنه غير مفتوح وغير مغلق.

7. ليكن $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ تابعاً ما. برهن على أن:

f مستمر ومفتوح $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(B^{o})=\left(f^{-1}(B)\right)^{o}$ من أجل أي مجموعة جزئية B من X.

8. ليكن $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ هوميومورفيزم، ولتكن $A\subseteq X$. برهن على أن:

a- $a\in\mathring{A}\ \Leftrightarrow\ f(a)\in\left(f(A)\right)^{o}$

b- $a\in A'\ \Leftrightarrow\ f(a)\in\left(f(A)\right)'$

c- $a\in \mathrm{bd}A\ \Leftrightarrow\ f(a)\in \mathrm{bd}\,f(A)$

9. ليكن (X,τ_u) و (Y,τ_u) الفضائين الجزئيين من الفضاء $(\mathbb{R},\tau_u)$ حيث $X=[0,1]$ و $Y=[0,2]$. برهن على أن (X,τ_X) هوميومورف لـ (Y,τ_Y).
(لاحظ أن المسافة بين 0 , 1 تختلف عن المسافة بين 0 و 2).

10. ليكن $(X\times Y,\tau)$ فضاء الضرب للفضائين (X,τ_X) و (Y,τ_Y)، ولتكن $a\in X$. برهن على أن الفضاء $(\{a\}\times Y,\tau)$ الجزئي من $(X\times Y,\tau)$ هوميومورف للفضاء (Y,τ_Y).

11. هات مثالاً عن تقابل $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ بحيث يكون f مستمراً، ولكن f^{-1} غير مستمر.

12. برهن – بمثال – على أن تابع الإسقاط ليس من الضروري أن يكون مغلقاً.

13. ليكن $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ تابعاً ما، وليكن $(X\times Y,\tau)$ فضاء الضرب للفضائين (X,τ_X) و (Y,τ_Y)، وليكن $g:(X,\tau_X)\to(X\times Y,\tau)$ التابع المعرف بـ: $g(x)=(x,f(x))$. برهن على أن:

a- يكون g هوميومورف من الفضاء (X,τ_X) في الفضاء $\{(x,f(x))\ ;\ x\in X\}$ الجزئي من $(X\times Y,\tau)$، إذا وفقط ، إذا كان f مستمراً.

b- إذا كان f تابعاً مفتوحاً، فإن g يكون تابعاً مفتوحاً.

14. برهن على أن التابع $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ يكون مغلقاً، إذا وفقط ، إذا تحقق الشرط التالي: لكل مجموعة مغلقة A في (X,τ_X) تكون المجموعة $\{y\in Y\ ;\ f^{-1}(y)\cap A\neq\varnothing\}$ مغلقة في (Y,τ_Y).

15. ليكن $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ و $g:(Y,\tau_Y)\to(Z,\tau_Z)$ تابعين ما، برهن على أنه:

a- إذا كان fog مفتوحاً (مغلقاً) ، وكان f مستمراً وغامراً، فإن g يكون مفتوحاً (مغلقاً).

b- إذا كان gof مفتوحاً (مغلقاً) ، وكان g مستمراً ومتبايناً، فإن f يكون مفتوحاً (مغلقاً).

16. ليكن $f:(X.\tau_X)\to(Y.\tau_Y)$ تابعاً ما. برهن على أن الصورة العكسية وفق f لأي مجموعة جزئية من Y تكون مغلقة ومفتوحة بآن واحد في الفضاء (X,τ_X) ، إذا وفقط ، إذا تحققت العلاقة $f(\overline{A})\subseteq f(A)$ من أجل أي مجموعة جزئية A من X.

17. ليكن $f:(X.\tau_X)\to(Y.\tau_Y)$ تابعاً مستمراً وغامراً. برهن على أنه:

a- إذا كانت A كثيفة في (X,τ_X)، فإن f(A) كثيفة في (Y,τ_Y) .

b- إذا كانت $\mathscr{B}$ أساساً لـ τ_X، فإنه ليس من الضروري أن تكون $f(\mathscr{B})=\{f(B)\ ;\ B\in\mathscr{B}\}$ أساساً لـ τ_Y .

18. ليكن $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ و $g:(Y,\tau_Y)\to(Z,\tau_Z)$ تابعين ما، برهن على أنه:

a- إذا كان التابع gof مستمراً، فإنه ليس من الضروري أن يكون f أو g مستمراً.

b- إذا كان gof مستمراً، وكان أحد التابعين f أو g هوميومورفيزماً، فإن التابع الثاني يكون مستمراً.

19. ليكن $(X\times Y,\tau)$ فضاء الضرب للفضائين التبولوجيين (X,τ_X) و (Y,τ_Y) ولتكن $A_1\subseteq X$ و $A_2\subseteq Y$. برهن على أنه:

a- $\operatorname{bd}(A_1\times A_2)=\left(\operatorname{bd}(A_1)\times\bar{A}_2\right)\cup\left(\bar{A}_1\times \operatorname{bd}(A_2)\right)$

b- برهن على أن $A_1\times A_2$ تكون كثيفة في فضاء الضرب $(X\times Y,\tau)$، إذا وفقط، إذا كانت A_1 كثيفة في (X,τ_Y) و A_2 كثيفة في (Y,τ_Y).

20. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجياً و $X\times X$ فضاء الضرب للفضاء X في نفسه، ولتكن $A=\{(x,x)\ \ ;\ x\in X\}$ مجموعة جزئية من $X\times X$. برهن على أن الفضاء التبولوجي X والفضاء الجزئي A هوميومورفيان.

21. ليكن $f:(X,\tau_X)\to(Y.\tau_Y)$ تابعاً مستمراً. حدد الإجابات الصحيحة:

a- $f^{-1}\left(\bar{B}\right)\subseteq\overline{f^{-1}(B)}$ من أجل أي مجموعة جزئية B من Y.

b- $f\left(\bar{A}\right)\subseteq\overline{f(A)}$ من أجل أي مجموعة جزئية A من X.

c- $\left(f^{-1}(B)\right)^{o}\subseteq f^{-1}\left(B^{o}\right)$ من أجل أي مجموعة جزئية B من Y.

d- $f\left(A^{o}\right)\subseteq\left(f(A)\right)^{o}$ من أجل أي مجموعة جزئية A من X.

e- $f^{-1}\left(B^{o}\right)\subseteq\left(f^{-1}(B)\right)^{o}$ من أجل أي مجموعة جزئية B من Y.

22. ليكن $(X.\tau)$ فضاء تبولوجياً حيث τ التبولوجيا القوية على X. حدد الإجابات الصحيحة.

a- أسرة كل المجموعات الجزئية النقطية من X تشكل أساساً لـ τ.

b- كل تابع منطلقة الفضاء (X,τ) وأياً كان مستقره، هو تابع مفتوح.

c- كل تابع منطلقة الفضاء (X,τ) وأياً كان مستقره، هو تابع مستمر.

d- كل تابع مستقره الفضاء (X,τ) وأياً كان منطلقه، هو تابع مغلق.

e- كل تابع مستقره الفضاء (X,τ) وأياً كان منطلقه، هو تابع مفتوح.

23. ليكن $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ تابعاً ما. حدد الإجابات الصحيحة:

a- f هوميومورفيزم $\Leftarrow$ f مستمر ومفتوح.

b- f مستمر ومغلق $\Leftarrow$ f هوميومورفيزم.

c- f مستمر ومفتوح $\Leftarrow$ f مستمر ومغلق.

d- f هوميومورفيزم $\Leftarrow$ f^{-1} هوميومورفيزم.

e- f هوميومورفيزم $\Leftarrow$ $f(\bar{A})=\overline{f(A)}$ من أجل أي مجموعة جزئية A من X.

الفصل الثالث

مسلمات الفصل وقابلية العد

§.1- بعض مسلمات الفصل:

1.1- تعاريف:

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً.

1) نقول عن الفضاء (X,τ) إنه فضاء T_o، إذا كان يحقق الخاصة التالية:

لكل نقطتين مختلفتين من X توجد مجموعة مفتوحة T تحوي إحدى هاتين النقطتين ولا تحوي الأخرى.

2) نقول عن الفضاء (X,τ) إنه فضاء T_1، إذا كان يحقق الخاصة التالية:

لكل نقطتين $x \neq y$ من X توجد مجموعتان مفتوحتان T_y, T_x بحيث $x \in T_x \ , \ y \notin T_x \quad \& \quad y \in T_y \ , \ x \notin T_y$.

3) نقول عن الفضاء (X,τ) إنه فضاء T_2 (أو فضاء هاوسدورف) ، إذا كان يحقق الخاصة التالية:

لكل نقطتين $x \neq y$ من X ، توجد مجموعتان مفتوحتان T_y, T_x بحيث $x \in T_x \ , \ y \in T_y \ , \ T_x \cap T_y = \varnothing$.

4) نقول عن الفضاء (X,τ) إنه فضاء منتظم ، إذا كان يحقق الخاصة التالية: لكل مجموعة مغلقة F ولكل نقطة $x \notin F$ توجد مجموعتان مفتوحتان T_x وT_F بحيث $F \subseteq T_F \ , \ x \in T_x \ , \ T_x \cap T_F = \varnothing$.

5) نقول عن الفضاء (X,τ) إنه فضاء T_3 ،إذا كان فضاء T_1 ومنتظماً.

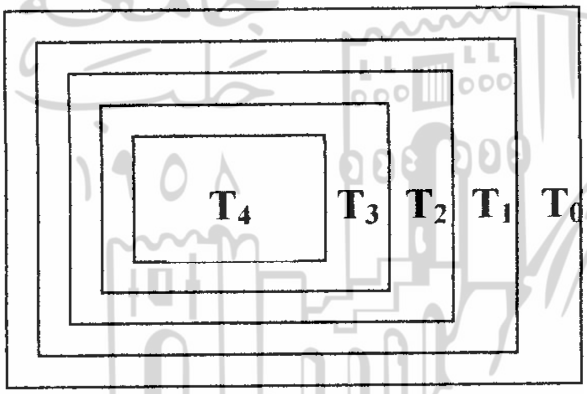
6) نقول عن الفضاء (X,τ) إنه فضاء طبيعي ، إذا كان يحقق الخاصة التالية: لكل مجموعتين مغلقتين غير متقاطعتين F_2,F_1 توجد مجموعتان مفتوحتان T_2,T_1 بحيث $T_1 \bigcap T_2 = \varnothing \ , \ F_2 \subseteq T_2 \ , \ F_1 \subseteq T_1$.

7) نقول عن الفضاء (X,τ) إنه فضاء T_4 ، إذا كان فضاء T_1 وطبيعياً.

1.2- ملاحظات وأمثلة:

1) من التعاريف السابقة نرى بسهولة أن:

$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_o$$



لكن العكس غير ضروري، أي أن:

$$T_4 \not\Leftarrow T_3 \not\Leftarrow T_2 \not\Leftarrow T_1 \not\Leftarrow T_o$$

سوف نذكر من خلال دراستنا لخواص الفصل أمثلة تبين ذلك.

2) إذا كانت X تحوي أكثر من عنصر، فإن الفضاء التبولوجي (X,τ) حيث $\tau = \mathscr{P}(X)$ يكون فضاء T_o، لأنه: لكل $x \neq y$ من X فإن $T = \{x\}$ مجموعة مفتوحة تحوي x ولا تحوي y.

3) كل فضاء جزئي من فضاء T_o هو فضاء T_o، لأنه: إذا كان (X,τ) فضاء T_o، وكان Y فضاءً جزئياً منه، فإنه لكل $x \neq y$ من Y ، وبما أن X فضاء T_o ، فإنه توجد مجموعة مفتوحة T في X تحوي إحدى النقطتين ، ولتكن x، ولا تحوي y ، وبالتالي

$T_1 = T \cap Y$ مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي Y تحوي x و لا تحوي y ، وبالتالي الفضاء الجزئي Y فضاء T_o.

4) (مثال عن فضاء T_o وليس فضاء T_1):

الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_{\ell.r})$ هو فضاء T_o، لأنه: لكل $x \neq y$ من $\mathbb{R}$ (ليكن $x > y$) ، فإن $T =]-\infty , x[$ مجموعة مفتوحة تحوي y ولا تحوي x.

وهو ليس فضاء T_1، لأنه: واضح أن أي مجموعة مفتوحة تحوي x فإنها ستحوي y أيضاً.

5) مثال (عن فضاء T_1 وليس فضاء T_2) :

إذا كانت X مجموعة غير منتهية ، فإن فضاء المتممات المنتهية (X, τ_{cof}) هو فضاء T_1، لأنه:

لكل $x \neq y$ من X ، فإن $T_x = X \setminus \{y\}$ مجموعة مفتوحة تحوي x ولا تحوي y، كما أن $T_y = X \setminus \{x\}$ مجموعة مفتوحة تحوي y ولا تحوي x.

وهو ليس فضاء T_2، لأنه:

إذا فرضنا جدلاً أنه فضاء T_2، فعندئذ توجد مجموعتان مفتوحتان T_y, T_x بحيث $x \in T_x \ , \ y \in T_y \ , \ T_x \cap T_y = \varnothing$، ومنه $X \setminus T_x$ منتهية و $X \setminus T_y$ منتهية و $T_x \subseteq X \setminus T_y$. لذلك فإن T_x منتهية ، وبالتالي $X = (X \setminus T_x) \cup T_x$ منتهية ، وهذا يناقض كون X غير منتهية.

6) الفضاء الحقيقي $(\mathbb{R}, \tau_u)$ هو فضاء T_2، لأنه:

لكل $x \neq y$ من $\mathbb{R}$ (ليكن $x<y$) نأخذ $c, b, a \in \mathbb{R}$ بحيث $a < x < c$ و $c < y < b$ ، عندئذٍ تكون $T_y =]c, b[\ , \ T_x =]a, c[$ مجموعتين مفتوحتين تحققان $x \in T_x \ , \ y \in T_y \ , \ T_x \cap T_y = \varnothing$. وبما أن $(\mathbb{R}, \tau_u)$ فضاء T_2، فإنه يكون فضاء T_1 وفضاء T_o.

7) فضاء القسمة لفضاء T_i ليس بالضروري أن يكون فضاء T_i $(i = 0,1,2)$ ، مثال على ذلك: الفضاء التبولوجي الحقيقي $(\mathbb{R},\tau_u)$ هو فضاء T_i $(i = 0,1,2)$ ،

كما رأينا في الملاحظة السابقة ، ولكن إذا أخذنا علاقة التكافؤ ρ على $\mathbb{R}$ المعرفة بالشكل :

$$x\rho y \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Q} \qquad \forall\, x,y\in\mathbb{R}$$

فإن فضاء القسمة $(\mathbb{R}/\rho,\tau_u/\rho)$ لا يكون فضاء T_o، لأنه:

نعلم (من المثال (4) من 4.2 من الفصل الثاني) أن $\tau_u/\rho=\{\varnothing,\mathbb{R}/\rho\}$، أي أنه من أجل أي $\overline{x}\neq\overline{y}$ من $\mathbb{R}/\rho$ ، فإن $\mathbb{R}/\rho$ هي المجموعة الوحيدة المفتوحة (غير الخالية) ، وهي تحوي $\overline{x}$ و $\overline{y}$ ، أي أنه لا توجد مجموعة مفتوحة تحوي إحدى النقطتين ولا تحوي الأخرى.

وبما أن $(\mathbb{R}/\rho,\tau_u/\rho)$ لا يكون فضاء T_o، فإنه لا يكون فضاء T_1، ولا يكون فضاء T_2.

1.3- مبرهنة: (بعض خواص الفضاء T_o)

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً، فإن الشروط التالية متكافئة:

1) (X,τ) فضاء T_o.

2) $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$ لكل $x\neq y$ من X.

3) $x\notin\overline{\{y\}}$ أو $y\notin\overline{\{x\}}$ لكل $x\neq y$ من X.

البرهان:

$2\Leftarrow 1$: من الفرض يوجد $T\in\tau$ بحيث $x\in T$ و $y\notin T$، ومنه $T\cap\{y\}=\varnothing$ حيث $T\in V(x)$، ولذلك فإن $x\notin\overline{\{y\}}$ ، ولدينا $x\in\overline{\{x\}}$، إذن $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$.

$3\Leftarrow 2$: لدينا من الفرض $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$.

لو كان $x \in \overline{\{y\}}$ و $y \in \overline{\{x\}}$، لوجدنا $\{x\} \subseteq \overline{\{y\}}$ و $\{y\} \subseteq \overline{\{x\}}$،

ومنه $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\overline{\{y\}}} = \overline{\{y\}}$ و $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\overline{\{x\}}} = \overline{\{x\}}$، وبالتالي $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ ونحصل على تناقض.

$1 \Rightarrow 3$: لنفرض أن $x \notin \overline{\{y\}}$، عندئذ يوجد $T \ni \tau$ بحيث $x \in T$ و $T \cap \{y\} = \varnothing$. ومنه $x \in T$ و $y \notin T$، ولذلك (X,τ) هو فضاء T_o.

1.4- **مبرهنة: (بعض خواص الفضاء T_1)**

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً، فإن الشروط التالية متكافئة:

1) (X,τ) فضاء T_1.

2) لكل مجموعة $X \supseteq A$ لدينا: $A = \bigcap\{T \;;\; T \in \tau \;\;\&\;\; A \subseteq T\}$

3) لكل عنصر $X \ni x$ لدينا: $\{x\} = \bigcap\{T \;;\; T \in \tau \;;\; x \in T\}$

4) لكل عنصر $X \ni x$ لدينا: $\{x\} = \bigcap\{F \;;\; F \in \mathcal{F} \;\;\&\;\; x \in F\}$

5) لكل عنصر $X \ni x$ لدينا: $\{x\}' = \varnothing$

6) لكل عنصر $X \ni x$ لدينا: $\{x\} \in \mathcal{F}$، أي أن $\{x\}$ مغلقة.

البرهان:

$2 \Leftarrow 1$: لتكن $\{T_i\}_{i \in I}$ أسرة كل المجموعات المفتوحة التي تحوي A، ولتكن $B = \bigcap_{i \in I} T_i$، ولنبرهن على أن $A = B$.

واضح أن $A \subseteq B$، ولنبرهن على أن $B \subseteq A$، ومن أجل ذلك نبرهن على أن $X \setminus A \subseteq X \setminus B$:

$$x \in X \setminus A \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \neq a \;\; \forall a \in A$$

وبما أن (X,τ) فضاء T_1، فإنه:

$$\forall a \in A \,,\, \exists\, T_a \in \tau \;\;;\;\; a \in T_a \;\;\&\;\; x \notin T_a$$

لتكن $T=\bigcup_{a\in A} T_a$ ، عندئذ $A\subseteq T$ و $T\ni\tau$ و $x\notin T$ ، ولذلك فإن $T\in\{T_i\}_{i\in I}$ و $x\notin T$ ، وبالتالي $x\notin B$.

إذن $x\in X\setminus B$ ، أي أن $X\setminus A\subseteq X\setminus B$، أي أن $B\subseteq A$، وبالتالي $A=B$.

$3\Rightarrow 2$: يكفي أن نأخذ $A=\{x\}$.

$4\Rightarrow 3$: لتكن $\{F_i\}_{i\in I}$ أسرة المجموعات المغلقة الحاوية على x، ولتكن $C=\bigcap_{i\in I}F_i$، ولنبرهن على أن $C=\{x\}$.

واضح أن $\{x\}\subseteq C$ ، ولنبرهن على أن $C\subseteq\{x\}$ ؛ من أجل ذلك نبرهن على أن $X\setminus\{x\}\subseteq X\setminus C$:

$$y\in X\setminus\{x\}\Rightarrow y\notin\{x\}\Rightarrow y\neq x\Rightarrow x\notin\{y\}$$

ولكن من الشرط (3): $\{y\}=\bigcap\{T:\ T\in\tau\ \&\ y\in T\}$

وبما أن $x\notin\{y\}$، فإنه توجد $T\ni\tau$ بحيث $y\in T$ و $x\notin T$، ومنه $F=X\setminus T$ مغلقة و $x\in F$ و $y\notin F$.

أي أن $F\in\{F_i\}_{i\in I}$ و $y\notin F$، وبالتالي $y\notin C$، أي أن $y\in X\setminus C$، وبالتالي $X\setminus\{x\}\subseteq X\setminus C$، أي $C\subseteq\{x\}$، وبالتالي $C=\{x\}$.

$5\Rightarrow 4$: من (4) نجد أن $\{x\}$ مغلقة (تقاطع مجموعات مغلقة) ولذلك فإن $\{x\}'\subseteq\{x\}$، ولكن $x\notin\{x\}'$ لأن:

$$X\in V(x) \quad \text{و} \quad X\cap(\{x\}\setminus\{x\})=\varnothing$$

إذن: $\{x\}'=\varnothing$

$6\Rightarrow 5$: $\{x\}'=\varnothing\subseteq\{x\}$، ولذلك فإن $\{x\}$ مغلقة.

$1\Rightarrow 6$: لتكن $x\neq y$ نقطتين من X . عندئذ ينتج عن (6) أن $\{x\}$ مغلقة و $\{y\}$ مغلقة ، ومنه فإن:

$T_x = X \setminus \{y\}$ مفتوحة تحوي x ولا تحوي y ، و $T_y = X \setminus \{x\}$ مفتوحـة تحـوي y ولا تحوي x. ولذلك فإن (X,τ) هو فضاء T_1.

1.5- ملاحظات وأمثلة:

1) كل مجموعة جزئية منتهية من فضاء T_1 هي مجموعة مغلقة ، لأن:

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$$

وبمـا أن الفـضاء هـو T_1، فـإن $\{x_i\}$ مغلقـة $(\forall i = 1,...,n)$، واجتمـاع منتـه لمجموعات مغلقة هو مجموعة مغلقة.

2) إذا كانت $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ مجموعة منتهية ، وكان الفضاء (X,τ) هو فضاء T_1، فإن $\tau = \mathscr{P}(X)$ ، لأنه بحسب الملاحظة السابقة (1) ستكون كل مجموعة جزئية من X مغلقة ، وبالتالي كل مجموعة جزئية من X مفتوحة.

3) فضاء المتممات المنتهية (X, τ_{cof}) هو فضاء T_1 أياً كانت المجموعة X ، لأن:

$\{x\}$ مجموعـة مغلقـة أيـاً كانـت $x \in X$ ، لأن $X \setminus \{x\} \in \tau_{cof}$، بحـسب المبرهنـة السابقة .

4) إذا كان (X,τ) فضاء T_1، وكان (X, τ_{cof}) فضاء المتممات المنتهية ، فـإن $\tau_{cof} \subseteq \tau$ لأنه:

إذا كانت $T \in \tau_{cof}$، فإن X\T منتهية ، وبالتالي X\T مغلقة في الفـضاء (X,τ)، لأنه فضاء T_1 ، وبالتالي $T \in \tau$.

5) كل فضاء جزئي من فضاء T_1 هو فضاء T_1 ، لأنه:

إذا كان (X,τ) فضاء T_1، وكان Y فضاء جزئياً منه ، فإنـه لكـل $x \neq y$ مـن Y، وبمـا أن X فــضاء T_1، فإنــه توجــد مجموعتــان مفتوحتــان T_y, T_x في X بحيــث $x \in T_x$, $y \notin T_x$ & $y \in T_y$, $x \notin T_y$، وبالتـالي فـإن $T_x^* = T_x \cap Y$, $T_y^* = T_y \cap Y$

مجموعتـــــــــان مفتوحتـــــــــان في الفــــــــضاء الجزئــــــــي Y وتحققــــــــان :

$x \in T_x^*\ , y \notin T_x^*\ \&\ y \in T_y^*\ , x \notin T_y^*$، وبالتالي الفضاء الجزئي Y هو فضاء T_1 .

6) إذا كانت $A = \{ x_1, x_2, \dots x_n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$ مجموعة منتهيـة مـن فـضاء T_1، فـإن $A' = \varnothing$ لأنه:

نعلم أن $(A \cup B)' = A' \cup B'$، وبالتالي $A' = \left(\bigcup_{i \in I}^{n} \{x_i\}\right)' = \bigcup_{i \in I}^{n} \{x_i\}' = \varnothing$

7) إذا كان (X, τ) فضاء T_1، و A مجموعة جزئية منه ، فإن النقطة x من X تكون نقطة تراكم لـ A ، إذا وفقط ، إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحوي x ، تحوي عدداً غـير منتـه من نقاط مختلفة من A (برهن على ذلك).

8) ليكن $(X.\tau)$ فضاء T_1، ولتكن $\mathscr{B}_x$ أساساً موضعياً للنقطة x من X. عندئذ يكون:

$\bigcap \{ B\ ;\ B \in \mathscr{B}_x \} = \{x\}$ ، لأنه:

لتكن $\{T_i\}_{i \in I}$ أسرة كل المجموعات المفتوحة التي تحوي x. عندئذ ينتج عـن كـون (X, τ) فضاء T_1 أن $\{x\} = \bigcap_{i \in I} T_i$ (بحسب 3 من المبرهنة 1.4).

وبما أن $\mathscr{B}_x$ أساس موضعي للنقطة x ، فإنه من أجل كل $i \in I$ يوجد $B_i \in \mathscr{B}_x$ بحيث يكون $x \in B_i \subseteq T_i$. ومنه يكون $\bigcap_{i \in I} B_i \subseteq \bigcap_{i \in I} T_i = \{x\}$ ،

وبالتـــالي فـــإن $\{x\} \subseteq \bigcap \{ B\ ;\ B \in \mathscr{B}_x \} \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i \subseteq \bigcap_{i \in I} T_i = \{x\}$، وبالتـــالي فـــإن $\{x\} = \bigcap \{ B\ ;\ B \in \mathscr{B}_x \}$.

1.6- **مبرهنة (من خواص T_1)**

(X, τ) فضاء $T_1 \Leftrightarrow \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \varnothing$ لكل $x \neq y$ من X.

البرهان:

$\Leftarrow$: بما أن (X, τ) فضاء T_1، فإنه لكل $x \neq y$ من X يكون

$$\overline{\{y\}}=\{y\} \quad , \quad \overline{\{x\}}=\{x\}$$

ولدينا $\{x\}\cap\{y\}=\varnothing$ ، إذن $\overline{\{x\}}\cap\overline{\{y\}}=\varnothing$.

$\Rightarrow$: لكل $x\neq y$ لدينا $\overline{\{x\}}\cap\overline{\{y\}}=\varnothing$ ، وبالتالي $x\in\overline{\{x\}}\subseteq X\setminus\overline{\{y\}}$، أي $x\notin\overline{\{y\}}$. وكذلك $y\in\overline{\{y\}}\subseteq X\setminus\overline{\{x\}}$ ، أي $y\notin\overline{\{x\}}$.

وبالتالي فإن $T_x=X\setminus\overline{\{y\}}\ ,\ T_y=X\setminus\overline{\{x\}}$ مجموعتان مفتوحتان تحققان

$$x\notin T_y\ ,\ y\in T_y \quad \& \quad y\notin T_x\ ,\ x\in T_x$$

إذن (X,τ) هو فضاء T_1.

1.7- مبرهنة:

إذا كان (X_1,τ_1) و (X_2,τ_2) فضاءي T_1، وكان (X,τ) فضاء الضرب لهما، فإن (X,τ) فضاء T_1.

البرهان:

لتكن $P=(x,y)$ و $q=(a,b)$ نقطتين مختلفتين من فضاء الضرب (X,τ). عندئذ يكون إما $a\neq x$ أو $b\neq y$.

إذا كان $a\neq x$ فإنه ينتج عن كون (X_1,τ_1) فضاء T_1 أنه يوجد مجموعتان T_x,T_a مفتوحتان في (X_1,τ_1) بحيث إن T_a تحوي a ولا تحوي x ، و T_x تحوي x ولا تحوي a.

لتكن T_y,T_b مجموعتين مفتوحتين في (X_2,τ_2) بحيث إن $y\in T_y\ ,b\in T_b$، عندئذ نجد أن $u=T_a\times T_b$ مجموعة مفتوحة في فضاء الضرب (X,τ) تحوي النقطة q ولا تحوي النقطة P. وأن $v=T_x\times T_y$ مجموعة مفتوحة في (X,τ) تحوي النقطة P ولا تحوي النقطة q. ومنه فإن فضاء الضرب (X,τ) هو فضاء T_1.

1.8- **مبرهنة : (بعض خواص الفضاء T_2)**

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً. إن الشروط التالية متكافئة:

1. إن (X,τ) فضاء T_2.

2. لكل $x \neq a$ من X يوجد $T_a \ni \tau$ بحيث إن $a \ni T_a$ ولكن $x \not\ni \bar{T}_a$.

3. القطر $D=\{(x,x) : x\in X\}$ يشكل مجموعة مغلقة في فضاء الضرب $X \times X$.

4. لكل $b \neq a$ من X يوجد $F_a, F_b \ni \mathscr{F}$ بحيث إن:

$$a\in F_a , b\notin F_a \text{ و } b\in F_b , a\notin F_b \text{ و } X = F_a \cup F_b$$

5. لكل $x \ni X$ لدينا $\{x\}=\bigcap\{\bar{T} : T\in \tau \ \& \ x\in T\}$

البرهان:

$1\Rightarrow 2$:

$$a \neq x \overset{(1)}{\Rightarrow} \exists\, T_a, T_x \in \tau ;\ a\in T_a \ , x\in T_x \ \& \ T_a \cap T_x = \varnothing$$
$$\Rightarrow T_x \in V(x) \ \& \ T_x \cap T_a = \varnothing \ \Rightarrow \ x\notin \bar{T}_a$$

$2 \Rightarrow 3$: لكي نبرهن على أن D مغلقة ؛ نبرهن على أن $(X\times X)\setminus D$ مفتوحة.

لتكن $(x,y) \ni (X\times X)\setminus D$، عندئذ $D\not\ni(x,y)$، ولذلك فإن $x \neq y$. ومن (2) يوجد $T_x \ni \tau$ بحيث $x\in T_x$ و $y\notin \bar{T}_x$ ، ومنه $x \ni T_x$ و $y \ni X\setminus\bar{T}_x$ ، وبالتالي

$$(x,y)\in T_x\times(X\setminus\bar{T}_x)\in \mathscr{B}$$

حيث $\mathscr{B}$ هو أساس فضاء الضرب $X\times X$.

وبما أن $T_x \cap (X\setminus\bar{T}_x) = \varnothing$ ، فإن $D\cap(T_x\times(X\setminus\bar{T}_x)) = \varnothing$

$$\left(\begin{array}{c} (n,m)\in D\cap(T_x\times(X\setminus\bar{T}_x))\Rightarrow n = m \ \& n\in T_x \ \& \ m\in X\setminus\bar{T}_x \\ \Rightarrow n\in T_x \cap X\setminus\bar{T}_x \quad \text{تناقص} \end{array}\right)$$

ولذلك فإن $(X\times X)\setminus D \supseteq T_x\times\left(X\setminus\overline{T}_x\right) \ni (x,y)$

إذن $(X\times X)\setminus D$ مفتوحة ، لأنها مجاورة لكل نقطة من نقاطها ، وبالتالي D مغلقة.

$4\Rightarrow 3$: لتكن $a\neq b$ من X، عندئذ $(a,b)\notin D$، لذلك فإن $(a,b)\in(X\times X)\setminus D$،

وبما أن $(X\times X)\setminus D$ مفتوحة بحسب (3)، فإنه يوجد $T,u\in\tau$ بحيث

$(a,b)\in T\times u\subseteq(X\times X)\setminus D$ ومنه $(T\times u)\cap D=\varnothing$.

وهذا يؤدي إلى أن $T\cap u=\varnothing$

(لأن: $j\in T\cap u\Rightarrow (j,j)\in(T\times u)\cap D\Rightarrow$ تناقض)

ومنه نجد أن:

$$a\in T\subseteq X\setminus u=F_a \quad ; \quad F_a\in\mathscr{F}$$
$$b\in u\subseteq X\setminus T=F_b \quad ; \quad F_b\in\mathscr{F}$$
$$F_a\cup F_b=(X\setminus u)\cup(X\setminus T)=X\setminus(u\cap T)=X\setminus\varnothing=X$$

$5\Rightarrow 4$: لتكن $\{T_i\}_{i\in I}$ أسرة كل المجموعات المفتوحة التي تحوي x ، ولتكن $B=\bigcap_{i\in I}\overline{T}_i$، ولنبرهن على أن $B=\{x\}$:

بما أن $x\in T_i\subseteq\overline{T}_i$ لكل $i\in I$ ، فإن $\{x\}\subseteq B$.

لنبرهن على أن $B\subseteq\{x\}$ ، من أجل ذلك نبرهن على أن $X\setminus\{x\}\subseteq X\setminus B$:

$$y\in X\setminus\{x\}\Rightarrow y\neq x\overset{(4)}{\Rightarrow}\exists F_y,F_x\in\mathscr{F}\ ;\ \ y\in F_y\ ,\ x\in F_x\ ,\ F_y\cup F_x=X$$

لتكن $T=X\setminus F_y\ ,\ v=X\setminus F_x$، عندئذ نجد أن $T\in\{T_i\}_{i\in I}$ و $v\in V(y)$ و $v\cap T=\varnothing$ ، ولذلك فإن $y\notin\overline{T}$ ، وبالتالي فإن $y\notin B$، ومنه $y\in X\setminus B$.

$1\Rightarrow 5$: لتكن $x\neq y$ من X ، عندئذ $y\notin\{x\}$، ولذلك يوجد $T_x\in\tau$ بحيث $x\in T_x$ و $y\notin\overline{T}_x$ ولذلك يوجد $v\in V(y)$ بحيث $v\cap T_x=\varnothing$.

وبما أن $v\in V(y)$، فإنه يوجد $T_y\in\tau$ بحيث $y\in T_y\subseteq v$، ومنه $T_y\cap T_x=\varnothing$، والفضاء (X,τ) هو فضاء T_2.

1.9- تمهيدية:

ليكن (X,τ) فضاءً منتظماً، وليكن $y \neq x$ من X، عندئذ:

إما $\overline{\{y\}} = \overline{\{x\}}$ أو $\overline{\{x\}} \bigcap \overline{\{y\}} = \varnothing$.

البرهان:

لنفرض أن $\overline{\{y\}} \neq \overline{\{x\}}$، عندئذ إما $x \notin \overline{\{y\}}$ أو $y \notin \overline{\{x\}}$.

لنفرض أن $x \notin \overline{\{y\}} = F$، عندئذ ينتج عن كون (X,τ) منتظم أنه يوجد T_x و T_F من τ بحيث:

$$x \in T_x \quad \& \quad F \subseteq T_F \quad \& \quad T_x \bigcap T_F = \varnothing$$

ومنه $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{T}_x \quad , \quad \overline{\{y\}} = F \subseteq T_F$، وينتج عن الملاحظة 5.16 من الفصل الأول أن $\overline{\{x\}} \bigcap \overline{\{y\}} \subseteq \overline{T}_x \bigcap T_F = \varnothing$. ومنه $\overline{\{x\}} \bigcap \overline{\{y\}} = \varnothing$.

1.10- مبرهنة:

(X,τ) منتظم $\Leftrightarrow$ تحقق الشرط التالي:

$$\forall x \in X \ \& \ \forall T \in \tau \, ; \ x \in T \ \exists u \in \tau : x \in u \subseteq \bar{u} \subseteq T \qquad (1)$$

البرهان:

لنفرض أولاً أن (X,τ) منتظم، ولنبرهن على تحقق الشرط (1).

بما أن $x \in T \, , \, T \in \tau$، فإن $x \notin X \setminus T$. إن $X \setminus T$ مغلقة، ولنضعها تساوي F.
بما أن الفضاء منتظم، فإنه يوجد T_F, T_x من τ بحيث يكون

$$x \in T_x \quad \& \quad F \subseteq T_F \quad \& \quad T_x \bigcap T_F = \varnothing$$

ومنه $T_x \subseteq X \setminus T_F \subseteq X \setminus F = T$، ولكن $X \setminus T_F$ مغلقة، ولذلك فإن $X \setminus T_F = \overline{X \setminus T_F}$، ومنه:

$$x \in T_x \subseteq \overline{T}_x \subseteq \overline{X \setminus T_F} = X \setminus T_F \subseteq T$$

نضع $u = T_x$ لنجد أن $x \in u \subseteq \bar{u} \subseteq T$.

العكس: لنفرض أن الشرط (1) محقق ، ولنبرهن على أن (X, τ) منتظم:

لتكن $F \in \mathcal{F}$ و $x \notin F$ ، عندئذ $x \in X \setminus F = T$.

وبحسب الشرط (1) يوجد $u \in \tau$ بحيث $x \in u \subseteq \bar{u} \subseteq T = X \setminus F$، ومنه فإن $\bar{u} \cap F = \varnothing$، ولذلك فإن $F \subseteq X \setminus \bar{u}$.

لتكن $T_F = X \setminus \bar{u}$ و $T_x = u$. عندئذ نجد أن:

$$x \in T_x \ \& \ F \subseteq T_F \ \& \ T_x \cap T_F = u \cap (X \setminus \bar{u}) \subseteq u \cap (X \setminus u) = \varnothing$$

ولذلك فإن (X, τ) فضاء منتظم.

1.11- مبرهنة:

(X, τ) فضاء طبيعي $\Leftrightarrow$ تحقق الشرط (2) التالي:

$$\forall F \in \mathcal{F} \ \& \ T \in \tau \ ; \ F \subseteq T \ \exists u \in \tau : F \subseteq u \subseteq \bar{u} \subseteq T$$

البرهان:

لنفرض أولاً أن (X, τ) طبيعي ، ولنبرهن على تحقق الشرط (2):

$$F \subseteq T \ \& \ T \in \tau \Rightarrow F \cap (X \setminus T) = \varnothing$$

لنضع $F_1 = X \setminus T$ ، عندئذ $F_1, F \in \mathcal{F}$ و $F_1 \cap F = \varnothing$ ، ولذلك ينتج عن كون (X, τ) طبيعي أنه يوجد $T_{F_1}, T_F \in \tau$ بحيث يكون

$$T_{F_1} \cap T_F = \varnothing , F \subseteq T_F , F_1 \subseteq T_{F_1}$$

ومنه $T_F \subseteq X \setminus T_{F_1} \subseteq X \setminus F_1 = T$ ، ولكن $X \setminus T_{F_1}$ مغلقة، ولذلك فإن $X \setminus T_{F_1} = \overline{X \setminus T_{F_1}}$ ، ومنه:

$$F \subseteq T_F \subseteq \bar{T}_F \subseteq \overline{X \setminus T_{F_1}} = X \setminus T_{F_1} \subseteq T$$

نضع $u = T_F$ لنجد أن $F \subseteq u \subseteq \bar{u} \subseteq T$.

العكس: لتكن $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ بحيث إن $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ ، عندئذ $F_1 \subseteq X \setminus F_2 = T \in \tau$.

وبحسب الشرط (2) يوجد $u \in \tau$ بحيث إن $F_1 \subseteq u \subseteq \bar{u} \subseteq T = X \setminus F_2$ ، ومنه فإن $F_2 \cap \bar{u} = \varnothing$. سنضع $T_{F_1} = u$ و $T_{F_2} = X \setminus \bar{u}$ فنجد أن

$$F_1 \subseteq T_{F_1} \;,\; F_2 \subseteq T_{F_2} \quad \& \quad T_{F_1} \cap T_{F_2} = \varnothing$$

ولذلك فإن (X, τ) فضاء طبيعي.

1.12- مبرهنة:

إذا كان (X_1, τ_1) و (X_2, τ_2) فضائين منتظمين ، وكان (X, τ) فضاء الضرب لهما ، فإن (X, τ) فضاء منتظم.

البرهان:

لتكن $P = (x,y)$ نقطة من الفضاء (X, τ)، ولتكن T مجموعة مفتوحة في (X, τ) بحيث إن $P \in T$. عندئذ توجد مجموعة B من أساس (X, τ) بحيث إن $P \in B \subseteq T$.

ومن دراسة فضاء الضرب لفضائين تبولوجيين نجد أن $B = T_1 \times T_2$ حيث $T_1 \in \tau_1$ و $T_2 \in \tau_2$.

وبما أن (X_1, τ_1) و (X_2, τ_2) فضاءان منتظمان ، فإنه ينتج عن المبرهنة 1.10 ، أنه توجد $u_1 \in \tau_1$, $u_2 \in \tau_2$ بحيث إن

$$y \in u_2 \subseteq \bar{u}_2 \subseteq T_2 \quad , \quad x \in u_1 \subseteq \bar{u}_1 \subseteq T_1$$

ومنه نجد أن:

$$P = (x, y) \in u_1 \times u_2 \subseteq \bar{u}_1 \times \bar{u}_2 \subseteq T_1 \times T_2 = B \subseteq T$$

ولكن $\bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = \overline{u_1 \times u_2}$ (بحسب مبرهنة 3.7 من الفصل الثالث) . لنضع $u = u_1 \times u_2$، عندئذ نجد أنه من أجل P و T توجد $u \in \tau$ بحيث إن

$$P \in u \subseteq \bar{u} \subseteq T$$

وهذا يعني أن (X,τ) فضاء منتظم (بحسب المبرهنة 1.10).

نتيجة:

ينتج عن المبرهنتين 1.7 و 1.12 ، أنه إذا كان $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2)$ فضاءي T_3 ، وكان (X,τ) فضاء الضرب لهما، فإن (X,τ) فضاء T_3.

1.13- مبرهنة:

إذا كان (X,τ) فضاءً منتظماً ، فإن العبارات التالية متكافئة:

1) (X,τ) فضاء T_3.

2) (X,τ) فضاء T_2.

3) (X,τ) فضاء T_1.

4) (X,τ) فضاء T_o.

البرهان:

$1\Rightarrow 2$: لتكن $x \neq y$ من X . بما أن (X,τ) فضاء T_1 فإن $\{y\}$ مغلقة (بحسب المبرهنة 1.4)، وبما أن $x \notin \{y\}$ و(X,τ) فضاء منتظم، فإنه يوجد T_x , T_y $\ni\tau$ بحيث يكون $x \in T_x$ و $y \in \{y\} \subseteq T_y$ و $T_x \cap T_y = \phi$ وبالتالي (x,τ) فضاء T_2 .

$3 \Leftarrow 2$: واضح.

$4 \Leftarrow 3$: واضح.

$1 \Leftarrow 4$: لتكن $x \neq y$ من X . بما أن (X,τ) فضاء T_o، فإن $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ (بحسب المبرهنة 1.3) ، وبما أن (X,τ) فضاء منتظم ، فإن $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \varnothing$ (بحسب التمهيدية 1.9) ، وبالتالي فإن (X,τ) فضاء T_1 (بحسب المبرهنة 1.6)، وبما أن (X,τ) فضاء منتظم بالفرض، فإنه فضاء T_3 .

1.14- ملاحظات وأمثلة:

1) كل فضاء T_3 يكون فضاء T_2. ينتج ذلك من المبرهنة السابقة ومن تعريف الفضاء T_3.

2) الفضاء (X,τ) حيث $\tau=\{\varnothing,X\}$ التبولوجيا الضعيفة، هو فضاء منتظم ، لأنه لكل مجموعة مغلقة F ولكل نقطة $x\notin F$ ، فإن $F=\varnothing$.

ولدينا $T_x = X$ و $T_F = \varnothing$ مجموعتان مفتوحتان بحيث

$$T_x \cap T_F = \varnothing \ , \ F \subseteq T_F \ , \ x \in T_x$$

ولكن هذا الفضاء ليس فضاء T_o (واضح) ، ولذلك فهو ليس فضاء T_1، وليس فضاء T_2.

3) **مثال** (عن فضاء T_2 وليس فضاء T_3)

لتكن $S=\{T\subseteq\mathbb{R} \ : \ T=\mathbb{Q}$ أو T مجال مفتوح محدود $\}$

ولتكن $\tau=\tau(S)$ و $\mathscr{B}=S[\overset{n}{\cap}]$

عندئذ نجد أنه:

- إذا كانت $B\in\mathscr{B}$، فإن $B=\mathbb{Q}$ أو $B=\,]a,b[$ أو $B=\mathbb{Q}\cap\,]a,b[$
- إذا كانت $\varnothing\neq T\in\tau$، فإنه يوجد $x\in T$، ولذلك يوجد $B\in\mathscr{B}$ بحيث $x\in B\subseteq T$.
- إذا كانت $\varnothing\neq B\in\mathscr{B}$، فإن $B\cap\mathbb{Q}\neq\varnothing$.

ومنه إذا كانت $\varnothing\neq T\in\tau$، فإن $T\cap\mathbb{Q}\neq\varnothing$ (1)

- إن $(\mathbb{R},\tau)$ هو فضاء T_2، لأنه إذا كان $x\neq y$ من $\mathbb{R}$ (ولنفرض أن $x<y$)، فإننا نأخذ $T_x = \left]x-1\,,\,\frac{x+y}{2}\right[$ و $T_y = \left]\frac{x+y}{2}\,,\,y+1\right[$، فنجد أن $T_x\cap T_y=\varnothing \ , \ y\in T_y \ , \ x\in T_x$.
- إن $(\mathbb{R},\tau)$ ليس فضاء T_3، لأنه: لتكن $F=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\in\mathscr{F}$ و $x=1\notin F$.

لو كان $(\mathbb{R},\tau)$ منتظماً، لوجدنا T_x , $T_F \ni \tau$ بحيث

$$T_F \bigcap T_x = \varnothing \ , \ x \in T_x \ \ , F \subseteq T_F$$

ومنه $F \bigcap T_x = \varnothing$، أي أن $T_x \bigcap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \varnothing$، ومنه $T_x \subseteq \mathbb{Q}$

وبما أن T_x مفتوحة، فإنه يوجد $B \ni \mathscr{B}$ بحيث $B \subseteq T_x$، وبالتالي $B \subseteq \mathbb{Q}$، وينتج عن هذا أنه:

إما $B = \mathbb{Q} \subseteq T_x \subseteq \mathbb{Q}$، أي $T_x = \mathbb{Q}$، أو $B = \mathbb{Q} \bigcap]a,b[\subseteq T_x$.

- إذا كانت $T_x = \mathbb{Q}$، فإننا نجد أن $\mathbb{Q} \bigcap T_F = \varnothing$ وهذا يناقض (1).
- إذا كانت $\mathbb{Q} \bigcap]a,b[\subseteq T_x$، فإننا نجد أن:

$$\mathbb{Q} \bigcap]a,b[\bigcap T_F = \varnothing \Rightarrow \mathbb{Q} \bigcap \left( ]a,b[\bigcap T_F \right) = \varnothing$$
$$\overset{(1)}{\Rightarrow}]a,b[\bigcap T_F = \varnothing \Rightarrow]a,b[\bigcap F = \varnothing$$
$$\Rightarrow]a,b[\bigcap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \varnothing \Rightarrow]a,b[\subseteq \mathbb{Q}$$

وهذا غير ممكن. إذن $(\mathbb{R},\tau)$ ليس فضاءً منتظماً، وبالتالي فهو ليس فضاء T_3.

4) مثال (عن فضاء منتظم وليس فضاء T_2)

لنأخذ الفضاء التبولوجي (X,τ) حيث

$$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b,c\}\} \quad , \quad X = \{a,b,c\}$$

نلاحظ أنه لا يوجد من أجل $b \neq c$ مجموعتان مفتوحتان T_c, T_b بحيث $T_b \bigcap T_c = \varnothing \ \ , \ \ c \in T_c \ , \ b \in T_b$. ولذلك فهذا الفضاء ليس فضاء T_2.

المجموعات المغلقة في هذا الفضاء هي:

$$\mathscr{F} = \{ \varnothing \ , \ X \ , \ \{b,c\}, \ \{a\} \}$$

ونجد أنه لكل مجموعة مغلقة F، ولكل نقطة $F \not\ni x$، توجد مجموعتان مفتوحتان T_F, T_x بحيث

$$T_x \bigcap T_F = \varnothing \ , \ F \subseteq T_F \ , \ x \in T_x$$

ومنه فإن (X,τ) فضاء منتظم (وهو فضاء طبيعي أيضاً).

5) إذا كان (X,τ) فضاءً منتظماً (أو فضاء T_3)، فإن كل فضاء جزئي منه يكون فضاءً منتظماً (أو فضاء T_3) "برهن على ذلك".

6) إذا كان (X,τ) فضاءً طبيعياً، وكان Y فضاءً جزئياً منه، فإنه ليس بالضروري أن يكون Y طبيعياً، ولكن إذا كان X طبيعياً، وكانت Y مجموعة جزئية مغلقة منه، فإن الفضاء الجزئي Y يكون طبيعياً. "برهن على ذلك".

7) مثال (عن فضاء T_3 وليس فضاء T_4)

إن الأسرة $\mathscr{B} = \{[a,b[\ ;\ a,b \in \mathbb{R}\}$ تشكل أساساً لتبولوجيا τ على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ (بحسب المبرهنة 7.4 من الفصل الأول).

ونلاحظ أن الفضاء $(\mathbb{R},\tau)$ يتمتع بالخواص التالية:

1) كل عنصر $B = [a,b[$ من عناصر الأساس $\mathscr{B}$ هو مجموعة مفتوحة ومغلقة بآن واحد في الفضاء $(\mathbb{R},\tau)$، لأن: $B \in \mathscr{B} \subseteq \tau$، ثم إنه إذا كان $x \in \mathbb{R} \setminus B$، فإن $x \notin B = [a,b[$، ولذلك فإنه: إما $x < a$ وعندئذ نجد أن $T = [x,a[\in \tau$، وتحقق $x \in T \subseteq \mathbb{R} \setminus B$، أي أن $\mathbb{R} \setminus B$ مجاورة لـ x.

أو $b \le x$، وعندئذ نجد أن $T_1 = [x, x+1[\in \tau$، وتحقق $x \in T_1 \subseteq \mathbb{R} \setminus B$ أي أن $\mathbb{R} \setminus B$ مجاورة لـ x.

إذن $\mathbb{R} \setminus B$ مجاورة لكل نقطة من نقاطها، ولذلك فإنها مجموعة مفتوحة، وبالتالي فإن B مجموعة مغلقة.

2) إن $(\mathbb{R},\tau)$ فضاء T_1، لأنه إذا كانت $x \neq y$ نقطتين من $\mathbb{R}$ (ولنفرض أن $x < y$)، عندئذ توجد $T_x = [x,y[$ و $T_y = [y,y+1[$ من τ بحيث إن $x \in T_x$ و $y \notin T_x$، كما أن $y \in T_y$ و $x \notin T_y$.

3) إن $(\mathbb{R},\tau)$ فضاء منتظم ، لأنه إذا كانت x نقطة من $\mathbb{R}$ و $T\ni\tau$ بحيث إن $x\in T$، فإنه (من خواص الأساس) توجد $\mathscr{B}\ni B=[a,b[$ بحيث يكون $x\in B\subseteq T$. لنضع $u=B$، عندئذ $u\ni\tau$ ومن الملاحظة (1) أعلاه، لدينا u مغلقة ، ولذلك فإن $u=\bar{u}$ ، وبالتالي:

$$\exists u\in\tau \ ; \ x\in u\subseteq\bar{u}\subseteq T$$

وهذا يعني أن $(\mathbb{R},\tau)$ فضاء منتظم (بحسب المبرهنة 1.10).

4) ينتج عن الملاحظتين السابقتين أن $(\mathbb{R},\tau)$ فضاء T_3.

ليكن (X,τ^*) فضاء الضرب للفضاء $(\mathbb{R},\tau)$ في نفسه. عندئذ نجد من النتيجة الواردة بعد المبرهنة 1.12 ، أن (X,τ^*) فضاء T_3.

- سنبرهن فيما يلي على أن (X,τ^*) ليس فضاءً طبيعياً، وبالتالي ليس فضاء T_4:

1°) إن $Y=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ ; \ x+y=0\}$ مجموعة مغلقة في (X,τ^*)، لأن $X\backslash Y$ مجموعة مفتوحة في (X,τ^*) لكونها مجاورة لكل نقطة من نقاطها، حيث إنه إذا كانت $P=(a,b)$ نقطة من $X\backslash Y$ ، فإن $P\notin Y$، ولذلك فإن $a+b\neq 0$.

ليكن $a+b=\varepsilon$.

إذا كانت $\varepsilon>0$ ، فإننا نأخذ $T=[a,a+\frac{\varepsilon}{2}[\times[b,b+\frac{\varepsilon}{2}[$ لنجد أن $T\in\tau^*$، وأن $P\in T\subseteq X\backslash Y$.

وإذا كانت $\varepsilon<0$ فإننا نأخذ $T=[a,a-\frac{\varepsilon}{2}[\times[b,b-\frac{\varepsilon}{2}[$ لنجد أن $T\in\tau^*$ وأن $P\in T\subseteq X\backslash Y$. إذن $X\backslash Y$ مفتوحة ، ولذلك فإن Y مغلقة في (X,τ^*).

2°) لنعتبر الفضاء (Y,τ_Y) الجزئي من (X,τ^*). عندئذ نجد أن $\tau_Y=\mathscr{P}(Y)$ ، أي أن τ_Y هي التبولوجيا القوية على Y ، لأنه:

إذا كانت $P=(x,y)$ نقطة من Y ، فإنه يوجد $\tau^* \ni T=[x,x+1[\times[y,y+1[$

بحيث إن $T\cap Y=\{P\}$، وهذا يعني أن كل مجموعة نقطية $\{P\}$ ، جزئية من Y، هي مجموعة مفتوحة في (Y,τ_Y) ، ومنه $\mathcal{P}(Y)\subseteq\tau_Y\subseteq\mathcal{P}(Y)$ ، أي أن $\tau_Y=\mathcal{P}(Y)$.

3°) بما أن Y هي مجموعة مغلقة في (X,τ^*)، فإن كل مجموعة مغلقة في الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) هي مجموعة مغلقة في (X,τ^*). وبما أن كل مجموعة جزئية من Y هي مجموعة مغلقة في (Y,τ_Y)، لأن $\tau_Y=\mathcal{P}(Y)$، فإن كل مجموعة جزئية من Y هي مجموعة مغلقة في (X,τ^*).

4°) لتكن $A=\{(x,-x)\in Y\ ;\ x\in\mathbb{Q}\}\ ,\ C=\{(y,-y)\in Y\ ;\ y\notin\mathbb{Q}\}$.

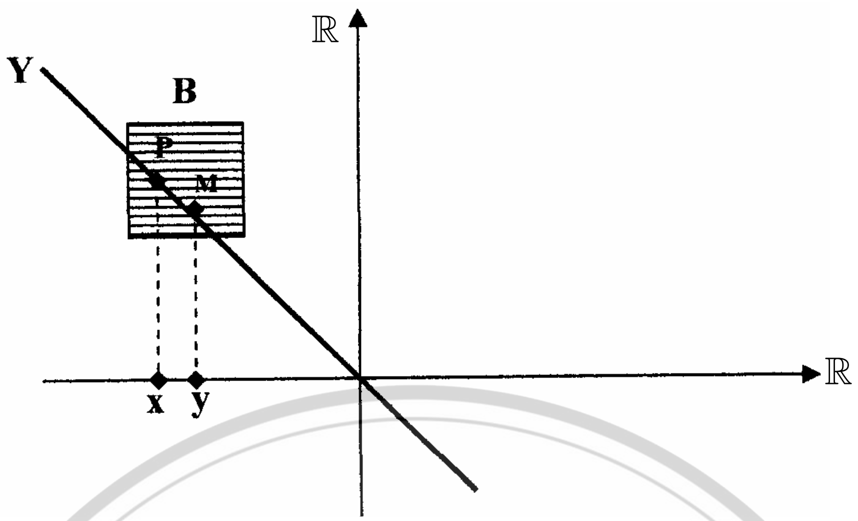
إن $A\ ,\ C$ مجموعتان جزئيتان من Y، فهما مغلقتان في الفضاء (X,τ^*) (كما بينا في 3°)، وواضح أن $A\cap C=\varnothing$.

لو فرضنا جدلاً أن (X,τ^*) فضاء طبيعي ،لوجدنا مجموعتين مفتوحتين T_A و T_C في (X,τ^*) بحيث إن $A\subseteq T_A$ و $C\subseteq T_C$ و $T_A\cap T_C=\varnothing$ ، وعليه فإنه إذا كانت $P=(x,-x)$ نقطة من A، فإن $x\in\mathbb{Q}$ و $P\in T_A$، ولذلك فإنه توجد $B=[a,b[\times[c,d[$ من أساس τ^* بحيث يكون $P\in B\subseteq T_A$.

كما أنه ، إذا كانت $M=(y,-y)$ نقطة من C ، فإن $y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ و $M\in T_C$، ولذلك فإنه توجد $B'=[a',b'[\times[c',d'[$ من أساس τ^* بحيث يكون $M\in B'\subseteq T_C$.

وبما أن $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$ (بين كل عددين حقيقيين يوجد عدد عادي)، فإنه توجد نقطة $P=(x,-x)$ من A، ونقطة $M=(y,-y)$ من C، بحيث تكون x ملتصقة بـ y ، وفي هذه الحالة يكون $B\cap B'\neq\varnothing$، وبالتالي فإن $T_A\cap T_C\neq\varnothing$، ونحصل على تناقض.

إذن فالفضاء (X,τ^*) ليس طبيعياً ، وبالتالي فهو ليس فضاء T_4.



§.2- مسلمات قابلية العد:

2.1- تعريف:

نقول عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنه يحقق خاصية العد الأولى ، إذا كانت كل نقطة x من X تملك أساساً موضعياً قابلاً للعد.

2.2- ملاحظات وأمثلة:

1) ينتج عن (*) ، الواردة في نهاية المبرهنة 7.14 من الفصل الأول ، أنه إذا كان (X,τ) يملك أساساً قابلاً للعد $\mathscr{B}$ ، فإن (X,τ) يحقق خاصية العد الأولى وعليه فإنه:

إذا كانت X مجموعة قابلة للعد ، وكانت τ أي تبولوجيا على X ، فإن الفضاء (X,τ) يحقق خاصية العد الأولى.

2) ينتج عن الملاحظة 7.13 من الفصل الأول أن $(\mathbb{R},\tau_u)$ يحقق خاصية العد الأولى ، لأن الأسرة:

$$\mathscr{L}_x = \left\{]x-\frac{1}{n}\ ,\ x+\frac{1}{n}[\quad ; \quad n\in\mathbb{N} \right\}$$

تشكل أساساً موضعياً لـ x أياً كان x من $\mathbb{R}$ ، كما رأينا ، وهذه الأسرة قابلة للعد كما هو واضح.

3) إذا كانت X مجموعة غير خالية ، وكانت $\tau = \mathscr{P}(X)$ التبولوجيا القوية على X ، فإن الفضاء التبولوجي (X,τ) يحقق خاصية العد الأولى، لأنه من أجل كل نقطة x من X ، فإن المجموعة $\{x\}$ مفتوحة في الفضاء X، وبالتالي فإن الأسرة $\{\{x\}\}$ تشكل أساساً موضعياً قابلاً للعد للنقطة x.

2.3- **تعريف:**

نقول عن الفضاء التبولوجي (X,τ) إنه يحقق خاصية العد الثانية، إذا كان يملك أساساً قابلاً للعد.

2.4- **أمثلة وملاحظات:**

1) الفضاء $(\mathbb{R},\tau_u)$ يحقق خاصية العد الثانية ، لأن أسرة المجالات المفتوحة التي أطرافها أعداد عادية تشكل أساساً قابلاً للعد للفضاء $(\mathbb{R},\tau_u)$ ، كما رأينا في المثال (4) من 7.5 من الفصل الأول.

2) إذا كان الفضاء التبولوجي (X,τ) يحقق خاصية العد الثانية، فإنه يحقق خاصية العد الأولى، لأنه:

إذا كان $\mathscr{B}$ أساساً قابلاً للعد للفضاء (X,τ)، فإن الأسرة:

$$\mathscr{B}_x = \{ B \in \mathscr{B} \quad ; \quad x \in B \}$$

تشكل أساساً موضعياً قابلاً للعد للنقطة x.

أما العكس فهو غير صحيح ؛ فمثلاً:

إذا كانت X مجموعة غير قابلة للعد ، وكانت $\tau = \mathscr{P}(X)$ التبولوجيا القوية على X، فإن الفضاء التبولوجي (X,τ) يحقق خاصية العد الأولى ، كما رأينا في 3 من 2.2 ، ولكن هذا الفضاء لا يحقق خاصية العد الثانية ، لأن أي أساس له سيكون غير قابل للعد.

- ينتج إنه ، إذا كان الفضاء X لا يحقق خاصية العد الأولى ، فإنه لا يحقق خاصية العد الثانية.

3) إذا كان الفضاء التبولوجي (X,τ) يحقق خاصية العد الثانية ، فإن كل فضاء جزئي Y منه ، يحقق خاصية العد الثانية، لأنه : إذا كان $\{B_i\}_{i\in I}$ أساساً قابلاً للعد للفضاء (X,τ)، فإن الأسرة $\{B_i \cap Y\}_{i\in I}$ تشكل أساساً قابلاً للعد للفضاء الجزئي Y. (برهن على ذلك).

2.5- تمرين محلول:

إذا كان الفضاء التبولوجي (X,τ) يحقق خاصية العد الثانية ، فإنه يملك مجموعة كثيفة وقابلة للعد.

الحل:

بما أن الفضاء X يحقق خاصية العد الثانية فإنه يملك أساساً قابلاً للعد وليكن $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

إذا أخذنا من كل مجموعة B_n عنصراً x_n، فإن المجموعة

$$A = \{ x_1 , x_2 , \dots , x_n , \dots\}$$

تكون قابلة للعد، وهي كثيفة لأنها تتقاطع مع كل عنصر من عناصر الأساس، أي تتقاطع مع كل مجموعة مفتوحة غير خالية من X.

§.3- الفضاء المنفصل:

3.1- تعريف:

نسمي الفضاء التبولوجي (X,τ) فضاءً منفصلاً ، إذا كان يحتوي على مجموعة كثيفة وقابلة للعد.

3.2- **ملاحظات وأمثلة:**

1) ينتج من التعريف والتمرين السابقين أنه ، إذا كان الفضاء التبولوجي (X,τ) يحقق خاصية العد الثانية ، فإنه يكون فضاءً منفصلاً، والعكس غير صحيح ؛ وكمثالٍ على ذلك نلاحظ أن الفضاء التبولوجي $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ هوفضاء منفصل، لأن فيه $\mathbb{Q}$ مجموعة قابلة للعد وكثيفة (حيث $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$)، ولكنه لا يحقق خاصية العد الأولى لأنه:

إذا كان $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ يحقق خاصية العد الأولى، فإنه من أجل أي نقطة x من $\mathbb{R}$، يوجد أساس موضعي قابل للعد $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث إن $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n=\{x\}$، (بحسب 8 من ملاحظات وأمثلة 1.5) ، وبالتالي $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{R}\setminus B_n)=\mathbb{R}\setminus\{x\}$، ولكن $B_n\in\tau$، وبالتالي $\{\mathbb{R}\setminus B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ أسرة قابلة للعد من المجموعات المنتهية ، وبالتالي فالمجموعة $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{R}\setminus B_n)$ قابلة للعد ، وهذا يعني أن المجموعة $\mathbb{R}\setminus\{x\}$ قابلة للعد ، وهذا خطأ. وبالتالي فإن الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ لا يحقق خاصية العد الأولى (وبالتالي لا يحقق خاصية العد الثانية).

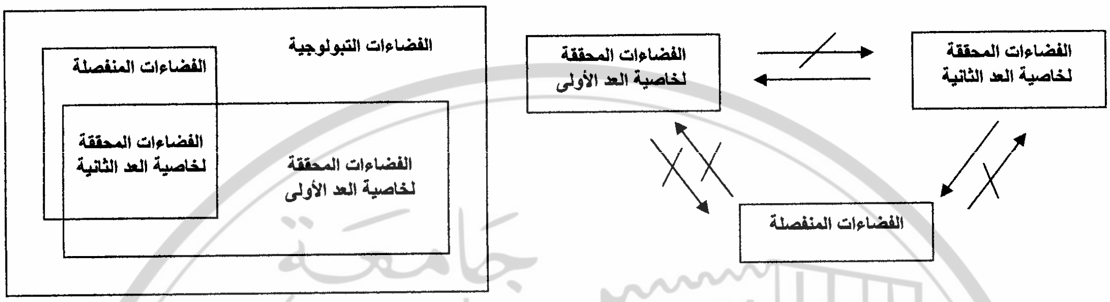
2) الفضاء الحقيقي $(\mathbb{R},\tau_u)$ هو فضاء منفصل ، لأن $\mathbb{Q}$ مجموعة كثيفة فيه وقابلة للعد.

3) إذا كانت X مجموعة غير قابلة للعد ، وكانت $\tau=\mathscr{P}(X)$ التبولوجيا القوية على X، فإن الفضاء (X,τ) لا يكون منفصلاً لأنه:

بما أن X غير قابلة للعد و τ هي التبولوجيا القوية على X ، فإن τ غير قابلة للعد ، وبالتالي أي مجموعة كثيفة في هذا الفضاء لا يمكن أن تكون قابلة للعد، لأنه إذا كانت A كثيفة ، فإنه أياً كانت $x\ni X$ ، فإن $\{x\}\in\tau$، ولذلك فإن $A\bigcap\{x\}\neq\varnothing$ ، أي أن $x\in A$، وبالتالي $X\subseteq A$ ، أي أن $X=A$، ولذلك فإن A غير قابلة للعد.

- إن الفضاء (X,τ) في هذا المثال يحقق خاصية العد الأولى ، كما رأينا في المثال (3) من 2.2 ، وقد وجدنا أنه ليس منفصلاً.

4) من الأمثلة المذكورة أعلاه ، نجد أنه لا يوجد ارتباط بين الفضاءات المنفصلة والفضاءات المحققة لخاصية العد الأولى ، ولكننا وجدنا أن الفضاءات المحققة لخاصية العد الثانية تكون فضاءات منفصلة ، وأن العكس غير صحيح، والشكل التالي يوضح ارتباط بعض هذه الفضاءات ببعضها الآخر.



تمارين غير محلولة

1. هات مثالاً (غير الذي ورد في الكتاب) على فضاء T_0 وليس T_1، وآخر على فضاء T_1 وليس T_2 ، وآخر على فضاء T_2 وليس منتظماً ، وآخر على فضاء منتظم وليس فضاء طبيعياً ، وآخر على فضاء طبيعي وليس فضاء منتظماً.

2. برهن على أن الفضاء التبولوجي (X,τ) يكون فضاء T_3، إذا وفقط ، إذا كان منتظماً و يحقق الشرط التالي: $\overline{\{x\}}\cap\overline{\{y\}}=\varnothing$ لكل نقطتين $x \neq y$ من X.

3. ليكن $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ تابعاً مستمراً ، حيث (X,τ_X) فضاءً ما ، و (Y,τ_Y) فضاء T_1.

a- برهن على أن $f^{-1}(\{y\})$ مجموعة مغلقة في (X,τ_X) أياً كانت النقطة y من Y.

b- أعطِ مثالاً تبين فيه أن الطلب a) غير صحيح إذا كان (Y,τ_Y) فضاء T_0 وليس فضاء T_1.

4. ليكن (X,τ) فضاء T_1، ولتكن A مجموعة جزئية منه . برهن على أن: $x\in A'$ $\Leftrightarrow$ كل مجموعة مفتوحة T تحوي x سوف تحوي على عدد غير منتهٍ من نقط A.

5. لتكن A مجموعة جزئية من فضاء T_1. برهن على أن A' مجموعة مغلقة.

6. ليكن (X,τ) فضاء T_2، ولتكن τ_1 تبولوجيا على X بحيث إن $\tau\subseteq\tau_1$. برهن على أن (X,τ_2) فضاء T_2.

7. ليكن $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ تابعاً مستمراً ومتبايناً ، ولنفرض أن (Y,τ_Y) فضاء T_2. برهن على أن (X,τ_X) فضاء T_2.

8. ليكن (X,τ) فضاء T_2، ولنفرض أن X مجموعة منتهية. برهن على أن $\tau = \mathscr{P}(X)$. هل يبقى التمرين صحيحاً من أجل (X,τ) فضاء T_1.

9. لتكن $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ مجموعة جزئية من فضاء T_2. برهن على أنه توجد مجموعات مفتوحة ، وغير متقاطعة ، مثنى مثنى ، $u_1, u_2, .., u_n$ بحيث إن: $x_1 \in u_1 \ ,\ x_2 \in u_2, ..., x_n \in u_n$.

10. برهن على أن الفضاء (X,τ) يكون فضاء T_2 ، إذا وفقط، إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall\ x \neq y \in X\ \exists\ F_x, F_y \in \mathscr{F}\ ;\ x \in F_x, y \notin F_x,\ y \in F_y, x \notin F_y, F_x \cup F_y = X$$

11. ليكن (Y,τ_Y) فضاء T_2 و $f: (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ و $g: (Y,\tau_Y) \to (X,\tau_X)$ تابعين مستمرين بحيث إن $gof = I_X$. برهن على أن:

a- (X,τ_X) فضاء T_2.

b- $f(X)$ مجموعة مغلقة في الفضاء (Y,τ_Y).

12. برهن على أنه ، إذا كان (X,τ) فضاءً منتظماً، وكانت X مجموعة منتهية فإن (X,τ) يكون فضاءً طبيعياً.

13. هات أمثلة عن فضاءات منتظمة منتهية ، وأخرى غير منتهية .

14. برهن على أن الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ هو فضاء تبولوجي طبيعي. ثم برهن على أنه فضاء T_4.

15. ليكن (X,τ_X) فضاءً طبيعياً ، وليكن $f:(X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ تابعاً مفتوحاً وغامراً. برهن على أن الفضاء (Y,τ_Y) طبيعي.

16. برهن على أن الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{\ell.r})$ طبيعي ، ولكنه غير منتظم وليس T_4.

17. إذا كان (X,τ) فضاء T_2 ومنتظماً ، وكانت A مجموعة مغلقة فيه ، فبرهن على أن فضاء القسمة X/A هو فضاء T_2.

18. لتكن A مجموعة مغلقة في فضاء منتظم (X,τ). برهن على أن $A=\bigcap\{T\ ;\ T\in\tau\ \ \&\ \ A\subseteq T\}$.

19. ليكن (X,τ) فضاءً غير منتهٍ و يحقق خاصية العد الأولى. ولتكن $p\in X$. برهن على أن (X,τ) يملك أساساً موضعياً قابلاً للعد $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ للنقطة p بحيث إن $u_{n+1}\subseteq u_n$ لكل $\mathbb{N}\ni n$ ، وأن $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n=\{p\}$.

20. إذا كان (Y,τ_Y) فضاء جزئياً من فضاء يحقق خاصية العد الأولى (X,τ_X)، فبرهن على أن (Y,τ_Y) يحقق، أيضاً، خاصية العد الأولى.

21. برهن على أن فضاء الضرب $(X\times Y,\tau)$ يحقق خاصية العد الأولى ، إذا وفقط، إذا كان كل من (X,τ_X) و (Y,τ_Y) يحقق خاصية العد الأولى.

22. برهن على أن الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{\ell.r})$ يحقق خاصية العد الأولى.

هل الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ يحقق خاصية العد الأولى؟ ولماذا؟

23. إذا كان (X,τ) فضاءً يحقق خاصية العد الأولى ، وكانت τ_1 تبولوجيا على X بحيث إن $\tau_1\subseteq\tau$. فبرهن على أن (X,τ_1) يحقق خاصية العد الأولى.

24. هات مثالاً عن فضاء (X,τ) يحقق خاصية العد الأولى ، وتبولوجيا τ_1 على X بحيث إن $\tau\subset\tau_1$، و (X,τ_1) لا يحقق خاصية العد الأولى.

25. إذا كان (Y,τ_Y) فضاءً جزئياً من فضاء يحقق خاصية العد الثانية (X,τ_X)، فبرهن على أن (Y,τ_Y) يحقق خاصية العد الثانية.

26. برهن على أن الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ هو فضاء منفصل ولا يحقق خاصية العد الأولى ، وبالتالي لا يحقق خاصية العد الثانية.

27. ليكن (X,τ_X) فضاءً منفصلاً، وليكن $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ تابعاً مستمراً وغامراً . برهن على أن (Y,τ_Y) فضاء منفصل. ثم استنتج أن فضاء القسمة لفضاء منفصل هو فضاء منفصل.

28. برهن على أن فضاء الضرب $(X \times Y, \tau)$ يحقق خاصية العد الثانية (على الترتيب منفصل) ، إذا وفقط ، إذا كان الفضاءان (X, τ_X) و (Y, τ_Y) يحققان خاصية العد الثانية (على الترتيب منفصلان).

29. برهن على أن الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ هو فضاء يحقق خاصية العد الثانية ومنفصل.

30. هات مثالاً عن فضاء تبولوجي منفصل ويحوي فضاءً جزئياً غير منفصل.

31. هل الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_{\ell.r})$ منفصل؟ ولماذا؟

32. إذا كانت A مجموعة جزئية غير قابلة للعد من فضاء (X, τ) يحقق خاصية العد الثانية ، فبرهن على أن $A' \neq \varnothing$.

33. ليكن (X, τ) فضاءً يحقق خاصية العد الثانية. برهن على أن المجموعة Is(X) قابلة للعد.

34. برهن على أنه، إذا كان (X, τ) فضاءً منفصلاً ، و Y مجموعة جزئية مفتوحة منه ، فإن الفضاء الجزئي (Y, τ_Y) يكون منفصلاً.

35. برهن على أنه، إذا كان (X, τ) فضاءً منفصلاً ويحقق خاصية العد الأولى، وكانت A مجموعة جزئية كثيفة منه ، فإن الفضاء الجزئي $(A.\tau_A)$ يكون منفصلاً.

36. لتكن $X = [0,1[$ و τ التبولوجيا على X التي تشكل الأسرة

$$\mathscr{B} = \{ [a, b[\quad ; \quad o \leq a < 1 \quad , \quad a < b \leq 1 \}$$

أساساً لها. برهن على أن الفضاء التبولوجي (X, τ) يكون فضاء T_1، و منتظماً ، و منفصلاً ، و يحقق خاصية العد الأولى ، ولكنه لا يحقق خاصية العد الثانية.

37. لنأخذ فضاء المتممات المنتهية $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$. حدد الإجابات الصحيحة:

a- هو فضاء T_1

b- هو فضاء T_2

c- هو فضاء طبيعي

d- يحقق خاصية العد الأولى

e- هو فضاء منفصل.

38. حدد الإجابات الصحيحة:

a- كل فضاء جزئي من فضاء طبيعي هو فضاء طبيعي.

b- كل فضاء جزئي من فضاء منتظم هو فضاء منتظم.

c- كل فضاء جزئي من فضاء منفصل هو فضاء منفصل.

d- إذا كان (X,τ) فضاء T_2 ومنفصلاً ، فإن كل فضاء جزئي منه يكون منفصلاً.

e- إذا كان (X,τ) فضاء T_2 ومنفصلاً ، فإن (X,τ) يحقق خاصية العد الثانية.

39. حدد الإجابات الصحيحة:

a- إذا كانت $\{x\}$ مجموعة مغلقة مهما تكن x من الفضاء (X,τ)، فإن (X,τ) يكون فضاء T_0.

b- إذا حوت X على أكثر من عنصر ، فإن الفضاء (X,τ) حيث τ التبولوجيا القوية على X ، يكون فضاء T_0.

c- كل فضاء T_1 يكون فضاء T_2، والعكس ليس صحيحاً.

d- إذا كان (X,τ) فضاء T_2، فإن كل فضاء جزئي منه يكون فضاء T_2.

e- إذا كان (X,τ) فضاءً يحقق خاصية العد الأولى ، فإنه يحقق خاصية العد الثانية ، والعكس ليس صحيحاً.

الفصل الرابع

نظرية التقارب

§.1- المرشحات:

1.1- تعريف:

لتكن $S \neq \varnothing$ مجموعة ما، نقول عن أسرة مجموعات جزئية $\mathbb{F}$ من S إنها تشكل مرشحة على S، إذا كانت تحقق الشروط التالية:

1) $\varnothing \notin \mathbb{F}$

2) $F_1, F_2 \in \mathbb{F} \Rightarrow F_1 \bigcap F_2 \in \mathbb{F}$

3) $F \in \mathbb{F} \;\&\; F \subseteq A \subseteq S \Rightarrow A \in \mathbb{F}$

1.2- ملاحظات وأمثلة:

1) إذا كانت $\mathbb{F}$ مرشحة على S ،فإن $S \in \mathbb{F}$، لأنه يوجد $\mathbb{F} \ni F$، وبما أن $F \subseteq S$ فإن $S \in \mathbb{F}$.

2) واضح أن أي اجتماع لعناصر من مرشحة $\mathbb{F}$ هو أيضاً من $\mathbb{F}$.

3) إذا كانت F_1, F_2 عناصر من مرشحة $\mathbb{F}$، فإن $F_1 \bigcap F_2 \neq \varnothing$، لأن $F_1 \bigcap F_2 \in \mathbb{F}$ و $\varnothing \notin \mathbb{F}$.

4) إذا كانت $S = \{a, b, c\}$ ، فإن الأسر التالية تشكل مرشحات على S:

$$\mathbb{F}_1 = \{\{a, b\} , S\}$$

$$\mathbb{F}_2 = \{\{a\} , \{a, b\} , \{a, c\} , S\}$$

$$\mathbb{F}_3 = \{\{b\} , \{a, b\} , \{b, c\} , S\}$$

وعليه فإنه على مجموعة واحدة $S \neq \varnothing$ قد نجد عدداً كبيراً من المرشحات.

5) ينتج عن خواص المجاورات في الفضاءات التبولوجية أنه ، إذا كانت x نقطة من فضاء تبولوجي (X,τ)، فإن أسرة مجاورات النقطة x ، التي رمزنا لها بـ $V(x)$ ، تشكل مرشحة على X.

6) إذا كانت S مجموعة غير خالية ، وكانت $\varnothing \neq A \subseteq S$، فإن الأسرة

$$\mathcal{F} = \{ F \subseteq S \quad , \quad A \subseteq F \}$$

تشكل مرشحة على S (برهن على ذلك كتمرين سهل).

7) إذا كانت S مجموعة غير منتهية ، فإن الأسرة:

$$\mathcal{F} = \{ F \subseteq S \quad ; \qquad S \setminus F \text{ منتهية} \}$$

تشكل مرشحة على S. (البرهان : تمرين سهل).

(*) إذا كانت S مجموعة منتهية ، فإن الأسرة $\{ F \subseteq S \quad ; \quad S \setminus F \text{ منتهية} \} = \mathcal{F}$، لاتشكل مرشحة لأن $\varnothing \in \mathcal{F}$.

8) من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لنضع $A_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$

إن الأسرة $\mathcal{F} = \{A_n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ لاتشكل مرشحة على $\mathbb{N}$، مع أن :

- $\varnothing \notin \mathcal{F}$ ، لأن كل عنصر من $\mathcal{F}$ هو من الشكل A_n و $n \in A_n$.
- إذا كانت $F_1 , F_2 \in \mathcal{F}$ ، فإنه يوجد n_1, n_2 من $\mathbb{N}$ بحيث يكون $F_1 = A_{n_1}$, $F_2 = A_{n_2}$ ، ويكون $F_1 \cap F_2 = A_{n_1} \cap A_{n_2} = A_n$ حيث $n = \max\{n_1, n_2\}$ ، ولذلك فإن $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
- لكن الشرط (3) من شروط المرشحة غير محقق ، لأنه إذا أخذنا $A = \{1, 6, 7, 8, ...\}$ نجد أن $A_6 \subset A \subset \mathbb{N}$ و $A_6 \in \mathcal{F}$، ولكن $A \notin \mathcal{F}$.

إذن $\mathcal{F}$ ليست مرشحة على $\mathbb{N}$.

9) إن تقاطع أي أسرة من المرشحات على مجموعة S هو مرشحة على S (برهن على ذلك) ، ولكن اجتماع المرشحات على مجموعة S ليس من الضروري أن يكون مرشحة على S ، فمثلاً: إن

$$\mathbb{F}_1 = \{\{a,b\}\ ,\ S\}$$
$$\mathbb{F}_2 = \{\{a,c\}\ ,\ S\}$$

هي مرشحات على المجموعة $S = \{a,b,c\}$ ، ولكن

$$\mathbb{F}_1 \cup \mathbb{F}_2 \{\{a,b\}\ ,\{a,c\}\ ,S\}$$

ليست مرشحة على S ، لأن $F_2 = \{a,b\}\ ,\ F_1 = \{a,c\}$ عناصر من $\mathbb{F}_1 \cup \mathbb{F}_2$، ولكن $F_1 \cap F_2 = \{a\}$ لاينتمي إلى $\mathbb{F}_1 \cup \mathbb{F}_2$.

1.3- **تعريف:**

إذا كانت $\mathbb{F}_2 , \mathbb{F}_1$ مرشحتين على مجموعة S ، فإننا نقول إن $\mathbb{F}_1$ أضعف من $\mathbb{F}_2$ (أو نقول إن $\mathbb{F}_2$ أقوى من $\mathbb{F}_1$) ونكتب $\mathbb{F}_1 \leq \mathbb{F}_2$ ، إذا كان $\mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{F}_2$.

1.4- **ملاحظات:**

1) إن العلاقة $\leq$ الواردة في التعريف السابق هي علاقة ترتيب جزئي على أسرة المرشحات المعرفة على مجموعة S. وينتج عن ذلك أنه ، إذا كانت $\{\mathbb{F}_i\}_{i\in I}$ أسرة مرشحات على مجموعة S ، فإن $\mathbb{F} = \bigcap_{i\in I} \mathbb{F}_i$ مرشحة على S ، وهي حد أدنى أعظمي للأسرة $\{\mathbb{F}_i\}_{i\in I}$، لأن:

- واضح أن $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}_i$ لكل $i \in I$ ، ولذلك فإن $\mathbb{F} \leq \mathbb{F}_i$ لكل $i \in I$ ، أي أن $\mathbb{F}$ حد أدنى للأسرة $\{\mathbb{F}_i\}_{i\in I}$.
- إذا كان $\mathbb{F}^*$ حد أدنى آخر للأسرة $\{\mathbb{F}_i\}_{i\in I}$ ، فإن $\mathbb{F}^* \leq \mathbb{F}_i$ لكل $i \in I$، ولذلك فإن $\mathbb{F}^* \subseteq \mathbb{F}_i$ لكل $i \in I$، أي أن $\mathbb{F}^* \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathbb{F}_i = \mathbb{F}$، ومنه $\mathbb{F}^* \leq \mathbb{F}$.

وبالتالي فإن $\mathbb{F} = \operatorname{Inf}\ \{\mathbb{F}_i\}_{i\in I}$.

2) إن $\mathbb{F}=\{S\}$ تشكل مرشحة على S ، وهي عنصر أصغر في أسرة كل المرشحات $\{\mathbb{F}_i\}_{i\in I}$على S ، ولكن لايوجد لهذه الأسرة عنصر أكبر إلاّ إذا كانت S مؤلفة من عنصر واحد.

إذا كانت S تحوي أكثر من عنصر واحد ، فإننا نأخذ $\varnothing \neq A_1 \subsetneq S$ ونأخذ $A_2 = S\setminus A_1$ ، عندئذ نجد أن:

$\mathbb{F}_1 = \{F\subseteq S \;;\; A_1 \subseteq F\}$ مرشحة على S تحوي A_1

و $\mathbb{F}_2 = \{F\subseteq S \;;\; A_2 \subseteq F\}$ مرشحة ثانية على S وتحوي A_2

وهاتين المرشحتين غير متقارنتين ، لأنه لو كان $\mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{F}_2$ لوجدنا أن $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{F}_2$، وبالتالي $\varnothing = A_1 \cap A_2 \in \mathbb{F}_2$، وهذا غير صحيح.

ولو كان $\mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_1$ لوجدنا أن $\varnothing \in \mathbb{F}_1$، وهذا غير صحيح.

لو فرضنا أن $\mathbb{F}$ عنصر أكبر لأسرة كل المرشحات $\{\mathbb{F}_i\}$ على مجموعة S.

لنأخذ $S \neq A_1 \in \mathbb{F}$ ، ولنأخذ $A_2 = S\setminus A_1$، عندئذ

$$\mathbb{F}_2 = \{F\subseteq S \;;\; A_2 \subseteq F\}$$

هي مرشحة على S ونلاحظ أن $\mathbb{F}_2 \not\subseteq \mathbb{F}$ للسبب الذي ذكرناه أعلاه.

1.5- تعريف:

إذا كانت $\mathbb{F}$ مرشحة على مجموعة S ، فإننا نقول عن أسرة مجموعات جزئية $\mathcal{B}$ من S إنها أساس للمرشحة $\mathbb{F}$ ، إذا كانت تحقق الشرطين التاليين:

1) $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{F}$

2) $\forall\, F\in \mathbb{F} \;\; \exists\, B\in \mathcal{B} \;;\; B\subseteq F$

1.6- ملاحظات وأمثلة:

1) إذا كان $\mathcal{B}$ أساساً لمرشحة $\mathbb{F}$، فإنه ينتج عن كون $\mathcal{B}\subseteq \mathbb{F}$ أن $\varnothing \notin \mathcal{B}$، وأنه إذا كان $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ، فإن $\varnothing \neq B_1 \cap B_2$.

2) من الواضح أن كل مرشحة هي أساس لنفسها.

3) إذا كانت $S = \{a,b,c\}$ ،وكانت $\mathcal{F} = \{\{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, S\}$ ، فإن $\mathcal{F}$ مرشحة على S ، وإن الأسرة $\mathcal{B} = \{\{b\}\}$ تشكل أساساً لـ $\mathcal{F}$، وأن $\mathcal{B}$ لاتشكل مرشحة على S.

4) ينتج عن الملاحظتين السابقتين أنه ، لمرشحة واحدة قد نجد أكثر من أساس واحد. وبالحقيقة لدينا الحقيقة الهامة التالية:

إذا كان $\mathcal{B}$ أساساً لمرشحة $\mathcal{F}$، وكانت $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{F}$، فإن $\mathcal{B}^*$ هو أساس آخر لـ $\mathcal{F}$.

(البرهان: تمرين يماثل نظيره في أساس التبولوجيا).

5) ليكن (E, τ_d) فضاءً تبولوجياً مترياً على E، وليكن $x \in E$. برهن على أن أسرة الكرات المفتوحة $\mathcal{B} = \left\{B(x, \frac{1}{n})\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ تشكل أساساً للمرشحة $\mathcal{F} = V(x)$.

1.7- تمهيدية:

إذا كان $\mathcal{B}$ أساساً لمرشحة $\mathcal{F}$ على مجموعة S ، فإن:

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq S \ ; \ \exists\, B \in \mathcal{B} \ ; \ B \subseteq F\}$$

البرهان:

لنضع $X = \{F \subseteq S \ ; \exists\, B \in \mathcal{B} \ ; B \subseteq F\}$، ولنبرهن أن $\mathcal{F} = X$:

واضح أنه إذا كان $F \in \mathcal{F}$، فإن $F \in X$ ، ولذلك فإن $\mathcal{F} \subseteq X$.

من جهة ثانية : إذا كان $F \in X$، فإنه يوجد $B \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ بحيث يكون $B \subseteq F \subseteq S$.

وبحسب الشرط (3) الوارد في تعريف المرشحة نجد أن $F \in \mathcal{F}$، ومنه $X \subseteq \mathcal{F}$ بالتالي $\mathcal{F} = X$

(*) ينتج عن التمهيدية السابقة أن معرفة أساس لمرشحة يكفي لمعرفة تلك المرشحة.

1.8- تمهيدية:

لتكن $\mathcal{B}$ أسرة غير خالية من المجموعات الجزئية من مجموعة S .

إن الأسرة $\mathcal{B}$ تشكل أساساً لمرشحة $\mathbb{F}$ على S ، إذا وفقط ،إذا تحقق الشرطان التاليان:

1) $\varnothing \notin \mathcal{B}$.

2) إذا كان $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ فإنه يوجد $B \in \mathcal{B}$ بحيث يكون $B \subseteq B_1 \cap B_2$.

البرهان:

لنفرض أولاً أن $\mathcal{B}$ أساس لمرشحة $\mathbb{F}$ على S ، عندئذ:

1) $\varnothing \notin \mathcal{B}$ كما ذكرنا سابقاً.

2) إذا كان $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \subseteq \mathbb{F}$، فإن $B_1 \cap B_2 \in \mathbb{F}$، ولذلك يوجد $B \in \mathcal{B}$ بحيث يكون $B_1 \cap B_2 \supseteq B$.

العكس: لنفرض أن الشرطين (1) و (2) محققان ، ولتكن

$$\mathbb{F} = \{ F \subseteq S \ ; \ \exists\ B \in \mathcal{B} \ ; \ B \subseteq F \}$$

عندئذ نجد أن $\mathbb{F}$ مرشحة على S ، وإن $\mathcal{B}$ أساس لها ،لأن:

- واضح أن $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{F}$ ، ولذلك فإن $\mathbb{F} \neq \varnothing$.
- إن $\varnothing \notin \mathbb{F}$ ، لأن $\varnothing \notin \mathcal{B}$ وكل عنصر من $\mathbb{F}$ يحوي على عنصر من $\mathcal{B}$.
- إذا كان $F_1 , F_2 \in \mathbb{F}$، فإنه يوجد $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ بحيث يكون $B_1 \subseteq F_1 \ , \ B_2 \subseteq F_1$، ومنه فإن $B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$. وبحسب الشرط (2) فإنه يوجد $B \in \mathcal{B}$ بحيث يكون $B \subseteq B_1 \cap B_2$ ، وبالتالي $B \subseteq F_1 \cap F_2$، ومنه $F_1 \cap F_2 \in \mathbb{F}$.

- إذا كانت $F \in \mathbb{F}$، وكانت $F \subseteq A \subseteq S$، فإنه يوجد $B \in \mathcal{B}$ بحيث يكون $B \subseteq F \subseteq A$، ولذلك فإن $A \in \mathbb{F}$.

إذن $\mathbb{F}$ تشكل مرشحة على S، وواضح أن $\mathcal{B}$ تشكل أساساً لهذه المرشحة.

1.9- ملاحظات وأمثلة:

1) إذا كانت S مجموعة غير خالية، وكانت $\varnothing \neq A \subseteq S$، فإن الأسرة $\mathcal{B}=\{A\}$ تشكل أساساً لمرشحة $\mathbb{F}$ على S، لأن الأسرة $\mathcal{B}$ تحقق شروط التمهيدية السابقة وإن المرشحة $\mathbb{F}$ في هذه الحالة هي $\mathbb{F}=\{F\subseteq S \;;\; A\subseteq F\}$، وقد رأيناها سابقاً.

2) لتكن (u_n) متتالية حقيقية، ولتكن $B_n=\{u_n,u_{n+1},u_{n+2},...\}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. إن الأسرة $\mathcal{B}=\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ تشكل أساساً لمرشحة $\mathbb{F}$ على $\mathbb{R}$، لأنها تحقق شروط التمهيدية السابقة. ولكن $\mathcal{B}$ لاتشكل مرشحة على $\mathbb{R}$ (لماذا ؟).

3) ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً، ولتكن $x \in X$. رأينا أن $\mathbb{F}=V(x)$ تشكل مرشحة على X. إن الأسرة:

$$\mathcal{B}=\{T\in\tau \quad ; \quad x\in T\}$$

تشكل أساساً لـ $\mathbb{F}=V(x)$

4) إن الأسرة $\mathcal{B}=\{\,]a,+\infty[\;\;;\;\; a\in\mathbb{R}\}$ تشكل أساساً لمرشحة على $\mathbb{R}$.

5) لتكن $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$ مرشحتين على مجموعة S، وليكن $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ أساسين لهما على الترتيب، عندئذٍ:

$\mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{F}_2 \Leftrightarrow$ لكل $B_2 \in \mathcal{B}_2$ يوجد $B_1 \in \mathcal{B}_1$ بحيث يكون $B_1 \subseteq B_2$.

1.10- تمهيدية:

لتكن $S \neq \varnothing$، ولتكن $D \subseteq \mathcal{P}(S)$، عندئذ:

يوجد مرشحة $\mathbb{F}$ على S تحوي $D \Leftrightarrow \varnothing \notin D[\overset{n}{\cap}]$.

البرهان:

$\Leftarrow$ واضح.

$\Rightarrow$: لتكن $\mathcal{B}=D[\bigcap^{n}]$، عندئذ نجد أن $\varnothing\notin\mathcal{B}$ من الفرض، ثم إنه إذا كان $B_1,B_2\in\mathcal{B}$، فإن $B_1\cap B_2\in\mathcal{B}$.

وبحسب التمهيدية 1.8 تكون $\mathcal{B}$ أساساً لمرشحة $\mathbb{F}$، ومنه $\mathcal{B}\subseteq\mathbb{F}$.

1.11- نتائج:

1) ليكن $\mathcal{B}$ أساساً لمرشحة $\mathbb{F}$ على S ، ولتكن $\mathbb{F}'$ مرشحة ثانية على S ، ولنفرض أن $B\cap F\neq\varnothing$ لكل $B\in\mathcal{B}$ ولكل $F\in\mathbb{F}'$، عندئذ توجد مرشحة $\mathbb{F}^*$ على S تحوي كلاً من $\mathbb{F}'$ و $\mathcal{B}$ معاً.

2) إذا كانت $\mathbb{F}$ مرشحة على S و A مجموعة جزئية تتقاطع مع جميع عناصر $\mathbb{F}$، فإنه توجد مرشحة $\mathbb{F}^*$ على S تحوي $\mathbb{F}$ و A معاً.

§.2- فوق المرشحات:

2.1- تعريف:

نقول عن مرشحة $\mathcal{U}$ على مجموعة S إنها فوق مرشحة ، إذا حققت الشرط التالي:

إذا كانت $\mathbb{F}$ مرشحة على S ، وكانت $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{F}$ ، فإن $\mathcal{U}=\mathbb{F}$، أي أن فوق المرشحة هي عنصر أعظمي في مجموعة المرشحات على S المرتبة بالاحتواء.

2.2- ملاحظة:

إذا كانت $\mathbb{F}$ مرشحة على S ، فإنه يوجد فوق مرشحة $\mathcal{U}$ على S بحيث إن $\mathbb{F}\subseteq\mathcal{U}$. أي أن مجموعة المرشحات على S هي مجموعة استقرائية.

2.3- **مبرهنة:**

كل مرشحة $\mathfrak{F}$ هي تقاطع جميع فوق المرشحات التي هي أقوى منها (أي التي تحويها).

البرهان:

لتكن $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ أسرة كل فوق المرشحات على S التي كل منها أقوى من $\mathfrak{F}$، ولتكن $\mathcal{U}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i$، ولنبرهن على أن $\mathcal{U}=\mathfrak{F}$:

- واضح أن $\mathfrak{F}\subseteq\mathcal{U}$، لأن $\mathfrak{F}\subseteq\mathcal{U}_i$ لكل $i\in I$.
- لنفرض جدلاً أن $\mathfrak{F}\neq\mathcal{U}$ ، عندئذ يوجد $L\in\mathcal{U}$ بحيث إن $L\notin\mathfrak{F}$.

لنضع $\mathcal{B}=\{F\cap(S\setminus L)\ ;\ F\in\mathfrak{F}\}$ ، عندئذ نجد أن $\mathcal{B}$ أساس لمرشحة، لأن:

- $\varnothing\notin\mathcal{B}$، لأنه لو كانت $\varnothing\in\mathcal{B}$ لوجدت $F\in\mathfrak{F}$ بحيث يكون $F\cap(S\setminus L)=\varnothing$، ومنه $F\subseteq L$، وهذا يعني أن $L\in\mathfrak{F}$، وهو غير صحيح.
- إذا كان B_1,B_2 عنصرين من $\mathcal{B}$، فإنه يوجد F_1,F_2 من $\mathfrak{F}$ بحيث يكون $B_1=F_1\cap(S\setminus L)\ ,\ B_2=F_2\cap(S\setminus L)$، ومنه

$$B_1\cap B_2=(F_1\cap F_2)\cap(S\setminus L)=F\cap(S\setminus L)\quad;\quad F=F_1\cap F_2\in\mathfrak{F}$$

أي أن $B_1\cap B_2\in\mathcal{B}$

إذن $\mathcal{B}$ أساس لمرشحة $\mathfrak{F}'$ على S (بحسب التمهيدية 1.8).

وبحسب الملاحظة 2.2 يوجد فوق مرشحة $\mathfrak{F}'\subseteq\mathcal{U}'$ وهذا يؤدي إلى أن $\mathfrak{F}\subseteq\mathcal{U}'$، لأن:

$$F\in\mathfrak{F}\Rightarrow F\cap(S\setminus L)\in\mathcal{B}\subseteq\mathfrak{F}'$$

وبما أن $F\cap(S\setminus L)\subseteq F$، فإن $F\in\mathfrak{F}'$

إذن $\mathcal{U}'\in\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$، ولذلك فإن $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}'$، وبما أن $L\in\mathcal{U}$، فإن $L\in\mathcal{U}'$. ولدينا $F\cap(S\setminus L)\in\mathcal{B}\subseteq\mathfrak{F}'\subseteq\mathcal{U}'$.

وبما أن $F\bigcap(S\setminus L)\subseteq(S\setminus L)$، فإن $S\setminus L\in\mathcal{U}'$.

إذن $L\in\mathcal{U}'$ و $S\setminus L\in\mathcal{U}'$ ، وبالتالي $\varnothing=L\bigcap(S\setminus L)\in\mathcal{U}'$، وهذا يناقض كون $\mathcal{U}'$ مرشحة. بالتالي فإن $\mathbb{F}=\mathcal{U}$.

برهان آخر:

لتكن $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ أسرة كل فوق المرشحات على S التي كل منها تحوي المرشحة $\mathbb{F}$، ولنبرهن أن $\mathbb{F}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i$.

واضح أن $\mathbb{F}\subseteq\bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i$، ولنبرهن الاحتواء المعاكس $\bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i\subseteq\mathbb{F}$.

إذا كانت A مجموعة جزئية من S لاتنتمي لـ $\mathbb{F}$، فإن A لاتحوي أي عنصر من $\mathbb{F}$ (لأنه إذا حوت A عنصراً من $\mathbb{F}$، فإنه حسب الشرط (3) من تعريف المرشحة، فإن A تنتمي لـ $\mathbb{F}$) وبالتالي فإن S\A تتقاطع مع جميع عناصر $\mathbb{F}$، وحسب النتيجة (2) من 1.11 توجد مرشحة $\mathbb{F}^*$ تحوي $\mathbb{F}$ و S\A معاً، وبالتالي حسب الملاحظة 2.2 توجد فوق مرشحة $\mathbb{F}'$ تحوي $\mathbb{F}$ و S\A معاً.

إن $\mathbb{F}'$ تحوي $\mathbb{F}$ ولاتحوي A ، وبالتالي $A\notin\bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i$، ومنه $\bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i\subseteq\mathbb{F}$.

وبالتالي $\mathbb{F}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i$.

2.4- مبرهنة:

لتكن $\mathcal{U}$ فوق مرشحة على مجموعة S. إذا كانت A و B مجموعتين جزئيتين من S وكان $A\bigcup B\in\mathcal{U}$ ، فإنه إما $A\in\mathcal{U}$ أو $B\in\mathcal{U}$.

البرهان:

لايمكن أن يكون $A=\varnothing$ و $B=\varnothing$ لأن هذا يعني $A\bigcup B=\varnothing\in\mathcal{U}$ وهو غير صحيح.

إذا كانت $A=\varnothing$، فإن $B=B\bigcup A\in\mathcal{U}$

وإذا كانت $B=\varnothing$، فإن $A=B\bigcup A\in \mathcal{U}$

لنفرض إذن أن $A\neq\varnothing$ وأن $B\neq\varnothing$، ولنفرض أن $A\notin \mathcal{U}$، ولنبرهن على أن $B\in \mathcal{U}$.

لنضع $\mathbb{F}=\{F\subseteq S \;;\; A\bigcup F\in \mathcal{U}\}$، عندئذ نجد أن:

- $\mathbb{F}\neq\varnothing$ لأن $B\in \mathbb{F}$ و $\varnothing\notin \mathbb{F}$ لأن $A\notin \mathcal{U}$.
- إذا كانت $F_1,F_2 \in \mathbb{F}$ ، فإن $A\bigcup F_1\in \mathcal{U}$ و $A\bigcup F_2\in \mathcal{U}$، ومنه

$$A\bigcup(F_1\bigcap F_2)=(A\bigcup F_1)\bigcap(A\bigcup F_2)\in \mathcal{U}$$

ولذلك فإن $F_1\bigcap F_2\in \mathbb{F}$.

إذا كانت C مجموعة جزئية من S ، وكان يوجد $F\in \mathbb{F}$ بحيث إن $F\subseteq C$ فإن $A\bigcup F\subseteq A\bigcup C$ و $A\bigcup F\in \mathcal{U}$، ولذلك فإن $A\bigcup C\in \mathcal{U}$، ومنه $C\in \mathbb{F}$.

إذن $\mathbb{F}$ مرشحة على S . ونلاحظ أن $\mathcal{U}\subseteq \mathbb{F}$، لأن:

$$u\in \mathcal{U} \;\; \& \;\; u\subseteq A\bigcup u \Rightarrow A\bigcup u\in \mathcal{U} \;\Rightarrow u\in \mathbb{F}$$

وبما أن $\mathcal{U}$ فوق مرشحة ، فإن $\mathcal{U}=\mathbb{F}$. وبما أن $B\in \mathbb{F}$ فإن $B\in \mathcal{U}$.

2.5- نتيجة:

إذا كانت $\mathcal{U}$ فوق مرشحة على مجموعة S، وكانت $A\subseteq S$، فإنه إما $A\in \mathcal{U}$ أو $S\setminus A\in \mathcal{U}$، لأن:

$$A\bigcup(S\setminus A)=S\in \mathcal{U}$$

2.6- نتيجة:

إذا كانت $\mathcal{U}$ فوق مرشحة على مجموعة S، وكانت $A_1,A_2,...,A_n$ مجموعات جزئية من S ، وكان $\bigcup_{i\in I} A_i\in \mathcal{U}$، فإنه يوجد $1\leq i_o\leq n$ بحيث يكون $A_{i_o}\in \mathcal{U}$.

2.7- **تعريف:**

لتكن S مجموعة ما ، ولتكن $D \subseteq \mathscr{P}(S)$. نقول إن D تحقق خاصة التقاطع المنتهي (F.I.P)، إذا كانت $\varnothing \notin D[\bigcap^{n}]$.

§.3- المرشحات والفضاءات التبولوجية:

في كل ما سيأتي في هذه الفقرة ، سيكون (X,τ) فضاء تبولوجياً.

3.1- **تعريف:**

لتكن $\mathbb{F}$ مرشحة على X ،ولتكن $x \in X$. نقول إن المرشحة $\mathbb{F}$ تتقارب من النقطة x ، إذا كان $V(x) \subseteq \mathbb{F}$.

وفي هذه الحالة نسمي x نقطة نهاية أو نقطة تراكم للمرشحة $\mathbb{F}$، ونكتب $\mathbb{F} \to x$ أو $x \in \lim \mathbb{F}$.

- نقول عن مرشحة $\mathbb{F}$ على X إنها متقاربة ،إذا كانت $\mathbb{F}$ تتقارب من نقطة، واحدة على الأقل، من X.

3.2- **ملاحظات وأمثلة:**

1) $V(x) \subseteq \mathbb{F} \Leftrightarrow \mathbb{F} \to x$

$$\exists v \in V(x) \quad ; \quad v \notin \mathbb{F} \Leftrightarrow \mathbb{F} \not\to x$$

2) قد تتقارب المرشحة الواحدة لأكثر من نقطة واحدة

مثال: لتكن $X = \{1,2,3\}$; $\tau = \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}, X\}$

$$\mathbb{F} = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, X\}$$

نلاحظ أن:

$$V(1) = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, X\} \subseteq \mathbb{F} \Rightarrow \mathbb{F} \to 1$$
$$V(2) = \{\{1,2\}, X\} \subseteq \mathbb{F} \Rightarrow \mathbb{F} \to 2$$
$$V(3) = \{X\} \subseteq \mathbb{F} \Rightarrow \mathbb{F} \to 3$$

3) إذا كانت $\mathbb{F}_2 , \mathbb{F}_1$ مرشحتين على X ، فإن:

$$\mathbb{F}_1 \to x \quad \& \quad \mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{F}_2 \Rightarrow \mathbb{F}_2 \to x$$

لأن: $V(x) \subseteq \mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{F}_2 \Rightarrow V(x) \subseteq \mathbb{F}_2$

3.3- تعريف:

إذا كان $\mathcal{B}$ أساساً لمرشحة $\mathbb{F}$ على X ، وكانت المرشحة $\mathbb{F}$ تتقارب من النقطة x ، فإننا نقول إن الأساس $\mathcal{B}$ يتقارب من النقطة x ، ونقول عن x إنها نقطة نهاية للأساس $\mathcal{B}$ ، أي أن:

x نقطة نهاية لـ $\mathcal{B} \Leftrightarrow x$ نقطة نهاية لـ $\mathbb{F}$.

$$\Leftrightarrow V(x) \subseteq \mathbb{F}$$

3.4- تعريف:

لتكن $\mathbb{F}$ مرشحة على X ، ولتكن $x \in X$.

نسمي x نقطة لاصقة بالمرشحة $\mathbb{F}$، ونكتب $x \in \overline{\mathbb{F}}$، إذا تحقق الشرط التالي:

$$x \in \overline{F} \quad \forall \; F \in \mathbb{F}$$

أي أن:

$$x \in \overline{F} \quad \forall \; F \in \mathbb{F} \Leftrightarrow x \in \overline{\mathbb{F}}$$

$$\Leftrightarrow v \cap F \neq \varnothing \quad \forall \; F \in \mathbb{F} \;\; , \;\; \forall \; v \in V(x)$$

ويكون: $x \notin \overline{\mathbb{F}} \Leftrightarrow$ يوجد $F \in \mathbb{F}$ بحيث $x \notin \overline{F}$.

3.5- تعريف:

إذا كان $\mathcal{B}$ أساساً لمرشحة $\mathbb{F}$ على X ،فإننا نقول عن نقطة x من X إنها نقطة لاصقة بالأساس $\mathcal{B}$، ونكتب $x \in \overline{\mathcal{B}}$، إذا تحقق الشرط التالي:

$$x \in \overline{B} \quad \forall \; B \in \mathcal{B}$$

أي أن:

$$x\in \bar{B}\ \ \forall\ \ B\in\mathcal{B} \ \Leftrightarrow\ x\in\bar{\mathcal{B}}$$
$$x\in\bigcap_{B\in\mathcal{B}}\bar{B} \quad \Leftrightarrow$$
$$v\cap B\neq\varnothing\ \ \forall\ B\in\mathcal{B}\ ,\ \forall\ \ v\in V(x)\ \Leftrightarrow$$

ويكون : $x\notin\bar{\mathcal{B}} \Leftrightarrow$ يوجد $B\in\mathcal{B}$ بحيث $x\notin\bar{B}$.

3.6- ملاحظة:

$$x\in\bar{\mathbb{F}} \quad \Leftrightarrow \quad x\in\bar{\mathcal{B}}$$

البرهان:

$\Leftarrow$: بفرض $x\in\bar{\mathcal{B}}$ ، ولتكن $F\in\mathbb{F}$، فإنه توجد B من $\mathcal{B}$ بحيث $B\subseteq F$، ومنه $\bar{B}\subseteq\bar{F}$، وبما أن $x\in\bar{B}$ من الفرض، فإن $x\in\bar{F}$ ، ومنه $x\in\bar{\mathbb{F}}$.

$\Rightarrow$: بفرض $x\in\bar{\mathbb{F}}$، ولتكن $B\in\mathcal{B}$، فإن $B\in\mathbb{F}$، لأن $\mathcal{B}\subseteq\mathbb{F}$، وحسب الفرض ، فإن $x\in\bar{B}$، ومنه $x\in\bar{\mathcal{B}}$.

3.7- تمهيدية:

ليكن $\mathcal{B}$ أساساً لمرشحة $\mathbb{F}$ على X، عندئذ:

$$\mathbb{F}\to x \ \Rightarrow\ x\in\bar{\mathcal{B}}$$

وبالتالي
$$\Rightarrow\ x\in\bar{\mathbb{F}}$$

والعكس غير صحيح، أي أن $\mathbb{F}\to x \not\Leftarrow x\in\bar{\mathcal{B}}$

البرهان:

بما أن $\mathbb{F}\to x$، فإن $V(x)\subseteq\mathbb{F}$، ولدينا $\mathcal{B}\subseteq\mathbb{F}$، ولذلك فإنه أياً كانت $B\in\mathcal{B}$ وأياً كانت $v\in V(x)$، فإن $v,B\in\mathbb{F}$ ، ولذلك فإن $v\cap B\neq\varnothing$، ومنه فإن $x\in\bar{B}$، وبالتالي $x\in\bar{\mathcal{B}}$.

من أجل أن نثبت أن العكس غير صحيح نضرب المثال التالي:

مثال: ليكن

$$\tau=\{\varnothing, X, \{1\}, \{1,2\}\} \quad , \quad X=\{1,2,3\}$$

$$\mathscr{B}=\{\{2,3\}\} \qquad , \qquad \mathbb{F}=\{\{2,3\}\ ,\ X\}$$

نلاحظ أن $V(2)=\{\{1,2\}\ ,\ X\}\not\subseteq \mathbb{F} \Rightarrow \mathbb{F} \not\to 2$

ولكن ؛ أياً كانت $B \in \mathscr{B}$ وأياً كانت $v \in V(2)$ لدينا $v \cap B \neq \varnothing$، ولذلك فإن $2 \in \bar{\mathscr{B}}$.

3.8- ملاحظات وأمثلة:

1) ليكن $(\mathbb{R}, \tau_u)$ الفضاء العادي لـ $\mathbb{R}$، ولتكن $A=\{1,2\}$ ولتكن

$$\mathbb{F}=\{\ F\subseteq\mathbb{R} \quad ; \quad A\subseteq F\ \}$$

واضح أن $\mathbb{F}$ مرشحة على $\mathbb{R}$ وأن $\mathscr{B}=\{A\}$ أساس لهذه المرشحة، ونلاحظ أن $2\in A=\bar{A}$، ولذلك فإن $2\in\bar{\mathscr{B}}$.

ولكن $\mathbb{F}\not\to 2$، لأن $V(2)\not\subseteq\mathbb{F}$ حيث إن $v=]\frac{3}{2}\ ,3\,[\in V(2)$، ولكن، $v\notin\mathbb{F}$ لأن $A\not\subseteq v$.

3.9- مبرهنة:

لتكن $\mathscr{U}$ فوق مرشحة على فضاء تبولوجي (X,τ) ، وليكن $\mathscr{B}$ أساساً لها ، عندئذٍ:

$$\mathscr{U}\to x \iff x\in\bar{\mathscr{B}}$$

وبالتالي $\iff x\in\bar{\mathscr{U}}$

البرهان:

$\Rightarrow$: من التمهيدية 3.7.

$\Leftarrow$: لنفرض أن $x\in\bar{\mathscr{B}}$، عندئذ المجموعة $S=V(x)\cup\mathscr{B}$ تحقق خاصة التقاطع المنتهي، ولذلك فإنه توجد مرشحة $\mathbb{F}$ على X ، بحيث يكون $S\subseteq\mathbb{F}$.

وبما أن $V(x)\subseteq S\subseteq\mathbb{F}$، فإن $\mathbb{F}\to x$.

ولكن $\mathbb{F} \subseteq \mathcal{U}$، لأن

$$F \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B} \quad ; \quad B \subseteq F$$

ولكن $B \in \mathcal{B} \subseteq S \subseteq \mathbb{F}$، ولذلك فإن $F \in \mathbb{F}$.

إذن $\mathbb{F} \subseteq \mathcal{U}$، وبما أن $\mathcal{U}$ فوق مرشحة فإن $\mathcal{U} = \mathbb{F}$، ومنه $\mathcal{U} \to x$.

3.10- مبرهنة:

لتكن $\mathbb{F}$ مرشحة على X، ولتكن $x \in X$، عندئذ :

$\mathbb{F} \to x \iff$ كل فوق مرشحة أقوى من $\mathbb{F}$ تتقارب من x.

البرهان:

لتكن $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ أسرة كل فوق المرشحات الأقوى من $\mathbb{F}$، عندئذ يكون $\bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i = \mathbb{F}$، ومنه:

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \to x &\iff V(x) \subseteq \mathbb{F} \iff V(x) \subseteq \mathcal{U}_i \quad \forall\, i \in I \\ &\iff \mathcal{U}_i \to x \qquad \forall\, i \in I \end{aligned}$$

3.11- مبرهنة:

ليكن (X, τ) فضاءً تبولوجياً. إن الشروط التالية متكافئة:

1) لكل $x \neq y$ من X يوجد $V(x) \ni v_x$ و $V(y) \ni v_y$ بحيث يكون $v_x \cap v_y = \varnothing$.

2) لكل $x \neq y$ من X يوجد $V(x) \ni v$ بحيث إن $\bar{v} \not\ni y$.

3) لكل x من X لدينا $\bigcap_{v \in V(x)} \bar{v} = \{x\}$

4) إذا كانت $\mathbb{F}$ مرشحة على X تتقارب نحو x ، وكانت $\mathcal{B}$ أساساً لــ $\mathbb{F}$، فإن x هي النقطة اللاصقة الوحيدة بـ $\mathcal{B}$ (وبالتالي النقطة اللاصقة الوحيدة بـ $\mathbb{F}$).

5) إذا كانت $\mathbb{F}$ مرشحة على X متقاربة ، فإن لـ $\mathbb{F}$ نقطة نهاية وحيدة.

6) (X, τ) فضاء T_2 (أي فضاء هاوسدورف).

البرهان:

$2 \Rightarrow 1$: بما أن $v_x \cap v_y = \varnothing$، فإن $y \notin \overline{v}_x$ ، نضع $v = v_x$ لنجد المطلوب.

$3 \Rightarrow 2$: لدينا $x \in v \subseteq \overline{v}$ لكل $v \in V(x)$، ولذلك فإن $\{x\} \subseteq \bigcap_{v \in V(x)} \overline{v}$، ومن جهة ثانية: لتكن $y \in X \setminus \{x\}$، عندئذ $y \neq x$، ولذلك فإنه ينتج عن (2) أنه يوجد $v \in V(x)$ بحيث $y \notin \overline{v}$، وبالتالي $y \notin \bigcap_{v \in V(x)} \overline{v}$، وبالتالي $y \in X \setminus \bigcap_{v \in V(x)} \overline{v}$، ومنه $X \setminus \{x\} \subseteq X \setminus \bigcap_{v \in V(x)} \overline{v}$ أو $\bigcap_{v \in V(x)} \overline{v} \subseteq \{x\}$ وبالتالي $\bigcap_{v \in V(x)} \overline{v} = \{x\}$.

$4 \Rightarrow 3$: بما أن $\mathbb{F} \to x$، فإن $x \in \overline{\mathcal{B}}$، وبالتالي $x \in \overline{B}$ لكل B من $\mathcal{B}$، ومنه $\{x\} \subseteq \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B}$.

ومن جهة ثانية: بما أن $\mathbb{F} \to x$، فإن $V(x) \subseteq \mathbb{F}$، ولذلك فإنه لكل v من $V(x)$ يوجد B من $\mathcal{B}$ بحيث يكون $B \subseteq v$، ومنه $\overline{B} \subseteq \overline{v}$، ومنه فإن $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B} \subseteq \overline{B} \subseteq \overline{v}$ لكل $v \in V(x)$، وينتج عن هذا وعن (3) أن:

$\bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B} \subseteq \bigcap_{v \in V(x)} \overline{v} = \{x\}$، بالتالي $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B} = \{x\}$.

إذا كانت $y \in \overline{B}$، فإن $y \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B} = \{x\}$، وبالتالي $y = x$، أي أن x هي النقطة اللاصقة الوحيدة بـ $\mathcal{B}$.

$5 \Rightarrow 4$: لنفرض أن $\mathbb{F} \to x$ وأن $\mathbb{F} \to y$، وليكن $\mathcal{B}$ أساساً لـ $\mathbb{F}$،

عندئذ $x \in \overline{\mathcal{B}}$ و $y \in \overline{\mathcal{B}}$، ومن (4) ينتج أن $x = y$.

$6 \Rightarrow 5$: لتكن $x \neq y$ من X ، ولتكن $S = V(x) \cup V(y)$، عندئذ S لايمكن أن تحقق خاصة التقاطع المنتهي ، لأنه لو كانت S تحقق خاصة التقاطع المنتهي لوجدت مرشحة $\mathbb{F}$ على X تحوي S ، وعندئذ يكون:

$V(x) \subseteq S \subseteq \mathcal{F}$ ولذلك فإن $\mathcal{F} \to x$

$V(y) \subseteq S \subseteq \mathcal{F}$ ولذلك فإن $\mathcal{F} \to y$

ونحصل على تناقض مع (5) .

إذن يوجد A و B من S بحيث يكون $A \cap B = \varnothing$.

لو كان A و B من $V(x)$ لكان $A \cap B \neq \varnothing$ ، ولو كان A و B من $V(y)$ لكان $A \cap B \neq \varnothing$. إذن $A \in V(x)$ و $B \in V(y)$.

ومن تعريف الجاورة نجد أنه يوجد $T_x \in \tau$ بحيث إن $x \in T_x \subseteq A$، ويوجد $T_y \in \tau$ بحيث إن $y \in T_y \subseteq B$، ونلاحظ أن $T_x \cap T_y \subseteq A \cap B = \varnothing$، أي أن $T_x \cap T_y = \varnothing$، ولذلك فإن (X, τ) فضاء T_2.

$1 \Rightarrow 6$: ليكن $x \neq y$ من X، عندئذ ينتج من (6) أنه يوجد $T_x, T_y \in \tau$

بحيث إن $x \in T_x \;,\; y \in T_y \;,\; T_x \cap T_y = \varnothing$.

نأخذ $v_x = T_x$ و $v_y = T_y$ لنجد المطلوب.

4.§- المرشحات والتوابع:

- لنتذكر أنه إذا كانت $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ مرشحتين على مجموعة S ، وكان $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ أساسين لهما (على الترتيب)، فإننا نقول:

إن $\mathcal{F}_1$ أقوى من $\mathcal{F}_2$ ، إذا كان $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$، وهذا يكافئ تحقق الشرط التالي:

$$\forall\, B_2 \in \mathcal{B}_2 \quad \exists\, B_1 \in \mathcal{B}_1 \quad ; \quad B_1 \subseteq B_2$$

ولذلك فإننا نقول في هذه الحالة أيضاً إن $\mathcal{B}_1$ أقوى من $\mathcal{B}_2$.

- لتكن S و S^* مجموعتين غير خاليتين ، وليكن $f : S \to S^*$ تابعاً ما ، ولتكن $\mathcal{F}$ مرشحة على S ، و $\mathcal{B}$ أساس لمرشحة على S ، و $\mathcal{B}^*$ أساساً لمرشحة على S^*. فإننا سنستخدم فيمايلي المجموعات التالية :

$$f(\mathbb{F})=\{f(F) \quad ; \; F\in \mathbb{F}\}$$
$$f(\mathcal{B})=\{f(B) \quad ; \; B\in \mathcal{B}\}$$
$$f^{-1}(\mathcal{B}^*)=\{f^{-1}(B^*) \; ; \; B^*\in \mathcal{B}^*\}$$

4.1- مبرهنة:

لتكن S و S^* مجموعتين غير خاليتين ما، وليكن $f : S\to S^*$ تابعاً ما. لدينا الخواص التالية:

1) إذا كان $\mathcal{B}$ أساساً لمرشحة $\mathbb{F}$ على S، فإن $\mathcal{B}^*=f(\mathcal{B})$ يكون أساساً لمرشحة $\mathbb{F}^*$ على S^*.

2) إذا كان $\mathcal{B}$ أساساً أقوى من الأساس $\mathcal{A}$، فإن الأساس $f(\mathcal{B})=\mathcal{B}^*$ أقوى من الأساس $f(\mathcal{A})=\mathcal{A}^*$.

3) إذا كان $\mathcal{B}$ أساساً لفوق مرشحة $\mathcal{U}$ على S، فإن $\mathcal{B}^*=f(\mathcal{B})$ يكون أساساً لفوق مرشحة $\mathcal{U}^*$ على S^*.

4) إذا كان $\mathcal{B}^*$ أساساً لمرشحة $\mathbb{F}^*$ على S^*، فإن:

$f^{-1}(\mathcal{B}^*)$ أساس لمرشحة $\mathbb{F}$ على S $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(B^*)\neq\varnothing$ لكل $B^*\in\mathcal{B}^*$.

5) إذا كان $\mathcal{B}^*$ أساساً أقوى من الأساس $\mathcal{A}^*$، وإذا كان $f^{-1}(\mathcal{B}^*)$ أساساً لمرشحة $\mathbb{F}$ على S، فإن $f^{-1}(\mathcal{A}^*)$ يكون أساساً للمرشحة $\mathbb{F}$، ويكون $f^{-1}(\mathcal{B}^*)$ أقوى من $f^{-1}(\mathcal{A}^*)$.

البرهان:

1) من الفرض لدينا $\mathcal{B}\neq\varnothing$، ولذلك فإن $\mathcal{B}^*=f(\mathcal{B})\neq\varnothing$، ثم إن $\varnothing\notin\mathcal{B}$، ولذلك فإن $\varnothing\notin f(\mathcal{B})=\mathcal{B}^*$. ومن جهة ثانية: نلاحظ أنه إذا كان B_2^*, B_1^* عنصرين من $f(\mathcal{B})=\mathcal{B}^*$، فإنه يوجد عنصران B_1 و B_2 من $\mathcal{B}$ بحيث يكون $f(B_1)=B_1^*$ و $f(B_2)=B_2^*$. وبما أن $\mathcal{B}$ أساس لمرشحة، فإنه يوجد B من $\mathcal{B}$

بحيث يكون $B \subseteq B_1 \cap B_2$، ومنه نجد أن $B^* = f(B) \in f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^*$ وتحقق $B^* = f(B) \subseteq f(B_1 \cap B_2) \subseteq f(B_1) \cap f(B_2) = B_1^* \cap B_2^*$.

إذن $\mathcal{B}^* = f(\mathcal{B})$ تشكل أساس لمرشحة $\mathcal{F}^*$ على S^* (بحسب التمهيدية 1.8).

2) لتكن $A^* \in \mathcal{A}^* = f(\mathcal{A})$ ، عندئذ يوجد $A \in \mathcal{A}$ بحيث يكون $A^* = f(A)$. وبما أن الأساس $\mathcal{B}$ أقوى من الأساس $\mathcal{A}$ ، فإنه يوجد $B \in \mathcal{B}$ بحيث يكون $B \subseteq A$. ومنه

$$B^* = f(B) \in f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^*$$

و

$$B^* = f(B) \subseteq f(A) = A^*$$

وهذا يعني أن الأساس $\mathcal{B}^*$ أقوى من الأساس $\mathcal{A}^*$.

3) بما أن $\mathcal{B}$ أساس لفوق مرشحة $\mathcal{U}$ على S ، فإن:

$$\mathcal{U}^* = \left\{ F^* \subseteq S^* \ ; \quad \exists\ B^* \in \mathcal{B}^* \ ; \ B^* \subseteq F^* \right\}$$

لنبرهن على أن $\mathcal{U}^*$ فوق مرشحة على S^*:

إن $\mathcal{U}^*$ تحقق خاصة التقاطع المنتهي (FIP) ، لأن $\mathcal{U}^*$ مرشحة.

لتكن $S^* \supseteq A^*$ ، سوف نبرهن على أنه إما $A^* \in \mathcal{U}^*$ أو $(S^* \setminus A^*) \in \mathcal{U}^*$:

لنفرض أن $A^* \notin \mathcal{U}^*$ عندئذ $f(B) \not\subseteq A^*$ لكل $B \in \mathcal{B}$ ، ومنه $B \not\subseteq f^{-1}(A^*)$ لكل $B \in \mathcal{B}$، وهذا يعني أن $f^{-1}(A^*) \notin \mathcal{U}$ ، وبما أن $\mathcal{U}$ فوق مرشحة على S ، فإن $S \setminus f^{-1}(A^*) \in \mathcal{U}$، أي أن $f^{-1}(S^* \setminus A^*) \in \mathcal{U}$، ولذلك فإنه يوجد $B \in \mathcal{B}$ بحيث إن $B \subseteq f^{-1}(S^* \setminus A^*)$، ومنه نجد أن:

$$f(B) \subseteq f\left[f^{-1}(S^* \setminus A^*)\right] \subseteq S^* \setminus A^* \ ; \quad f(B) = B^* \in \mathcal{B}^*$$

وهذا يعني أن $S^* \setminus A^* \in \mathcal{U}^*$.

وبالتالي فإن $\mathcal{U}^*$ فوق مرشحة على S^* (بحسب النتيجة 2.5).

4) $\Leftarrow$: بما أن $f^{-1}\left(\mathscr{B}^*\right)$ أساس لمرشحة على S ، فإن $\varnothing \notin f^{-1}\left(\mathscr{B}^*\right)$ ولذلك فإن $f^{-1}\left(B^*\right) \neq \varnothing$ لكل $B^* \ni \mathscr{B}^*$.

$\Rightarrow$: بما أن $\mathscr{B}^* \neq \varnothing$، فإن $f^{-1}\left(\mathscr{B}^*\right) \neq \varnothing$ ، ومن الفرض لدينا $\varnothing \notin f^{-1}\left(\mathscr{B}^*\right)$. ثم إنه إذا كان B_2, B_1 عنصرين من $f^{-1}\left(\mathscr{B}^*\right)$، فإنه يوجد عنصران B_2^*, B_1^* من $\mathscr{B}^*$ بحيث إن $B_1 = f^{-1}\left(B_1^*\right)$, $B_2 = f^{-1}\left(B_2^*\right)$. وبما أن $\mathscr{B}^*$ أساس لمرشحة، فإنه يوجد B^* من $\mathscr{B}^*$ بحيث يكون $B^* \subseteq B_1^* \cap B_2^*$، ومنه نجد أن $f^{-1}\left(B^*\right) \in f^{-1}\left(\mathscr{B}^*\right)$ ، وأن

$$f^{-1}\left(B^*\right) \subseteq f^{-1}\left(B_1^* \cap B_2^*\right) = f^{-1}\left(B_1^*\right) \cap f^{-1}\left(B_2^*\right) = B_1 \cap B_2$$

وهذا يعني أن $f^{-1}\left(\mathscr{B}^*\right)$ أساس لمرشحة على S.

5) لتكن $A \ni f^{-1}(\mathscr{A}^*)$ ، عندئذ يوجد $A^* \ni \mathscr{A}^*$ بحيث إن $A = f^{-1}\left(A^*\right)$، وبما أن الأساس $\mathscr{B}^*$ أقوى من الأساس $\mathscr{A}^*$ ، فإنه يوجد $B^* \ni \mathscr{B}^*$ بحيث إن $B^* \subseteq A^*$، ومنه نجد أن:

$$f^{-1}\left(B^*\right) \in f^{-1}\left(\mathscr{B}^*\right) \quad \& \quad f^{-1}\left(B^*\right) \subseteq f^{-1}\left(A^*\right) = A$$

وهذا يعني أن $f^{-1}(\mathscr{A}^*)$ أساس (بحسب 4 من هذه المبرهنة) ، وأن الأساس $f^{-1}\left(\mathscr{B}^*\right)$ أقوى من الأساس $f^{-1}(\mathscr{A}^*)$.

4.2- ملاحظات وأمثلة:

1) إذا كانت S و S^* مجموعتين ما، وكان $f : S \to S^*$ تابعاً ما، وكانت $\mathfrak{F}$ مرشحة على S ، فإنه ليس من الضروري أن تكون $f\left(\mathfrak{F}\right)$ مرشحة على S^* ، (ولكن $f(\mathfrak{F})$ أساس لمرشحة على S^*، لأن $\mathfrak{F}$ أساس لـ $\mathfrak{F}$ على S).

مثال:

لتكن $S = \{1,2\}$ و $S^* = \{a,b,c\}$ و $f : S \to S^*$ معرفاً بـ :
$f\left(1\right) = f\left(2\right) = b$. عندئذ نلاحظ أن:

$\mathbb{F}=\{S\}$ تشكل مرشحة على S، ولكن $f(\mathbb{F})=\{\{b\}\}$ ليست مرشحة على S^*.

2) إذا كانت $\mathbb{F}$ مرشحة على S وكان $f: S \to S^*$ تابعاً ما فإننا سنرمز بـ $f(\mathbb{F})^*$ للمرشحة على S^* التي أساسها $f(\mathbb{F})$.

4.3- تعريف:

ليكن (X^*, τ^*) فضاءً تبولوجياً، ولتكن X مجموعة غير خالية، ولتكن $\mathbb{F}$ مرشحة على X ، وليكن $f: X \to X^*$ تابعاً ما ، عندئذ:

1) نقول عن نقطة x^* من X^* إنها نقطة نهاية للتابع f وفق المرشحة $\mathbb{F}$ [ونعبر عن ذلك بالكتابة $x^* \in \lim_{\mathbb{F}} f$] ، إذا كانت المرشحة $f(\mathbb{F})^*$ تتقارب من النقطة x^* في الفضاء (X^*, τ^*).

2) نقول عن نقطة x^* من X^* إنها نقطة لاصقة بالتابع f وفق المرشحة $\mathbb{F}$ [ونعبر عن ذلك بالكتابة $x^* \in \overline{f}_{\mathbb{F}}$] ، إذا كانت x^* نقطة لاصقة بالمرشحة $f(\mathbb{F})^*$.

4.4- ملاحظات وأمثلة:

1) يمكن لتابع f ينطلق من مجموعة غير خالية X ويستقر في فضاء تبولوجي (X^*, τ^*) أن يملك أكثر من نقطة نهاية وفق مرشحة واحدة ، كما يوضح المثال التالي:

مثال:

لتكن $X^* = \{a,b,c\}$, $\tau^* = \{\varnothing, X^*, \{a\}, \{a,b\}\}$

$X = \{1,2\}$, $\mathbb{F} = \{\{1\}, \{1,2\}\}$

و $f : X \to X^*$ تابعاً معرفاً بـ $f(1) = f(2) = b$، عندئذ نجد أن:

$$f(\mathbb{F}) = \{ f(\{1\}), f(\{1,2\}) \} = \{\{b\}\}$$

ومنه:

$$f(\mathbb{F})^* = \{\{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X^*\}$$

ونلاحظ أن:

$$V(a) = \{\{a\},\{a,b\}, \{a,c\}, X^*\} \not\subseteq f(\mathbb{F})^*$$

ولذلك فإن a ليست نقطة نهاية للتابع f وفق المرشحة $\mathbb{F}$، لأن المرشحة $f(\mathbb{F})^*$ لاتتقارب من النقطة a.

ثم إن: $V(b) = \{ \{a,b\}, X^* \} \subseteq f(\mathbb{F})^*$.

أي أن المرشحة $f(\mathbb{F})^*$ تتقارب من النقطة b ،ولذلك فإن $b \in \lim\limits_{\mathbb{F}} f$

ثم إن: $V(c) = \{X^*\} \subseteq f(\mathbb{F})^*$

أي أن المرشحة $f(\mathbb{F})^*$ تتقارب من النقطة c ، ولذلك فإن $c \in \lim\limits_{\mathbb{F}} f$.

4.5- مبرهنة:

إذا كان (X^*, τ^*) فضاءً تبولوجياً ، وكانت X مجموعة ما غير خالية ، وكانت $\mathbb{F}$ مرشحة على X ، وكان $f : X \to X^*$ تابعاً ما ، وكانت $x^* \in X^*$، فإن الشروط التالية متكافئة:

a) $x^* \in \lim\limits_{\mathbb{F}} f$

b) $V(x^*) \subseteq f(\mathbb{F})^*$

c) لكل v^* من $V(x^*)$ يوجد F من $\mathbb{F}$ بحيث يكون $f(F) \subseteq v^*$.

d) لكل v^* من $V(x^*)$ يكون $f^{-1}(v^*) \in \mathbb{F}$.

البرهان:

إن التكافؤ بين الشروط a و b و c ينتج عن التعاريف مباشرة ، ولذلك فإننا سنبرهن على التكافؤ بين a) و d) فقط:

$a \Rightarrow d$: إن $x^* \in \lim_{\mathbb{F}} f$ يعني أن المرشحة $f(\mathbb{F})^*$ تتقارب من x^*، وهذا يعني أن $V(x^*) \subseteq f(\mathbb{F})^*$ ، ومنه نجد أنه ، إذا كانت v^* من $V(x^*)$، فإن $v^* \in f(\mathbb{F})^*$ ولذلك فإنه يوجد $F \in \mathbb{F}$ بحيث يكون $f(F) \subseteq v^*$، وبالتالي:

$$F \subseteq f^{-1}(f(F)) \subseteq f^{-1}(v^*)$$

ومن تعريف المرشحة نجد أن $f^{-1}(v^*) \in \mathbb{F}$.

$d \Rightarrow a$: لتكن $v^* \in V(x^*)$، عندئذ ينتج عن d) أن $f^{-1}(v^*) \in \mathbb{F}$.

وبما أن $\mathbb{F}$ أساس لـ $\mathbb{F}$، فإنه يوجد $F \in \mathbb{F}$ بحيث يكون $F \subseteq f^{-1}(v^*)$، ومنه نجد أن:

$$f(F) \subseteq f\left(f^{-1}(v^*)\right) \subseteq v^*$$

وبما أن $f(F) \in f(\mathbb{F}) \subseteq f(\mathbb{F})^*$، فإن $v^* \in f(\mathbb{F})^*$.

إذن $V(x^*) \subseteq f(\mathbb{F})^*$ ، وبالتالي فإن المرشحة $f(\mathbb{F})^*$ تتقارب من النقطة x^*، أي أن $x^* \in \lim_{\mathbb{F}} f$.

4.6- مبرهنة:

إذا كان (X^*, τ^*) فضاءً تبولوجيا، وكانت X مجموعة غير خالية، وكانت $\mathbb{F}$ مرشحة على X ، وكان $f : X \to X^*$ تابعاً ما ، وكانت $x^* \in X^*$، فإن الشروط التالية متكافئة:

a) $x^* \in \overline{f}_{\mathbb{F}}$.

b) $x^* \in \overline{f(\mathbb{F})}$.

c) $v^* \cap f(F) \neq \varnothing$ لكل $v^* \in V(x^*)$ وكل $F \in \mathbb{F}$

d) $f^{-1}(v^*) \cap F \neq \varnothing$ لكل $v^* \in V(x^*)$ وكل $F \in \mathbb{F}$.

البرهان:

إن التكافؤ بين الشروط a و b و c ينتج عن التعاريف مباشرة.

ولذلك فإننا سنبرهن على التكافؤ بين a) و d) فقط:

$a \Rightarrow d$: إن $x^* \in \overline{f}_{\mathcal{F}}$ يعني أن $v^* \cap f(F) \neq \emptyset$ لكل $v^* \in V(x^*)$ وكل $F \in \mathcal{F}$.

ليكن $z \in v^* \cap f(F)$، عندئذ $\{f^{-1}(z)\} \subseteq f^{-1}(v^*)$، ويوجد $y \in F$ بحيث يكون $z = f(y)$، ولذلك فإن $y \in \{f^{-1}(z)\} \subseteq f^{-1}(v^*)$، ومنه فإن $y \in f^{-1}(v^*) \cap F$، أي أن $f^{-1}(v^*) \cap F \neq \emptyset$ لكل $v^* \in V(x^*)$ وكل $F \in \mathcal{F}$.

$d \Rightarrow a$: إن $f^{-1}(v^*) \cap F \neq \emptyset$ يؤدي إلى أن $f\left[f^{-1}(v^*) \cap F\right] \neq \emptyset$، أي أن $f\left(f^{-1}(v^*)\right) \cap f(F) \neq \emptyset$، وبما أن $f\left(f^{-1}(v^*)\right) \subseteq v^*$ فإن $v^* \cap f(F) \neq \emptyset$ لكل $v^* \in V(x^*)$ وكل $F \in \mathcal{F}$، ومنه ينتج أن $x^* \in \overline{f}_{\mathcal{F}}$

4.7- مبرهنة:

إذا كان (X^*, τ^*) فضاءً تبولوجياً، وكانت X مجموعة غير خالية، وكانت $\mathcal{F}$ مرشحة على X ، وكان $f : X \to (X^*, \tau^*)$ تابعاً ما، وكانت $x^* \in X^*$، فإن:

$$x^* \in \overline{f}_{\mathcal{F}} \ \underset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow} \ x^* \in \lim_{\mathcal{F}} f$$

البرهان:

$(\Leftarrow)$: بما أن x^* نقطة نهاية للتابع f وفق المرشحة $\mathcal{F}$، فإن:

$V(x^*) \subseteq f(\mathcal{F})^*$ ، ومنه فإن $v^* \cap f(F) \neq \emptyset$ لكل v^* من $V(x^*)$ ولكل F من $\mathcal{F}$.

ولكن هذا يعني أن $x^* \in \overline{f(F)}$ لكل F من $\mathcal{F}$ ، أي أن $x^* \in \overline{f(\mathcal{F})}$، وبالتالي فإن $x^* \in \overline{f}_{\mathcal{F}}$.

($\not\Leftarrow$) : لبيان هذا نضرب المثال التالي :

لتكن $X^*\{a,b,c\}$, $X=\{1,2\}$, $\tau^*=\left\{\varnothing,X^*,\{a\},\{a,b\}\right\}$

و $f\ :X\to X^*$ معرفاً بـ : $f(2)=b$, $f(1)=a$

ولتكن $\mathcal{F}=\{X\}$ المرشحة على المجموعة X. عندئذ نجد أن $f\left(\mathcal{F}\right)=\left\{\{a,b\}\right\}$، ولذلك فإن $f\left(\mathcal{F}\right)^*=\left\{\{a,b\}\ ,\ X^*\right\}$.

ونلاحظ أن:

$$V(a)=\left\{\{a\}\ ,\ \{a,b\}\ ,\ \{a,c\}\ ,\ X^*\right\}\not\subseteq f\left(\mathcal{F}\right)^*$$

ولذلك فإن $a\notin\lim\limits_{\mathcal{F}}f$، في حين أن $v^*\cap f\left(F\right)\neq\varnothing$ لكل v^* من $V(a)$ وكل F من $\mathcal{F}$. ولذلك فإن $a\in\overline{f}_{\mathcal{F}}$.

4.8- حالة خاصة:

إذا كان $\left(X^*,\tau^*\right)$ فضاء هاوسدوروف، وكان (X,τ) فضاءً تبولوجياً، وكانت $x_o\in X$، وكانت $\mathcal{F}=V\left(x_o\right)$، وكان $f\ :\ X\to X^*$ تابعاً ما، وكانت $x^*\in X^*$ نقطة نهاية لـ f وفق المرشحة $\mathcal{F}$، فإن المرشحة $f\left(\mathcal{F}\right)^*$ تتقارب نحو النقطة x^*، كما رأينا، ولما كان الفضاء $\left(X^*,\tau^*\right)$ فضاء هاوسدورف (فضاء T_2)، فإن كل مرشحة متقاربة فيه تكون نهايتها وحيدة (بحسب المبرهنة 3.11). إذن x^* هي نقطة نهاية وحيدة للتابع f وفق المرشحة $\mathcal{F}$. ولذلك فإننا نكتب في هذه الحالة: $x^*=\lim\limits_{\mathcal{F}}f$ بدلاً من $x^*\in\lim\limits_{\mathcal{F}}f$. ولما كانت $\mathcal{F}=V\left(x_o\right)$، فإننا نكتب أيضاً: $x^*=\lim\limits_{x\to x_o}f(x)$

ونلاحظ أن:

$$\begin{aligned}x^*=\lim_{x\to x_o}f(x)\ &\Leftrightarrow\ V\left(x^*\right)\subseteq f\left(\mathcal{F}\right)^*\\&\Leftrightarrow f^{-1}\left(v^*\right)\in\mathcal{F}\qquad\forall\ v^*\in V\left(x^*\right)\\&\Leftrightarrow f^{-1}\left(v^*\right)\in V\left(x_o\right)\ \ \forall\ v^*\in V\left(x^*\right)\end{aligned}$$

وهكذا نصل إلى تعريف النهاية لتابع،الذي أوردناه في الفضاءات المترية (تبولوجيا (1)).

4.9- نتيجة:

ليكن (X^*,τ^*) فضاء هاوسدورف ، وليكن $f:(X,\tau)\to(X^*,\tau^*)$ تابعاً ما، ولتكن x_o نقطة من X ، عندئذ يكون:

$$f \text{ مستمر في النقطة } x_o \iff f(x_o)=\lim_{x\to x_o} f(x)$$

البرهان:

من دراسة التوابع في الفضاءات التبولوجية نعلم أن:

f مستمر في النقطة x_o $\iff$ $f^{-1}(v^*)\in V(x_o)$ لكل v^* من $V(f(x_o))$ وبحسب الحالة الخاصة المذكورة أعلاه نجد أن:

$$f^{-1}(v^*)\in V(x_o) \text{ لكل } v \text{ من } V(f(x_o)) \iff f(x_o)=\lim_{x\to x_o} f(x).$$

إذن:

$$f \text{ مستمر في } x_o \iff f(x_o)=\lim_{x\to x_o} f(x)$$

4.10- مبرهنة:

ليكن (X^*,τ^*) فضاء هاوسدورف ، وليكن $f:(X,\tau)\to(X^*,\tau^*)$ تابعاً ما، ولتكن x_o نقطة من X.

إن العبارات التالية متكافئة.

1) f مستمر في x_o.

2) المرشحة $f(\mathcal{F})^*$ تتقارب من النقطة $f(x_o)$ أياً كانت المرشحة $\mathcal{F}$ على X المتقاربة إلى x_o.

3) المرشحة $f(\mathcal{U})^*$ تتقارب من النقطة $f(x_o)$ أياً كانت فوق المرشحة $\mathcal{U}$ على X المتقاربة إلى x_o.

البرهان:

$2 \Leftarrow 1$: لتكن $\mathbb{F}$ مرشحة على X متقاربة إلى x_o، عندئذ $V(x_o) \subseteq \mathbb{F}$.

لتكن $v^* \in V(f(x_o))$، عندئذ ينتج عن كون f مستمراً في x_o أن $f^{-1}(v^*) \in V(x_o) \subseteq \mathbb{F}$، وبما أن $\mathbb{F}$ أساس لنفسها، فإنه يوجد F من $\mathbb{F}$ بحيث يكون $F \subseteq f^{-1}(v^*)$، ومنه نجد أن: $f(F) \subseteq f(f^{-1}(v^*)) \subseteq v^*$

وهذا يعني أن $v^* \in f(\mathbb{F})^*$، وبالتالي فإن $V(f(x_o)) \subseteq f(\mathbb{F})^*$، وهذا يعني أن المرشحة $f(\mathbb{F})^*$ تتقارب من النقطة $f(x_o)$.

$3 \Leftarrow 2$: واضح (كل فوق مرشحة هي مرشحة).

$1 \Leftarrow 3$: لتكن $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ أسرة كل فوق المرشحات على X التي كل منها تتقارب من النقطة x_o، عندئذ يكون $V(x_o) \subseteq \mathcal{U}_i$ لكل $i \in I$، ولذلك فإن $V(x_o) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i$ (بحسب المبرهنة 2.3).

لتكن $v^* \in V(f(x_o))$. بما أن فوق المرشحة $\mathcal{U}_i$ تتقارب من x_o، فإنه ينتج عن (3) أن المرشحة $f(\mathcal{U}_i)^*$ تتقارب من $f(x_o)$. ولذلك فإن $V(f(x_o)) \subseteq f(\mathcal{U}_i)^*$، أي أن $v^* \in f(\mathcal{U}_i)^*$ لكل i من I. ومن تعريف $f(\mathcal{U}_i)^*$ نجد أنه يوجد $u_i \in \mathcal{U}_i$ بحيث يكون $f(u_i) \subseteq v^*$ لكل $i \in I$.

ومنه فإن $u_i \subseteq f^{-1}(f(u_i)) \subseteq f^{-1}(v^*)$، وهذا يعني أن $f^{-1}(v^*) \in \mathcal{U}_i$ لكل $i \in I$. وبالتالي فإن $f^{-1}(v^*) \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i = V(x_o)$.

إذن $f^{-1}(v^*) \in V(x_o)$ لكل v^* من $V(f(x_o))$.

أي أن $f(x_o) = \lim_{x \to x_o} f(x)$، وبالتالي فإن التابع f مستمر في النقطة x_o.

5.§- الشبكات (متتاليات مورسميث):

5.1- تعريف:

لتكن D مجموعة غير خالية معرف عليها علاقة $\le$ بحيث تتحقق الشروط التالية:

1) $n \le n$ لكل $n \in D$ (أي أن العلاقة $\le$ انعكاسية).

إذا كانت r,m,n عناصراً من D ، وكان $n \le m$ و $m \le r$ فإن $n \le r$ (أي أن العلاقة $\le$ متعدية).

3) لكل n , m من D يوجد r من D بحيث إن $m \le r$, $n \le r$.

عندئذ: نسمي العلاقة $\le$ بعلاقة توجيه على D ، ونقول إن D مجموعة موجّهة بالعلاقة $\le$، ونعبر عن ذلك بالكتابة $(D,\le)$.

5.2- ملاحظات وأمثلة:

1) كل مجموعة مرتبة كلياً $(D,\le)$ هي مجموعة موجهة بعلاقة الترتيب $\le$ المفروضة عليها (وبشكل خاص ، فإن مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ هي مجموعة موجهة بعلاقة الترتيب العادية).

لأنه ينتج عن تعريف علاقة الترتيب $\le$، أنها تحقق الشرطين 1) و 2) من التعريف 5.1. ثم إنه أياً كان n , m من D ، فإن $m \le n$ أو $n \le m$ لأن $\le$ علاقة ترتيب كلي.

فإذا كان $m \le n$ ، فإننا نأخذ $r = n$ لنجد أن $m \le r$, $n \le r$.

وإذا كان $n \le m$، فإننا نأخذ $r = m$ لنجد أن $m \le r$, $n \le r$.

وبالتالي فإن الشرط 3) من التعريف 5.1 محقق أيضاً.

2) قد نجد علاقة $\le$ على مجموعة D بحيث تكون $\le$ علاقة توجيه وعلاقة ترتيب جزئي على D بآن واحد، وقد تكون $\le$ علاقة ترتيب جزئي على D دون أن تكون علاقة

توجيه، وقد تكون $\leq$ علاقة توجيه على D دون أن تكون علاقة ترتيب جزئـي، كمـا توضح الأمثلة التالية:

مثال 1 :

إذا كانت E مجموعة ما، وإذا كانت $\mathscr{P}(E)$ مجموعة أجزاء E ، وإذا عرفنا العلاقـة $\leq$ على $\mathscr{P}(E)$ كما يلي:

$$X \leq Y \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y$$

فإننا نجـد أن العلاقـة $\leq$ هـي علاقـة توجيـه علـى المجموعـة $\mathscr{P}(E)$ لأنهـا تحقـق الشرطين 1) و 2) من التعريف 5.1 لكونها علاقـة احتـواء، ثـم إنـه، إذا كـان X و Y عنصرين من $\mathscr{P}(E)$، فإن $Z = X \cup Y$ عنصر من $\mathscr{P}(E)$ ويحقـق $X \leq Z$ و $Y \leq Z$. أي أن الشرط 2) من التعريف 1.5 محقق أيضاً ، وبالتالي فإن $\leq$ علاقة توجيه على المجموعة $\mathscr{P}(E)$. وهي أيضاً علاقة ترتيب جزئي على $\mathscr{P}(E)$،لأنها علاقة الاحتواء.

مثال 2 :

لتكن $E = \{a, b, c\}$ ، ولتكن $D = \{ \varnothing, \{a\} , \{b\} , \{a,c\} \}$، ولنعرف علـى D العلاقة $\leq$ كما يلي:

$$X \leq Y \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y$$

عندئذ نجد أن العلاقة $\leq$ هي علاقة ترتيب جزئي على D ، لأنها علاقة الاحتواء، ولكن هذه العلاقة ليست علاقة توجيه على D ، لأنه من أجل العنصرين $X = \{a\}$ و $Y = \{b\}$ من D لايوجد $Z \in D$ بحيث يكون $X \leq Z$ و $Y \leq Z$ ، أي أن هذه العلاقـة لاتحقق الشرط 3) من التعريف 1.5 ، فهي ليست علاقة توجيه على D.

مثال 3 :

إذا عرفنا على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ العلاقة $\leq$ كما يلي:

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ يقسم } y \quad \Leftrightarrow \quad \text{يوجد } a \in \mathbb{Z} \text{ بحيث يكون } y = a.x$$

فإننا نجد أن هذه العلاقة هي علاقة توجيه على $\mathbb{Z}$ ، ولكنها ليست علاقة ترتيب جزئي على $\mathbb{Z}$، لأن:

1) أياً كان العنصر x من $\mathbb{Z}$، فإنه يوجد $1 \in \mathbb{Z}$ يحقق $x = 1.x$، ولذلك فإن $x \le x$.

2) إذا كانت z , y , x عناصر من $\mathbb{Z}$ وكان $x \le y$ و $y \le z$، فإنه يوجد a و b من $\mathbb{Z}$ بحيث إن $y = a.x$ و $z = b.y$.

ومنه $b . a$ عنصر من $\mathbb{Z}$ ويحقق $z = (b.a).x$ ، وهذا يعني أن $x \le z$.

3) أياً كان x و y من $\mathbb{Z}$، فإنه يوجد $z = x.y$ من $\mathbb{Z}$ يحقق:

$x \le z$، لأنه يوجد $y \in \mathbb{Z}$ بحيث إن $z = y.x$

و $y \le z$، لأنه يوجد $x \in \mathbb{Z}$ بحيث إن $z = x.y$.

إذن فالعلاقة $\le$ هي علاقة توجيه على $\mathbb{Z}$.

لكن هذه العلاقة ليست علاقة ترتيب جزئي على $\mathbb{Z}$، لأن:

$-4 \le 4$ ، لأنه يوجد -1 من $\mathbb{Z}$ يحقق $-4 = (-1).4$

و $4 \le -4$ ، لأنه يوجد -1 من $\mathbb{Z}$ يحقق $4 = (-1).(-4)$

مع أن $-4 \ne 4$.

أي أن العلاقة $\le$ لاتحقق الخاصة التخالفية من خواص علاقة الترتيب الجزئي.

3) قبل أن نعرف الشبكة في مجموعة X ، نذكر بتعريف المتتالية في مجموعة X، وذلك لما لهذين التعريفين من صلة كبيرة ، وهذا التعريف هو :

نسمي كل تابع a ، ينطلق من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، المزودة بعلاقة الترتيب العادي $\le$ ، ويستقر في المجموعة X ، من الشكل:

$$\begin{aligned} a \;:\; & \mathbb{N} \to X \\ & n \to a_n \end{aligned}$$

بمتتالية في المجموعة X ، ونرمز لهذه المتتالية، عادة، بالرمز (a_n)، ونسمي a_n بالحد العام لهذه المتتالية. وقد درس الطالب ، الذي سيدرس هذه المادة، المتتاليات وتقاربها، في أكثر من مادة من مواد الرياضيات ، وبشكل خاص في مادة التبولوجيا (1).

5.3- تعريف:

لتكن $(D,\leq)$ مجموعة موجهة، ولتكن X مجموعة ما غير خالية.

نسمي كل تابع u ينطلق من المجموعة D ويستقر في المجموعة X من الشكل:

$$\begin{aligned} u\ :\ D &\to X \\ n &\to u_n \end{aligned}$$

بشبكة في المجموعة X (أو متتالية مورسميث في X) ، ونرمز لهذه الشبكة، عادة، بالرمز $(u_n)_{n\in D}$، ونسمي u_n بالحد العام لهذه الشبكة.

5.4- ملاحظات وأمثلة:

1) كل متتالية في مجموعة X هي شبكة في X ، ولكن العكس غير صحيح بشكل عام. لأن المتتالية تابع ينطلق من المجموعة $\mathbb{N}$ المرتبة كلياً بعلاقة الترتيب العادي $\leq$، أي أنه ينطلق من المجموعة الموجهة $(\mathbb{N},\leq)$ بحسب 1) من الملاحظات 5.2.

ولإثبات أن العكس غير صحيح بشكل عام نضرب المثال التالي:

مثال:

لنعتبر المجموعة الموجهة $(\mathbb{Z},\leq)$ الواردة في المثال 3 من الملاحظات 5.2، ولنأخذ التابع

$$\begin{aligned} u\ :\ \mathbb{Z} &\to \mathbb{R} \\ n &\to u_n \end{aligned}$$

المعرف بـ $u_n = 2n+1$ لكل n من $\mathbb{Z}$. عندئذ نجد أن $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ تشكل شبكة في $\mathbb{R}$ ، وهي ليست متتالية في $\mathbb{R}$.

إذن: قد نجد شبكات في مجموعة X دون أن تكون متتاليات في X.

2) إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجياً، وكانت $u=(u_n)_{n\in D}$ شبكة في المجموعة X، فإننا سنقول: إن $u=(u_n)_{n\in D}$ شبكة في الفضاء التبولوجي (X,τ).

3) كما درسنا موضوع تقارب المتتاليات في الفضاءات المترية (تبولوجيا (1)) ، فإننا سندرس، فيما يلي، موضوع تقارب الشبكات في الفضاءات التبولوجية كتعميم لدراسة تقارب المتتاليات.

5.5- تعريف:

لتكن $u=(u_n)_{n\in D}$ شبكة في فضاء تبولوجي (X,τ).

1) نقول عن نقطة $x \in X$ إنها نقطة نهاية للشبكة u ، إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \ v\in V(x) \ \ \exists \ n_o\in D \quad ; \quad n\geq n_o \ \Rightarrow \ u_n\in v$$

2) نقول عن نقطة $x \in X$ إنها نقطة لاصقة بالشبكة u ، إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \ v\in V(x) \ \ \& \ \ \forall m\in D \ , \exists r\in D \ ; \ r\geq m \ \& \ u_r\in v$$

5.6- ملاحظات وأمثلة:

1) لتكن $u=(u_n)_{n\in D}$ شبكة في فضاء تبولوجي (X,τ). عندئذ ينتج عن التعريف السابق أنه:

- تكون $x \in X$ ليست نقطة نهاية للشبكة u ، إذا تحقق الشرط التالي:

$$\exists \ v\in V(x) \quad ; \quad \forall \ n_o\in D \ , \exists \ n\geq n_o \quad ; \quad u_n\notin v$$

- تكون $x \in X$ ليست نقطة لاصقة بالشبكة u ، إذا تحقق الشرط التالي:

$$\exists \ \ v\in V(x) \ \ \& \ \ \exists \ m\in D \ \ ; u_r\notin v \ \ \forall \ r\in D \ \ \& \ \ r\geq m$$

2) لتكن $u=(u_n)_{n\in D}$ شبكة في فضاء تبولوجي (X,τ) ، ولتكن x نقطة من X.

إذا كانت x نقطة نهاية للشبكة u ، فإن x نقطة لاصقة بالشبكة u ، ولكن العكس غير صحيح بشكل عام ، لأن:

بما أن x نقطة نهاية لـ u ، فإنه

$$\forall \quad v \in V(x) \ \exists \, n_o \in D \ \ ; \ \ n \geq n_o \Rightarrow u_n \in v$$

لتكن m من D، عندئذ يكون m و n_o من D، وبما أن D مجموعة موجهة، فإنه يوجد r من D بحيث يكون $m \leq r$ و $n_o \leq r$، ولذلك فإن $u_r \in v$، أي أنه

$$\forall \ v \in V(x) \quad \& \quad \forall \, m \in D \ \ \exists \, r \in D \ ; \ r \geq m \ \ \& \ u_r \in v$$

وهذا يعني أن x نقطة لاصقة بالشبكة u بحسب التعريف 5.5.

لإثبات أن العكس غير صحيح بشكل عام نضرب المثال التالي:

مثال:

لتكن الشبكة $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ التي حدها العام $u_n = (-1)^n$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

إن النقطة $x = 1$ هي نقطة لاصقة بالشبكة u وليست نقطة نهاية لهذه الشبكة ، لأنه:

أياً كانت $v \in V(1)$ وأياً كان $m \in \mathbb{N}$، فإنه يوجد $r = 2m$ من $\mathbb{N}$ يحقق: $m \leq r$ و $u_r = (-1)^r = (-1)^{2m} = 1 \in v$، ولذلك فإن 1 نقطة لاصقة بالشبكة u.

لكن النقطة $x = 1$ ليست نقطة نهاية لهذه الشبكة ، لأنه توجد $v =]0,2[$ من $V(1)$ بحيث أنه أياً كانت $n_o \in D$، فإنه يوجد $n = 2n_o + 1$ من D يحقق: $n \geq n_o$ و $u_n = (-1)^n = (-1)^{2n_o+1} = -1 \notin v$.

(بالمثل يمكن أن نرى بأن النقطة $x = -1$ هي نقطة لاصقة بهذه الشبكة، ولكنها ليست نقطة نهاية لها).

3) لتكن $u = (u_n)_{n \in D}$ شبكة في فضاء تبولوجي (X, τ). قد لايوجد لـ u أي نقطة نهاية في X ، وقد يوجد لـ u نقطة نهاية، واحدة فقط، في X، وقد يوجد لـ u أكثر من نقطة نهاية في X. كما توضح الأمثلة التالية:

مثال 1:

لتكن الشبكة $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي حدها العام $u_n = n$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

لايوجد لـ u هذه أي نقطة نهاية في $\mathbb{R}$ ، لأنه أياً كانت $x \in \mathbb{R}$، فإن x ليست نقطة نهاية لـ u ، لأنه يوجد $v =]x-1\, , x+1[$ من $V(x)$ بحيث أنه أياً كانت $n_o \in \mathbb{N}$، فإنه يوجد $n = \max\{n_o, x+1\}$ تحقق $n_o \le n$ و $u_n = n \notin v$.

وهذا يعني أن x ليست نقطة نهاية لـ u، وبالتالي لايوجد لـ u أي نقطة نهاية في $\mathbb{R}$.

مثال 2:

رأينا أن كل متتالية هي شبكة، ونعلم – من دراسة التبولوجيا (1) ومن دراسة التحليل الرياضي – أن المتتالية المتقاربة في الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_u)$ تملك نقطة نهاية وحيدة في $\mathbb{R}$. أي أن هذا الصنف من الشبكات يملك نقطة نهاية واحدة فقط.

مثال 3:

لنعتبر الفضاء التبولوجي $(\mathbb{R}, \tau_{ind})$، ولتكن $u = (u_n)_{n\in D}$ شبكة في هذا الفضاء. إن كل نقطة x من $\mathbb{R}$ هي نقطة نهاية لهذه الشبكة ، لأن x لاتملك سوى مجاورة وحيدة هي $v = \mathbb{R}$ وإن جميع حدود الشبكة u تنتمي إلى هذه المجاورة.

5.7- **تعريف:**

نقول عن شبكة $u = (u_n)_{n\in D}$ في فضاء تبولوجي (X, τ) إنها شبكة متقاربة في هذا الفضاء، إذا وجدت لها نقطة نهاية – واحدة على الأقل – في هذا الفضاء.

وإذا كانت x نقطة نهاية للشبكة $u = (u_n)_{n\in D}$، فإننا سنقول: إن الشبكة $(u_n)_{n\in D}$ تتقارب من النقطة x (أو نحو النقطة x) ، ونعبر عن ذلك بالكتابة $u_n \to x$ أو $x \in \lim u_n$.

5.8- ملاحظات وأمثلة:

1) إذا كانت $u=(u_n)_{n\in D}$ شبكة في فضاء تبولوجي (X,τ) غير متقاربة فيه. فإننا نقول عنها إنها شبكة متباعدة.

2) كل متتالية متقاربة (متباعدة) في فضاء متري (E,d) هي شبكة متقاربة (متباعدة) في هذا الفضاء، لأن المتتالية هي شبكة (انظر بحث التقارب في التبولوجيا (1)).

3) إن الشبكة الواردة في المثال 1 من الملاحظات 5.6 هي شبكة متباعدة.

4) من أجل تسهيل دراسة التقارب في الشبكات، فإننا سنربط بين الشبكات والمرشحات بحيث نستفيد من تقارب المرشحات في دراسة تقارب الشبكات، وأحياناً نستفيد من تقارب الشبكات (وبشكل خاص: المتتاليات) في دراسة تقارب المرشحات.

إن الربط بين المرشحات والشبكات يتم من خلال التمهيديات التالية:

5.9- تمهيدية:

من كل مرشحة $\mathbb{F}$ على مجموعة X يمكن أن نولد مجموعة موجهة $(D_{\mathbb{F}},\leq)$.

البرهان:

نعرف المجموعة $D_{\mathbb{F}}$ كما يلي: $D_{\mathbb{F}}=\{(F,x)\ ;\ F\in\mathbb{F}\ \ \&\ \ x\in F\}$

ونعرف على $D_{\mathbb{F}}$ العلاقة $\leq$ كما يلي:

$$(F_1,x_1)\leq(F_2,x_2)\iff F_2\subseteq F_1$$

عندئذ نجد أن $\leq$ علاقة توجيه على $D_{\mathbb{F}}$، لأن:

1) أياً كان (F,x) من $D_{\mathbb{F}}$، فإن $(F,x)\leq(F,x)$، لأن $F\subseteq F$ ولذلك فإن $\leq$ علاقة انعكاسية في $D_{\mathbb{F}}$.

2) إذا كانـــت (F_1, x_1) و (F_2, x_2) و (F_3, x_3) عناصـــراً مـــن D_F بحيـــث إن $(F_1, x_1) \leq (F_2, x_2)$ و $(F_2, x_2) \leq (F_3, x_3)$، فـــإن $F_2 \subseteq F_1$ و $F_3 \subseteq F_2$ ، ومنـــه $F_3 \subseteq F_1$، وبالتالي $(F_1, x_1) \leq (F_3, x_3)$.

أي أن العلاقة $\leq$ متعدية في D_F.

3) أياً كان العنصران (F_1, x_1) و (F_2, x_2) من D_F، فإن F_2, F_1 عنصران من المرشحة $\mathbb{F}$، ولـذلك فـإن $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$. لـيكن $x \in F_1 \cap F_2$ ، ولنـضع $r = (F_1 \cap F_2, x)$ ، عندئذ نجد أن $r \in D_F$ ويحقق

$$(F_1, x_1) \leq r \quad و \quad (F_2, x_2) \leq r$$

لأن
$$F_1 \cap F_2 \subseteq F_1 \quad و \quad F_1 \cap F_2 \subseteq F_2$$

إذن: فالعلاقة $\leq$ هي علاقة توجيه على D_F بحسب التعريـف 5.1 . و $(D_F, \leq)$ مجموعة موجهة.

(*) سوف نسمي المجموعة الموجهة $(D_F, \leq)$ الواردة في التمهيدية 5.9 بالمجموعة الموجهة المولدة بالمرشحة $\mathbb{F}$.

5.10- تمهيدية:

من كل مرشحة $\mathbb{F}$ على مجموعة X يمكن أن نولد شبكة u_F في المجموعة X.

البرهان:

لتكن $(D_F, \leq)$ المجموعة الموجهة المولدة بالمرشحة $\mathbb{F}$. ولنعرف التابع

$$u_F : D_F \to X$$
$$(F, x) \to u_{(F,x)}$$

بحيـــث إن $u_{(F,x)} = x$. عندئـــذ نجـــد أن u_F معـــرف جيـــداً ، لأنـــه إذا كـــان $(F_1, x_1) = (F_2, x_2)$ ، فإنـه ينـتج عـن تعريـف تـساوي الأزواج المرتبـة أن $x_1 = x_2$، وبالتالي فإن $u_{(F_1,x_1)} = u_{(F_2,x_2)}$.

إذن $u_{\mathbb{F}}$ يشكل شبكة في X ، لأنه تابع ينطلق من مجموعة موجهة $D_{\mathbb{F}}$ ويستقر في X (تعريف 5.3).

(*) نسمي الشبكة $u_{\mathbb{F}}$ الواردة في التمهيدية 5.10 بالشبكة المولدة بالمرشحة $\mathbb{F}$، ونلاحظ أن:

$$u_{\mathbb{F}} = \left(u_{(F,x)} \quad ; \quad F \in \mathbb{F} \quad , \quad x \in F\right)$$

5.11- تمهيدية:

من كل شبكة $u = (u_n)_{n \in D}$ في مجموعة X يمكن أن نولد مرشحة $\mathbb{F}_u$ على المجموعة X.

البرهان:

لتكن $\mathbb{F}_u = \{F \subseteq X \; ; \; \exists \; n_o \in D \quad ; \quad u_n \in F \quad \forall \quad n \geq n_o\}$

عندئذ نجد أن $\mathbb{F}$ مرشحة على X ، لأن:

1) إن $X \in \mathbb{F}_u$ ، لأن $u_n \in X$ لكل n من D. وينتج عن هذا أن $\mathbb{F}_u \neq \varnothing$.

ثم إن $\varnothing \notin \mathbb{F}_u$ ، لأن $u_n \notin \varnothing$ أياً كانت n من D.

2) إذا كان F_1 و F_2 من $\mathbb{F}_u$، فإنه ينتج عن تعريف $\mathbb{F}_u$ أنه يوجد n_1 و n_2 من D بحيث إن $u_n \in F_1$ لكل $n_1 \leq n$ و $u_n \in F_2$ لكل $n_2 \leq n$. وبما أن D مجموعة موجهة بالعلاقة $\leq$، فإنه من أجل n_1 و n_2 يوجد n_o من D بحيث إن $n_1 \leq n_o$ و $n_2 \leq n_o$، ومنه نجد أنه ، إذا كان $n_o \leq n$، فإن $u_n \in F_1 \bigcap F_2$، وهذا يعني أن $F_1 \bigcap F_2 \in \mathbb{F}_u$.

3) إذا كان F من $\mathbb{F}_u$، وكان $F \subseteq A \subseteq X$، فإنه يوجد $D \ni n_o$ بحيث إن $u_n \in F$ لكل $n_o \leq n$، ومنه فإن $u_n \in A$ لكل $n_o \leq n$، وهذا يعني أن $A \in \mathbb{F}_u$.

من 1) و 2) و 3) نجد أن $\mathbb{F}_u$ تشكل مرشحة على X.

(*) نسمي المرشحة $\mathcal{F}_u$ بالمرشحة على X المولدة بالشبكة u.

ونلاحظ أن

$$\mathcal{F}_u = \{ F \subseteq X \;\; ; \;\; \exists \; n_o \in D \;\; ; \;\; u_n \in F \;\; \forall \; n \geq n_o \}$$

- إن المبرهنة التالية تربط بين تقارب الشبكات وتقارب المرشحات في الفضاءات التبولوجية، حيث يمكن أن ندرس تقارب شبكة من خلال دراسة تقارب المرشحة المولدة بها. كما يمكن أن ندرس تقارب مرشحة من خلال دراسة تقارب الشبكة المولدة بها.

5.12- مبرهنة:

ليكن (X, τ) فضاءً تبولوجياً، ولتكن $\mathcal{F}$ مرشحة على هذا الفضاء، ولتكن $u = (u_n)_{n \in D}$ شبكة في هذا الفضاء، ولتكن x نقطة من X ،عندئذ:

1) الشبكة u تتقارب من النقطة x $\Leftrightarrow$ المرشحة $\mathcal{F}_u$ تتقارب من النقطة x.

2) المرشحة $\mathcal{F}$ تتقارب من النقطة x $\Leftrightarrow$ الشبكة $u_{\mathcal{F}}$ تتقارب من النقطة x.

البرهان:

1) $\Leftarrow$: لتكن v من V(x). بما أن الشبكة $u = (u_n)_{n \in D}$ تتقارب من النقطة x ، فإنه يوجد $n_o \ni D$ بحيث يكون $u_n \ni v$ لكل $n_o \leq n$ (بحسب التعريف 5.5). لكن هذا يعني أن $v \in \mathcal{F}_u$ بحسب تعريف $\mathcal{F}_u$ (تمهيدية 5.11). إذن $V(x) \subseteq \mathcal{F}_u$ ، وهذا يعني أن المرشحة $\mathcal{F}_u$ تتقارب من النقطة x (بحسب تعريف تقارب مرشحة من نقطة).

$\Rightarrow$: بما أن $\mathcal{F}_u$ تتقارب من النقطة x ، فإن $V(x) \subseteq \mathcal{F}_u$. لتكن v من V(x)، عندئذ $v \ni \mathcal{F}_u$ ، ومن تعريف $\mathcal{F}_u$ (تمهيدية 5.11) ينتج أنه يوجد $n_o \ni D$ بحيث إن $u_n \in v$ لكل $n_o \leq n$، وهذا يعني أن x نقطة نهاية للشبكة $u = (u_n)_{n \in D}$ (تعريف 5.5) ، أي أن $u_n \to u$.

2) $\Leftarrow$: بما أن المرشحة $\mathcal{F}$ تتقارب من النقطة x ، فإن $V(x)\subseteq\mathcal{F}$، ولـذلك فإنـه أيـاً كانت v من $V(x)$ ، فـإن $v\in\mathcal{F}$ ولـذلك فـإن $(v,x)\in D_{\mathcal{F}}$ (بحسب التمهيدية 5.9)، لنضع $n_o=(v,x)$، ولتكن $n=(F,x_1)$ من $D_{\mathcal{F}}$ بحيث إن $n_o\le n$، عندئذ يكون $(v,x)\le(F,x_1)$، وهذا يعني أن $F\subseteq v$ (بحسب تعريف العلاقة الموجهـة $\le$ على المجموعة $D_{\mathcal{F}}$ الوارد في التمهيدية 5.9).

ومنه فإن $x_1\in v$ لكل $x_1\in F$، ومنه فإن:

$$u_n=u_{(F,x_1)}=x_1\in v$$

إذن:

$$\forall\ v\in V(x)\quad \exists\ n_o=(v,x)\in D_{\mathcal{F}}\quad ;\quad u_n\in v\quad \forall\ n\ge n_o$$

وهذا يعني أن الشبكة $u_{\mathcal{F}}$ تتقارب من النقطة x.

$\Rightarrow$: لتكن $v\in V(x)$ ، عندئذ ينتج عن الفرض أنـه يوجـد $i_o=(F_o,x_o)$ مـن $D_{\mathcal{F}}$ بحيث إنه ، إذا كانت $i=(F,x_1)$ من $D_{\mathcal{F}}$ تحقق $i_o\le i$، فإن $u_i\in v$. أي أنـه، إذا كـان $F\subseteq F_o$ فـإن $u_{(F,x_1)}=x_1\in v$ لكـل x_1 مـن F. وبمـا أن $F_o\subseteq F_o$، فـإن $x_o\in v$ لكل x_o مـن F_o، أي أن $F_o\subseteq v$، وبمـا أن $F_o\in\mathcal{F}$ و $F_o\subseteq v\subseteq X$ و $\mathcal{F}$ مرشحة على X ، فإن $v\in\mathcal{F}$ (من تعريف المرشحة).

إذن $V(x)\subseteq\mathcal{F}$، وبالتالي فإن المرشحة $\mathcal{F}$ تتقارب من النقطة x.

5.13- مبرهنة:

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً، ولتكن $\mathcal{F}$ مرشـحة علـى هـذا الفـضاء، ولـتكن $u=(u_n)_{n\in D}$ شبكة في هذا الفضاء ، ولتكن x نقطة من X. عندئذ:

1) النقطة x لاصقة بالشبكة u $\Leftrightarrow$ النقطة x لاصقة بالمرشحة $\mathcal{F}_u$

2) النقطة x لاصقة بالشبكة $\mathcal{F}$ $\Leftrightarrow$ النقطة x لاصقة بالمرشحة $u_{\mathcal{F}}$.

البرهان:

يشابه البرهان على المبرهنة 5.12 ، ويترك تمريناً للطلاب.

5.14- ملاحظات وأمثلة:

1) لتكن $X=\{a,b,c,d,e\}$، ولتكن $\tau=\{\varnothing,X,\{a\},\{a,c\},\{a,c,e\}\}$.

إن (X,τ) فضاء تبولوجي ، كما هو واضح.

لنعتبر المرشحة $\mathcal{F}$ التالية على X:

$$\mathcal{F}=\{\{c\},\{a,c\},\{a,b,c\},\{a,b,c,d\},\{a,b,c,e\}\ ,\{a,c,d\},\{a,c,e\},\{a,c,d,e\},\ X\}$$

- إن هذه المرشحة تتقارب من النقطة c، لأن $V(c)\subseteq\mathcal{F}$

• إن المجموعة الموجهة المولدة بالمرشحة $\mathcal{F}$ هي:

$$\begin{aligned}D_{\mathcal{F}}=\{&(\{c\},c),(\{a,c\},a),(\{a,c\},c),(\{a,b,c\},a),(\{a,b,c,\},b),\\&(\{a,b,c\},c),(\{a,b,c,d\},a),(\{a,b,c,d\},b),(\{a,b,c,d\},c)\\&(\{a,b,c,d\},d),...,(X,a),(X,b),(X,c),(X,d),(X,e)\}\end{aligned}$$

• إن الشبكة المولدة بالمرشحة $\mathcal{F}$ هي:

$$\begin{aligned}u_{\mathcal{F}}&=\left(u_{(\{c\},c)}=c,\ u_{(\{a,c\},a)}=a\ ,\ u_{(\{a,c\},c)}=c,...,u_{(X,e)}=e\right)\\&=(c,a,c,a,b,c,a,b,c,d,a,b,c,e,a,c,d,a,c,e,a,c,d,e,a,b,c,d,e)\end{aligned}$$

- إن الشبكة $u_{\mathcal{F}}$ هذه، تتقارب من النقطة c بحسب 2 من المبرهنة 5.12.

2. ليكن لدينا الفضاء التبولوجي $(\mathbb{R},\tau_u)$، ولتكن $u=(u_n)$ المتتالية التي حدها العام $u_n=\dfrac{1}{n}$ لكل $n\in\mathbb{N}$.

إن u تشكل شبكة في $(\mathbb{R},\tau_u)$، لأن كل متتالية هي شبكة.

• إن المرشحة على $\mathbb{R}$ المولدة بهذه الشبكة هي:

$$\mathcal{F}_u=\left\{F\subseteq\mathbb{R}\ \ ;\ \exists\ \ n_o\in\mathbb{N}\ ;\ \frac{1}{n}\in F\quad\forall\ n\geq n_o\right\}$$

وعليه فإن:

- $F \in \mathbb{F}_u \Leftrightarrow F \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \exists\, n_o \in \mathbb{N} \ ; \ \frac{1}{n} \in F \ \forall \ n \geq n_o$

- $F \notin \mathbb{F}_u \Leftrightarrow \left\{ \forall\, x_o \in \mathbb{N} \ \exists \ n \in \mathbb{N} \ ; n \geq n_o \ ; \ \frac{1}{n} \notin F \right\}$ أو $F \not\subseteq \mathbb{R}$

فالمجموعة $F_1 = [0, \frac{1}{5}[$ تنتمي إلى المرشحة $\mathbb{F}_u$، لأنه يوجد $\mathbb{N} \ni n_o = 6$ بحيث إنه أياً كان $n_o \leq n$، فإن $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_o}$، أي أن $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{6} < \frac{1}{5}$ ، ولذلك فإن $\frac{1}{n} \in F_1$.

أما المجموعة $F_2 = [\alpha, 10[$ حيث α عدد حقيقي و $0 < \alpha < 10$ ، فإنها لاتنتمي إلى المرشحة $\mathbb{F}_u$،لأنه أياً كان $\mathbb{N} \ni n_o$ فإن $0 < r = \min\left\{\alpha, \frac{1}{n_o}\right\}$، ولذلك فإنه يوجد $\mathbb{N} \ni n$ بحيث يكون $0 < \frac{1}{n} < r$ (وإلاّ لكانت $\mathbb{N}$ محدودة من الأعلى).

ومنه فإن $\frac{1}{n} < \alpha$ ، ولذلك فإن $\frac{1}{n} \notin F_2$. كما أن $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_o}$ ، ولذلك فإن $n > n_o$.

إذن : أياً كان $\mathbb{N} \ni n_o$، فإنه يوجد $\mathbb{N} \ni n$ بحيث $n_o \leq n$ و $\frac{1}{n} \notin F_2$ ولذلك فإن $F_2 \notin \mathbb{F}_u$.

- واضح أن الشبكة $u = (u_n)$ المذكورة أعلاه تتقارب في الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_u)$ من النقطة 0 ، وبحسب 1 من المبرهنة 5.12 ، فإن المرشحة $\mathbb{F}_u$ تتقارب من النقطة 0.

تمارين غير محلولة

1. أوجد كل المرشحات التي يمكن تشكيلها على المجموعة $S=\{a,b,c\}$. كم مرشحة يمكن تشكيلها على مجموعة S تحوي n عنصراً؟

2. لتكن S مجموعة غير منتهية. برهن أن المجموعة

$$\mathbb{F}=\{A\subseteq S\ ;\quad \text{منتهية } S\backslash A\}$$

تشكل مرشحة على S.

3. هات مثالاً عن مرشحة في الفضاء الحقيقي $(\mathbb{R},\tau_u)$ وغير متقاربة فيه.

4. إذا كانت $\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_1$ مرشحتين على مجموعة S. فهل $\mathbb{F}_1\cap\mathbb{F}_2$ مرشحة على S، ولماذا؟

5- هات أمثلة (غير التي وردت في الكتاب) عن مرشحات ليست متقاربة ومرشحات متقاربة إلى نقطة واحدة، ومرشحات متقاربة لأكثر من نقطة.

6. برهن أنه ، إذا وجد للمرشحة $\mathbb{F}$ على مجموعة S أساس قابل للعد فإنه يوجد لـ $\mathbb{F}$ أساس $\{A_i\}_{i\in I}$ قابل للعد ويحقق الخاصة $A_i\supseteq A_{i+1}$ من أجل كل $I\ni i$.

7. لتكن $\mathcal{U}$ فوق مرشحة على مجموعة S ، ولتكن A و B مجموعتين جزئيتين من S. برهن على أنه:

1- إذا تقاطعت A مع جميع عناصر $\mathcal{U}$ فإن $\mathcal{U}\ni A$.

2- إذا كان $A\cup B\in\mathbb{F}$، فإنه إما $\mathcal{U}\ni A$ أو $\mathcal{U}\ni B$.

8. لتكن $\mathbb{F}$ مرشحة على مجموعة S. برهن أن $\mathbb{F}$ تكون فوق مرشحة على S ، إذا وفقط ، إذا تحقق الشرط:

من أجل أي مجموعة جزئية A من S ، فإنه إما $\mathbb{F}\ni A$ أو $S\backslash A\in\mathbb{F}$.

9. لتكن S مجموعة ما و A مجموعة جزئية غير خالية من S. ولتكن $\mathbb{F}$ أسرة المجموعات الجزئية من S الحاوية للمجموعة A.

برهن على أن $\mathbb{F}$ تكون فوق مرشحة على S ، إذا وفقط ، إذا كانت $A=\{x\}$ (مؤلفة من عنصر واحد).

10. ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً و $V(x)$ أسرة مجاورات النقطة x من X. برهن على أن المرشحة $V(x)$ تكون فوق مرشحة على X ، إذا وفقط ، إذا كانت $\{x\}\in\tau$.

11. برهن على أنه ، إذا كانت $\mathcal{U}$ فوق مرشحة على المجموعة S ، تحوي تقاطع المرشحات $F_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_n$ ، فإن $\mathcal{U}$ يجب أن تحوي إحدى هذه المرشحات.

12. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجياً. برهن على أن تقاطع جميع فوق المرشحات المتقاربة من نقطة x من X يطابق الأسرة $V(x)$ (أسرة مجاورات النقطة x).

13. لتكن X مجموعة ما ، ولتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر X، ولتكن $A_n=\{x_i\ ;\ i\geq n\}$. برهن على أن الأسرة $\mathcal{B}=\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ تشكل أساس لمرشحة على X.

14. ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً، ولتكن $A\subseteq X$. برهن على أن الأسرة $\mathbb{F}=\left\{u\subseteq X\ ;\ A\subseteq\overset{\circ}{u}\right\}$ تشكل مرشحة في X.

15. برهن على أن الأسرة $\mathcal{B}=\{\,]a,\infty[\ ;\ a\in\mathbb{R}\}$ تشكل أساساً لمرشحة على $\mathbb{R}$. (نسمي هذه المرشحة بمرشحة فريشيه).

16. برهن على أن الأسرة $\mathcal{B}=\{\,]o,\varepsilon[\ ;\ \varepsilon>o\}$ تشكل أساساً لمرشحة $\mathbb{F}$ في $\mathbb{R}$، ثم برهن على أن $\mathbb{F}\to o$ في $(\mathbb{R},\tau_u)$.

17. لتكن A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X,τ). برهن على أن:

$x\in\overline{A}$ ، إذا وفقط ، إذا وجدت مرشحة $\mathbb{F}$ على X بحيث إن $A\in\mathbb{F}$ و $\mathbb{F}\to x$.

18. لتكن $\mathbb{F}$ مرشحة في الفضاء التبولوجي (X, τ_{dis}). ما هو شرط تقارب $\mathbb{F}$ نحو النقطة x من X.

19. لتكن X مجموعة غير منتهية ، ولتكن $\mathbb{F}$ المرشحة التي أساسها الأسرة

$\mathcal{B} = \{ X \backslash A \;\; ; \;\; X$ مجموعة جزئية منتهية من $A \}$. ما هي النقط التي تتقارب إليها $\mathbb{F}$ في الفضاء (X, τ_{cof}).

20. برهن على أنه ، إذا كانت $\mathbb{F}$ مرشحة في S محتواة في فوق مرشحة وحيدة $\mathcal{U}$ في S فإن $\mathbb{F} = \mathcal{U}$.

21. إذا كانت $\{\mathbb{F}_i\}_{i \in I}$ أسرة مرشحات على S ، وكانت هذه الأسرة تملك حداً أعلى أصغرى (تحت علاقة الترتيب $\mathbb{F}_1 \leq \mathbb{F}_2 \Leftrightarrow \mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{F}_2$).

فبرهن على أنه توجد فوق مرشحة وحيدة $\mathcal{U}$ على S تحوي جميع أفراد هذه الأسرة.

22. ما هو الشرط اللازم لكي تكون المرشحة $\mathbb{F}$ على S تقاطعاً لأسرة فوق مرشحات على S حاوية لـ $\mathbb{F}$.

23. لتكن S و S^* مجموعتين ما و $f : S \to S^*$ تابعاً ما. برهن أنه ، إذا كانت $\mathcal{B}^*$ أساساً لفوق مرشحة على S^*، فإن $f^{-1}(\mathcal{B}^*)$ ليس بالضروري أن تكون أساساً لفوق مرشحة على S.

24. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من فضاء تبولوجي (X, τ) ، ولتكن $a \in X$. برهن على أن:

$a \in A'$ $\Leftrightarrow$ توجد شبكة u من نقط $A \backslash \{a\}$ تتقارب نحو a.

25. ليكن $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ تابعاً ما، ولتكن a نقطة من X. برهن على أن التابع f يكون مستمراً في a ، إذا وفقط ، إذا لكل شبكة u في X ، متقاربة نحو a ، تكون الشبكة $f(u)$ متقاربة نحو $f(a)$.

26. هات أمثلة (غير التي وردت في الكتاب) عن شبكات ليست متقاربة ، وشبكات متقاربة إلى نقطة واحدة، وشبكات متقاربة لأكثر من نقطة واحدة.

27. برهن على أنه إذا كانت $u=(u_n)_{n\in D}$ شبكة متقاربة في فضاء هاوسدورف (X,τ)، فإن نهايتها وحيدة.

28. برهن على أن المجموعة T تكون مفتوحة في الفضاء (X,τ)، إذا وفقط، إذا كان لايوجد شبكة على $X\backslash T$ تتقارب إلى نقطة من T.

29. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من فضاء تبولوجي (X,τ) ، ولتكن $a\in X$ برهن على أن: $a\in\bar{A} \Leftrightarrow$ توجد شبكة u من نقط A تتقارب نحو a.

30. لتكن u شبكة في (X,τ). برهن على أن u' مجموعة مغلقة في (X,τ).

31. لتكن $\mathbb{F}$ مرشحة في الفضاء التبولوجي (X,τ). حدد الإجابات الصحيحة

a- إذا تقاربت المرشحة $\mathbb{F}$ من النقطة x ، فإن جميع فوق المرشحات التي تحوي $\mathbb{F}$ تتقارب من x ، والعكس ليس صحيح.

b- كل نقطة تراكم للمرشحة $\mathbb{F}$ هي نقطة لاصقة بـ $\mathbb{F}$، والعكس ليس صحيحاً.

c- إذا كان للمرشحة $\mathbb{F}$ أكثر من نقطة تراكم فإن (X,τ) يكون فضاء T_2.

d- إذا كانت $\mathbb{F}$ فوق مرشحة على X ، فإن كل نقطة لاصقة بـ $\mathbb{F}$ تكون نقطة تراكم لـ $\mathbb{F}$.

e- إذا كانت المرشحة $\mathbb{F}$ متقاربة فإنها تملك نقطة تراكم وحيدة.

32. حدد الإجابات الصحيحة

a- تقاطع مرشحتين على مجموعة S يكون مرشحة على S.

b- اجتماع مرشحتين على مجموعة S يكون مرشحة على S.

c- إذا كانت $\mathbb{F}$ مرشحة على X، فإن $\mathbb{F}$ لاتشكل تبولوجيا على X.

d- لكل مرشحة $\mathbb{F}$ في فضاء تبولوجي نقطة تراكم، واحدة على الأقل.

e- إذا كانت أي مرشحة $\mathbb{F}$ في فضاء تبولوجي $(X.\tau)$ لاتملك أكثر من نقطة تـراكم واحدة ، فإن (X,τ) يكون فضاء T_1.

33. ليكن S و S^* مجموعتين ما ، و $f : S \rightarrow S^*$ تابعاً ما، ولتكن $\mathbb{F}$ مرشحة على S.

حدد الإجابات الصحيحة:

a- $f(F)$ مرشحة على S^*.

b- $f(F)$ أساس لمرشحة على S^*.

c- إذا كان f غامراً ، فإن $f(F)$ مرشحة على S^*.

d- إذا كان $\mathcal{B}$ أساساً لـ $\mathbb{F}$، فإن $f(\mathcal{B})$ يكون أساساً لمرشحة على S^*.

e- إذا كان $\mathcal{B}$ أساساً لفوق مرشحة على S ، فإن $f(\mathcal{B})$ ليس ، بالضروري، أساسـاً لفوق مرشحة على S^*.

الفصل الخامس

التراص

§.1- المجموعات والفضاءات المتراصة:

1.1- تعريف وملاحظات:

1) إذا كانت $\{A_i\}_{i\in I}$ أسرة مجموعات جزئية من مجموعة X، وكانت S مجموعة جزئية من X بحيث إن $S\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i$، فإننا نقول إن الأسرة $\{A_i\}_{i\in I}$ تشكل تغطية للمجموعة S.

2) إذا كانت I، الواردة في التعريف السابق، مجموعة منتهية، فإننا نسمي التغطية $\{A_i\}_{i\in I}$ بتغطية منتهية لـ S.

3) إذا كانت X خاضعة لتبولوجيا τ، وكانت $\{A_i\}_{i\in I}$ أسرة مجموعات مفتوحة (مغلقة) في الفضاء التبولوجي (X,τ)، فإننا نقول عن التغطية $\{A_i\}_{i\in I}$ إنها تغطية مفتوحة (مغلقة) لـ S.

4) إذا كانت $S = X$، فإن $\{A_i\}_{i\in I}$ تشكل تغطية لـ X، إذا وفقط، إذا كان $X=\bigcup_{i\in I}A_i$.

5) لمجموعة واحدة S جزئية من X، قد نجد عدداً كبيراً من التغطيات، فإذا كانت $\{A_i\}_{i\in I}$ تغطية لـ S، وكانت $X\supseteq B$، فإن $\{A_i,B\}_{i\in I}$ تشكل تغطية أخرى لـ S.

1.2- تعريف:

نسمي الفضاء التبولوجي (X,τ) فضاءً متراصاً، إذا تحقق الشرط:

من كل تغطية مفتوحة لـ X، يمكن أن نستخلص تغطية منتهية.

1.3- **مبرهنة:**

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً ، فإن الشروط التالية متكافئة:

1) (X,τ) فضاء متراص.

2) إذا كانت $\{F_i\}_{i\in I}$ أسرة مجموعات مغلقة في (X,τ) تحقق $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$، فإنه يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \varnothing$.

3) لكل مرشحة على X يوجد نقطة لاصقة واحدة على الأقل.

4) كل فوق مرشحة على X تكون متقاربة.

البرهان:

$2 \Leftarrow 1$: نلاحظ أن:

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing \Rightarrow X = X \setminus \varnothing = X \setminus (\bigcap_{i\in I} F_i) = \bigcup_{i\in I} (X \setminus F_i)$$

أي أن الأسرة $\{X \setminus F_i\}_{i\in I}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ X ، وبما أن (X,τ) متراص ، فإنه يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث تكون $\{X \setminus F_i\}_{i=1}^{n}$ تغطية مفتوحة لـ X ،

أي أن $X = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus F_i)$، أي أن $X = X \setminus (\bigcap_{i=1}^{n} F_i)$، ومنه $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \varnothing$.

$3 \Leftarrow 2$: لتكن $\mathcal{F}$ مرشحة على X ، ولنفرض جدلاً أن $\bar{\mathcal{F}} = \varnothing$ ، عندئذ يكون $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \bar{F} = \varnothing$، وبحسب (2) يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $\bigcap_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \varnothing$ حيث $F_i \in \mathcal{F}$، لكن $F_i \subseteq \bar{F}_i$ لكل I ، ولذلك فإن $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \varnothing$ ، وهذا يناقض تعريف المرشحة.

إذن $\bar{\mathcal{F}} \neq \varnothing$ ، أي أنه توجد لـ $\mathcal{F}$ نقطة لاصقة واحدة على الأقل.

$4 \Rightarrow 3$: إذا كانت $\mathcal{U}$ فوق مرشحة على X ، فإنه ينتج عن (3) أنه توجد نقطة x من X بحيث تكون x لاصقة بـ $\mathcal{U}$ ، ولكن هذا يعني أن $\mathcal{U}$ تتقارب من x ، لأن $\mathcal{U}$ فوق مرشحة (بحسب المبرهنة 3.9).

$1 \Rightarrow 4$: لتكن $\{A_i\}_{i\in I}$ تغطية مفتوحة لــ X ، عندئذ يكون $X = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ حيث A_i مجموعة مفتوحة في (X, τ) لكل $i \in I$.

لنفرض جدلاً أنه لايمكن أن نستخلص من هذه التغطية تغطية منتهية لــ X، عندئذ نجد أن الأسرة $\mathcal{B} = \{X \setminus A_i\}_{i\in I}$ تحقق خاصة التقاطع المنتهي ،لأنه لو كان $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (X \setminus A_i) = \varnothing$ لوجدنا أن $X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \varnothing$، وبالتالي فإن $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$، أي أننا استخلصنا تغطية منتهية لـ X من التغطية $\{A_i\}_{i\in I}$، مما يخالف فرضنا الجدلي. إذن $\mathcal{B}$ تحقق خاصة التقاطع المنتهي ، ولذلك توجد مرشحة $\mathbb{F}$ على X بحيث يكون $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{F}$. لتكن $\mathcal{U}$ فوق مرشحة على X بحيث $\mathbb{F} \subseteq \mathcal{U}$. عندئذ ينتج عن (4) أن $\mathcal{U}$ ستتقارب إلى نقطة $X \ni x$. وينتج عن هذا أن x نقطة لاصقة بـــ $\mathcal{U}$ ، أي أن $x \in \bar{u}$ لكل $u \in \mathcal{U}$، وبالتالي $x \in \overline{X \setminus A_i}$ لكل $i \in I$.

ولما كانت A_i مجموعة مفتوحة ، فإن $X \setminus A_i$ مجموعة مغلقة ، ولذلك فإن $\overline{X \setminus A_i} = X \setminus A_i$ لكل $i \in I$، ومنه فإن $x \in X \setminus A_i$ لكل $i \in I$، أي أن $x \notin A_i$ لكل $i \in I$، أي أن $x \notin \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ و $x \in X$، وبالتالي فإن $X \neq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$، وهذا يناقض كون $\{A_i\}_{i\in I}$ تشكل تغطية لـ X.

إذن: فرضنا الجدلي غير صحيح . والصحيح هو أنه يمكن أن نستخلص من كل تغطية مفتوحة لـ X تغطية منتهية.

1.4- ملاحظات وأمثلة:

1) إذا كان (X, τ) فضاءً تبولوجياً منتهياً ، فإنه يكون فضاءً متراصاً ، لأننا نستطيع أن نستخلص من كل تغطية مفتوحة لـ X تغطية منتهية ، لأن X مجموعة منتهية.

2) إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من فضاء تبولوجي (X,τ)، فإننا نقـول إن A مجموعة متراصة ، إذا وفقط ، إذا كان الفضاء الجزئي (A,τ_A) فضاءً متراصاً.

1.5- مبرهنة:

إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من فضاء تبولوجي (X,τ)، فإن الشرطين التاليين متكافئان.

1) A مجموعة متراصة.

2) من كل تغطية $\{T_i\}_{i\in I}$ مفتوحة في (X,τ) للمجموعة A ، يمكن استخلاص تغطية منتهية لـ A.

البرهان:

$2 \Rightarrow 1$: لتكن $\{T_i\}_{i\in I}$ أسرة مجموعات مفتوحة في (X,τ) بحيث إن $A\subseteq\bigcup_{i\in I} T_i$، عندئذ $T_i^* = A\bigcap T_i$ مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي (A,τ_A) لكل $i \in I$.

ونلاحظ أن:

$$\bigcup_{i\in I} T_i^* = \bigcup_{i\in I}(A\bigcap T_i) = \left(\bigcup_{i\in I} A\right)\bigcap\left(\bigcup_{i\in I} T_i\right) = A\bigcap\left(\bigcup_{i\in I} T_i\right) = A$$

أي أن $A = \bigcup_{i\in I} T_i^*$، أي أن الأسرة $\{T_i^*\}_{i\in I}$ تشكل تغطية مفتوحة للفضاء الجزئي A، وبما أن A متراصة ، فإن الفضاء (A,τ_A) متراص .

ولذلك يمكن أن نستخلص من التغطية $\{T_i^*\}_{i\in I}$ تغطية منتهيـة لــ A ، أي أنـه يوجـــد $n \in \mathbb{N}$ بحيـــث يكـــون $A = \bigcup_{i=1}^{n} T_i^*$، أي أن $A = \bigcup_{i=1}^{n} (A\bigcap T_i)$ ، أي أن $A = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A\right)\bigcap\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right)$ ، أي أن $A = A\bigcap\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right)$.

ومنه فإن $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n} T_i$ ، ومعنى هذا أن الأسرة $\{T_i\}_{i=1}^{n}$ تشكل تغطية منتهية لــ A وهي مستخلصة من التغطية $\{T_i\}_{i\in I}$.

$1 \Rightarrow 2$: لتكن $\{T_i^*\}_{i\in I}$ أسرة مجموعات مفتوحة في (A, τ_A) تغطي A، عندئذ $A = \bigcup_{i\in I} T_i^*$ حيث $T_i^* \in \tau_A$، ولذلك يوجد $T_i \in \tau$ بحيث يكون $T_i^* = A \cap T_i$ لكل $i \in I$، ومنه نجد أن

$$A = \bigcup_{i\in I} T_i^* = \bigcup_{i\in I}(A \cap T_i) = \left(\bigcup_{i\in I} A\right) \cap \left(\bigcup_{i\in I} T_i\right) = A \cap \left(\bigcup_{i\in I} T_i\right)$$

ومنه فإن $A \subseteq \bigcup_{i\in I} T_i$، أي أن $\{T_i\}_{i\in I}$ تشكل تغطية مفتوحة في (X, τ) للمجموعة A، ولذلك فإنه ينتج عن (2) أنه يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} T_i$، ومنه فإن

$$A = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap T_i) = \bigcup_{i=1}^{n} T_i^*$$

أي أنه من كل تغطية $\{T_i^*\}_{i\in I}$ لـ A مفتوحة في (A, τ_A) استطعنا أن نستخلص تغطية منتهية لـ A، وهذا يعني أن الفضاء الجزئي (A, τ_A) هو فضاء متراص، وبالتالي فإن A مجموعة متراصة.

1.6- ملاحظات وأمثلة:

1) إن الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_u)$ هو فضاء غير متراص، لأن الأسرة $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $A_n =]-n, n[$ لكل $n \in \mathbb{N}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ $\mathbb{R}$، لأنه:

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \quad \exists\ n \in \mathbb{N} \quad ; \quad |x| < n$$

لأن $\mathbb{N}$ غير محدودة من الأعلى. ولكن

$$|x| < n \Rightarrow -n < x < n \Rightarrow x \in A_n$$

وبالتالي $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \mathbb{R}$، أي أن $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

ولانستطيع أن نستخلص من هذه التغطية المفتوحة تغطية منتهية ، لأنه لو كانت $\{A_n\}_{n=1}^{m}$ تغطية منتهية لـ $\mathbb{R}$ ، مستخلصة من التغطية السابقة ، لكان $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{m} A_n = A_m$ ، لأن:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_m$$

وهذا يعني أن $\mathbb{R} =]-m, m[$ حيث $m \in \mathbb{N}$، وهذا غير صحيح ،لأن $\mathbb{R}$ غير محدودة.

2) قد نجد فضاءات متراصة تحوي على مجموعات جزئية غير متراصة وقد نجد مجموعات جزئية متراصة في فضاءات غير متراصة. حيث إن كل مجموعة منتهية في أي فضاء كان هي مجموعة متراصة.

فالفضاء $([0,1], \tau_u)$ هو فضاء متراص ، ولكن المجموعة $A = \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ جزئية منه ، وغير متراصة (برهن على ذلك؟).

3) إذا كان (Y, τ_Y) فضاءً جزئياً من الفضاء التبولوجي (X, τ)، وكانت $A \subseteq Y$ ، فإن:

A مجموعة متراصة في الفضاء الجزئي $(Y, \tau_Y) \Leftrightarrow A$ مجموعة متراصة في (X, τ) (برهن على ذلك).

1.7- مبرهنة:

كل مجموعة جزئية مغلقة ، في فضاء متراص ، هي مجموعة متراصة.

البرهان:

لتكن F مجموعة مغلقة في الفضاء المتراص (X, τ)، ولنبرهن على أن F مجموعة متراصة: لتكن $\{T_i\}_{i \in I}$ تغطية لـ F مفتوحة في (X, τ)،عندئذ $F \subseteq \bigcup_{i \in I} T_i$، وبما أن F مغلقة في (X, τ)، فإن $X \backslash F$ مفتوحة في (X, τ)، ونلاحظ أن:

$$X=(X\setminus F)\cup F \subseteq (X\setminus F)\cup\left(\bigcup_{i\in I} T_i\right)$$

أي أن الأسرة $\{T_i\ ,\ X\setminus F\}_{i\in I}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ X، وبما أن (X,τ) فضاء متراص ، فإننا نستطيع أن نستخلص من هذه التغطية تغطية منتهية. أي أنه يوجد $n\in\mathbb{N}$ بحيث إن

$$X\subseteq (X\setminus F)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right)$$

وبما أن $F\subseteq X$، فإن $F\subseteq (X\setminus F)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right)$

ولكن $F\cap(X\setminus F)=\varnothing$، ولذلك فإن $F\subseteq\bigcup_{i=1}^{n} T_i$

وبحسب المبرهنة 1.5 ، فإن F متراصة.

1.8- مبرهنة:

إذا كانت $\mathcal{F}$ مرشحة على فضاء متراص (X,τ) تملك نقطة لاصقة وحيدة x_o ، فإن $\mathcal{F}$ تتقارب من x_o.

البرهان:

لنفرض جدلاً أن $\mathcal{F}$ لاتتقارب من x_o، عندئذ $V(x_o)\not\subseteq\mathcal{F}$ ، ولذلك توجد $v\in V(x_o)$ بحيث إن $v\notin\mathcal{F}$.

ولكن $v\in V(x_o)$ يعني أنه توجد $T\in\tau$ بحيث إن $x_o\in T\subseteq v$

ومنه فإن $T\notin\mathcal{F}$ [لو كانت $T\in\mathcal{F}$ لأصبحت $v\in\mathcal{F}$، بحسب تعريف المرشحة] وينتج عن هذا أن $F\cap(X\setminus T)\neq\varnothing$ لكل $F\in\mathcal{F}$ [لو كان $F\cap(X\setminus T)=\varnothing$ لأصبحت $F\subseteq T$ ولأصبحت $T\in\mathcal{F}$].

أي أن الأسرة $\{X\setminus T , F\in \mathbb{F}\}$ تحقق خاصة التقاطع المنتهي ، ولذلك فإنه توجد مرشحة $\mathbb{F}^*$ على X تحوي هذه الأسرة. بما أن $\mathbb{F}^*$ مرشحة على فضاء متراص ، فإنها تملك نقطة لاصقة واحدة على الأقل ، ولتكن x_1، ونلاحظ أن:

$$x_1\in\overline{\mathbb{F}^*}\Rightarrow x_1\in\overline{\mathbb{F}} \quad \& \quad x_1\in\overline{X\setminus T}=X\setminus T$$
$$\Rightarrow x_1=x_o \quad \& \quad x_1\in X\setminus T$$
$$\Rightarrow x_1\in T \quad \& \quad x_1\in X\setminus T$$ (ونحصل على تناقض)

إذن $\mathbb{F}$ تتقارب من x_o.

1.9- مبرهنة:

كل مجموعة متراصة في فضاء هاوسدورف هي مجموعة مغلقة.

البرهان:

لتكن A مجموعة متراصة في فضاء هاوسدورف (X,τ)، ولنبرهن على أن A مغلقة، ومن أجل ذلك نبرهن على أن $\bar{A}\subseteq A$.

لتكن $x_o\in\bar{A}$، عندئذ $v\cap A\neq\varnothing$ لكل $v\in V(x_o)$

ومنه فإن المجموعة $\mathcal{B}=\{v\cap A \ ; \ v\in V(x_o)\}$ تشكل أساساً لمرشحة $\mathbb{F}$ على A ، لأن:

1) $\mathcal{B}\neq\varnothing$ و $\varnothing\notin\mathcal{B}$.

2) إذا كان $B_1,B_2\in\mathcal{B}$ فإن $B_1=v_1\cap A$ و $B_2=v_2\cap A$ حيث $v_1 , v_2\in V(x_o)$، ومنه فإن

$$B_1\cap B_2=(v_1\cap v_2)\cap A=v_3\cap A \quad ; \quad v_3=v_1\cap v_2\in V(x_o)$$

أي أن $B_1\cap B_2\in\mathcal{B}$.

بما أن (A,τ_A) فضاء متراص، فإن $\mathbb{F}$ تملك نقطة لاصقة واحدة على الأقل ، ولتكن x_1، من A.

- إن $x_o = x_1$ ، لأن:

$$x_1 \in \overline{\mathcal{F}} \Rightarrow x_1 \in \overline{F} \;\forall\; F \in \mathcal{F}$$
$$\Rightarrow v^* \cap F \neq \varnothing \quad \forall\, v^* \in V_A(x_1) \;\&\; F \in \mathcal{F}$$
$$\Rightarrow v^* \cap v \cap A \neq \varnothing \quad \forall\, v^* \in V_A(x_1) \;\&\; v \in V(x_o)$$
$$\Rightarrow v^* \cap v \neq \varnothing \quad \forall\, v^* \in V_A(x_1) \;\&\; v \in V(x_o) \qquad (1)$$

(لأن $v^* \cap v \cap A \subseteq v^* \cap A$)

لو كان $x_o \neq x_1$، لنتج عن كون (X, τ) فضاء هاوسدورف، أنه يوجد $T_{x_o} \in V(x_o)$ و $T_{x_1} \in V(x_1)$ بحيث يكون $T_{x_1} \cap T_{x_o} = \varnothing$.

لنضع $\begin{cases} v^* = T_{x_1} \cap A \\ v = T_{x_o} \end{cases}$، عندئذ نجد أن $v^* \in V_A(x_1)$ و $v \in V(x_o)$ ويحققان

$$v^* \cap v = T_{x_1} \cap A \cap T_{x_o} = \varnothing \cap A = \varnothing$$

ونحصل على تناقض مع (1).

إذن $x_o = x_1$، ولذلك فإن $x_o \in A$. بالتالي $\bar{A} \subseteq A$، وبالتالي فإن A مغلقة.

1.10- مبرهنة:

إذا كان f تابعاً مستمراً من فضاء متراص (X, τ) في فضاء (X^*, τ^*)، فإن $f(X)$ مجموعة متراصة في (X^*, τ^*).

البرهان:

لتكن $\{T_i^*\}_{i \in I}$ تغطية لـ $f(X)$ مفتوحة في (X^*, τ^*)، عندئذ $f(X) \subseteq \bigcup_{i \in I} T_i^*$، ومنه فإن

$$X \subseteq f^{-1}(f(X)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} T_i^*\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(T_i^*)$$

بما أن f مستمر و T_i^* مفتوحة في (X^*, τ^*)، فإن $f^{-1}(T_i^*)$ مفتوحة في (X, τ) لكل $i \in I$. أي أن الأسرة $\{f^{-1}(T_i^*)\}_{i \in I}$ تشكل تغطية مفتوحة للفضاء المتراص

(X,τ)، ولذلك يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث إن $\left\{f^{-1}\left(T_i^*\right)\right\}_{i=1}^{n}$ تشكل تغطية منتهية لـ X ، أي أن $\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}\left(T_i^*\right) = X$، أي أن $X = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_i^*\right)$، ومنه فإن:

$$f(X) = f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_i^*\right)\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} T_i^*$$

أي أننا استخلصنا من التغطية المفتوحة الكيفية $\left\{T_i^*\right\}_{i\in I}$ لـ f(X) تغطية منتهية لـ f(X) ، ولذلك فإن f(X) متراصة.

1.11- نتيجة:

إذا كان f تابعاً مستمراً من فضاء متراص (X,τ) في فضاء هاوسدورف $\left(X^*,\tau^*\right)$، فإن f تابع مغلق .

البرهان:

إذا كانت F مغلقة في (X,τ) المتراص ، فإن F متراصة ، وبالتالي f(F) متراصة في فضاء هاوسدورف ، ومنه f(F) مجموعة مغلقة ، وبالتالي f تابع مغلق.

1.12- مبرهنة:

إذا كان (X,τ) فضاء هاوسدورف ومتراصاً ، فإن (X,τ) منتظم.

البرهان:

لتكن F مجموعة مغلقة في (X,τ) ، ولتكن $x \notin F$، عندئذ $x \neq y$ لكل y من F ، وبما أن (X,τ) فضاء هاوسدورف ، فإنه توجد $T_x, T_y \in \tau$ بحيث $x \in T_x$ و $y \in T_y$ و $T_x \cap T_y = \varnothing$.

إن الأسرة $\left\{T_y\right\}_{y\in F}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ F ، لأن

$$F = \bigcup_{y\in F}\{y\} \subseteq \bigcup_{y\in F} T_y$$

وبما أن F مجموعة مغلقة في فضاء متراص (X,τ)، فإنها متراصة.

ولذلك يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث تكون $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} T_{y_i}$ حيث $y_i \in F$.

لتكن T_{ix} مجاورة x المفتوحة التي تحقق $T_{ix} \cap T_{y_i} = \varnothing$ من أجل $i = 1, 2, \ldots, n$ ،

ولنضع $u = \bigcap_{i=1}^{n} T_{ix}$ و $v = \bigcup_{i=1}^{n} T_{y_i}$ ، عندئذ نجد أن u مفتوحة وتحوي x و v مفتوحة وتحوي F وأن $v \cap u = \varnothing$ ، لأن

$$u \cap v = u \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} T_{y_i} \right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(u \cap T_{y_i} \right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left(T_{ix} \cap T_{y_i} \right) = \varnothing$$

إذن (X, τ) فضاء منتظم .

1.13- **نتائج:**

1) إذا كان (X, τ) فضاء T_2 ومتراص ، فإنه يكون فضاء T_3.

2) إذا كان (X, d) فضاءً مترياً ومتراص ، فإنه يكون فضاء T_3.

§.2- التراص الموضعي:

2.1- **تعريف:**

نقول عن فضاء تبولوجي (X, τ) إنه متراص موضعياً ، إذا كان يحقق الشرط التالي:

لكل x من X توجد مجاورة ،واحدة على الأقل ، بحيث تكون متراصة.

كما نسمي المجموعة الجزئية A متراصة موضعياً ، إذا كان الفضاء الجزئي (A, τ_A) متراص موضعياً.

2.2- **ملاحظات وأمثلة:**

1) كل فضاء (X, τ) متراص هو فضاء متراص موضعياً ، لأنه أياً كانت $x \in X$ ، فإن X مجاورة لـ x ومتراصة. ولكن العكس غير صحيح ، كما يظهر المثال التالي:

مثال:

إن الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_u)$ غير متراص، كما رأينا في مثال (1) من 1.6، ولكنه متراص موضعياً، لأنه أياً كان $x \in \mathbb{R}$، فإن $v = [x-1, x+1]$ مجاورة لـ x مغلقة ومحدودة، فهي متراصة في $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

2) إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X, τ)، وكان لكل نقطة x من A توجد مجاورة v لـ x متراصة في (X, τ) وبحيث إن $v \subseteq A$، فإن A تكون متراصة موضعياً، لأن:

لكل x من A لدينا $v = A \cap v$ مجاورة لـ x في الفضاء الجزئي (A, τ_A)، وبما أن v متراصة في (X, τ)، فإن v متراصة في (A, τ_A) (بحسب الملاحظة (3) من 1.6).

إذن: لكل x من A توجد مجاورة لـ x متراصة في الفضاء (A, τ_A)، ولذلك فإن (A, τ_A) فضاء متراص موضعياً، وبالتالي A مجموعة متراصة موضعياً.

2.3- مبرهنة:

إذا كان الفضاء التبولوجي (X, τ) متراصاً موضعياً، فإن كل مجموعة مغلقة فيه تكون متراصة موضعياً.

البرهان:

إذا كانت F مجموعة مغلقة في (X, τ) و x نقطة من F، فإن $x \in X$، وبما أن (X, τ) متراص موضعياً، فإنه توجد فيه مجاورة متراصة v لـ x.

إن $v \cap F$ مجاورة لـ x في الفضاء الجزئي (F, τ_F)، كما أن $v \cap F$ مجموعة مغلقة في الفضاء الجزئي (v, τ_v) المتراص، وبالتالي $v \cap F$ تكون متراصة فيه (بحسب المبرهنة 1.7)، وبالتالي متراصة في الفضاء (F, τ_F).

إذن: $v \cap F$ مجاورة متراصة لـ x في (F, τ_F)، وبالتالي (F, τ_F) متراص موضعياً، وبالتالي F مجموعة متراصة موضعياً.

2.4- مبرهنة:

كل مجموعة مفتوحة من فضاء منتظم ومتراص موضعياً (X,τ) هي مجموعة متراصة موضعياً.

البرهان:

لتكن T مجموعة مفتوحة في الفضاء (X,τ)، ولتكن x نقطة من T ، وبالتالي $x \in X$. وبما أن (X,τ) متراص موضعياً، فإنه توجد مجاورة v لـ x متراصة في (X,τ).

إن $v \bigcap T$ مجاورة لـ x ، وبالتالي توجد $T_1 \in \tau$ بحيث إن:

$$x \in T_1 \subseteq v \bigcap T$$

وبما أن (X,τ) منتظم ، فإنه (بحسب المبرهنة 1.10 من الفصل الثالث) توجد مجموعة مفتوحة u من (X,τ) بحيث يكون

$$x \in u \subseteq \bar{u} \subseteq T_1 \subseteq v \bigcap T \subseteq v$$

وبما أن v متراصة، فإن الفضاء الجزئي (v,τ_v) هو فضاء متراص.

وبما أن $\bar{u}$ مغلقة في (X,τ) و $\bar{u} \subseteq v$ ، فإن $\bar{u}$ مغلقة في (v,τ_v).

إذن: $\bar{u}$ مجموعة مغلقة في الفضاء المتراص (v,τ_v)، وبالتالي فإنها متراصة فيه (بحسب المبرهنة 1.7) ، وبالتالي فإن $\bar{u}$ متراصة في الفضاء (X,τ) (بحسب الملاحظة (3) من 1.6).

إذن: $\bar{u}$ مجاورة متراصة لـ x و $\bar{u} \subseteq T_1 \subseteq v \bigcap T \subseteq T$ ، وبالتالي لكل نقطة x من T توجد مجاورة $\bar{u}$ ، متراصة في (X,τ) وبحيث إن $\bar{u} \subseteq T$، وبالتالي فإن T متراصة موضعياً (بحسب الملاحظة (2) من 2.2).

3.§- أشكال أخرى من التراص:

هناك أشكال عديدة من التراص، يمكن تعريفها في الرياضيات.

وسنعرف هنا نوعين من هذه الأشكال، وسنبين أن هذين النوعين من التراص، متكافئة مع التعريف الأساسي في الفضاءات الإقليدية $\mathbb{R}^n$.

في الحقيقة سوف نبين أنها متكافئة مع التعريف الأساسي للتراص في الفضاءات T_1 والمحققة لخاصية العد الثانية. ومنها سنجد أنها متكافئة مع التعريف الأساسي في الفضاءات $\mathbb{R}^n$ التي هي فضاءات T_1 وتحقق خاصية العد الثانية.

3.1- **تعريف:**

نسمي الفضاء التبولوجي (X,τ) فضاءً متراصاً عداً، إذا تحقق الشرط: من كل تغطية مفتوحة وقابلة للعد لـ X يمكن أن نستخلص تغطية منتهية.

3.2- **تعريف:**

نقول إن الفضاء التبولوجي (X,τ) يتمتع بخاصية بولزانو – وايرشتراس، أو نقول إن X فضاء $W - B$ – متراص، إذا كانت كل مجموعة جزئية غير منتهية من X تملك نقطة تراكم في X (واحدة على الأقل).

3.3- **ملاحظات وأمثلة:**

1) واضح أن كل فضاء تبولوجي متراص يكون متراصاً عداً.

2) نستعرض فيما يلي مثالاً عن فضاء تبولوجي ليس متراصاً عداً، ولكنه فضاء B-W– متراص.

لنأخذ المجموعات $B_n = \{2n-1, 2n\}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$

إن الأسرة $\mathscr{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ تشكل تحت أساس لتبولوجيا τ على $\mathbb{N}$ (بحسب المبرهنة 7.8 من الفصل الأول).

وبالتالي $(\mathbb{N},\tau)$ فضاء تبولوجي.

إن هذا الفضاء ليس متراصاً عداً، لأن $\mathscr{B}$ تشكل تغطية مفتوحة قابلة للعد لـ $\mathbb{N}$، ولكنها لاتحوي أي تغطية جزئية منتهية.

لكن هذا الفضاء هو فضاء $W - B -$ متراص ، لأنه: إذا كانت A مجموعة جزئية غير منتهية من $\mathbb{N}$ و a نقطة ما من A ووضعنا $b = a + 1$ عندما a فـردي و $b = a - 1$ عندما a زوجي.

عندئذ نجد أن كل مجموعة مفتوحة في هذا الفضاء وتحوي b ، سوف تحوي a أيضاً، أي أن كل مجموعة مفتوحة في هذا الفضاء تحوي b ، تتقاطع مع $A\setminus\{b\}$، وبالتالي فـإن b نقطة تراكم لـ A.

3) نذكّر فيما يلي بتعريف نقطة التراكم لمتتالية ، الذي ورد في التبولوجيا (1).

تعريف:

ليكن X فضاءً تبولوجياً ولتكن (x_n) متتالية مـن نقـاط X ، ولـيكن $x \in X$ ، نسمي x نقطة تراكم للمتتالية (x_n)، إذا كان من أجل كل مجموعة مفتوحة T_x تحوي x ومن أجل كل $n_o \in \mathbb{N}$ يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث إن $x_n \in T_x$ وحيث $n_o < n$.

4) إذا كانت (x_n) متتالية من نقاط مختلفة في الفضاء التبولوجي X ، وكانت x مـن X نقطة تراكم للمتتالية (x_n)، فإن x تكون نقطة تراكم لمجموعة حدود المتتاليـة (x_n) (برهن على ذلك).

3.4- مبرهنة:

يكون الفضاء التبولوجي (X, τ) متراصاً عداً ، إذا وفقط ، إذا كانت كل متتاليـة في X تملك نقطة تراكم في X (واحدة على الأقل).

البرهان:

لزوم الشرط : لنفرض أن الفضاء (X, τ) متراص عداً، ولتكن (x_n) متتالية من نقاط X ولاتملك نقطة تراكم في X.

وبالتالي من أجل أي نقطة $x \in X$ توجد مجموعـة مفتوحـة u_x تحـوي x وعـدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ بحيث إن

$$u_x \cap \{ x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} = \varnothing$$

الآن من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ لنأخذ المجموعة

$$M_n = \{ x \in X \ ; \ x \text{ تحوي } u_x \text{ توجد مجموعة مفتوحة } ; u_x \cap \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots,\} = \varnothing \}$$

إذا كان $M_n \neq \varnothing$، فإننا نعرّف، من أجل كل x من M_n، المجموعة W_x بأنها اجتماع كل المجموعات المفتوحة الممكنة u_x المحققة للخاصة $u_x \cap \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} = \varnothing$، ولنضع $V_n = \bigcup_{x \in M_n} W_x$.

من التعاريف السابقة يصبح لدينا

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \quad \text{و} \quad V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$$

من خلال الترتيب العادي للأعداد الطبيعية ، فإنه يوجد أصغر عدد طبيعي k بحيث إن $M_k \neq \varnothing$، وبالتالي من أجل كل $k \leq n$ ، فإن $V_n \neq \varnothing$.

إن الأسرة $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}, n \geq k}$ تشكل تغطية مفتوحة قابلة للعد للفضاء X ، أي أن $X = \bigcup_{n \geq k} V_n$.

ونلاحظ من خلال طريقة تشكيل الأسرة $\{V_n\}$، أنه إذا حذفنا أي V_j حيث $j \geq k$ من الأسرة $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}, n \geq k}$، فإن الباقي $\{V_n\}$ لن تشكل تغطية لـ X، وكنتيجة لذلك ، فإن هذه الأسرة لاتحوي تغطية جزئية منتهية لـ X، وهذا يعني أن الفضاء X لايكون متراصاً عداً، وهذا يناقض الفرض، وبالتالي فإن الفرضية بأن المتتالية (x_n) لاتملك نقطة تراكم في X خاطئة، أي أن كل متتالية في X تملك نقطة تراكم.

كفاية الشرط : لنفرض أن كل متتالية في X تملك نقطة تراكم في X (واحدة على الأقل).

إذا لم يكن الفضاء (X, τ) متراصاً عداً، فإنه توجد تغطية مفتوحة قابلة للعد $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ لـ X لاتحتوي على تغطية جزئية منتهية لـ X.

سوف نبني الآن متتالية في X لاتملك نقطة تراكم في X، وبهذا نحصل على تناقض.

ليكن $x_1 \in u_1$ ، ولتكن u_{n_2} المجموعة الأولى من بين الأسرة $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ التي لاتكون مجموعة جزئية من u_1، ونختار $x_2 \in u_{n_2} \setminus u_1$.

(إن u_{n_2} موجودة ،لأنه لو كانت جميع u_n مجموعات جزئية من u_1،لأصبحت $\{u_1\}$ تغطية منتهية لـ X مستخلصة من التغطية $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ، وبالتالي اختيار x_2 ممكن).

بشكل عام لتكن u_{n_k} المجموعة الأولى من بين التغطية المفتوحة $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ وليست مجموعة جزئية من $\bigcup_{m=1}^{k-1} u_{n_m}$، ونختار $x_k \in u_{n_k} \setminus \bigcup_{m=1}^{k-1} u_{n_m}$.

إن اختيار x_k ممكن في كل حالة، لأننا نفترض أنه لايوجد تغطية جزئية منتهية من التغطية $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ لـ X.

بهذه الطريقة نكون قد عرفنا متتالية (x_n)، وهذه المتتالية لاتملك نقطة تراكم في X ، لأنه إذا كان $x \in X$، فإن x ينتمي لواحدة u_{n_j} ،وإن $u_{n_j} \bigcap \{x_{j+1}, x_{j+2}, ...\} = \varnothing$، وهذا يبين أن x لاتكون نقطة تراكم للمتتالية (x_n).

إن هذا التناقض يبين أن الفضاء (X,τ) متراص عداً.

3.5- ملاحظات وأمثلة:

1) من المبرهنة السابقة نلاحظ أن نقطة التراكم للمتتالية يجب أن تنتمي للفضاء X حتى يكون الفضاء متراصاً عداً، وبالتالي إذا وجدت في X متتالية ولاتملك نقاط تراكم في X، فإن الفضاء X لايكون متراصاً عداً.

2) بالأسلوب نفسه نستطيع ان نبرهن على أنه، إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجياً، وإذا وجدنا في X مجموعة جزئية غير منتهية ولاتملك نقاط تراكم في X، فإن X لايكون فضاء B-W– متراص.

3) لنأخذ الفضاء الجزئي $X =]0,1[$ من الفضاء العادي $(\mathbb{R}, \tau_u)$، ولنأخذ فيه المتتالية (x_n) التي حدها العام $x_n = \frac{1}{n}$.

إن 0 هي نقطة التراكم الوحيدة للمتتالية (x_n) في الفضاء X، ولكنها لاتنتمي لـ X، وبالتالي فإن X لايكون متراصاً عداً.

كما أن مجموعة حدود المتتالية (x_n) هي مجموعة غير منتهية في X ولاتملك نقطة تراكم في X، وبالتالي الفضاء X لايكون فضاء B-W– متراص.

3.6- مبرهنة:

إذا كان (X, τ) فضاءً تبولوجياً يحقق خاصية العد الثانية فإن كل تغطية مفتوحة لـ X تحتوي على تغطية جزئية قابلة للعد لـ X.

البرهان:

بما أن (X, τ) يحقق خاصية العد الثانية ،فهو يحتوي على أساس قابل للعد، ولتكن $\mathscr{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ هذا الأساس.

لتكن $\{A_j\}_{j \in J}$ تغطية مفتوحة لـ X، فإنه من أجل كل $x \in X$ وكل A_j تحوي x توجد مجموعة مفتوحة B_i من الأساس $\mathscr{B}$ بحيث إن $x \in B_i \subseteq A_j$.

إن كل هذه المجموعات B_i المختارة بالطريقة السابقة تشكل أسرة قابلة للعد $\{B_i\}_{i \in K}$، وهذه الأسرة تشكل تغطية لـ X.

الآن من أجل كل B_i من هذه الأسرة حيث $i \in K$ و K قابلة للعد، نختار دليل $j_i \in J$ بحيث إن $B_i \subseteq A_{j_i}$، فنجد أن $\{A_{j_i}\}_{i \in K}$ أسرة قابلة للعد من المجموعات المفتوحة مستخلصة من الأسرة $\{A_j\}_{j \in J}$، وهي تشكل تغطية لـ X، لأن $\bigcup_{i \in K} B_i \subseteq \bigcup_{i \in K} A_{j_i}$ ولأن $\{B_i\}_{i \in K}$ تغطية لـ X.

3.7- مبرهنة:

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً متراصاً عداً ويحقق خاصية العد الثانية، فإن X يكون متراصاً.

البرهان:

لتكن $\{A_i\}_{i\in I}$ تغطية مفتوحة لـ X، وبما أن X يحقق خاصية العد الثانية، فإنه بحسب المبرهنة السابقة توجد لـ X تغطية جزئية قابلة للعد $\{A_i\}_{i\in K}$ وحيث K قابلة للعد.

وبما أن X متراص عداً، فإن هذه التغطية الجزئية تحوي تغطية جزئية منتهية لـ X، وهي تغطية جزئية منتهية لـ X مستخلصة من التغطية $\{A_i\}_{i\in I}$، وبالتالي فإن الفضاء X متراص.

3.8- نتيجة:

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً يحقق خاصية العد الثانية ، فإن العبارتين التاليتين متكافئتان:

1) X فضاء متراص.

2) X فضاء متراص عداً.

البرهان:

ينتج عن الملاحظة (1) من 3.3 والمبرهنة 3.7.

3.9- مبرهنة:

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً متراصاً عداً، فإنه يكون فضاء B-W– متراص.

البرهان:

إذا كانت A مجموعة جزئية غير منتهية من X ،فإنه توجد متتالية (x_n) من نقاط مختلفة في A ، وبحسب المبرهنة 3.4، فإن هذه المتتالية تملك نقطة تراكم x في X ،وبما أن

(x_n) متتالية من نقاط مختلفة، فإن x تكون نقطة تراكم لمجموعة حدود المتتالية (بحسب ملاحظة (4) من 3.3) ، وبالتالي x نقطة تراكم لـ A.

3.10- مبرهنة:

إذا كان الفضاء التبولوجي (X,τ) فضاء T_1، وكان فضاء B-W– متراص أيضاً، فإن (X,τ) يكون متراصاً عداً.

البرهان:

لنفرض أن $\{A_i\}_{i\in I}$ تغطية مفتوحة قابلة للعد لـ X ولاتحوي على تغطية جزئية منتهية لـ X.

إن هذا يمكننا من إنشاء (كما في البرهان على المبرهنة 3.4) متتالية (x_n) من نقاط مختلفة في X لاتملك نقاط تراكم في X.

وبما أن X هو فضاء B-W– متراص، فإن مجموعة حدود المتتالية (x_n) تملك نقطة تراكم x في X. وبما أن X هو فضاء T_1، فإنه (بحسب الملاحظة (7) من 1.5 ، الفصل الثالث) كل مجموعة مفتوحة تحوي x سوف تحوي عدد غير منته من نقاط مجموعة حدود المتتالية (x_n)،وهذا يعني أن x نقطة تراكم للمتتالية (x_n)، وهذا يناقض إمكانية إنشاء المتتالية (x_n) أي أن كل تغطية مفتوحة قابلة للعد لـ X تحوي على تغطية جزئية منتهية، وبالتالي الفضاء X متراص عداً.

3.11- نتيجة :

إذا كان الفضاء التبولوجي (X,τ) فضاء T_1، فإن العبارتين التاليتين متكافئتان:

1) X فضاء متراص عداً.

2) X فضاء B-W– متراص.

البرهان:

ينتج من المبرهنة 3.9 والمبرهنة 3.10.

3.12- مبرهنة:

إذا كان الفضاء التبولوجي (X,τ) فضاء T_1 ويحقق خاصية العد الثانية، فإن العبارات التالية متكافئة:

1) X فضاء متراص.

2) X فضاء متراص عداً.

3) فضاء B-W- متراص.

البرهان:

ينتج عن النتيجة 3.8 والنتيجة 3.11.

3.13- ملاحظة:

نعلم (من التبولوجيا (1)) أن الفضاءات الإقليدية $\mathbb{R}^n$ غير متراصة. وبما أنها فضاءات T_1 وتحقق خاصية العد الثانية، فإنها ليست متراصة عداً (بحسب المبرهنة 3.12).

تمارين غير محلولة

1. في الفضاء $(\mathbb{R},\tau_u)$ برهن على أن الأسرة $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $A_n =]\frac{1}{n},2[$ تشكل تغطية مفتوحة وغير منتهية للمجموعة $A =]\,0,1\,[$ ، ولانستطيع أن نستخلص من هذه التغطية تغطية جزئية منتهية لـ A.

2. برهن على أن الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ هو فضاء متراص.

3. في الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{\ell.r})$ لنعتبر المجموعتين الجزئيتين $A=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ x<o\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ x\le o\}$. برهن على أن $(\mathbb{R},\tau_{\ell.r})$ غير متراص وأن المجموعة A غير متراصة، ولكن المجموعة B متراصة.

4. برهن على أن الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ غير متراص.

5. لتكن A و B مجموعتين متراصتين في الفضاء (X,τ).

   هل $A\cap B$ متراصة؟ هل $A\cup B$ متراصة؟

6. إذا كان (X,τ) فضاءً متراصاً وكانت τ_1 تبولوجياً على X بحيث إن $\tau_1\subseteq\tau$، فبرهن على أن (X,τ_1) فضاء متراص.

7. هات مثالاً عن فضاء متراص (X,τ) وتبولوجيا τ_1 على X بحيث إن $\tau\subseteq\tau_1$ ولكن (X,τ_1) فضاء غير متراص.

8. لتكن A مجموعة متراصة من فضاء منتظم (X,τ)، ولتكن T مجموعة مفتوحة بحيث إن $A\subseteq T$. برهن على أنه توجد مجموعة مفتوحة u بحيث يكون $A\subseteq u\subseteq\bar{u}\subseteq T$.

9. برهن على أنه إذا كان (X,τ) فضاءً متراصاً ومنتظماً، فإن (X,τ) يكون فضاءً طبيعياً.

10. ليكن (X, τ) فضاءً متراصاً موضعياً، ولتكن A مجموعة جزئية مغلقة في (X, τ). برهن على أن الفضاء الجزئي (A, τ_A) متراص موضعياً.

12. ليكن (X, τ) فضاء T_2 ومتراصاً موضعياً، ولتكن $x \in X$. برهن على أن أسرة المجاورات المتراصة والمغلقة لـ x تشكل أساساً موضعياً للنقطة x.

13. برهن على أن فضاء الضرب $(X \times Y, \tau)$ يكون متراصاً، إذا وفقط، إذا كان كل من الفضائين (X, τ_X) و (Y, τ_Y) متراصاً.

14. ليكن (X, τ_X) و (Y, τ_Y) فضائين متراصين و T_2، وليكن $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ تابعاً ما. برهن على أن f يكون مستمراً، إذا وفقط، إذا كانت $f^{-1}(B)$ مجموعة متراصة في (X, τ_X) لكل مجموعة متراصة B في (Y, τ_Y).

15. ليكن $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ تابعاً غامراً ومستمراً. إذا كان (X, τ_X) متراصاً و (Y, τ_Y) فضاء T_2، فبرهن على أن f تقابل.

16. ليكن (X, τ) فضاءً متراصاً و T_2 ولتكن τ_1 تبولوجيا على X بحيث إن (X, τ_1) فضاء T_2. برهن على أن $\tau \subseteq \tau_1$

17. ليكن (X, τ) فضاءً متراصاً وليكن $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ تابعاً مستمراً. برهن على أنه توجد نقطتان x_1 و x_2 من X بحيث يكون $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ لكل x من X.

18. لتكن A و B مجموعتين جزئيتين مفتوحتين في الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_u)$. برهن على أن المجموعة $A \cap B$ تكون متراصة، إذا وفقط، إذا كان $A \cap B = \varnothing$.

19. ليكن (X, τ) فضاءً يحقق خاصية العد الثانية. برهن على أنه من كل تغطية مفتوحة لـ X يمكن أن نستخلص تغطية جزئية لـ X قابلة للعد.

20. برهن على أنه إذا كان (X, τ) فضاءً متراصاً عداً ، ويحقق خاصية العد الثانية، فإنه يكون فضاءً متراصاً.

21. برهن على أن الفضاءات الإقليدية $\mathbb{R}^n$ غير متراصة عداً.

22. برهن على أن كل مجموعة جزئية مغلقة من فضاء متراص عداً هي مجموعة متراصة عداً.

23. ليكن (X,τ_X) فضاءً متراصاً عداً، وليكن $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ تابعاً مستمراً. برهن على أن (Y,τ_Y) متراص عداً.

24. نقول عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنه فضاء ليندلوف Lindelof إذا كان من كل تغطية مفتوحة لـ X يمكن أن نستخلص تغطية قابلة للعد.

ولذلك فإنه ينتج عن التمرين 19 السابق، أن كل فضاء يحقق خاصية العد الثانية هو فضاء ليندلوف.

- برهن على أن $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ هو فضاء ليندلوف.
- إذا كانت A مجموعة جزئية مغلقة من فضاء ليندلوف (X,τ)، فبرهن على أن الفضاء الجزئي (A,τ_A) هو فضاء ليندلوف .

25. حدد الإجابات الصحيحة:

a- كل مجموعة متراصة في أي فضاء تبولوجي هي مجموعة مغلقة.

b- كل مجموعة مغلقة في أي فضاء تبولوجي هي مجموعة متراصة.

c- إذا كانت A مجموعة غير متراصة في فضاء متراص، فإن A لاتكون مغلقة.

d- كل مجموعة مغلقة في فضاء T_2 هي مجموعة متراصة.

e- الفضاء الحقيقي $(\mathbb{R},\tau_u)$ متراص موضعياً، ولكنه غير متراص.

26. حدد الإجابات الصحيحة:

a- إذا كان $(X.\tau)$ فضاء متراصاً، فإن (X,τ) متراص موضعياً، والعكس ليس صحيحاً.

b- الفضاء الحقيقي $(\mathbb{R},\tau_u)$ متراص موضعياً لأنه متراص.

c- إذا كان (X,τ) فضاء غير متراص، فإنه لايحوي على مجموعة جزئية متراصة.

d- كل فضاء جزئي من فضاء متراص يكون متراصاً.

e- إذا كانت A مجموعة ليست مغلقة في فضاء T_2، فإن A لاتكون متراصة.

27. حدد الإجابات الصحيحة:

a- إذا كان (X,τ) فضاء متراصاً، فإنه يكون متراصاً عداً.

b- إذا كان (X,τ) فضاء B-W– متراص، فإنه يكون متراصاً عداً.

c- إذا كان (X,τ) فضاء متراصاً، فإنه يكون فضاء B-W– متراص.

d- إذا وجدت في فضاء (X,τ) متتالية، ولاتملك نقاط تراكم في X، فإن (X,τ) لايكون متراصاً عداً.

e- الفضاء الحقيقي $(\mathbb{R},\tau_u)$ متراص عداً.

الفصل السادس

الترابط

§.1- الفضاءات والمجموعات المترابطة:

1.1- تعريف:

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من فضاء تبولوجي (X,τ).

نقول إن A غير مترابطة، إذا تحقق الشرط التالي:

$$\exists\ T,S\in\tau\ \ ;\ \ T\cap A\neq\varnothing\ ,\ S\cap A\neq\varnothing\ ,\ T\cap S\cap A=\varnothing\ ,\ A\subseteq T\cup S$$

وفي هذه الحالة نسمي S و T فصلاً للمجموعة A.

وإذا لم يتحقق هذا الشرط ، فإننا نقول إن A مجموعة مترابطة.

1.2- ملاحظات وأمثلة:

1) إذا كانت $A=X$ ،فإن الشرط الوارد في التعريف يصبح:

$$\exists\ T,S\in\tau\ \ ;\ T\neq\varnothing\ ,\ S\neq\varnothing\ ,\ T\cap S=\varnothing\ ,\ X=T\cup S$$

وفي هذه الحالة نقول إن الفضاء (X,τ)غير مترابط ، وإذا لم يتحقق هذا الشرط ، قلنا إن الفضاء (X,τ) مترابط.

2) A غير مترابطة $\Leftrightarrow$ يوجد لـ A فصلاً.

3) إذا كانت $X=\{\ a,b,c\ \}$ و $\tau=\{\varnothing,X,\{a\},\{a,b\}\}$ ،فإن (X,τ) فضاء مترابـط ، لعدم وجود فصل لـ X.

4) في $(\mathbb{R},\tau_u)$ لـدينا $\mathbb{N}$ مجموعـة غـير مترابطـة، لأن $T=]-\infty\ ,\ \frac{3}{2}[,S=]\frac{3}{2}\ ,\ \infty[$ تشكلان فصلاً لـ $\mathbb{N}$.

كما أن $\mathbb{Q}$ مجموعة غير مترابطة ،لأن $S=]e,\infty[\ ,\ T=]-\infty,e[$ يشكلان فصلاً لها.

5) كل مجموعة مؤلفة من نقطة واحدة ، في أي فضاء تبولوجي ، هي مجموعة مترابطة ،لأنه إذا كانت $A=\{x\}$ مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X,τ)، وفرضنا جدلاً أن A غير مترابطة، فإنه سيوجد لها فصل، أي

$$\exists\ T,S\in\tau\ \ ;\ \ S\cap A\neq\varnothing\ ,\ T\cap A\neq\varnothing\ ,\ S\cap T\cap A=\varnothing\ ,\ A\subseteq T\cup S$$

وبما أن $A=\{x\}$، فإن هذا يعني أن $S\cap A=\{x\}$ و $T\cap A=\{x\}$

ومنه $S\cap T\cap A=\{x\}\neq\varnothing$، ونحصل على تناقض.

6) إذا كانت τ التبولوجيا القوية على X ، حيث X تحوي نقطتين على الأقل ، فإن (X,τ) هو فضاء غير مترابط ،لأنه إذا أخذنا $\varnothing\neq T\subsetneqq X$، فإن T و $X\setminus T$ يشكلان فصلاً لـ X.

بينما (X,τ_{ind}) هو فضاء مترابط ،لأن $\varnothing,X$ هما المجموعتان المفتوحتان الوحيدتان فيه.

7) $(\mathbb{R},\tau_{\ell.r})$ هو فضاء مترابط، لأنه إذا كانت $T\neq\varnothing$ و $S\neq\varnothing$ من τ، فإن $S\cap T\neq\varnothing$ (أي مجموعة في هذا الفضاء هي مجموعة مترابطة).

وكذلك فإن الفضاء $(\mathbb{N},\tau_{cof})$ هو فضاء مترابط، للسبب نفسه.

8) إن مبرهنة لاغرانج ، المعروفة في التحليل الحقيقي ، التالي نصها ، تفيدنا في البرهان على المبرهنة اللاحقة.

مبرهنة لاغرانج:

إذا كان f تابعاً حقيقياً معرفاً على المجال المغلق $[a',b']$، ومستمراً على هذا المجال، فإنه من أجل كل $\lambda\in[f(a'),f(b')]$، توجد نقطة $c\in[a',b']$ بحيث يكون $f(c)=\lambda$

.

9) إذا كان (Y,τ_Y) فضاءً جزئياً من الفضاء التبولوجي (X,τ)، وكانت $A \subseteq Y$، فإن:

A مجموعة مترابطة في الفضاء الجزئي $(Y,\tau_Y) \Leftrightarrow A$ مجموعة مترابطة في (X,τ) (برهن على ذلك).

1.3- مبرهنة:

إذا كانت $a \neq b$ نقطتين من $\mathbb{R}$، فإن المجموعة $A =]\,a,b\,[$ مترابطة في الفضاء $(\mathbb{R},\tau_u)$.

البرهان:

لنفرض جدلاً أن A غير مترابطة، عندئذ:

$$\exists\ T,S\in \tau\ ;\ S\cap A \neq \varnothing\ ,\ T\cap A \neq \varnothing\ ,\ A \subseteq S\cup T\ ,\ S\cap T\cap A = \varnothing$$

لتكن $Y = \{0,1\}$، ولنعرف التابع $f : (A,\tau_A) \to (Y,\tau_{dis})$ بـ:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \forall\ \ x\in S\cap A \\ 0 & \forall\ \ x\in T\cap A \end{cases}$$

{ لاحظ أن: $(S\cap A)\cup(T\cap A) = (S\cup T)\cap A = A$ }

إن f مستمر، لأن الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في (Y,τ_{dis}) هي مجموعة مفتوحة في (A,τ_A) حيث لدينا $\tau_{dis} = \{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$، ونلاحظ أن:

$$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \tau_A \qquad , \qquad f^{-1}(\{1\}) = S\cap A\in \tau_A$$
$$f^{-1}(\{0\}) = T\cap A \in \tau_A \qquad , \qquad f^{-1}(\{0,1\}) = A\in \tau_A$$

* إذن f مستمر على المجال $A =]\,a\,,\,b\,[$.

ليكن $a'\in T\cap A$ و $b'\in S\cap A$، عندئذ يكون $[a',b']\subseteq]a,b[$، ولذلك فإن f تابع حقيقي مستمر على المجال المغلق $[a',b']$، فهو يحقق مبرهنة لاغرانج.

ونلاحظ أن $\lambda = \dfrac{1}{2}\in [f(a'),\ f(b')] = [0,1]$

ولكـن لايوجـد $x\in[a',b']$ بحيـث يكـون $f(x)=\frac{1}{2}$، وهـذا ينـاقض مبرهنـة لاغرانج. ولذلك فإن A مترابطة.

1.4- مبرهنة:

إذا كانت A مجموعة مترابطـة في فـضاء تبولـوجي (X,τ)، وكانـت B مجموعـة جزئية من هذا الفضاء بحيث إن $A\subseteq B\subseteq \bar{A}$، فإن B مترابطة.

البرهان:

لنفرض جدلاً أن B غير مترابطة ،عندئذ:

(1) $\exists\, T,S\in\tau \;\; ; \;\; S\cap B\neq\varnothing \;,\; T\cap B\neq\varnothing \;,\; T\cap S\cap B=\varnothing \;,\; B\subseteq T\cup S$

وبما أن $A\subseteq B$، فإن $A\subseteq T\cup S$ و $T\cap S\cap A=\varnothing$

وبما أن A مترابطة، فإنه إما $T\cap A=\varnothing$ أو $S\cap A=\varnothing$ [لـو لم يتحقـق ذلـك لشكلت T و S فصلاً لـ A].

لنفرض مثلاً أن $T\cap A=\varnothing$ ،عندئذ نجد أن $A\subseteq X\setminus T$، ومنه

$$B\subseteq \bar{A}\subseteq \overline{X\setminus T}=X\setminus T$$

وهذا يعني أن $B\cap T=\varnothing$، ونحصل على تناقض مع (1) .

إذن B مترابطة.

1.5- ملاحظات وأمثلة:

1) إذا كانت A مجموعة مترابطة في (X,τ)، فإن $\bar{A}$ مترابطة، لأن $A\subseteq\bar{A}\subseteq\bar{A}$.

2) كل مجال محدود في الفضاء العادي لـ $\mathbb{R}$ هو مجموعة مترابطة (سواء أكان مفتوحـاً أو نصف مفتوح أو مغلقاً).

لأننا رأينا أنه ،إذا كان $a\neq b$ فإن $A=\,]a,b[$ مترابطة، ولدينا $\bar{A}=[a,b]$ فهي مترابطة ، و $A\subseteq[a,b[\subseteq\bar{A}$، ولذلك فإن $]a,b]$ مترابطة.

كما أن $\overline{A} \supseteq]a,b[\supseteq A$، ولذلك فإن $]a,b[$ مترابطة.

3) إذا كانت $A = \{x_1 , x_2 , \dots , x_n\}$ مجموعة منتهية من الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_u)$ حيث $n \geq 2$، فإن A غير مترابطة.

البرهان:

نرتب A على الشكل $x_1 < x_2 < \dots < x_n$، ونأخذ $T =]-\infty \ , \ \frac{x_1 + x_2}{2}[$ و $S =]\frac{x_1 + x_2}{2} \ , \ \infty[$، فنجد أنهما يشكلان فصلاً لـ A

5) إذا كانت $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ حيث $n \geq 2$ في فضاء تبولوجي متري (X, τ_d)، فإن A مجموعة غير مترابطة (برهن على ذلك كتمرين) ، وهذا صحيح في كل فضاء T_2.

6) ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة منتهية، فيها أكثر من عنصرين، في أي فضاء تبولوجي ، هي مجموعة غير مترابطة.

مثال: $X = \{a, b, c\}$, (X, τ_{ind})

كل مجموعة جزئية غير خالية في هذا الفضاء هي مجموعة مترابطة، لأن $\tau = \{\varnothing, X\}$.

7) لاتوجد أي علاقة بين مفهوم الترابط ومفهوم التراص، فمثلاً

$]a,b[$ مجموعة مترابطة وغير متراصة في $(\mathbb{R}, \tau_u)$

$\{1, 2, 3\}$ مجموعة متراصة وغير مترابطة في $(\mathbb{R}, \tau_u)$

$\mathbb{Q}$ مجموعة غير متراصة وغير مترابطة في $(\mathbb{R}, \tau_u)$

$\{x\}$ مجموعة مترابطة ومتراصة في (X, τ).

8) لتكن $x_o \in X$ ،ولتكن $\tau = \{ T \subseteq X \ ; \ x_o \in T \} \cup \{\varnothing\}$

إن τ تشكل تبولوجيا على X، والفضاء (X,τ) يكـون مترابطـاً (بـرهن علـى ذلك).

1.6- مبرهنة:

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً. إن الشروط التالية متكافئة:

1) (X,τ) فضاء مترابط.

2) لاتوجد مجموعتان مغلقتان V , U في (X,τ) بحيث يكون:

$$U \neq \varnothing \ , \ V \neq \varnothing \ , \ U \cap V = \varnothing \ , \ X = U \cup V$$

3) لايوجد في (X,τ) مجموعة مفتوحة ومغلقة بآن واحد إلاّ $\varnothing$ و X.

4) إذا كانت $\varnothing \neq A \subsetneqq X$، فإن $\text{bd}A \neq \varnothing$.

5) إذا كانت $Y = \{a,b\}$ ،وكان $f : (X,\tau) \to (Y,\tau_{dis})$ مستمراً، فإن f غير غامر.

البرهان:

$2 \Rightarrow 1$: لنفرض جدلاً أنه يوجد مثـل V , U عندئـذ نـضع $T = X \setminus U$ و $S = X\setminus V$، عندئذ نجد أن $S,T \in \tau$، ونلاحظ أن:

$T \neq \varnothing$، لأنــــه لــــو كانــــت $T = \varnothing$ لكانــــت $U = X$ ولوجــــدنا أن $V = U \cap V = \varnothing$، ونحصل على تناقض مع الفرض.

$S \neq \varnothing$ لنفس السبب.

$$T \cap S = (X \setminus U) \cap (X \setminus V) = X \setminus (U \cup V) = X \setminus X = \varnothing$$
$$T \cup S = (X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X \setminus (U \cap V) = X \setminus \varnothing = X$$

وهذا يعني أن T , S يشكلان فصلاً لـ X ، مما يناقض الفرض.

$3 \Rightarrow 2$: لنفرض جدلاً أنه يوجد $\varnothing \neq A \subsetneqq X$ بحيث تكون A مغلقة ومفتوحة.

عندئذ نضع $U = A$ و $V = X\setminus A$، فنجد أنهما مغلقتان ويحققان

$X = U \cup V$ و $U \cap V = \varnothing$ و $V \neq \varnothing$ و $U \neq \varnothing$ مما يناقض (2).

$4 \Rightarrow 3$: لنفرض جدلاً أنه يوجد $\varnothing \neq A \subsetneq X$ بحيث إن $bdA = \varnothing$، عندئذ $\bar{A} \setminus \mathring{A} = \varnothing$ ومنه $\mathring{A} = A = \bar{A}$، وهذا يعني أن A مغلقة ومفتوحة بآن واحد مما يناقض (3).

$5 \Rightarrow 4$: لنفرض أن $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_{dis})$ مستمراً وغامراً، ولنضع $A = f^{-1}(\{a\})$، عندئذ نجد أن $\varnothing \neq A \subsetneq X$، وبما أن f مستمر، فإن A مفتوحة ومغلقة، ومنه $\mathring{A} = A = \bar{A}$، وبالتالي $bdA = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \varnothing$ مما يناقض (4).

$1 \Rightarrow 5$: نفرض أن (X, τ) غير مترابط ،عندئذ يوجد لـ X فصلاً، وليكن S,T. نعرف

$$f : (X, \tau) \to (Y, \tau_{dis})$$

بـ :

$$f(x) = \begin{cases} a & \forall \quad x \in T \\ b & \forall \quad x \in S \end{cases}$$

عندئذ f مستمر وغامر مما يناقض الفرض (4). إذن (X, τ) مترابط.

1.7- مبرهنة:

إذا كانت $\{C_i\}_{i \in I}$ أسرة من المجموعات المترابطة في (X, τ)، وكان $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \varnothing$، فإن $C = \bigcup_{i \in I} C_i$ مترابطة.

البرهان:

لنفرض جدلاً أن C غير مترابطة ،عندئذ

$$\exists\, T, S \in \tau \ ; C \cap S \neq \varnothing \, , C \cap T \neq \varnothing \, , C \cap T \cap S = \varnothing \ , C \subseteq S \cup T$$

بما أن C_i مترابطة و $C_i \subseteq C \subseteq S \cup T$ و $C_i \cap T \cap S = \varnothing$ ،فإنه:

1) إما $C_i \subseteq T$ أو $C_i \subseteq S$، لأنه لو لم يتحقق ذلك، فإنه سيكون $C_i \not\subseteq T$ و $C_i \not\subseteq S$، ومن ذلك نجد أن: $C_i \not\subseteq T$، وبالتالي يوجد $x \in C_i$ بحيث $x \notin T$، وبما أن $C_i \subseteq S \cup T$، فإن $x \in S$، وبالتالي $C_i \cap S \neq \varnothing$. ثم إن $C_i \not\subseteq S$، وبالتالي يوجد $x \in C_i$ بحيث $x \notin S$، وبما أن $C_i \subseteq S \cup T$، فإن $x \in T$، وبالتالي $C_i \cap T \neq \varnothing$.

وبالتالي تكون T, S فصلاً لـ C_i، مما يناقض كونها مترابطة.

إذاً إما $C_i \subseteq T$ أو $C_i \subseteq S$.

2) إن الأسرة $\{C_i\}_{i \in I}$ بكاملها ؛ هي إما في T أو في S ،لأنه:

لو فرضنا أن $C_i \subseteq T$ و $C_j \subseteq S$ لوجدنا أن

$$\bigcap_{i \in I} C_i \subseteq C_i \cap C_j = (C_j \cap S) \cap (C_i \cap T) = (C_i \cap C_j) \cap S \cap T$$
$$\subseteq C \cap S \cap T = \varnothing$$

ونحصل على $\bigcap_{i \in I} C_i = \varnothing$، مما يناقض الفرض.

* لنفرض أن الأسرة $\{C_i\}_{i \in I}$ بكاملها في T ،عندئذ يكون $C \subseteq T$، وبالتالي $C \cap T = C$، وبالتالي $C \cap S = C \cap T \cap S = \varnothing$.

ونحصل على تناقض. إذن C مترابطة.

نتيجة:

إن الفضاء العادي $(\mathbb{R}, \tau_u)$ مترابط.

البرهان:

نأخذ $C_i =]-i, i[$ لكل $i \in \mathbb{N}$، فنجد أن C_i مترابطة، وأن $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i =]-1, 1[\neq \varnothing$ و $\mathbb{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$، وبحسب المبرهنة السابقة يكون $\mathbb{R}$ مترابطاً.

1.8- مبرهنة:

إذا كانت $A \neq \varnothing$ مجموعة جزئية من الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_u)$، فإن

A مترابطة $\Leftrightarrow$ A مجال.

البرهان:

$\Rightarrow$: ليكن A مجالاً في $\mathbb{R}$.

- إذا كانت A مجالاً محدوداً، فقد رأينا سابقاً أن A مترابطة.
- إذا كان $A =]a, \infty[$، فإننا نضع $C_i =]a, a+i[$ لكل $i \in \mathbb{N}$ و $a < i$، عندئذ نجد أن C_i مترابطة لكل i ،لأنها مجال محدود ، و $\bigcap_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ i > a}} C_i \neq \varnothing$ واضح، ولذلك

فإن $A = \bigcup_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ i > a}} C_i$ مترابطة بحسب المبرهنة السابقة.

وينتج عن ذلك أن $\overline{A} = [a, \infty[$ مترابطة.

- بالمثل نبرهن على أن $A =]-\infty, b[$ مترابطة، وبالتالي $\overline{A} =]-\infty, b]$ مترابطة.
- ثم إن $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ مترابطة، كما بيّنا في النتيجة السابقة.

$\Leftarrow$: لنفرض أن A مترابطة ولنبرهن على أن A تشكل مجالاً.

نميز الحالات التالية:

1) A غير محدودة من الطرفين، عندئذ إما $A = \mathbb{R}$ وبالتالي A تكون مجالاً ونحصل على المطلوب، أو يوجد $x \in \mathbb{R}$ بحيث $x \notin A$، فنجد أن $S =]x, \infty[$ و $T =]-\infty, x[$ تشكلان فصلاً لـ A ،لأن:

$$A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{x\} \subseteq S \cup T \ , \ S \cap T \cap A = \varnothing \ , \ T \cap A \neq \varnothing \ , \ S \cap A \neq \varnothing \ , \ S, T \in \tau$$

مما يناقض كون A مترابطة.

2) A محدودة من الأدنى وغير محدودة من الأعلى. ليكن a الحد الأدنى الأعظمي لـ A .

إذا كانت $A=[a,\infty[$ أو $A=]a,\infty[$ ، فإن A تكون مجالاً، ونحصل على المطلوب.

لنفرض أن $A \subsetneqq]a,\infty[$ ، عندئذ يوجد $x \in]a,\infty[$ و $x \notin A$ ، وعندئذ توجد عناصر من A أصغر كلياً من x [وإلاّ لكانت x حد أدنى لـ A و $a < x$ مما يناقض كون a حد أدنى أعظمي لـ A].

نأخذ $T=]-\infty,x[$ و $S=]x,\infty[$ ، فنجد أن T , S يشكلان فصلاً لـ A مما يناقض كون A مترابطة.

3) إذا كانت A محدودة من الأعلى وغير محدودة من الأدنى. ليكن b الحد الأعلى الأصغري لـ A

إذا كانت $A=]-\infty,b]$ أو $A=]-\infty,b[$ ، فإن A تكون مجالاً ونحصل على المطلوب.

لنفرض أن $A \subsetneqq]-\infty,b[$ ، عندئذ يوجد $x \in]-\infty,b[$ و $x \notin A$ ، وعندئذ توجد عناصر من A أكبر من x [وإلاّ لكان x حداً أعلى لـ A و $x < b$ مما يناقض كون b حداً أعلى أصغرياً].

نأخذ $T=]-\infty,x[$ و $S=]x,\infty[$ ، فنجد أن S و T يشكلان فصلاً لـ A ، مما يناقض كون A مترابطة.

4) إذا كانت A محدودة من الطرفين، فإننا نفرض أن a هو الحد الأدنى الأعظمي و b هو الحد الأعلى الأصغري.

إذا كانت $A=[a,b]$ أو $A=[a,b[$ أو $A=]a,b]$ أو $A=]a,b[$ ،فإنها تكون مجالاً ونحصل على المطلوب.

لنفرض أن $A \subsetneqq]a,b[$ ، عندئذ يوجد $x \in]a,b[$ بحيث $x \notin A$ ، عندئذ يوجد عناصر من A تقع بين x و a ويوجد عناصر من A تقع بين x و b . نأخذ $T=]x,\infty[$

و $S =]-\infty, x[$، فنجد أن S و T يشكلان فصلاً لـ A ، مما يناقض كـون A مترابطـة . إذن A مجالاً في $\mathbb{R}$ ، وهو المطلوب.

طريقة ثانية

لنفرض جدلاً أن A ليست مجالاً، عندئذ $\varnothing \neq A \neq \mathbb{R}$ و A تحوي أكثر من نقطة واحدة [وإلاّ لكانت $A = \{a\} = [a,a]$].

بما أن A ليست مجالاً، فإنه يوجد $a, b \in A$ و $x \notin A$ بحيث يكون $a < x < b$.

نأخذ $T =]-\infty, x[$ و $S =]x, \infty[$ ،فنجد أن T و S يشكلان فـصلاً لــ A مما يناقض كون A مترابطة. إذن A مجالاً.

1.9- مبرهنة:

إذا كان (X, τ) فضاءً مترابطاً ، وكانت $A \subseteq X$ مجموعـة مترابطـة ، وكانـت B مجموعة مفتوحة ومغلقة في الفضاء الجزئي $X \backslash A$ ، فإن $A \cup B$ مجموعة مترابطة.

البرهان:

لنضع $C = A \cup B$.

إذا كانت C غير مترابطة ، فإن الفضاء الجزئي (C, τ_C) غـير مترابـط، وبالتـالي توجد مجموعتان مفتوحتان T و S في الفضاء (C, τ_C) بحيث يكون

$$T \cup S = C \quad , \quad T \cap S = \varnothing \quad , \quad T \neq \varnothing \quad , \quad S \neq \varnothing$$

إن T و S مغلقتان أيضاً في الفضاء (C, τ_C)، لأن $T = C \backslash S$ و $S = C \backslash T$ ، وبما أن $A \subseteq C$ و A مترابطة في الفضاء (X, τ)، فإن A مترابطة في الفضاء الجزئـي (C, τ_C) (بحسب الملاحظة (9) من 1.2).

وبما أن $A \subseteq C = T \cup S$، فإنه إما $A \subseteq T$ أو $A \subseteq S$ [لو كان $A \cap T \neq \varnothing$ و $A \cap S \neq \varnothing$، لشكلت T و S فصلاً لـ A في (C, τ_C)، وهذا يناقض كون A مترابطة في (C, τ_C)].

لنفرض أن $A \subseteq T$، عندئذ نجد أن $S = C \setminus T \subseteq C \setminus A \subseteq B$.

وبما أن S مفتوحة ومغلقة في (C, τ_C) و $S \subseteq B$، فإن S مفتوحة ومغلقة في الفضاء B الجزئي من (C, τ_C).

وبما أن B مفتوحة ومغلقة في الفضاء $X \setminus A$ بالفرض ،فإن S مفتوحة ومغلقة في الفضاء $X \setminus A$.

إذن: المجموعة S مفتوحة ومغلقة في الفضائين (C, τ_C) و $X \setminus A$ الجزئيين من (X, τ)، وبالتالي (بحسب الملاحظة (4) من 6.4 من الفصل الأول) تكون S مفتوحة ومغلقة في الفضاء $(X \setminus A) \cup C$ ، ولكن $(X \setminus A) \cup C = X$، وبالتالي S مفتوحة ومغلقة في الفضاء (X, τ). وبما أن $\varnothing \neq S \neq X$، فإنه ينتج عن المبرهنة 1.6 أن الفضاء (X, τ) غير مترابط ، وهذا يناقض الفرض.

إذن: المجموعة $C = A \cup B$ مترابطة في الفضاء (X, τ).

1.10- **نتيجة (كره توسكي) :**

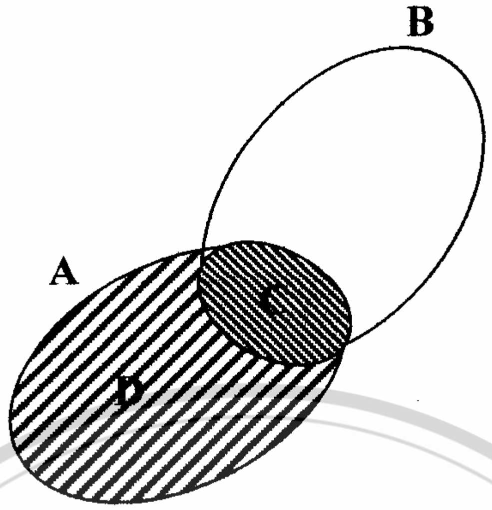
إذا كان $X = A \cup B$ فضاء مترابطاً ، وكانت A , B مجموعتين مغلقتين في X ، وكانت $A \cap B$ مترابطة، فإن كلاً من A و B مترابطتان.

البرهان:

نضع $C = A \cap B$ و $D = A \setminus C$، فنجد أن D مفتوحة ومغلقة في الفضاء الجزئي $X \setminus C$ (برهن على ذلك).

ولذلك فإن $D \cup C$ مترابطة ،بحسب المبرهنة السابقة.

ولكن $D \cup C = (A \setminus C) \cup C = A$ ، أي أن A مترابطة.



وبالطريقة نفسها، نجد أن B مترابطة.

2.§- المجموعات المنفصلة :

2.1- تعريف:

نقول عن مجموعتين A , B جزئيتين من فضاء تبولوجي (X,τ) إنهما منفصلتان، إذا كان $A\bigcap\overline{B}=\varnothing$ و $\overline{A}\bigcap B=\varnothing$.

2.2- ملاحظات وأمثلة:

1) في الفضاء الحقيقي العادي $(\mathbb{R},\tau_u)$، المجموعتان $A=]0,2[$ و $B=]2,5[$ منفصلتان ،لأن $A\bigcap\overline{B}=]0,2[\bigcap[2,5]=\varnothing$ وكذلك فإن $\overline{A}\bigcap B=[0,2]\bigcap]2,5[=\varnothing$.

بينما المجموعتان $D=]2,3[$ و $C=[3,6[$ غير منفصلتين، لأن $C\bigcap\overline{D}=[3,6[\bigcap[2,3]=\{3\}\neq\varnothing$.

2) إذا كانت A , B مجموعتين مغلقتين أو مفتوحتين وغير متقاطعتين في أي فضاء تبولوجي (X,τ)، فإن A و B منفصلتان، لأنه:

إذا كانــت A و B مغلقــتين، فــإن $A=\bar{A}$ و $B=\bar{B}$، ولــدينا $A\cap B=\varnothing$، وبالتالي $\bar{A}\cap B=A\cap B=\varnothing$، وكذلك $A\cap\bar{B}=A\cap B=\varnothing$.

وإذا كانت A و B مفتوحتين، فإنه ينتج عن كون A مفتوحة أن

$$A\cap\bar{B}\subseteq\overline{A\cap B}=\bar{\varnothing}=\varnothing\Rightarrow A\cap\bar{B}=\varnothing$$ ،

وينتج عن كون B مفتوحة أن $\bar{A}\cap B\subseteq\overline{A\cap B}=\bar{\varnothing}=\varnothing\Rightarrow\bar{A}\cap B=\varnothing$.

3) إذا كانت A و B تشكلان فصلاً للفضاء التبولوجي (X,τ) ، أي إذا كان (X,τ) فضاءً غير مترابط، فإن المجموعتين $A_1=A\cap X$ و $B_1=B\cap X$ منفصلتان ،لأن $\bar{A}_1\cap B_1=\varnothing$ و $A_1\cap\bar{B}_1=\varnothing$، لأنه إذا كان $A_1\cap\bar{B}_1\neq\varnothing$، فإنه يوجد عنصر $x\in A_1\cap\bar{B}_1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x\in A_1 \quad \& \quad x\in\bar{B}_1\\
&\Rightarrow x\in A\cap X \quad \& \quad x\in\bar{B}_1\\
&\Rightarrow x\in A \quad \& \quad x\in\bar{B}_1
\end{aligned}$$

وبما أن A مجموعة مفتوحة فهي مجاورة لـ x ،وبالتالي $A\cap B_1\neq\varnothing$، ومنه $A\cap B\cap X\neq\varnothing$، وبالتالي $A\cap B\neq\varnothing$، وهذا يناقض كون A و B تشكلان فصلاً للفضاء X ،وبالتالي $A_1\cap\bar{B}_1=\varnothing$.

وبالطريقة نفسها نبرهن على أن $\bar{A}_1\cap B_1=\varnothing$.

2.3- مبرهنة:

إذا كانتا A و B مجموعتين مترابطتين وغير منفصلتين في فضاء تبولوجي (X,τ)، فإن $A\cup B$ مجموعة مترابطة في هذا الفضاء.

البرهان:

إذا كانت $A\cup B$ غير مترابطة ، فإنه يوجد في X مجموعتان مفتوحتان u و v بحيث إن:

$$A\cup B\subseteq u\cup v \quad \& \quad (A\cup B)\cap u\cap v=\varnothing \quad \&$$
$$(A\cup B)\cap u\neq\varnothing \;\&\; (A\cup B)\cap v\neq\varnothing$$

وبما أن A مترابطة ، فإنه إما $A\subseteq u$ أو $A\subseteq v$، لأن خلاف ذلك يؤدي إلى أن u و v تشكلان فصلاً لـ A ، مما يناقض الفرض بأن A مترابطة.

وكذلك نجد أنه إما $B\subseteq u$ أو $B\subseteq v$.

- إذا فرضنا أن $A\subseteq u$ و $B\subseteq v$ (نفس المناقشة عندما $A\subseteq v$ و $B\subseteq u$) ،

فإننا نجد أن $B\cap v=B$، ومنه

$$B\cap u=(B\cap v)\cap u\subseteq(A\cup B)\cap(u\cap v)=\varnothing$$

أي أن $B\cap u=\varnothing$ ، وبالتالي:

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap u&=(A\cap u)\cup(B\cap u)\\&=(A\cap u)\cup\varnothing=A\cap u=A\end{aligned}$$

وكذلك نجد أن $(A\cup B)\cap v=B$، وحسب المثال (3) من الفقرة السابقة، فإن A و B تكونا منفصلتين، وهذا يناقض الفرض بأنهما غير منفصلتين.

- الآن : إذا فرضنا $A\subseteq u$ و $B\subseteq u$ (نفس المناقشة عندما $A\subseteq v$ و $B\subseteq v$).

فإن $A\cup B\subseteq u$ ومنه $(A\cup B)\cap u=A\cup B$، أي أن

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap v&=\left[(A\cup B)\cap u\right]\cap v\\&=(A\cup B)\cap(u\cap v)=\varnothing\end{aligned}$$

وهذا يناقض فرضنا بأن $A\cup B$ غير مترابطة. وبالتالي فإن $A\cup B$ مجموعة مترابطة.

2.4- **مبرهنة:**

إذا كانت $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ أسرة قابلة للعد من المجموعات المترابطة في الفضاء التبولوجي X بحيث إن A_n و A_{n+1} غير منفصلتين مهما تكن $n\in\mathbb{N}$، فإن $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ مجموعة مترابطة.

البرهان:

إن المجموعة $B_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_i$ مهما تكن $i\in\mathbb{N}$ هي مجموعة مترابطة ،ولنبرهن ذلك بالاستقراء.

من أجل $i = 2$ ،فإن $B_2 = A_1 \cup A_2$ مترابطة (بحسب المبرهنة السابقة).

لنفرض الآن أن B_{i-1} مترابطة، ولنبرهن على أن B_i مترابطة:

إن المجموعتين المترابطتين A_i و B_{i-1} غير منفصلتين، لأن A_i و A_{i-1} غير منفصلتين، وبالتالي $B_i = B_{i-1} \cup A_i$ مترابطة (بحسب المبرهنة السابقة) ، وبالتالي فإن $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ أسرة من المجموعات المترابطة وتحقق $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \neq \varnothing$. وبحسب المبرهنة 1.7، فإن $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ مجموعة مترابطة. ولكن $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$، وبالتالي $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ مجموعة مترابطة.

§.3- **المركبات المترابطة:**

3.1- **تعريف:**

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً و A مجموعة جزئية من X.

نسمي A مركبة مترابطة للفضاء X، إذا كانت A مجموعة مترابطة وغير محتواة في مجموعة مترابطة أكبر منها تماماً.

- إذا كانت Y مجموعة جزئية من الفضاء (X,τ)، فإننا نسمي مركبة مترابطة للمجموعة Y كل مركبة مترابطة للفضاء الجزئي Y.

- إذا كانت x نقطة من X، فإننا نسمي أكبر مجموعة مترابطة في الفضاء X وتحوي x بالمركبة المترابطة للنقطة x.

* واضح أن المركبة المترابطة لنقطة x من X هي مركبة مترابطة للفضاء X ، وأن كل مركبة مترابطة للفضاء X هي مركبة مترابطة لكل نقطة من نقاطها.

3.2- ملاحظات وأمثلة:

1) إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً بحيث إن τ هي التبولوجيا القوية على X، فإن المركبات المترابطة في هذا الفضاء هي المجموعات المؤلفة من نقطة واحدة، لأن المجموعة $\{x\}$ مهما تكن $x \in X$ هي مجموعة مترابطة ، ولايوجد في الفضاء X مجموعة مترابطة أكبر منها وتحويها، حيث إن كل مجموعة مؤلفة من أكثر من عنصر في هذا الفضاء هي مجموعة غير مترابطة.

2) إذا كان (X,τ) فضاءً مترابطاً، فإن X هي المركبة المترابطة الوحيدة للفضاء X.

3) إذا كانت A مجموعة مترابطة في فضاء تبولوجي (X,τ)، فإن A محتواة في مركبة مترابطة للفضاء.

البرهان:

لتكن $\{A_i\}_{i\in I}$ أسرة كل المجموعات المترابطة في الفضاء X والحاوية على المجموعة A، وبالتالي $A \subseteq \bigcap_{i\in i} A_i$، وبما أن $A \neq \varnothing$، لأن A مجموعة مترابطة، فإن $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.

وبحسب المبرهنة 1.7، فإن المجموعة $C=\bigcup_{i\in I} A_i$ مترابطة وتحوي على A.

ونجد أن أي مجموعة مترابطة تحوي C سوف تحوي على A، وبالتالي تكون مساوية لـ C، وهذا يعني أن C مجموعة مترابطة وغير محتواة في مجموعة مترابطة أكبر منها، وبالتالي تكون مركبة مترابطة حاوية على A.

4) أي نقطة في أي فضاء تبولوجي (X,τ) تكون محتواة في مركبة مترابطة للفضاء X.

وهذا ينتج من كون المجموعة $\{x\}$ مهما تكن $x \in X$، مجموعة مترابطة في الفـضاء X، وكون كل مجموعة مترابطة موجودة في مركبة مترابطة.

3.3- مبرهنة:

إذا كانت A مركبة مترابطة للفضاء التبولوجي (X,τ)، فإن A مجموعة مغلقة.

البرهان:

بما أن A مركبة مترابطة، فإن A مجموعة مترابطة، وبالتالي لـصاقتها $\bar{A}$ مجموعـة مترابطة وتحتوي على A (حسب الملاحظة (1) من 1.5). ولكن A مركبة مترابطة، فهـي لاتكون محتواة في مجموعة مترابطة أكبر منهـا، وبالتـالي فـإن $A = \bar{A}$، ومنـه A مجموعـة مغلقة.

3.4- مبرهنة:

إذا كانت $\{A_i\}_{i\in I}$ أسرة كل المركبات المترابطة للفضاء التبولوجي (X,τ)، فإن:

1) مهما يكن $i \neq j$ من I ،فإن $A_i \cap A_j = \varnothing$.

2) $X = \bigcup_{i\in I} A_i$.

البرهان:

1) إذا كان $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ ولدينا A_j, A_i مجموعتين مترابطتين، فإنه بحسب المبرهنة 1.7 يكون اجتماعهما $A_i \cup A_j$ مجموعة مترابطة، وهي تحوي كلاً من المركبـات المترابطـة A_i و A_j ،ومن تعريف المركبة المترابطة نجد أن $A_i = A_i \cup A_j = A_j$.

ونحصل على تناقض، وبالتالي $A_i \cap A_j = \varnothing$ مهما يكن $i \neq j$ من I.

2) بما أن كل عنصر من X محتوى في مركبة مترابطة للفضاء X، فإن

$$X = \bigcup_{x\in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq X$$

ومنه: $X = \bigcup_{i\in I} A_i$

4.§- الترابط الموضعي:

4.1- تعريف:

نقول عن فضاء تبولوجي (X, τ) إنه مترابط موضعياً، إذا كان من أجل أي نقطة x من X وأي مجاورة w لـ x توجد مجاورة مترابطة v لـ x محتواة في w.

- ونقول عن مجموعة Y في فضاء تبولوجي (X, τ) إنها مترابطة موضعياً ،إذا كان الفضاء الجزئي Y مترابطاً موضعياً.

4.2- أمثلة وملاحظات:

إذا كانت τ التبولوجيا القوية على X، فإن الفضاء (X, τ) يكون مترابطاً موضعياً لأنه : من أجل أي نقطة x من X وأي مجاورة w لـ x ،فإن $\{x\}$ مجاورة مترابطة لـ x محتواة في w.

ولكن (X, τ) لايكون فضاءً مترابطاً (حيث X مؤلفة من أكثر من نقطة) ، كما رأينا في المثال (6) من 1.2. وعليه فإنه

إذا كان الفضاء التبولوجي (X, τ) مترابطاً موضعياً، فإنه ليس بالضروري أن يكون مترابطاً.

2) كما أنه إذا كان الفضاء X مترابطاً، فإنه ليس من الضروري أن يكون مترابطاً موضعياً، فمثلاً:

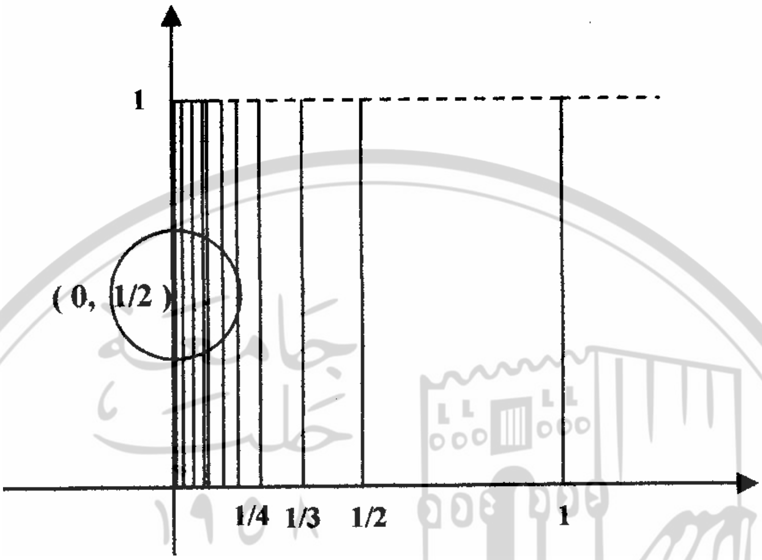
لنأخذ الفضاء الحقيقي ثنائي البعد $\mathbb{R}^2$ ولنأخذ في $\mathbb{R}^2$ ، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ المجموعة

$$A_n = \left\{ (\frac{1}{n}, y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad 0 \le y \le 1 \right\}$$

وكذلك المجموعة

$$B = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad 0 \le x \le 1\}$$

ولنضع $Y = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup B$ و $X = Y \cup \left\{(0, \frac{1}{2})\right\}$



يصبح لدينا $Y \subseteq X \subseteq \bar{Y}$ ، وبما أن Y مجموعة مترابطة، فإن X تكون مجموعة مترابطة، أي أن الفضاء الجزئي X مترابط.

ولكن X لايكون مترابط موضعياً، لأنه

لدينا المجموعة $u = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 < \frac{1}{4}\right\} \cap X$

مفتوحة في الفضاء الجزئي X وتحوي النقطة $(0 , \frac{1}{2})$ ، أي أن u مجاورة للنقطة $(0 , \frac{1}{2})$ في الفضاء الجزئي X ولايوجد في X مجاورة مترابطة للنقطة $(0 , \frac{1}{2})$ بحيث تكون محتواة في u. لأن u تتألف من مركبات مترابطة معدودة (لاحظ الشكل) واحدى هذه المركبات المترابطة هي المجموعة $\{(0 , \frac{1}{2})\}$ وهي ليست مفتوحة في الفضاء الجزئي X.

4.3- تمرين محلول:

ليكن $f : X \to Y$ تابعاً مستمراً وغامراً ومفتوحاً للفضاء التبولـوجي X في الفضاء التبولوجي Y.

إذا كان الفضاء X مترابط موضعياً، فإن الفضاء Y يكون أيضاً مترابط موضعياً.

الحل:

ليكن y عنصر ما من Y و w مجاورة ما لـ y. بما أن f غامر، فإنه يوجـد x مـن X بحيث $y = f(x)$. وبما أن f مستمر، فإن $f^{-1}(w)$ تكون مجاورة لـ x في الفضاء X.

وبمـا أن X مترابــط موضــعياً، فإنــه توجــد مجــاورة مترابطــة v لـــ x بحيــث $x \in v \subseteq f^{-1}(w)$، وبالتالي $y = f(x) \in f(v) \subseteq w$.

وبما أن f مفتوح، فإن $f(v)$ مجموعة مفتوحة، وبالتالي فهي مجاورة لـ y وهي مجاورة مترابطة لـ y (لأن v مترابطة و f مستمر وغامر). وبالتالي Y مترابط موضعياً.

تمارين غير محلولة

1. ماهو شكل المجموعات المترابطة في الفضاء التبولوجي (X,τ)، عندما تكون

   1- τ التبولوجيا القوية.

   2- τ التبولوجيا الضعيفة.

2. لتكن $X=\{a,b,c\}$، ولتكن $\tau_1=\{\varnothing,X,\{a\},\{b,c\}\}$ و $\tau_2=\{\varnothing,X,\{a\},\{a,b\}\}$. برهن على أن الفضاء (X,τ_1) غير مترابط، وأن الفضاء (X,τ_2) مترابط.

3. برهن على أنه ،إذا كانت A مجموعة مترابطة في فضاء T_1 ، (X,τ)، وكانت A تحوي أكثر من عنصر واحد، فإن A غير منتهية.

4. برهن على أن $(\mathbb{R},\tau_{\ell.r})$ هو فضاء مترابط.

5. برهن على أن $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ هو فضاء مترابط.

6. إذا كانت A مجموعة مترابطة في الفضاء (X,τ)، وكانت τ_1 تبولوجيا على X بحيث إن $\tau_1\subseteq\tau$، فبرهن على أن A مترابطة في الفضاء (X,τ_1).

7. لتكن C مجموعة مترابطة في فضاء مترابط (X,τ)، ولنفرض أن $X\setminus C=A\cup B$ حيث A و B مجموعتان منفصلتان. برهن على أن $C\cup A$ و $C\cup B$ مجموعتان مترابطتان.

8. برهن على أن الفضاء (X,τ) يكون مترابطاً، إذا وفقط، إذا كان لكل $T\in\tau$، حيث $T\neq X$، يكون $\text{bd}\,T\neq\varnothing$.

9. لتكن A مجموعة مترابطة في الفضاء (X,τ)، ولتكن B مجموعة مفتوحة ومغلقة وتحقق $A \bigcap B \neq \varnothing$. برهن على أن $A \subseteq B$.

10. ليكن (X,τ) فضاء يحقق الخاصة التالية: كل زوج من نقاطه يكون محتوى في مجموعة مترابطة فيه. برهن على أن (X,τ) فضاء مترابط.

11. إذا كانت C مجموعة مترابطة من فضاء تبولوجي (X,τ)، وكان $f:(X,\tau)\to(Y,\tau_Y)$ تابعاً مستمراً، فبرهن على أن المجموعة $f(C)$ مترابطة في الفضاء (Y,τ_Y).

12. ليكن (X,τ) فضاءً مترابطاً، وليكن $f:(X,\tau)\to(\mathbb{R},\tau_u)$ تابعاً مستمراً، ولتكن a و b من $f(X)$ بحيث إن $a < b$. برهن على أنه، إذا كان c من $\mathbb{R}$ بحيث إن $a < c < b$، فإنه توجد نقطة واحدة على الأقل x_o من X بحيث يكون $f(x_o) = c$.

13. ليكن $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ تابعاً مستمراً وغامراً. برهن أنه، إذا كان (X,τ_X) فضاء مترابطاً ، فإن الفضاء (Y,τ_Y) يكون مترابطاً أيضاً، ثم استنتج أن فضاء القسمة لفضاء مترابط هو فضاء مترابط.

14. استفد من كون المجال $[a,b]$ مترابطاً لتبرهن على أنه، إذا كان $f:[a,b]\to[a,b]$ تابعاً، فإنه توجد $x\in[a,b]$ بحيث يكون $f(x) = x$.

15. برهن على أن فضاء الضرب $(X\times Y,\tau)$ يكون مترابطاً، إذا وفقط ،إذا كان الفضاءان (X,τ_X) و (Y,τ_Y) مترابطين.

16. برهن على أن الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ مترابط أياً كانت n من $\mathbb{N}$.

17. أياً كانت النقطة (a,b) من الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^2$. برهن على أن المجموعة $\mathbb{R}^2\setminus\{(a,b)\}$ مترابطة. واستفد من ذلك في البرهان على أن $(\mathbb{R},\tau_u)$ ليس هوميومورف مع الفضاء الإقليدي $(\mathbb{R}^2,\tau_E)$.

(فائدة : استفد من التمرين 11 السابق).

18. هات أمثلة على مجموعات مترابطة ومجموعات غير مترابطة من الفضاء الإقليدي $(\mathbb{R}^2, \tau_E)$.

19. برهن أنه، إذا كانت A و B مجموعتين مغلقتين في فضاء تبولوجي (X, τ)، وكانت $A \cup B$ و $A \cap B$ مجموعتين مترابطتين، فإن كلاً من المجموعتين A و B تكونا مترابطتين.

20. لنعرف على الفضاء (X, τ) العلاقة ρ كما يلي:

يوجد مجموعة جزئية مترابطة M من X بحيث يكون y,x من M $\Leftrightarrow x \rho y$

برهن على أن ρ علاقة تكافؤ على X.

- لنرمز بـ C_x لصف تكافؤ النقطة x من X . نسمي C_x بالمركبة المترابطة من X المعينة بالنقطة x.
- أوجد C_5 في الفضاء $(\mathbb{Z}, \tau_u)$ الجزئي من الفضاء العادي لـ $\mathbb{R}$.
- إذا كانت a نقطة من الفضاء X ، فبرهن على أن C_a هي أكبر مجموعة مترابطة تحوي a.

21. برهن على أن الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_u)$ مترابط موضعياً.

22. لنفرض أن الفضاء (X, τ_X) يملك عدداً منتهياً من المركبات المترابطة. برهن على أن كل مركبة من هذه المركبات هي مجموعة مغلقة ومفتوحة بآن واحد.

23. لتكن A مجموعة مترابطة في الفضاء (X, τ)، ولنفرض أنها مفتوحة ومغلقة معاً. برهن على أن A مركبة مترابطة في (X, τ).

24. حدد الإجابات الصحيحة:

a- إذا حوى فضاء تبولوجي على مجموعة كثيفة ومترابطة، فإنه يكون فضاءً مترابطاً.

b- إذا كانت A مجموعة منتهية ومؤلفة من أكثر من عنصر واحدٍ في فضاء T_1، فإنها تكون مجموعة مترابطة.

c- إذا كان (X, τ_1) و (X, τ_2) فضائين مترابطين، فإن الفضاء $(X, \tau_1 \cap \tau_2)$ يكون مترابطاً.

d- إذا كانت A مجموعة جزئية منتهية من الفضاء (X, τ_{cof})، فإن A مجموعة مترابطة.

e- الفضاء التبولوجي (X, τ) حيث τ التبولوجيا القوية ، هو فضاء مترابط.

25. حدد الإجابات الصحيحة:

a- المجموعات المترابطة في الفضاء (X, τ) حيث τ التبولوجيا القوية هي المجموعات المنتهية.

b- إذا كان (X, τ) فضاءً مترابطاً ،فإنه يكون مترابطاً موضعياً.

c- كل مجموعة جزئية من فضاء مترابط ، هي مجموعة مترابطة.

d- الفضاء (X, τ) حيث τ التبولوجيا الضعيفة ، هو فضاء مترابط.

e- إذا كان (X, τ) فضاءً غير مترابط ،فإنه لايحوي على مجموعة جزئية مترابطة.

26. حدد الإجابات الصحيحة:

a- كل فضاء تبولوجي مترابط هو فضاء متراص.

b- كل فضاء تبولوجي متراص هو فضاء مترابط.

c- الفضاء الحقيقي $(\mathbb{R}.\tau_u)$ مترابط.

d- كل مجموعة مترابطة في فضاء تبولوجي هي مجموعة مغلقة.

e- كل مجموعة مترابطة في الفضاء الحقيقي $(\mathbb{R}.\tau_u)$ هي مجال.

دليل الرموز

الرمز	المعنى العلمي	رقم الصفحة
$\lvert X \rvert$	كاردينال X (العدد الأساسي لـــ X) أو قدرة X.	١٥
$\mathscr{P}(X)$	مجموعة أجزاء X .	١٥
$X \times Y$	الضرب الديكارتي لـــ X في Y .	٢٠
$\prod_{i=1}^{n} X_i$	الضرب الديكارتي لـــ X_1 في X_2 في ، ... ، في X_n.	٢١
$\prod_{i \in I} X_i$	الضرب الديكارتي للأسرة $\{X_i\}_{i \in I}$.	٢١
D_ρ	منطقة العلاقة ρ .	٢٣
R_ρ	مدى العلاقة ρ .	٢٣
Sup A	(أو l.u.b (A)) الحد الأعلى الأصغري لـــ A .	٢٩
Inf A	(أو g.l.b (A)) الحد الأدنى الأعظمي لـــ A .	٢٩
τ	تبولوجيا .	٣٩
$\mathcal{F}$	أسرة المجموعات المغلقة في فضاء تبولوجي .	٤٠
τ_{ind}	التبولوجيا غير المتقطعة (أو الضعيفة) .	٤٠
τ_{dis}	التبولوجيا المتقطعة (أو القوية) .	٤٠
τ_u	التبولوجيا العادية .	٤٣
$\tau_{\ell.r}$	تبولوجيا الطرف الأيسر .	٤٤
τ_{cof}	تبولوجيا المتممات المنتهية .	٤٥
τ_d	تبولوجيا مترية (تبولوجيا مولدة بتابع المسافة d)	٤٧
$\tau_1 \leq \tau_2$	τ_2 أقوى من τ_1 .	٤٨
V(x)	أسرة مجاورات النقطة x.	٥١

$\overset{\circ}{A}$	داخل A .	٥٦
ext A	خارج A .	٦٠
$\bar{A}$	لصاقة A .	٦٢
bd(A)	حدود (أو جبهية) A .	٦٩
A'	المجموعة المشتقة لـــ A .	٧٠
Is(A)	منعزلة A .	٧١
τ_Y	تبولوجيا على Y .	٧٥
τ_A	أثر تبولوجيا τ على مجموعة جزئية A .	٧٧
$\mathcal{B}$	أساس .	٧٩
$\tau(S)$	التبولوجيا المولدة بأسرة المجموعات الجزئية S .	٨٣
$S[\overset{n}{\cap}]$	مجموعة كل التقاطعات المنتهية لعناصر أسرة المجموعات الجزئية S.	٨٤
$\mathcal{L}_x$	أساس موضعي للنقطة x .	٨٩
Pr_j	تابع إسقاط على المركبة j .	١١١
X/ρ	مجموعة القسمة	١٢٣
τ/ρ	تبولوجيا القسمة	١٢٤
$\mathbb{F}$	مرشحة	١٦٣
$\mathbb{F}_1 \leq \mathbb{F}_2$	$\mathbb{F}_2$ أقوى من $\mathbb{F}_1$.	١٦٥
$\mathcal{U}$	فوق مرشحة .	١٧٠
$\mathbb{F} \to x$	المرشحة $\mathbb{F}$ تتقارب من النقطة x .	١٧٤
$x \in \bar{\mathbb{F}}$	x نقطة لاصقة بالمرشحة $\mathbb{F}$.	١٧٥
$x \in \bar{\mathcal{B}}$	x نقطة لاصقة بالأساس $\mathcal{B}$.	١٧٥

المصلحات باللغة الإنكليزية

عربي	انكليزي	رقم الصفحة
	A	
نقطة تراكم	Accumulation point	٧٠
لصاقة مجموعة	Adherent of a set	٦٢
نقطة لاصقة	Adherent point	٦٢
علاقة تخالفيه	Anti-symmetric relation	٢٦
خواص التجميع	Associative properties	١٨
مسلمة	Axiom	١٣٣
	B	
أساس	Base	٧٩
أساس لمرشحة	Base for a filter	١٦٦
أساس لتبولوجيا	Base for a topology	٧٩
تابع تقابل	Bijective function	٣٣
خاصـــــية بولزانـــــو – وايرشتراس	Bolzano-Weierstrass property	٢٢٤
جبهية (حدود) مجموعة	Boundary of a set	٦٩
نقطة جبهية (حدودية)	Boundary point	٦٩
مجموعة محدودة	Bounded set	٢٨
	C	
عدد أصلي(أساسي، قياسي)	Cardinal numbers	١٥
الضرب الديكارتي	Cartesian product	٢٠

١٠٥	Closed function	تابع مغلق
٣١	Closed interval	مجال مغلق
٤٠	Closed set	مجموعة مغلقة
٢١١	Closed cover	تغطية مغلقة
٦٢	Closure of a set	لصاقة مجموعة
٦٢	Closure point	نقطة لاصقة
٧٠	Cluster point	نقطة تراكم
٤٥	Cofinite topology	تبولوجيا المتممات المنتهية
١٨	Commutative properties	خواص التبديل
٢١٤	Compact set	مجموعة متراصة
٢١١	Compact space	فضاء متراص
٢١١	Compactness	التراص
١٩	Complementaries properties	خواص المتممات
١٦	Complement	متممة
٢١	Component	مركبة
٣٤	Composition of functions	تركيب التوابع
٢٥٢	Connected component	مركبة مترابطة
٢٣٧	Connected set	مجموعة مترابطة
٢٣٧	Connected space	فضاء مترابط
٢٣٧	Connectedness	الترابط
٩٩	Continuity	الاستمرار
٣٢	Constant function	تابع ثابت
٩٩	Continuous at a point	الاستمرار في نقطة

المراجع

أولاً : المراجع العربية :

١. ضبيط، ن. و أحمد ، م.خ.، التبولوجيا/١ ، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، جامعة حلب، ٢٠٠٦.

٢. نقار، ح. ، الطبولوجيا العامة، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، جامعة حلب، ١٩٨١.

ثانياً : المراجع الأجنبية :

3. Bourbaki, N. Topologie Générale, Ch. 3,4, 1971.
4. Long, P.E., An Introduction to General Topology, Charles E. Merrill Pub. Company, 1986.
5. Nagata, J.I., Modern General Topology, North-Holland Pub. Amesterdam, 1974.
6. Schaum's outline Series, Theory and Problems of General Topology, New York , 1965.
7. Willard, S., General Topology, Ed. Wesley, 1997.

تم تدقيق الكتاب علمياً من قبل:

الدكتور	**الدكتور**	**الدكتور**
محمد خير أحمد	حسن نقار	حمدو النجار

المدقق اللغوي

الدكتور حسين الصديق

المراجع

أولاً : المراجع العربية :

١. ضبيط، ن. و أحمد ، م.خ.، التبولوجيا/١ ، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، جامعة حلب، ٢٠٠٦.

٢. نقار، ح. ، الطبولوجيا العامة، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، جامعة حلب، ١٩٨١.

ثانياً : المراجع الأجنبية :

3. Bourbaki, N. Topologie Générale, Ch. 3,4, 1971.
4. Long, P.E., An Introduction to General Topology, Charles E. Merrill Pub. Company, 1986.
5. Nagata, J.I., Modern General Topology, North-Holland Pub. Amesterdam, 1974.
6. Schaum's outline Series, Theory and Problems of General Topology, New York , 1965.
7. Willard, S., General Topology, Ed. Wesley, 1997.

تم تدقيق الكتاب علمياً من قبل:

الدكتور	**الدكتور**	**الدكتور**
محمد خير أحمد	حسن نقار	حمدو النجار

المدقق اللغوي

الدكتور حسين الصديق