

الرياضيات والميكانيك والتوازن^(١)





الرياضيات والميكانيك والتوازن^(١)





منشورات جامعة حلب
كلية الهندسة المعمارية

الرياضيات والميكانيك والتوازن (١)

الدكتور المهندس
ضياء موصلي

أستاذ في قسم الهندسة الإنشائية
في كلية الهندسة المدنية

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية
١٤٢٥هـ - ٢٠٠٤م





قسم الرياضيات

الموضوع	وع	رقم الصفحة
المقدمة		13
الفصل الأول: التوابع الحقيقية		19
1-1- التوابع الحقيقية		19
1-1-1- المقادير المتغيرة والثابتة		19
1-1-2- أنواع التوابع		20
1-1-3- التوابع القطعية		21
1-1-4- التوابع العكسية		23
1-1-5- التوابع المثلثية العكسية		24
1-1-6- التوابع القطعية العكسية		24
1-2- النهايات		25
1-2-1- نهاية المقدار الثابت		26
1-2-2- الكميات المتناهية في الصغر		26
1-2-3- الكميات المتناهية في الكبر		27
1-2-4- العلاقة بين الكميات المتناهية في الكبر والكميات المتناهية في الصغر		28
1-2-5- توسيع مفهوم النهاية		28
1-2-6- الخواص الأساسية للكميات المتناهية في الصغر		29
1-2-7- النظريات الأساسية للنهايات		31
1-2-8- الكميات المتناهية في الصغر المتكافئة		32

الموضوع	رقم الصفحة
1-3- مشتقات التوابع	34
1-3-1- نظريات اشتقاق التوابع	34
1-3-2- التوابع اللوغاريتمية	39
1-3-3- مشتقات التوابع اللوغاريتمية	40
1-3-4- مشتقات التوابع العكسية	42
1-3-5- مشتقات التوابع الأسية	43
1-3-6- مشتقات التوابع المثلثية العكسية	43
1-3-7- مشتقات التوابع القطعية	45
1-3-8- مشتقات التوابع القطعية العكسية	46
1-3-9- مشتقات التوابع من المرتبة الثانية والأعلى	
(مشتقات المشتقات)	48
1-3-10- أمثلة محلولة	48
1-3-11- مسائل غير محلولة	64
1-4- التفاضل	66
1-4-1- تفاضل بعض التوابع البسيطة	67
1-4-2- خواص التفاضل	67
1-4-3- أمثلة محلولة على التفاضل	68
1-4-4- التفاضلات المتتالية	69
1-5- مشتقات التوابع الضمنية	69
1-6- مشتقات التوابع المعينة وسيطياً	70
1-7- المشتقات الجزئية والتفاضل الكلي	71
1-8- تعيين الكميات غير المعينة من الشكل $\frac{0}{0}$	73

78	1-9- تعيين الكميات غير المعينة من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$
79	1-10- النهايات غير المعينة بأشكال مختلفة
84	1-11- تمارين غير محلولة على النهايات
86	1-12- السلاسل
86	1-12-1- تعريف السلاسل
87	1-12-2- سلسلة ماكلورين
92	1-12-3- سلسلة تايلور
96	1-12-4- إجراء الحسابات باستخدام السلاسل
98	1-12-5- تمارين غير محلولة على السلاسل
99	الفصل الثاني: التكامل وتطبيقاته الهندسية
99	2-1- التابع الأصلي
100	2-2- التكامل غير المحدود
100	2-3- خواص التكامل غير المحدود
100	2-4- جدول التكاملات
101	2-5- التكامل بتغيير المتحول
101	2-6- أمثلة محلولة على التكامل بتغيير المتحول
115	2-7- تكامل التوابع المثلثية
115	2-7-1- تكامل التوابع المثلثية ذات الأس الفردي
117	2-7-2- تكامل التوابع المثلثية ذات الأس الزوجي
	2-7-3- تكامل التوابع المثلثية التي على شكل جداء قوة زوجية في قوة فردية
118	2-7-4- تكامل جداء التوابع المثلثية ذات الأمثال المختلفة
119	للزوايا

الموضوع	رقم الصفحة
2-7-5- تكامل التوابع الأسية للظل والتظل	119
2-7-6- تكامل بعض التوابع التي تحتوي على الجذور	120
2-8- التكامل بالتجزئة	123
2-9- تمارين غير محلولة على التكامل غير المحدد	131
2-10- التكامل المحدد	135
2-10-1- المفهوم الهندسي للتكامل المحدد	135
2-10-2- خواص التكامل المحدد	136
2-11- طول قوس المنحني المستوي	137
2-12- أمثلة محلولة على التكامل المحدد والتطبيقات الهندسية عليه	138
2-13- تمارين غير محلولة على التكامل المحدد	157
الفصل الثالث : الهندسة التحليلية في الفراغ	161
3-1- معادلة المستوي	161
3-2- الحالات الخاصة لوضع المستوي بالنسبة لمجموعة الإحداثيات	162
3-3- شرط توازي مستويين	163
3-4- شرط تعامد مستويين	165
3-5- الزاوية بين مستويين	166
3-6- المستوي المار بنقطة معطاة والموازي لمستوي معطى بمعادلته	167
3-7- المستوي المار بثلاث نقاط	167
3-8- الأجزاء المقطوعة من المحاور	168
3-9- معادلة المستوي بدلالة نقاط تقاطعه مع المحاور الإحداثية	169

الموضوع	رقم الصفحة
3-10- المستوي المار بنقطتين والعمودي على مستو معطى بمعادلته	171
3-11- المستوي المار بنقطة معطاة والعمودي على مستويين غير متوازيين	172
3-12- نقطة تقاطع ثلاث مستويات	173
3-13- العلاقة المتبادلة بين المستوي وموقع نقطتين بالنسبة له	174
3-14- بعد نقطة عن مستوي	175
3-15- معادلات المستقيم في الفراغ	176
3-16- منحه الاستدلال	177
3-17- المعادلات المتماثلة للمستقيم	179
3-18- معادلة السطح	181
3-19- السطوح الأسطوانية التي تكون رواسمها موازية لأحد محاور الإحداثيات	183
3-20- السطوح الجبرية ورتبتها	185
3-21- الكرة	185
3-22- السطوح الدورانية	187
3-23- تمارين غير محلولة على الفصل الثالث	189

قسم الميكانيك التوازن

الموضوع	رقم الصفحة
الفصل الأول : موجز في المتجهات	195
1-1- المتجه (الشعاع)	195
1-2- الجبر الاتجاهي (الشعاعي)	195
1-2-1- ضرب المتجه وقسمته على عدد ما	195
1-2-2- مسقط نقطة على محور	197
1-2-3- مجموعة الإحداثيات المتعامدة في الفراغ	197
1-2-4- إحداثيات النقطة	198
1-2-5- العمليات المختلفة للمتجهات المعطاة بمركباتها	199
1-2-6- إيجاد المتجه بدلالة متجهي موضع نقطتي بدايته ونهايته	200
1-2-7- الزاوية المحصورة بين محاور الإحداثيات والمتجه	200
1-2-8- الجداء السلمي لشعاعين	201
1-2-9- خواص الضرب السلمي	202
1-2-10- الضرب السلمي بدلالة مركبات المتجهات	202
1-2-11- مجموعة المتجهات الثلاثة المباشرة وغير المباشرة	203
1-2-12- الجداء الاتجاهي لمتجهين	204
1-2-13- خواص الجداء الاتجاهي	205
1-2-14- الجداء الاتجاهي بدلالة مركبات المتجهات	206
1-2-15- الجداء المختلط	206
1-2-16- خواص الجداء المختلط	207
1-3- عزم قوة حول نقطة	208

الموضوع	رقم الصفحة
1-4- عزم قوة حول محور موجه	209
1-5- اختزال جملة قوى فراغية بقوة محصلة وعزم محصل	210
1-6- أمثلة محلولة على الفصل الأول	212
1-7- تمرينات غير محلولة على الفصل الأول	218
الفصل الثاني : الجمل الإنشائية وأنواع القوى التي تخضع لها	219
2-1- مقدمة	219
2-2- المساند المستوية للجمل الإنشائية	220
2-3- المساند المستوية المرنة	227
2-4- أنواع القوى التي تخضع لها الجمل الإنشائية	229
2-5- تصنيف القوى	229
2-5-1- تصنيف القوى حسب طبيعتها	229
2-5-2- تصنيف القوى حسب مدة تأثيرها	232
2-5-3- تصنيف القوى حسب سرعة تطبيقها	233
2-6- أنواع الجمل الإنشائية	234
2-7- الجمل الإنشائية الخطية	234
2-8- استقرار الجمل الإنشائية المستوية	235
2-8-1- الجمل الإنشائية المستوية التي لاتحوي مفاصل داخلية	235
2-8-2- الجمل الإنشائية المستوية التي تحوي مفاصل داخلية	237
2-9- الجمل الإنشائية المستوية المستقرة والمقررة	239
الفصل الثالث : توازن الجمل الإنشائية	243
3-1- مقدمة	243
3-2- إيجاد ردود الأفعال للجمل الإنشائية المستوية	243

الموضوع	رقم الصفحة
3-3- أمثلة محلولة	244
3-3-1- أمثلة محلولة على حساب ردود الأفعال للجوائز	
التي لاتحوي مفاصل داخلية	244
3-3-2- أمثلة محلولة على حساب ردود الأفعال للجوائز	
التي تحوي مفاصل داخلية	249
3-4- مسائل غير محلولة على الفصل الثالث	252
الفصل الرابع: القوى الداخلية في المنشآت	261
4-1- مقدمة	261
4-2- المفهوم العام للقوى الخارجية والداخلية	263
4-3- القوى الداخلية في الجمل المستوية	264
4-3-1- القوى الداخلية الناعمية	265
4-3-2- القوى القاطعة وعزوم الانعطاف الداخلية	271
4-4- العلاقة بين القوة المطبقة والقوى القاطعة وعزم الانعطاف	275
4-5- مفاهيم أساسية لإيجاد ورسم علاقات القوى الداخلية	276
4-6- أمثلة عامة محلولة على الفصل الرابع	288
4-7- مسائل غير محلولة على الفصل الرابع	392
المراجع العربية	409
المراجع الأجنبية	411
المصطلحات العلمية	413

مُقَدِّمَةٌ

تبدو اليوم موضوعات العمارة واسعة الطيف في عالمنا المعاصر، إذ يتداخل في ظلها أكثر من علم وأهمها علوم الرياضيات والميكانيك والتوازن بالإضافة إلى معطيات فنية وفكرية متعددة.

ولقد كان البعض في السابق يعتبر العمارة فناً من الفنون المكانية فقط، وقد بالغ البعض فيعتبرها فناً مجرداً. إلا أن العمارة المعاصرة تنتمي إلى نسق العلوم التطبيقية حيث يتساوى فيها الجانب العلمي التقني مع الجانب الفني الجمالي.

ولا يغيب عن البال أن المعايير الجمالية والمدلولات الرمزية للعناصر المعمارية قد تبدلت مع تبدل وتنوع التصاميم ومع استنباط مواد جديدة للبناء ومع تنوع وتعدد وظيفة المنشأة.

وفي اعتقادي أن الإبداعات المعمارية ذات الاهتمام بالعالم الحسي والذوق البصري والتي تشكل العمارة اليوم أساسها وجغرافيتها لا يمكن أن تتقدم إذا لم تقاطع تضاريسها مع الفنون الجميلة والعلوم التطبيقية.

ومع هذا فيجب ألا ننكر أنه في الأبنية الحجرية القديمة كانت علاقة العمارة بالفراغ كعلاقة الفراغ بالروح تشغله العمارة.

وقد كانت حجارة البناء بمثابة لبنات اجتماعية إذ كان الهدف من تجميعها تحقيق اللقاء والتآلف بين جدرانها وتحت سقفها كما كان الهدف أيضاً تحقيق الحياة الجميلة في ظلها.

ذلك هو الجمال الذي يشع من ثايا حجارة البناء حيث لا يشعر الساكن بالغربة الروحية بل ثمة ألفة تقوم بينه وبينها.

من هنا فإنه يقع على عاتق المهندسين المعماريين أن يستفيدوا من ضوء الشموع التي أضاءها أسلافهم في الماضي وأن يلاتموا بين الإمكانيات الإنشائية والمواد التقنية المستحدثة والعلوم التطبيقية

المتوفرة لديهم فيخلقوا ما يسمى بالعمل المعماري الجديد النابع من روح الفهم العميق للعلوم التطبيقية .
وبقدر ما تكون الدراسة ناضجة فإنها تتيح للمهندس المعماري ، كفنان موهوب ، إطلاق خياله
بالابتكار الخلاق للمنشأ المراد إشادته بحيث يقاوم بصلابته وجماله عوامل الزمن ، مثلما هو كل فن
حقيقي .

لقد حاولت قدر الإمكان شرح فصول هذا الكتاب الذي يترخى كثير من المعلومات
الملائمة لتخصص طلاب الهندسة المعمارية ، وذلك بتوخي طرائق التدريس الحديثة بصناعة المهندسين
المبدعين والتي تأخذ بالاعتبار وجود أنواع عديدة من التفكير ضرورية لهذه الصناعة ، كما تراعي
الحاجة إلى التركيز على تدريب طلبة الهندسة على استخدام المستويات العليا من التفكير العلمي
كالتحليل والتركيب والتقويم ، إذ لا بدّ منها جميعاً لمخلق المهندس المبدع .

ولئن دأبت طرائق التدريس التقليدية القائمة على الحفظ والتلقين على إيصالها إلى الطالب
بالشكل المباشر والحرفي فإن الطرائق الحديثة تعتمد على وضع الطلبة في مواقف تمكنهم من
الوصول إلى هذه الحقائق بذواتهم واكتشافها بأنفسهم . لذا فقد حرصت على إثارة التفكير لدى
الطلبة بأسلوب عرض يعتمد على الربط بين المسائل والأفكار ، الأمر الذي يساعد كثيراً على
إثارة مختلف أنواع التفكير عند الطلبة واستمطارهم أفكاراً جديدة بحيث يتحقق معهم مبدأ
التعلم الذاتي القائم على تنشيط التفكير وعلى تنمية المهارات فيصبح ذلك من ممارستهم العفوية
الدائمة .

إن الغاية الرئيسية من تدريس الرياضيات والميكانيك والتوازن للمهندس المعماري هي
إعطائه الأسس الأولية ليتمكن من متابعة المواد الإنشائية التي سيدرسها في السنوات المقبلة ، تلك
المواد التي سيستشف منها كم يجب أن تكون أبعاد العناصر الإنشائية وكيفية توزيعها ، والتي
تُنمي قدرته عامة على الحس والاستشفاف الهندسي .

يتضمن منهاج الرياضيات والميكانيك والتوازن قسمين : الأول قسم الرياضيات والثاني

قسم الميكانيك والتوازن .

القسم الأول يعرض بشكل موجز التوابع الحقيقية من حيث اشتقاقها وتفاضلها ونهاياتها ونشرها وتكاملها ويحتتم بموجز عن الهندسة التحليلية في الفراغ . وقد اختيرت له أمثلة محلولة لتطبيقات هندسية ثلاث متطلبات الهندسة المعمارية .

أما القسم الثاني : "الميكانيك والتوازن" فقد تضمن شرحاً موجزاً عن المتجهات والعمليات الجبرية عليها ، ثم عرضاً للجمل الإنشائية المستوية من حيث توازنها واستنادها والحمولات التي تخضع لها والقوى الداخلية التي تؤثر فيها . وقد تضمنت فصوله عدداً كبيراً من الأمثلة التي تساعد الطالب حين يسعى إلى حلها على اكتساب الثقة بنفسه وتبني له أساساً للتحليل الإنشائي المعماري .

هذا ولقد عرضت مواضيع الكتاب على نحو مبسط ولجأت إلى عرض الأفكار الرياضية والميكانيكية برسوم توضيحية منسجمة مع الطبيعة المعمارية ، كما حاولت قدر المستطاع أن أصيغ هذا الكتاب بالصيغة المعمارية من حيث الأمثلة والأشكال مع تجنب الدخول في التعقيدات ليتلاءم مع الهدف من تدريسه لطلاب الهندسة المعمارية ، وبحيث يكون المهندس المعماري فناناً بخيال وواقعية .

فأرجو الله أن أكون قد وفقت في عرض أبحاث هذا الكتاب .

المؤلف : د. ضياء موطلي

UNIVERSITY
OF
ALEPPO







الفصل الأول

التوابع الحقيقية

1-1- التوابع الحقيقية

1-1-1- المقادير المتغيرة والثابتة :

المقدار المتغير هو ذلك المقدار الذي يمكن أن يأخذ قيماً مختلفة ضمن شروط المسألة المطروحة. وبمعكس المقدار المتغير فإن المقدار الثابت هو الذي يحافظ على نفس قيمته، ضمن شروط المسألة المطروحة. هذا ويمكن أن يكون المقدار نفسه مقداراً ثابتاً بالنسبة لإحدى المسائل ومتغيراً بالنسبة لمسألة أخرى.

مثلاً : إن طول قضيب معدني هو مقدار متغير إذا أخذت مسألة درجة الحرارة في الاعتبار ، إذ إن كل درجة حرارة يتواجد فيها هذا القضيب تقابلها قيمة محددة لطوله . وكذلك فإن مساحة الدائرة مقدار متغير تبعاً لنصف قطرها لأن كل قيمة لنصف القطر تقابلها قيمة معينة لمساحة الدائرة .

ولو نظرنا إلى القطع المكافئ المعروف بمعادلته الديكارتية

$$y^2 = 2Px$$

فإن الإحداثيين x, y هما مقداران متغيران كل منهما تبعاً للآخر أما P فهو مقدار ثابت، هذا بفرض أننا ندرس قطعاً مكافئاً واحداً فقط . أما إذا درسنا مجموعة من القطوع المكافئة ذات المحاور المشتركة Ox والرؤوس المشتركة O فإن P يكون مقداراً متغيراً بحسب شكل ومدى انفتاح منحنى القطع .

تعريف (1) : يسمى المقدار y تابعاً للمتحول x إذا كان لكل قيمة يمكن أن تأخذها x قيمة مقابلة أو عدة قيم معينة لـ y .

هذا ويسمى المقدار المتغير x بالمتحول المستقل .

ويُقال كذلك إن المقدار y يعتمد على المقدار x أو يتبعه ، ووفقاً لهذا يسمى المقدار x بالمتحول المستقل ويسمى y بالتابع المتغير .

تعريف (2) : إذا كانت لكل قيمة من قيم المتحول المستقل قيمة واحدة فقط مناظرة لها من قيم التابع فإن التابع يسمى أحادي القيم، أما إذا كانت هناك قيمتان أو أكثر مقابل قيمة واحدة للمتحول فإن التابع يسمى بمتعدد القيم (ثنائية القيم وثلثي القيم وهكذا) .

وكمثال على ذلك نفرض أننا قذفنا جسماً ما إلى الأعلى وإن S هو مقدار ارتفاعه عن سطح الأرض في كل لحظة وأن t يمثل الزمن الذي مر منذ لحظة القذف.

من الواضح أن المقدار S تابع للمتغير المستقل t وذلك لأن الجسم يكون في كل لحظة خلال حركته على ارتفاع معين ومختلف من لحظة لأخرى . ويكون t بدوره متحولاً مستقلاً لـ S . ولما كان كل ارتفاع يصل إليه الجسم تناظره قيمتان من قيم t (واحدة أثناء ارتفاع الجسم والأخرى أثناء هبوطه) . ففي هذا المثال تكون S تابعاً أحادي القيم للمتحول المستقل t بينما تكون t تابعاً ثنائي القيم للمتحول المستقل S .

1-1-2- أنواع التوابيع :

بصورة عامة، نرمز للعلاقة التي تعطينا قيمة التابع y بدلالة المتحول المستقل x بالرمز :

$$y = f(x)$$

حيث هناك توابيع أحادية القيمة وتوابيع متعددة القيمة ، كما ذكرنا سابقاً ، ونميز أيضاً الأنواع التالية :

- **التابع الزوجي :** وهو التابع الذي لا تتغير قيمته إذا أبدلنا قيمة المتحول x المناظرة لها $-x$.

ويمكن التعبير عن هذا بـ $f(x) = f(-x)$

وكمثال على ذلك التابع :

$$y = x^2$$

إذن من الواضح أن

$$x^2 = (-x)^2$$

- **التابع الفردي :** هو التابع الذي إذا غيرنا قيمة المتحول x بـ $-x$ نحصل على قيمتين

متعاكستين للتابع أي :

$$f(x) = -f(-x)$$

وكمثال على ذلك $y = x^5$

- التابع الصريح والتابع الضمني .

التابع الصريح هو كل تابع محلول بالنسبة لقيمة المتحول x .

$$y = x^3 + x^2 + 2 \quad \text{مثال :}$$

أما التابع الضمني فهو التابع y المعين قيمته بمعادلة غير محلولة بالنسبة للمتحول x

$$y^3 + yx + 2x = 0 \quad \text{مثال :}$$

- التابع الدوري : يكون التابع $f(x)$ دورياً ودوره T فيما إذا تحققت العلاقة :

$$\forall x \quad f(x) = f(x + T)$$

- التوابع التركيبية : إذا كنا ندرس تابعين أو عدة توابع والتي يمكن أن تكون مختلفة عن بعضها فإننا نستخدم - لكي نميزها عن بعضها - بالإضافة إلى الرمز $f(x)$ رموزاً أخرى مثل $\phi(x)$, $F(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ وغيرها .

وكأمثلة :

1- تعني العلاقة $f(x) = \ln x$ إن التابع $f(x)$ لوغاريتمي .

2- تعني العلاقة $\phi(x) = x^n$ إن التابع $\phi(x)$ تابع أسّي .

3- تعني العلاقة $F(x) = \phi(x) + f(x)$

إن التابع $F(x)$ عبارة عن مجموع التابعين $\phi(x)$ و $f(x)$ وإذا كان :

$$\phi(x) = x^n$$

$$f(x) = \ln x$$

$$F(x) = x^n + \ln x$$

فإن :

3-1-1- التوابع القطعية :

سنأخذ بعين الاعتبار في هذه الفقرة بعض التشكيلات من e^x , e^{-x} والتي تدعى

بالتوابع القطعية الزائدية . إن هذه التشكيلات نصادفها غالباً في المسائل الهندسية ولها

فائدة كبيرة في التطبيقات المتعلقة بالشد عند مختلف نقاط التعليق في المنشآت المعلقة .

إن التابعين الرئيسيين من هذه التوابع القطعية الزائدية المعرفين بدلالة التوابع الأسية هما :

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

وتسميان بالجيب القطعي الزائدي (sh) والتجيب القطعي الزائدي (ch) . وإن تسميتهما بهذا الاسم المشابه للتوابع المثلثية تعود لامتلاكهما بعض الخواص المشابهة لخواص الجيب والتجيب .

لنتفحص المنحني الذي معادلته الوسيطة التالية :

$$x = \operatorname{ch} t$$

$$y = \operatorname{sh} t$$

فيكون :

$$x^2 - y^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t$$

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{4}(e^{2t} + 2 + e^{-2t}) - \frac{1}{4}(e^{2t} - 2 + e^{-2t})$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

أي إن العلاقات السابقة تعطي تمثيلاً وسيطياً للفرع الأيمن من القطع الزائد :

$$x^2 - y^2 = 1$$

وبالمثل فإن :

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

تعطي تمثيلاً وسيطياً للدائرة :

$$x^2 + y^2 = 1$$

ومن هنا جاء التشابه بين الجيب والتجيب المثلثي مع الجيب والتجيب القطعي

الزائدي .

اعتماداً على تعريف الجيب والتجيب القطعي :

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

يكون لدينا الظل القطعي :

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

بالجمع نجد :

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$$

وبالطرح نجد :

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$$

وبضرب العلاقتين السابقتين نجد :

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

أما قوانين التحويل فنترك للطالب استنتاجها .

4-1-1- التوابع العكسية :

ليكن لدينا العلاقة :

$$y = f(x)$$

في هذه العلاقة x تمثل المتحول و y التابع، بينما يمكن اعتبار y كمتحول فتصبح x

تابعاً . وعندئذ نحل العلاقة السابقة بالنسبة لـ x ولنفرض أننا حصلنا على العلاقة :

$$x = \phi(y)$$

نسمي هذه العلاقة بالتابع العكسي .

وكمثال على ذلك لتكن العلاقة :

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$$

بتربيع الطرفين نحصل :

$$y^2 = \frac{1}{x}$$

وبالتالي فإن :

$$x = \frac{1}{y^2} = \phi(y)$$

وهو التابع العكسي .

5-1-1- التوابع المثلثية العكسية :

التابع العكسي للتابع : $y = \sin x$ هو $x = \arcsin y$

ويقرأ x تساوي القوس التي جيبها y . وهي معرفة لجميع قيم y التي تكون بقيمتها المطلقة أقل من الواحد أي ضمن المجال $-1 \leq y \leq 1$.

وبتعريف مماثل يكون التابع العكسي للتجيب والظل :

$$x = \arccos y$$

$$x = \operatorname{arctg} y$$

6-1-1- التوابع القطعية العكسية :

$$y = \operatorname{sh} x$$

التابع العكسي للتابع

$$x = \operatorname{arg sh} y$$

هو

وبتعريف مماثل يكون التابع العكسي للتجيب والظل القطعي :

$$x = \operatorname{arg ch} y$$

$$x = \operatorname{arg th} y$$

$$x = \operatorname{th} y$$

كذلك بفرض :

فإن :

$$y = \operatorname{arg th} x = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

2-1- النهايات :

إن لطرق النهايات أهمية عظيمة في دراسة حساب التفاضل والتكامل وإن فهمها ذو أهمية أساسية في تحليل مواضيع كثيرة في ميداني التفاضل والتكامل .

يسمى العدد b بنهاية التابع $f(x)$ عندما $x \rightarrow a$ (ونقرأ عندما تنتهي x إلى a) إذا ما تحقق الشرط التالي : كلما ازداد اقتراب x إلى a (من اليسار أو اليمين) فإن قيمة التابع $f(x)$ تقترب أكثر فأكثر إلى القيمة b ويكتب ذلك على الصورة :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

يفترض أن التابع $f(x)$ معرف ضمن مجال يحتوي على النقطة $x = a$ (أي في جميع النقط التي على يسار a وعلى يمينها) وأما في نفس النقطة $x = a$ فقد يكون التابع معرفاً وقد لا يكون .

لنأخذ مثلاً التابع :

$$f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$$

إن هذا التابع معرف في جميع النقط ماعدا عند النقطة $x = 0,5$.

فلنأخذ مثلاً $x = 6$ وعندئذ يكون :

$$f(x) = \frac{4(6)^2 - 1}{(2)(6) - 1} = 13$$

وكلما اقتربت x من القيمة 6 (من اليسار أو من اليمين) فإن البسط $4x^2 - 1$ يقترب أيضاً إلى القيمة 143 وتقترب قيمة المقام إلى 11 ويؤول الكسر كله إلى 13 .

فالعدد 13 (الذي يساوي قيمة التابع عندما $x = 6$) هو في نفس الوقت نهاية التابع $f(x)$ عندما تنتهي x إلى 6 .

لنعد إلى نفس التابع السابق ولنعتبر $x = \frac{1}{2}$ فنرى أن التابع $f(x)$ هنا غير معرف

إذ تعطي العلاقة عبارة غير محددة $\frac{0}{0}$.

ولكن نهاية التابع عندما تنتهي $x \rightarrow 0.5$ موجودة وهي تساوي 2 وفي الواقع تكون

العلاقة :

$$\frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{2x - 1} = 2x + 1$$

غير معرفة عندما تكون x مساوية 0,5 ولكن عندما تقترب x إلى 0,5 فإن التابع يكون معرفاً تماماً ويساوي دائماً $2x + 1$ وتؤول العبارة الأخيرة إلى العدد 2 .

وعليه فإن :

$$\lim_{x \rightarrow 0.5} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2$$

1-2-1- نهاية المقدار الثابت :

تعريف : نهاية المقدار الثابت b هو المقدار الثابت b نفسه ويتفق هذا التعريف مع ما أوردناه سابقاً في تعريف النهاية إذ إن المقدار $|b - b| = 0$ أصغر من أي عدد صغير موجب ε .

1-2-2- الكميات المتناهية في الصفر :

إن الكمية التي تكون لها نهاية مساوية للصفر تسمى كمية متناهية في الصفر وكمثال على ذلك التابع $x^2 - 4$ فهو يمثل كمية متناهية في الصفر عندما تنتهي $x \rightarrow 2$ أو $x \rightarrow -2$ ، أما عندما تنتهي $x \rightarrow 1$ فإن التابع نفسه لا يكون متناهياً في الصفر .

وكمثال آخر التابع $1 - \cos \alpha$

فهو كمية متناهية في الصفر عندما تنتهي $\alpha \rightarrow 0$ ذلك لأن :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 - \cos \alpha) = 0$$

ويقال كذلك إن الكمية $1 - \cos \alpha$ متناهية في الصفر عندما تكون α متناهية في

الصفر .

$$\frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$$

فليست متناهية في الصفر عندما تنتهي $x \rightarrow 0.5$ ذلك لأن نهايتها تساوي 2 .

وأما الكمية

$$\lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} - 2$$

فهي كمية متناهية في الصفر عندما $x \rightarrow 0,5$

ملاحظة (1) بحسب التعريف الذي يسمى العدد b نهاية المقدار y فإن الفرق $(y-b)$ هو كمية متناهية في الصفر .

ملاحظة (2) : الصفر هو الكمية الوحيدة من بين الكميات الثابتة التي تعتبر كمية متناهية في الصفر.

3-2-1- الكميات المتناهية في الكبر :

يُقال للكمية المتغيرة التي تزداد قيمتها المطلقة بلا حدود، إنها كمية متناهية في الكبر.

وكمثال على ذلك التابع $\frac{1}{x}$ هي كمية متناهية في الكبر عندما تكون x متناهية في الصفر وذلك لأنه كلما اقتربت x من الصفر فإن القيمة المطلقة للمقدار $\frac{1}{x}$ تزداد بلا حدود.

كذلك فإن التابع $\tan x$ كمية متناهية في الكبر عندما تنتهي $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

يجب الإشارة هنا إلى أنه ليست هناك أية كمية ثابتة تكون بحد ذاتها كمية متناهية في الكبر.

ملاحظة : تعني العبارة (القيمة المطلقة للمقدار y تزداد بلا حدود) أن $|y|$ أكبر من أي عدد موجب معطى مسبقاً مهما كان كبيراً .

ووفقاً لهذا المفهوم نعرف بدقة الكمية المتناهية في الكبر بالشكل الآتي :

تعريف (1) : يعتبر التابع y كمية متناهية في الكبر إذا أصبحت القيمة المطلقة للعدد y_n عندما $x = n$ أكبر من أي عدد موجب M مهما كان هذا العدد كبيراً .

تعريف (2) : يكون التابع $f(x)$ كمية متناهية في الكبر عندما تنتهي $x \rightarrow a$ إذا أصبحت القيمة المطلقة للتابع $f(x)$ أكبر من أي عدد موجب M مهما كان كبيراً بمجرد أن تصبح القيمة المطلقة للفرق بين x و a أقل من عدد موجب محدد ε وصغير بقدر ما يُراد أي :

$$|x - a| < \varepsilon$$

1-2-4- العلاقة بين الكميات المتناهية في الكبر والكميات المتناهية في الصغر :

إذا كانت y كمية متناهية في الكبر فإن $\frac{1}{y}$ كمية متناهية في الصغر وإذا كانت y

كمية متناهية في الصغر فإن $\frac{1}{y}$ كمية متناهية في الكبر .

مثال (1) : الكمية $\frac{3}{x-2}$ متناهية في الكبر عندما تنتهي $x \rightarrow 2$ ومن الواضح أن الكسر العكسي $\frac{x-2}{3}$ متناه في الصغر عندما تنتهي $x \rightarrow 2$.

مثال (2) : الكمية $\tan \alpha$ متناهية في الصغر عندما تنتهي $x \rightarrow 0$ وأما الكمية :

$$\frac{1}{\tan \alpha} = \cot \alpha$$

فهي متناهية في الكبر عندما تنتهي $x \rightarrow 0$

1-2-5- توسيع مفهوم النهاية :

إذا كانت الكمية المتغيرة S متناهية في الكبر ، فيقال عندئذ إن S تسعى إلى اللانهاية ويكتب ذلك بالشكل :

$$\lim S \rightarrow \infty \quad \text{أو} \quad S \rightarrow \infty$$

إذا بقيت كمية ما متناهية في الكبر موجبة اعتباراً من قيمة ما فيقال عندئذ إنها تسعى إلى اللانهاية الموجبة وتكتب بالشكل :

$$S \rightarrow +\infty$$

وإذا بقيت كمية ما متناهية في الكبر سالبة اعتباراً من قيمة ما فيقال عندئذ إنها تسعى إلى اللانهاية السالبة وتكتب بالشكل :

$$S \rightarrow -\infty$$

ولزيادة الوضوح في التعبير، كثيراً ما تكتب بالشكل :

$$S \rightarrow \mp\infty$$

وكمثال على ذلك التابع $\cot g x$ إذ يمكنه عندما $x \rightarrow 0$ أن يأخذ قيماً موجبة (عندما تكون $x > 0$) وكذلك قيماً سالبة (عندما تكون $x < 0$) وبالتالي يكون :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cot g x = \mp\infty$$

وكمثال آخر يمكننا أن نكتب :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$$

أو :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = \infty$$

أما شكل الكتابة الثانية فتبقي السؤال مطروحاً حول إشارة التابع 2^x وبدون إجابة. ولكن لا يصح في الطرف الأيسر كتابة $x \rightarrow \infty$ بدل $x \rightarrow +\infty$ إذ يحتوي شكل الكتابة $x \rightarrow \infty$ على تلك الحالة التي تنتهي فيها $x \rightarrow -\infty$ وعندئذ لا ينتهي التابع 2^x إلى ما لانهاية بل ينتهي إلى الصفر أي أن :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

ملاحظة : ليس للكمية المتناهية في الكبر ، نهاية بالمفهوم الذي ذكرناه سابقاً إذ لا يصح القول مثلاً بأن (الفرق بين $f(x)$ و ∞ يبقى أصغر من أي عدد موجب مهما كان صغيراً) .

وهكذا نرى أن إدخال مفهوم النهاية غير النهائية (غير المحدودة) توسع مفهوم النهاية. وللتمييز عن (النهاية غير المحدودة) يقال للنهاية المعرفة سابقاً إنها نهاية (محدودة) .

6-2-1- الخواص الأساسية للكميات المتناهية في الصغر :

يفترض في هذه الفقرة أن تكون الكميات التي ندرسها هي توابع لمتحول وحيد .

نظرية (1) : حاصل جمع كميتين أو ثلاث كميات أو أي عدد من الكميات المتناهية في الصفر هو كمية متناهية في الصفر .

ملاحظة (1) : إذا لم يكن عدد الحدود المجتمعة ثابتاً بل يتغير كلما تغير المتحول المستقل، فمن الممكن عندئذ ألا تصح النظرية (1) .

فمثلاً لو كان لدينا مجموع n من الحدود التي يساوي كل منها $\frac{1}{n}$ فإن قيمة

المجموع $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}$ الذي عدد حدوده n تساوي الواحد، وعندما تنتهي $x \rightarrow \infty$

يكون كل حد على حدة كمية متناهية في الصفر ولكن حاصل الجمع يبقى مساوياً للواحد .

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right) n = 1$$

ملاحظة (2) : الفرق بين كميتين متناهيتين في الصفر هو كمية متناهية في الصفر .

نظرية (2) : حاصل ضرب كمية محدودة في كمية متناهية في الصفر هو كمية متناهية في الصفر .

وكحالة خاصة فإن حاصل ضرب كمية ثابتة في كمية متناهية في الصفر هو كمية متناهية في الصفر، وكذلك فإن جداء كميتين متناهيتين في الصفر هو كمية متناهية في الصفر .

نظرية (3) : وعليه فإن ناتج قسمة كمية متناهية في الصفر على كمية ثابتة غير الصفر هو كمية متناهية في الصفر .

ملاحظة (3) : إذا كانت نهاية المقسوم عليه مساوية للصفر، أي إذا كان كل من المقسوم والمقسوم عليه متناهيتين في الصفر، فمن الممكن عندئذ ألا يكون خارج القسمة كمية متناهية في الصفر، فمثلاً الكميتان x^2 و x^3 متناهيتان في الصفر عندما تنتهي $x \rightarrow 0$ وناتج القسمة $\frac{x^3}{x^2} = x$ كمية متناهية في الصفر كذلك ، ولكن ناتج القسمة $\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$ كمية

متناهية في الكبر .

الكميتان $2x^2$, $6x^2 + x^3$ متناهيان في الصفر عندما تنتهي $x \rightarrow 0$ بينما نهاية ناتج القسمة:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 + x^3}{2x^2} = 3$$

7-2-1- النظريات الأساسية للنهايات :

يفترض في هذه الفقرة أن جميع الكميات المعطاة (الحدود ، المضروب والمضروب فيه ، المقسوم والمقسوم عليه) تعتمد على نفس المتحول المستقل x ولها نهايات محدودة (عندما تنتهي $x \rightarrow a$ أو عندما تنتهي $x \rightarrow \infty$).

نظرية (1) : نهاية حاصل جمع حدين أو ثلاثة أو أي عدد من الحدود يساوي حاصل جمع نهايات الحدود كل على حدة .

وباختصار فإن : نهاية المجموع تساوي مجموع النهايات :

$$\lim(u_1 + u_2 + \dots + u_k) = (\lim u_1 + \lim u_2 + \dots + \lim u_k)$$

يفهم من إشارة $\lim$ في هذه الحالة أن $x \rightarrow a$ أو $x \rightarrow \infty$.

حالة خاصة من النظرية (1) :

$$\lim(u_1 - u_2) = \lim u_1 - \lim u_2$$

نظرية (2) : نهاية جداء حدين أو ثلاثة أو أي عدد من الحدود يساوي ضرب نهايات هذه الحدود .

$$\lim(u_1 u_2 \dots u_k) = \lim u_1 \times \lim u_2 \dots \lim u_k$$

وعليه فإن نهاية جداء عدد ثابت بحد هو جداء هذا الثابت c بنهاية الحد أي وضع العدد الثابت خارج إشارة النهاية أي :

$$\lim c \times u = \lim c \times \lim u = c \lim u$$

$$\lim c = c$$

لأن

نظرية (3) : نهاية ناتج القسمة تساوي ناتج قسمة النهايات إحداها على الأخرى بشرط ألا تكون نهاية المقسوم عليه مساوية للصفر أي :

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v} \quad (\lim v \neq 0 \text{ بشرط})$$

مثال (1) :

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+4}{x-2} = \frac{\lim(x+4)}{\lim(x-2)} = 3$$

إذا كانت نهاية المقسوم عليه مساوية للصفر، وكانت نهاية المقسوم لاتساوي صفراً فإن لخارج القسمة نهاية غير محددة .

مثال (2) :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x-2} = \infty$$

في هذه الحالة :

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x+4) = 6 \neq 0$$

8-2-1- الكميات المتناهية في الصفر المتكافئة :

تعريف : يقال لكميتين متناهيتين في الصفر إنهما متكافئتان إذا كانت نهاية النسبة بينهما تساوي الواحد .

مثال (1) : الكميتان x و $\sin x$ المتناهيتان في الصفر عندما تنتهي $x \rightarrow 0$ متكافئتان .

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1$$

والكميتان $2x$ و $\sin 2x$ متكافئتان كذلك والكميتان x^2 و $\sin^2 x$ متكافئتان أيضاً

مثال (2) : الكميتان المتناهيتان في الصفر :

$$a^2 + 3a^3$$

$$a^2 - 4a^3$$

عندما تنتهي $a \rightarrow 0$ متكافئتان لأن :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2 + 3a^3}{a^2 - 4a^3} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 + 3a}{1 - 4a} = 1$$

ويرمز لتكافؤ كميتين متناهيتين في الصفر بنفس الرمز $\approx$ الذي يرمز به للمساواة التقريبية فمثلاً نكتب :

$$\sin x \approx x , \sin 2x \approx 2x , \sin^2 x \approx x^2$$

$$a^2 + 3a^3 \approx a^2 - 4a^3$$

ملاحظة : الكميات المتكافئة هي في واقع الأمر كميات متساوية تقريباً (وتكون المساواة أكثر دقة ، كلما اقتربت الكميات المتكافئة من الصفر). فمثلاً عندما تكون $a = 0.01$ فإن الكمية $a^2 + 3a^3$ تساوي 0.000103 والكمية $a^2 - 4a^3 = 0.000096$ والفرق بينهما هو 0.000007 أي حوالي 7% من كل من الكميتين المتكافئتين.

ولكن هذه النسبة المئوية تصغر كلما اقتربت قيم الكميتين المتكافئتين من الصفر .
نظرية : لانتغير نهاية خارج قسمة (نسبة) كميتين متكافئتين إذا أبدلنا إحداهما أو كليهما بكمية مكافئة لها .

مثال (3) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

أوجد

نعوض عن $\sin 2x$ بالكمية $2x$ فنحصل على :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$$

مثال (4) :

أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

مثال (5) :

أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

لدينا :

وبما أن :

$$\sin^2 \frac{x}{2} \approx \left(\frac{x}{2} \right)^2$$

إذن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{x}{2} \right)^2}{x} = 0$$

1-3- مشتقات التوابع :

تعريف : يسمى مشتق التابع $f(x)$ في النقطة x نهاية النسبة بين التغير في التابع $f(x)$ وبين التغير في المتحول x عندما يؤول تغير المتغير إلى الصفر .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

إذا وجد المشتق لجميع قيم x في منطقة تحديد التابع $y = f(x)$ فهو أيضاً عبارة عن تابع جديد للمتغير x ويسمى بمشتق التابع بالنسبة لـ x . ويرمز له عادة برمز التابع الأصلي وفوقه إشارة الفتحة كما هو معروف . فيرمز لمشتق y بـ y' ويرمز لمشتق $f(x)$ بـ $f'(x)$.

ومن وجهة النظر الفيزيائية فإن مشتق التابع $f(x)$ في النقطة x هو عبارة عن معدل تغير التابع $f(x)$ بالنسبة لتغير المتحول عند القيمة المحددة x للمتحول .

1-3-1- نظريات اشتقاق التوابع :

سنتطرق بإيجاز لنظريات اشتقاق التوابع الأولية نظراً لأن الطالب قد سبق أن درسها في السنوات السابقة . أما اشتقاق سائر التوابع فسنتناولها بالتفصيل .

نظرية (1) : مشتق المقدار الثابت يساوي الصفر .

نظرية (2) : مشتق المتغير المستقل الأسّي يساوي الأس مضروباً في المتغير المستقل مرفوعاً إلى أس أقل من الأس الأصلي بالمقدار 1 .

أي إذا كان :

$$y = x^n$$

فإن :

$$y' = (x^n)' = nx^{n-1}$$

مثال : ليكن التابع $y = \sqrt[3]{x^2}$ الذي يمكن كتابته بالشكل :

$$y = x^{\frac{2}{3}}$$

فمشتقه هو :

$$y' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

نظرية (3) : مشتق جداء مقدار ثابت في تابع معين يساوي جداء هذا المقدار الثابت في مشتق التابع .

مثال : أوجد مشتق التابع :

$$y = \frac{4}{\sqrt{x}}$$

$$y' = \left(4x^{-\frac{1}{2}} \right)' = -2x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{x^3}} = -\frac{2}{x\sqrt{x}}$$

نظرية (4) : مشتق المجموع الجبري لعدة توابع يساوي المجموع الجبري لمشتقات هذه التوابع.

مثال : ليكن التابع

$$y = \frac{3}{x^2} - \sqrt{x} + 7$$

الذي يكتب بالشكل :

$$y = 3x^{-2} - x^{\frac{1}{2}} + 7$$

فمشتقه هو :

$$y' = -6x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\left(\frac{6}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

نظرية (5) : مشتق جداء تابعين يساوي جداء مشتق الأول في الثاني زائداً مشتق الثاني في

الأول. أي إذا كان : $y = uv$

حيث يمثل كل من u و v بحد ذاته تابعاً للمتحول x .

فإن مشتق الجداء y بالنسبة لـ x هو :

$$y' = u'v + v'u$$

مثال : ليكن التابع :

$$y = (2x^2 + 3x)(3 - 2x)$$

فمشتقه هو :

$$\begin{aligned} y' &= (2x^2 + 3x)'(3 - 2x) + (3 - 2x)'(2x^2 + 3x) \\ y' &= (4x + 3)(3 - 2x) - 2(2x^2 + 3x) \end{aligned}$$

وبالإصلاح نجد :

$$y' = 3(3 - 4x^2)$$

نظرية (6) :

مشتق جداء عدد n من التوابع يساوي مجموع عدد n من الحدود الناتجة على

التوالي عن ضرب مشتق كل من هذه التوابع في سائر التوابع الباقية أي :

$$(u_1 \cdot u_2 \dots u_n)' = u_1' \cdot u_2 \dots u_n + u_2' \cdot u_1 u_3 \dots u_n + \dots + u_n' \cdot u_1 u_2 \dots u_{n-1}$$

نظرية (7) : مشتق كسر يساوي كسراً بسطه مشتق البسط الأصلي مضروباً في المقام ناقصاً

مشتق المقام مضروباً في البسط ، ومقامه عبارة عن مربع مقام الكسر الأصلي .

أي إذا كان :

$$y = \frac{u}{v}$$

فإن :

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

مثال : ليكن التابع :

$$y = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 7}$$

فمشتقه هو :

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2 + 7)'(x^2 - 7) - (x^2 - 7)'(x^2 + 7)}{(x^2 - 7)^2} \\ y' &= \frac{2x(x^2 - 7) - 2x(x^2 + 7)}{(x^2 - 7)^2} \\ y' &= \frac{-28x}{(x^2 - 7)^2} \end{aligned}$$

نظرية (8) :

إذا كان y تابعاً للمتحول u وكان المتحول u بدوره تابعاً للمتحول x فإن مشتق التابع y بالنسبة لـ x يساوي جداء مشتق y بالنسبة لـ u في مشتق u بالنسبة لـ x أي :

إذا كان $y = f(u)$ حيث u تابع لـ x

فإن المشتق y'_x بالنسبة لـ x هو :

$$y'_x = f'_u(u) u'_x$$

مثال :

ليكن التابع :

$$y = (ax + b)^n$$

بفرض $u = ax + b$ نجد أن :

$$y = u^n$$

ويكون المشتق :

$$y'_x = n u^{n-1} u'_x$$

أي :

$$y' = n(ax + b)^{n-1} (ax + b)'$$

$$y' = an(ax + b)^{n-1}$$

نظرية (9) :

مشتقات التوابع المثلثية هي :

$$y = \sin u$$

$$y' = u' \cos u$$

$$y = \cos u$$

$$y' = -u' \sin u$$

$$y = \tan u$$

$$y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$y = \cot u$$

$$y' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

أمثلة :

1- أوجد مشتق التابع :

$$y = \cot g \frac{2}{x}$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 \frac{2}{x}} \left(\frac{2}{x} \right)' = -\frac{1}{\sin^2 \frac{2}{x}} \left(-\frac{2}{x^2} \right)$$

$$y' = \frac{2}{x^2 \sin^2 \frac{2}{x}}$$

2- أوجد مشتق التابع :

$$y = \frac{1}{4} \sin^4 2x$$

$$y = \frac{1}{4} (\sin 2x)^4$$

$$y' = \frac{1}{4} 4 (\sin 2x)^3 (\sin 2x)'$$

فيكون :

$$y' = 2 \sin^3 2x \cos 2x = \sin^2 2x \sin 4x$$

3- أوجد مشتق التابع :

$$y = \sqrt{1 - \tan^2 x}$$

$$y = (1 - \tan^2 x)^{1/2}$$

$$y' = \frac{1}{2} (1 - \tan^2 x)^{-1/2} [1 - (\tan x)^2]'$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1 - \tan^2 x}} (-2 \tan x) (\tan x)'$$

$$y' = -\frac{\tan x}{\sqrt{1 - \tan^2 x} \cos^2 x}$$

2-3-1- التوابع اللوغاريتمية :

ليكن التابع $x = a^y$ حيث a عدد ثابت يسمى الأساس .

فيكتب التابع العكسي له بالصورة $y = \log_a x$

ويسمى بالتابع اللوغاريتمي وتسمى y أيضاً بلوغاريتم العدد x للأساس a والأساس وبحسب خواص الأسس فإن $a > 0$ ، $a \neq 1$ ، $x > 0$ لكي يكون التابع معيناً .

إذا كان الأساس $a = 10$ فيسمى اللوغاريتم باللوغاريتم العشري ويرمز له بالرمز $\lg x$ دون الإشارة إلى الأساس .

$$\log_{10} x = \lg x$$

أما إذا كان الأساس هو العدد e فيسمى اللوغاريتم باللوغاريتم الطبيعي أو (النبيري) ويرمز له بالرمز $\ln$ دون الإشارة إلى الأساس e .

أي نكتب :

$$\log_e x = \ln x$$

أما العلاقة بين قيمتي اللوغاريتم العشري $\lg$ واللوغاريتم الطبيعي $\ln$ لنفس العدد (N) فهي :

$$\ln N = \lg N \frac{1}{\lg e} = (\lg N)(\ln 10)$$

وهي تسمح بتحويل قيمة أحد اللوغاريتمين إلى الآخر .

3-3-1- مشتقات التوابع اللوغاريتمية :

إن مشتق التابع اللوغاريتمي :

$$y = \ln u$$

حيث u تابع بحد ذاته للمتحول x هو :

$$y' = \frac{u'}{u}$$

$$y = \log_a u$$

أما مشتق التابع

$$y' = \frac{u'}{u \ln a}$$

فهو :

مثال (1) :

أوجد مشتق التابع :

$$y = \log_a (x^2 + 4)$$

$$y' = \frac{1}{(x^2 + 4) \ln a} (x^2 + 4)'$$

$$y' = \frac{2x}{(x^2 + 4) \ln a}$$

مثال (2) :

أوجد مشتق التابع :

$$y = \ln (x^2 + 4)^2$$

$$y = 2 \ln(x^2 + 4)$$

$$y' = 2 \frac{1}{x^2 + 4} (x^2 + 4)' = \frac{4x}{x^2 + 4}$$

مثال (3) : أوجد مشتق التابع :

$$y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$$

بأخذ لوغاريتم الجذر التربيعي والكسر نحصل على :

$$y = \frac{1}{2} \ln(1 + \sin x) - \frac{1}{2} \ln(1 - \sin x)$$

$$y' = \frac{1}{2} \frac{\cos x}{(1 + \sin x)} - \frac{1}{2} \frac{(-\cos x)}{(1 - \sin x)}$$

$$y' = \frac{\cos x}{2} \left(\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x} \right)$$

$$y' = \frac{\cos x}{2} \frac{2}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{\cos x}$$

كما أنه يمكن حل هذا المثال بطريقة أخرى باستخدام قوانين حساب المثلثات ، وفي

الواقع:

$$\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \cot^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$= \cot^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$$

$$y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} = \ln \cot g \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$$

ولإيجاد مشتق هذا التابع :

$$y' = \frac{1}{\cot g\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} \frac{-1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$y' = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sin 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}$$

$$y' = \frac{1}{\cos x}$$

وهنا يطرح سؤال :

هل اقتصدنا شيئاً من الوقت أو الجهد بعد أن قمنا بتبسيط هذا التابع ؟

والإجابة ، في الواقع هي لا : فخطوات الحل قد أصبحت طويلة كما تطلبت كثيراً من العلاقات المثلثية .

4-3-1- مشتقات التوابع العكسية :

نظرية : إذا كان التابع $x = f(y)$ تابعاً عكسياً متزايداً وله مشتق في النقطة y لا يساوي الصفر فإن التابع العكسي $y = f(x)$ يكون له أيضاً مشتق في النقطة x المناظرة للنقطة y ويساوي مقلوب مشتق التابع مباشرة في النقطة y :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

البرهان : نوجد مشتق التابع $x = f(y)$ ونعطي y التغير $\Delta y \neq 0$ فيتغير التابع $x = f(y)$ بالمقدار Δx .

وبحسب تعريف المشتق نكتب :

$$x'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

وكذلك :

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

نلاحظ أنه عندما تؤول Δx إلى الصفر تؤول Δy أيضاً إلى الصفر وذلك لأنه عندما يكون $x = f(y)$ تابعاً مستمراً فإن Δx تؤول إلى الصفر إذا كانت $\Delta y \rightarrow 0$ ومن تناظر القيمتين Δx و Δy نجد أن $\Delta y \rightarrow 0$ إذا كانت $\Delta x \rightarrow 0$ وبالتالي :

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{x'_y}$$

وهو المطلوب إثباته .

5-3-1- مشتقات التوابع الأسية :

سنعتبر أن التابع الأسّي $y = a^x$

هو تابع عكسي للتابع اللوغاريتمي $x = \log_a y$

وبتطبيق نظرية اشتقاق التابع العكسي نجد :

$$(a^x)'_x = \frac{1}{(\log_a y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a$$

وبتعويض a^x بدلاً من y نحصل على :

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

إذا كان الأساس $a = e$

$$y = e^x$$

أي أن :

$$(e^x)' = e^x$$

فإن :

فمشتق التابع $y = e^x$ هو التابع نفسه $y' = e^x$

6-3-1- مشتقات التوابع المثلثية العكسية :

بفرض أن التوابع :

$$y = \arcsin x \quad y = \arccos x \quad y = \arctan x$$

هي توابع عكسية لـ

$$x = \sin y \quad x = \cos y \quad x = \tan y$$

ووفقاً لنظرية مشتقات التوابع العكسية والمتحققة شروطها بالنسبة لهذه التوابع

والتي تنص على أن :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

نجد من أجل : $x = \sin y$ أي $y = \arcsin x$

$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y}$$

$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

وبما أن :

$$\sin y = x, \quad \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

فبالتعويض نجد :

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

كذلك من أجل $x = \cos y$ أي $y = \arccos x$

نجد :

$$\begin{aligned} y' = (\arccos x)'_x &= \frac{1}{(\cos y)'_y} = -\frac{1}{\sin y} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

وأيضاً من أجل $x = \tan y$ أي $y = \arctan x$

$$y' = (\arctan x)'_x = \frac{1}{(\tan y)'_y} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

وحيث $\tan y = x$ بالتعويض نجد :

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

وفي حالة x كانت تابعة لـ u يكون :

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$$

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$$

$$(\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2} u'$$

مثال (1) : أوجد مشتق التابع :

$$y = \arcsin ax$$

أي :

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(ax)^2}} (ax)' = \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$$

مثال (2) : أوجد مشتق التابع :

$$y = \arctan(2x^2 - 7)$$

$$y' = \frac{1}{1+(2x^2-7)^2} (2x^2-7)'$$

$$y' = \frac{4x}{1+4x^4-28x^2+49}$$

$$y' = \frac{2x}{2x^4-14x^2+25}$$

1-3-7- مشتقات التوابيع القطعية :

1- مشتق الجيب القطعي :

نعلم أن :

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

وبالاشتقاق نجد :

$$y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}x$$

وبالتالي :

$$(\text{sh}x)' = \text{ch}x$$

2- مشتق التجيب القطعي :

لدينا :

$$y = \text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}x$$

وبالتالي :

$$(\text{ch}x)' = \text{sh}x$$

3- مشتق الظل القطعي :

لدينا :

$$y = \text{th}x = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}$$

$$y' = \frac{\text{ch}^2x - \text{sh}^2x}{\text{ch}^2x} = \frac{1}{\text{ch}^2x}$$

ويكون :

$$(\text{th}x)' = \frac{1}{\text{ch}^2x}$$

8-3-1- مشتقات التوابع القطعية العكسية :

(1) مشتق التابع العكسي للجيب القطعي :

ليكن لدينا :

$$y = \arg \text{sh} x$$

والذي يمثل التابع العكسي للجيب القطعي : $x = \text{sh} y$

ونعلم أن :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{chy} = \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2 y + 1}}$$

وبالتعويض نجد :

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(2) مشتق التابع العكسي لجيب التمام القطعي :

$$y = \arg \text{ch } x \quad \text{ليكن :}$$

الذي يمثل التابع العكسي لجيب التمام القطعي $x = \text{ch } y$

ونعلم أن :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\text{sh } y} = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}^2 y - 1}}$$

بالتعويض نجد :

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

(3) مشتق التابع العكسي للظل القطعي :

لدينا :

$$y = \arg \text{th } x$$

$$x = \text{th } y$$

فيكون تابعه العكسي :

ونعلم أن :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 - \text{th}^2 x} = \frac{1}{1 - x^2}$$

وبالتالي :

$$y' = \frac{1}{1 - x^2}$$

9-3-1- مشتقات التتابع من المرتبة الثانية والأعلى (مشتقات المشتقات) :

المشتق $f'(x)$ هو المشتق الأول للتابع $f(x)$ ومشتق هذا المشتق الأول يسمى بالمشتق الثاني ويرمز له بأحد الرموز التالية :

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}, f^{(2)}(x), y^{(2)}, f''(x), y''$$

كذلك فإن المشتق من المرتبة الثالثة يرمز له بـ

$$\frac{d^3f(x)}{dx^3}, f^{(3)}(x), y^{(3)}, f'''(x), y'''$$

وهكذا من أجل المشتقات المراتب الأعلى .

وكمثال على ذلك :

$$y = x^4 \quad y' = 4x^3 \quad y'' = 12x^2$$

$$y''' = 24x \quad y^{IV} = 24 \quad y^V = 0$$

يلاحظ أنه يستعاض عن عدد إشارة الفتحة بالأعداد الرومانية $(IV) = ('''')$

10-3-1- أمثلة محلولة :

مثال (1) : أوجد مشتق التابع :

$$y = \frac{\tan(x+1)}{x+1}$$

$$u = \tan(x+1)$$

$$v = x+1$$

بفرض :

ولدينا :

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

فيكون :

$$y' = \frac{\frac{x+1}{\cos^2(x+1)} - \tan(x+1)}{(x+1)^2}$$

ومنه :

$$y' = \frac{1}{(x+1)\cos^2(x+1)} - \frac{\tan(x+1)}{(x+1)^2}$$

مثال (2) : أوجد مشتق التابع :

$$y = \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

الحل :

يمكن كتابة التابع بالشكل :

$$y = \frac{\arctan x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

وبنفس طريقة المثال (1) :

$$y' = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{1+x} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\arctan x^{\frac{1}{2}}$$

وبتوحيد المخارج نجد :

$$y' = \frac{\sqrt{x} - (1+x)\arctan \sqrt{x}}{2x\sqrt{x}(1+x)}$$

مثال (3) : أوجد مشتق التابع :

$$y = \sqrt[5]{x^3} - 2x + \cos x$$

الحل :

نكتب التابع بالشكل :

$$y = x^{\frac{3}{5}} - 2x + \cos x$$

$$y' = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} - 2 - \sin x$$

$$y' = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} - 2 - \sin x$$

مثال (4) أوجد مشتق التابع :

$$y = \left(x^2 - \frac{x}{3}\right) \sin \frac{2x}{5}$$

الحل :

$$y' = \left(2x - \frac{1}{3}\right) \sin \frac{2x}{5} + \left(x^2 - \frac{x}{3}\right) \frac{2}{5} \cos \frac{2x}{5}$$

مثال (5) : احسب مشتق التابع :

$$y = \arctan \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

الحل :

بالاعتماد على العلاقات المثلثية نجد :

$$y = \arctan \left(\tan \frac{x}{2} \right) = \frac{x}{2}$$

ومنه :

$$y' = \frac{1}{2}$$

مثال (6) : أوجد مشتق التابع :

$$y = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

الحل :

يمكن كتابة التابع بالشكل :

$$y = (x + x^{-1}) \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

ويكون مشتقه :

$$y' = (1 - x^{-2}) \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) + \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \right) (x + x^{-1})$$

ويترك للطلاب إصلاح هذه العلاقة .

مثال (7) : أوجد مشتق التابع :

$$y = \sqrt[2]{(1 - \cos^3 x)^3}$$

الحل :

يمكن كتابة التابع بالشكل :

$$y = (1 - \cos^3 x)^{\frac{3}{2}}$$

فيكون مشتقه :

$$y' = \frac{3}{2} (1 - \cos^3 x)^{\frac{1}{2}} (3 \cos^2 x \sin x)$$

$$y' = \frac{9}{2} \sqrt{1 - \cos^3 x} \cos^2 x \sin x$$

مثال (8) : أوجد مشتق التابع :

$$y = \tan^4(x^2 + 1)$$

$$y' = 4 \tan^3(x^2 + 1) [1 + \tan^2(x^2 + 1)] 2x$$

$$y' = 8x \frac{\sin^3(x^2 + 1)}{\cos^5(x^2 + 1)}$$

مثال (9) : أوجد مشتق التابع :

$$y = \frac{x^n}{(1 + x)^n}$$

الحل :

يمكن كتابة التابع بالشكل :

$$y = \left(\frac{x}{1+x} \right)^n$$

بفرض $y = u^n$ يصبح التابع $\frac{x}{1+x} = u$

$$y' = nu^{n-1} u'$$

ومنه :

$$y' = n \left(\frac{x}{1+x} \right)^{n-1} \cdot \frac{1+x-x}{(1+x)^2}$$

وبالتالي نجد :

$$y' = n \left(\frac{x}{1+x} \right)^{n-1} \frac{1}{(1+x)^2}$$

مثال (10) : أوجد مشتق التابع :

$$y = (1-x^6)^5$$

الحل :

$$y' = 5(1-x^6)^4 (1-x^6)'$$

$$y' = 5(1-x^6)^4 (-6x^5)$$

$$y' = -30x^5(1-x^6)^4$$

مثال (11) : أوجد مشتق التابع :

$$y = \sin^n x \cos^p x$$

الحل :

$$y' = n \sin^{n-1} x \cos x \cos^p x - p \sin^n x \sin x \cos^{p-1} x$$

ومنه :

$$y' = n \sin^{n-1} x \cos^{p+1} x - p \sin^{n+1} x \cos^{p-1} x$$

$$y' = \sin^{n-1} x \cos^{p-1} x (n \cos^2 x - p \sin^2 x)$$

مثال (12) : أوجد مشتق التابع :

$$y = x^{\arcsin x}$$

الحل :

بأخذ لوغاريتم الطرفين نجد :

$$\ln y = \arcsin x \ln x$$

باشتقاق الطرفين نجد :

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x}$$

ومنه :

$$y' = x^{\arcsin x} \left[\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x} \right]$$

مثال (13) : أوجد مشتق التابع :

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

الحل : نكتب التابع بالشكل :

$$y = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

فيكون :

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{(1-x) + (1+x)}{(1-x)^2} \right]$$

$$y' = \frac{2}{2 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} (1-x)^2}$$

$$y' = \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y' = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

مثال (14) : أوجد مشتق التابع :

$$y = (3x - 2) \sqrt{(1+x)^3}$$

الحل :

نكتب التابع بالشكل :

$$y = (3x - 2)(1+x)^{\frac{3}{2}}$$

ومنه :

$$y' = 3(1+x)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}}(3x-2)$$

$$y' = 3\sqrt{1+x} \left(1+x + \frac{3x-2}{2} \right)$$

$$y' = \frac{15}{2} x \sqrt{1+x}$$

مثال (15) :

أعطِ القانون الخاص بمشتق تابع كثير حدود من الشكل :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

الحل :

مشتق هذا التابع هو أيضاً كثير حدود من الشكل :

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

مثال (16) : أوجد مشتق التابع :

$$y = (5 + 3x^3)^{10} (3x^2 + 8)^5$$

الحل :

$$y' = 10(5 + 3x^3)^9 (9x^2)(3x^2 + 8)^5 + 5(3x^2 + 8)^4 (6x)(5 + 3x^3)^{10}$$

$$y' = 30x(3x^2 + 8)^4 (5 + 3x^3)^9 [3x(3x^2 + 8) + 5 + 3x^3]$$

مثال (17) : أوجد مشتق التابع :

$$y = \frac{2x-1}{\sqrt{3-x^2}}$$

الحل :

يمكن كتابة التابع بالشكل :

$$y = (2x-1)(3-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

ويكون :

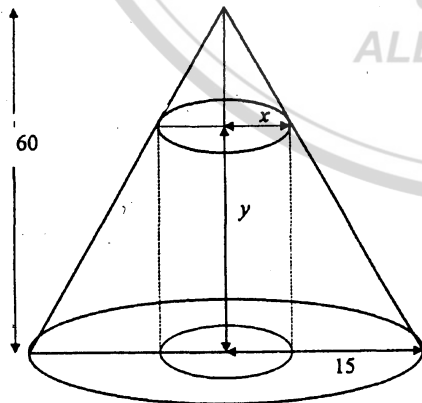
$$y' = 2(3-x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(3-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)(2x-1)$$

$$y' = (3-x^2)^{-\frac{3}{2}} [2(3-x^2) + x(2x-1)]$$

ومنه :

$$y' = \frac{6-x}{(3-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال (18) :



الشكل (1)

قطعة خشبية على شكل مخروط نصف

قطر قاعدته 15 cm وارتفاعه 60cm أوجد

أبعاد أكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن أن تصنع

منها .

الحل :

الشكل (1) يبين تمثيل هذه المسألة .

بفرض أن نصف قطر الأسطوانة x وارتفاعها y فيكون حجم الأسطوانة

$$v = \pi x^2 y$$

ومن تشابه المثلثات نجد :

$$\frac{60 - y}{60} = \frac{x}{15}$$

ويكون حجم الأسطوانة :

$$v = \pi x^2 (60 - 4x)$$

يأخذ هذا التابع قيمته الصغرى والعظمى حين ينعدم مشتقه V' والذي هو :

$$v' = 120\pi x - 12\pi x^2 = 0$$

وبالتالي للمشتق هذا جذران $x = 10$ و $x = 0$ ويوافق النهاية العظمى و $x = 0$ يوافق النهاية

الصغرى ، والنهاية العظمى لحجم الأسطوانة تكون من أجل $x = 10$.

وتكون قيمة y الموافقة $y = 20$

ويكون أكبر حجم للأسطوانة يمكن الحصول عليه :

$$v = 2000\pi \text{ cm}^3$$

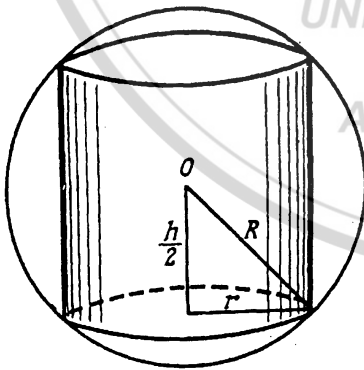
مثال (19) :

أوجد في الكرة المعطاة بالشكل (2)

أسطوانة تكون مساحة سطحها الجانبي أكبر ما

يمكن .

الحل :



الشكل (2)

نرمز بـ R إلى نصف قطر الكرة وبـ r إلى

نصف قطر الأسطوانة و بـ h لارتفاعها. عندئذ تكون

مساحة السطح الجانبي للأسطوانة هي:

$$S = 2\pi r h$$

ومن الشكل نجد :

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

ومنه :

$$h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

وبالتالي :

$$S = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2}$$

وبفرض أن :

$$y = S^2$$

يكون :

$$y = 16\pi^2 r^2 (R^2 - r^2)$$

وإذا أدخلنا متغيراً مستقلاً جديداً $x = r^2$

فيكون :

$$y = 16\pi^2 x (R^2 - x)$$

ولإيجاد القيمة العظمى نعدم المشتق .

$$y' = 16\pi^2 (R^2 - 2x) = 0$$

ومنه :

$$x = \frac{R^2}{2}$$

$$r^2 = \frac{R^2}{2}$$

أي :

ومنه :

$$r = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

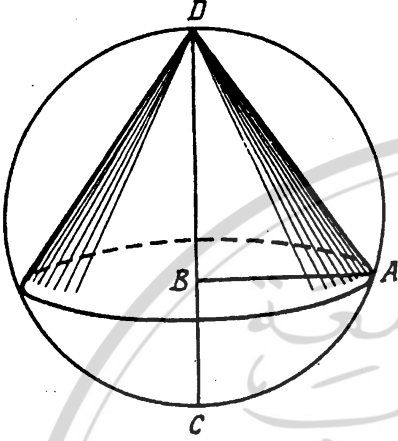
وبالتالي يكون :

$$h = R\sqrt{2}$$

$$h = 2r$$

ومنه يكون :

مثال (20) :



الشكل (3)

ارسم في كرة معطاة مخروطاً يكون حجمه

أكبر مايمكن .

الحل :

نرمز بـ R إلى نصف قطر الكرة المبينة

بالشكل (3) وبـ r إلى نصف قطر قاعدة المخروط وبـ

h لارتفاعه .

ومن الشكل نجد :

$$BD = h$$

$$BC = 2R - h$$

من تشابه المثلثين BDA و BAC نجد :

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BA}{BC}$$

ومنه :

$$\overline{BA}^2 = BC \cdot BD$$

ومن ثم :

$$r^2 = h(2R - h)$$

وحيث إن حجم المخروط هو :

$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

فإن :

$$v = \frac{\pi}{3} h^2 (2R - h)$$

نعدم مشتق هذا التابع فيكون :

$$v' = \frac{\pi}{3} (4hR - 3h^2) = 0$$

ومنه :

$$4R - 3h = 0$$

ويكون حجم المخروط أعظم ما يمكن عندما :

$$h = \frac{4}{3} R$$

مثال (21) : أوجد مشتق

$$y = x^x$$

الحل :

بأخذ لوغاريتم الطرفين نجد :

$$\ln y = x \ln x$$

وباشتقاق الطرفين يكون :

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

ومنه :

$$y' = y(\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

مثال (22) : أوجد مشتق التابع :

$$y = e^{\cos \sqrt{x}}$$

الحل :

بأخذ لوغاريتم الطرفين نجد :

$$\ln y = \cos \sqrt{x} = \cos x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \sin x^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

ومنه :

$$y' = \frac{e^{\cos \sqrt{x}} \sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

مثال (23) : أوجد مشتق التابع

$$y = \sin(\ln x)$$

الحل :

$$y' = \frac{1}{x} \cos(\ln x)$$

مثال (24) : أوجد مشتق التابع :

$$y = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

الحل

يمكن كتابة التابع بالشكل :

$$y = \ln \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+1}$$

بفرض التابع الكسري W أي $y = \ln W$

فيكون :

$$y' = \frac{W'}{W}$$

وبفرض $W = \frac{u}{v}$ حيث :

$$u = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1 \quad v = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}+1$$

وبحسب قاعدة اشتقاق الكسور يكون :

$$W' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

ويكون مشتق التابع :

$$y' = \frac{u'v - v'u}{W v^2}$$

لنحسب u' و v' :

$$u' = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$v' = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

بالتعويض بملاقة y' نجد :

$$y' = \frac{\left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - \left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\left[\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + 1} \right] \left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^2}$$

$$y' = \frac{2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]}$$

$$y' = \frac{2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2-1}$$

$$y' = \frac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$$

مثال (25) : أوجد مشتق التابع :

$$y = \ln \cos \frac{1}{x}$$

الحل :

بفرض :

$$u = \frac{1}{x} \quad v = \cos u$$

يكون :

$$y = \ln v$$

$$y' = \frac{v'}{v}$$

$$v' = -\sin u \cdot u'$$

$$u' = -\frac{1}{x^2}$$

$$v' = +\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$$

ومنه :

ويكون :

$$y' = \frac{\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}}{\cos \frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2} \tan \frac{1}{x}$$

مثال (26) : أوجد مشتق التابع :

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \ln \sin x$$

الحل :

بفرض

يكون :

أي :

$$y' = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \ln \sin x + \frac{\cos x}{\sin x} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$y' = e^{-\frac{x}{2}} \left(\cot x - \frac{1}{2} \ln \sin x \right)$$

مثال (27) : أوجد مشتق التابع :

$$y = e^{\sqrt{x^2+1}}$$

الحل :

يمكن كتابة التابع بالشكل :

$$y = e^{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} 2x e^{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

وبالتالي :

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} e^{\sqrt{x^2+1}}$$

مثال (28) :

أوجد مشتق التابع :

$$y = e^{x^x}$$

الحل :

$$u = x^x$$

بفرض :

$$y = e^u$$

يكون :

وبالتالي :

$$y' = e^u u'$$

$$\ln u = x \ln x$$

لنوجد u' لدينا :

باشتقاق الطرفين :

$$\frac{u'}{u} = \ln x + 1$$

$$u' = x^x (\ln x + 1)$$

ومنه :

$$y = x^x (\ln x + 1) e^{x^x}$$

وبالتالي :

1-3-11- مسائل غير محلولة :

أوجد مشتقات التوابع التالية :

$$(1) \quad y = \frac{2x^2 - 2x - 1}{2(x - 2)}$$

$$(2) \quad y = \frac{2x^2 + 1}{3x - 2}$$

$$(3) \quad y = x^k - 2x^\pi + \log 2$$

$$(4) \quad y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$(5) \quad y = \ln \tan x$$

$$(6) \quad y = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$$(7) \quad y = \frac{1}{1 + \sqrt{x} + x}$$

$$(8) \quad y = \frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$$

$$(9) \quad y = 6x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}}$$

$$(10) \quad y = 3x^{-2} - 2x^{-\frac{1}{2}} + x$$

$$(11) \quad y = \sin(\ln x)$$

$$(12) \quad y = \sin(\cos x)$$

$$(13) \quad y = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$(14) \quad y = 3\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x} + 5x\sqrt[5]{5}$$

$$(15) \quad y = x^2\sqrt{3} + 5\sqrt{x^3} + \sqrt{5}$$

$$(16) \quad y = \ln(x^2 + x)$$

$$(17) \quad y = \ln^3 x$$

$$(18) \quad y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

$$(19) \quad y = \frac{1}{x^2} - \frac{7}{x^3} + \frac{1}{3}$$

$$(20) \quad y = \frac{3a^2}{x^2} - \frac{a}{3x^4}$$

$$(21) \quad y = a^{x^2}$$

$$(22) \quad y = \arccos \frac{x}{a}$$

$$(23) \quad y = \arccos x^2$$

$$(24) \quad y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(25) \quad y = \frac{1-x^3}{1+x^3}$$

$$(26) \quad y = \frac{2}{3} \arctan \frac{5 \tan \frac{x}{2} + 4}{3}$$

$$(27) \quad y = \frac{-1}{2 \sin^2 x} + \ln \tan x$$

$$(28) \quad y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2} - x}$$

$$(29) \quad y = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x}$$

$$(30) \quad y = 2x - \sin^2 x$$

$$(31) \quad y = x \sin \left(\ln x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$(32) \quad y = \cot g \, x \left(2 + \frac{1}{\sin^2 x} \right)$$

$$(33) \quad y = \sin \left(\frac{1}{1 - 2x} \right)$$

$$(34) \quad y = \left(1 + \tan \frac{x}{2} \tan x \right) \cos x$$



4-1- التفاضل :

نفرض أننا قسمنا تغير التابع $y = f(x)$ إلى مجموع حدين :

$$\Delta y = A \Delta x + a$$

حيث A لا تعتمد على Δx (أي أنها ثابتة عندما تأخذ x قيمة معينة) . وحيث رتبة a أعلى من رتبة Δx .

عندما تنتهي $\Delta x \rightarrow 0$ يكون عندئذ الحد الأول (الرئيسي) متناسباً مع Δx ، ويسمى هذا الحد بتفاضل التابع $f(x)$ ويرمز إليه إما بـ dy وإما بـ $df(x)$.

وكمثال توضيحي على ذلك لنأخذ التابع :

$$y = x^3$$

عندئذ يكون :

$$\Delta y = 3x^2 \Delta x + (3x \Delta x^2 + \Delta x^3)$$

لا يعتمد العامل :

$$A = 3x^2$$

في هذا المثال على Δx إذن يكون الحد الأول متناسباً مع Δx في حين يكون الحد الثاني :

$$a = 3x \Delta x^2 + \Delta x^3$$

ذا رتبة أعلى من رتبة Δx (الرتبة الثانية) إذاً فالحد :

$$3x^2 \Delta x$$

هو تفاضل التابع x^3 :

$$d(x^3) = 3x^2 \Delta x$$

أو :

$$dy = 3x^2 \Delta x$$

ولتوضيح مفهوم التفاضل أكثر لنأخذ المثال التالي :

ليكن لدينا مكعب معدني طول ضلعه $x = 10,00 \text{ cm}$ ازداد طول هذا الضلع عند التسخين بمقدار $\Delta x = 0,01 \text{ cm}$ فما هو مقدار الزيادة في حجم المكعب V .

لدينا :

$$V = x^3$$

إذن :

$$dV = 3x^2 \Delta x = 3 \times 10^2 \times 0.01 = 3 \text{ cm}^3$$

تكافئ الزيادة في الحجم ΔV التفاضل dV إذاً $\Delta V = 3 \text{ cm}^3$.

لنجري الآن الحسابات الدقيقة :

$$\Delta V = (10,01)^3 - 10^3 = 3,003001 \text{ cm}^3$$

وهنا نجد أن التقريب بالتفاضل مقبول جداً .

1-4-1- تفاضل بعض التوابع البسيطة :

أ - تفاضل المقدار الثابت يساوي صفر :

$$d a = 0$$

ب - تفاضل المتغير المستقل يساوي تغير نفس هذا المتغير المستقل :

$$dx = \Delta x$$

ج - وبوجه عام فإن تفاضل التابع الخطي يساوي تغيره :

$$d (ax + b) = a \Delta x$$

أما بالنسبة للتوابع الأخرى، فإن التفاضل والتغير لا يكونان متساويين (ولكن الفرق بينهما يكون مقداراً متناهياً في الصغر رتبته أعلى من رتبة Δx (حيث إن $\Delta x \rightarrow 0$)).

1-4-2- خواص التفاضل :

1- يمكن إخراج العامل الثابت خارج إشارة التفاضل :

$$d [a f(x)] = a d f(x)$$

2- تفاضل المجموع الجبري لعدة توابع يساوي المجموع الجبري لتفاضلاتها :

$$d[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] = df_1(x) + df_2(x) - df_3(x)$$

3- تفاضل التابع يساوي جداء مشتق التابع في تفاضل المتغير المستقل :

$$df(x) = f'(x) dx$$

وعليه فللحصول على تفاضل التابع يكفي إيجاد مشتقه وفق قواعد الاشتقاق المشروحة سابقاً وضربه في تفاضل المتغير المستقل .

أي أن :

$$dy = y' dx$$

3-4-1- أمثلة محلولة على التفاضل :

مثال (1) :

$$y = (1 + x^2)^3 \quad \text{أوجد تفاضل التابع :}$$

الحل :

$$dy = 3(1 + x^2)^2 2x dx$$

$$dy = 6x(1 + x^2)^2$$

مثال (2) :

$$d\sqrt{a^2 - x^2}$$

أوجد

الحل :

يمكن كتابة التابع بالشكل :

$$d(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

ويكون :

$$d(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x dx)$$

$$= -\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

4-4-1- التفاضلات المتتالية :

$$dy = y' dx \quad \text{بفرض}$$

فإذا فاضلنا هذا التركيب نحصل على التفاضل الثاني ونرمز له بـ d^2y حيث :

$$d^2y = (y' dx)' dx$$

$$d^2y = y'' dx^2$$

حيث نعتبر دوماً dx ثابتاً اختيارياً في جميع الحسابات .

وهكذا يكون :

$$d^3y = y''' dx^3$$

وهكذا لأجل التفاضلات ذات المراتب الأعلى .

وكمثال عن ذلك :

$$y = \cos x$$

$$dy = -\sin x dx$$

$$d^2y = -\cos x dx^2$$

$$d^3y = \sin x dx^3$$

5-1- مشتقات التوابع الضمنية :

بفرض أن العلاقة التي تربط بين x و y

$$y = y_0 \quad x = x_0$$

مصاغة كتابع ضمني مع $f(x,y) = 0$

ولكي نجد قيمة المشتق dy/dx في النقطة $x = x_0$ ، $y = y_0$ فلا داعي لإيجاد

عبارة صريحة للتابع إذ يكفي أن نساوي بين تفاضلي طرفي العلاقة، ثم نستخرج من هذه المساواة قيمة dy/dx .

وبشكل عام إذا كان لدينا التابع الضمني : $f(x,y) = 0$

فإن مشتق التابع y بالنسبة للمتحول x هو $\frac{dy}{dx}$

هذا ويمكن أيضاً حساب المشتق y' من العلاقة :

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

مثال :

أوجد مشتق التابع الضمني المعين بالعلاقة :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

الحل :

بأخذ تفاضل الطرفين نجد :

$$\frac{2x}{a^2} dx + \frac{2y}{b^2} dy = 0$$

ومنه :

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$$

كما أنه من الممكن إيجاد هذا المشتق بالاعتماد على العلاقة :

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

حيث :

$$f'_x = \frac{2x}{a^2}$$

$$f'_y = \frac{2y}{b^2}$$

ويكون :

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$$

1-6- مشتقات التوابع المعينة وسيطياً :

ليكن التابع الوسيطى :

$$x = f(t)$$

$$y = \phi(t)$$

فيكون مشتق y بالنسبة لـ x معطى بالعلاقة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\phi'(t) dt}{f'(t) dt} = \frac{\phi'(t)}{f'(t)}$$

وكمثال على ذلك بفرض لدينا التابع الوسيطى :

$$x = R \cos t \quad y = R \sin t$$

فيكون المشتق :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{R \cos t dt}{-R \sin t dt} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\cot g t$$

1-7- المشتقات الجزئية والتفاضل الكلي :

تعريف : تسمى الكمية Z تابع للمقدارين المتغيرين x و y إذا ناظرت كل زوج من المتغيرين x و y قيمة واحدة معينة أو أكثر من قيم الكمية Z . ويسمى عندئذ المقداران المتغيران x و y بالمتغيرين المستقلين ويكتب التابع بالشكل :

$$Z = f(x, y)$$

كما يمكن أن يكون التابع Z تابعاً لأكثر من متحولين .

ويكون المشتق الجزئي للتابع Z بالنسبة للمتغير x هو : $\frac{\partial f}{\partial x}$

وللمتغير y هو $\frac{\partial f}{\partial y}$

حيث نشق بالنسبة لـ x نعتبر y ثابتاً . وكذلك عندما نشق بالنسبة لـ y فنعتبر x

ثابتاً .

أما المشتق الجزئي الثاني للتابع Z فيكون بالنسبة للمتغير x

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

وللمتغير y

هذا ويمكن تبديل المتحول عند الاشتقاق الثاني عنه في الاشتقاق الأول :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$$

ونسَمي بالتفاضل الكلي :

$$dZ = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

وبتعبير آخر يُكتب :

$$dZ = f'_x dx + f'_y dy$$

مثال (1) : أوجد التفاضلين الجزئيين للتابع :

$$Z = x^2 y + y^2 x$$

الحل :

$$d_x Z = (2xy + y^2) dx$$

$$d_y Z = (x^2 + 2xy) dy$$

مثال (2) : أوجد التفاضل الكلي للتابع :

$$Z = xy$$

الحل :

$$dZ = y dx + x dy$$

مثال (3) : احسب التفاضل الكلي للتابع :

$$Z = \arctan \frac{y}{x}$$

الحل :

سنحسب هذا التفاضل بالطريقة المباشرة فيكون :

$$dZ = \frac{d \frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

مثال (4) : أوجد المشتقات الجزئية للتابع :

$$Z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

الحل :

$$\begin{aligned} d \ln \sqrt{x^2 + y^2} &= \frac{1}{2} d \ln(x^2 + y^2) \\ &= \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

ويكون :

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

1-8- تعيين الكميات غير المعينة من الشكل $\frac{0}{0}$:

إذا كان تابع ما غير معين عندما $x \rightarrow a$ وكانت له نهاية عندما $x \rightarrow a$ فإن إيجاد هذه النهاية تسمى بعملية تعيين الكمية غير المعينة. وكحالة خاصة فإن تعيين قيمة الكمية غير المعينة التي من الشكل $\frac{0}{0}$ إنما هو إيجاد نهاية النسبة $f(x) / \phi(x)$ حيث يكون التابعان $f(x)$, $\phi(x)$ متناهيين في الصفر عندما $x \rightarrow a$.
- قاعدة أوبيتال :

إن نهاية النسبة $f(x) / \phi(x)$ بين التابعين اللذين يكونان متناهيين في الصفر عندما $x \rightarrow a$ (أو عندما $x \rightarrow \infty$) هي نفس النهاية التي تؤول إليها النسبة بين مشتقيهما $f'(x) / \phi'(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} \quad \text{مثال (1) : أوجد :}$$

التابعان هما :

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \phi(x) = x^3 - 1$$

متناهيان في الصفر عندما $x \rightarrow 1$ نأخذ النسبة :

$$\frac{f'(x)}{\phi'(x)} = \frac{2x}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

وطبقاً لقاعدة أوبيتال فإن النسبة :

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

تؤول كذلك إلى نفس هذه النسبة ، وفي الواقع لو لجأنا إلى التحليل للعوامل عوضاً عن الاشتقاق نجد :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2 + x + 1} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

إذا وقعنا بعد الاشتقاق أيضاً على قيمة غير معينة $\frac{0}{0}$ فيمكننا تكرار الاشتقاق

ضمن نفس القاعدة ، أي إذا كان التابعان $f(x), \phi(x)$ متناهيين في الصفر وكان مشتقاهما

$$\frac{f'(x)}{\phi'(x)} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ : أي } x \rightarrow a \text{ عندما}$$

يمكن تطبيق قاعدة أوبيتال مرة أخرى لإيجاد $f'(x)/\phi'(x)$.

مثال (2) : أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

البسط والمقام في هذا المثال متناهيان في الصفر . وحسب قاعدة أوبيتال يكون

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1}$$

ونرى ثانية أن كلا من البسط والمقام هنا متناه في الصفر .

فنطبق قاعدة أوبيتال مرة أخرى :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2} = \frac{3}{2}$$

مثال (3) : أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

نطبق قاعدة أوبيتال على التالي فنحصل مرتين على نسبة مقدارين متناهيين في

الصفر :

$$\frac{f'(x)}{\phi'(x)} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$$

$$\frac{f''(x)}{\phi''(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

وعند تطبيق قاعدة أوبيتال للمرة الثالثة فإننا نحصل على :

$$\frac{f'''(x)}{\phi'''(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x}$$

عندما تؤول $x \rightarrow 0$ تكون لهذه النسبة نهاية قيمتها 2 ، إذاً :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2$$

ملاحظة :

من الناحية النظرية ليس هناك ما ينفي إمكانية أن تكون جميع مشتقات التابعين $f(x), \phi(x)$ متناهية في الصفر ، ولكننا لانصادف مثل هذه الحالات في التطبيق وعلى أرض الواقع. هذا ومن المفيد التوفيق بين تطبيق قاعدة أوبيتال وبين إجراء التحويلات التي تسهل عملية إيجاد النهاية .

مثال (4) : أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$$

نتبع قاعدة أوبيتال فنجد نهاية النسبة :

$$\frac{f'(x)}{\phi'(x)} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x}$$

عندما تنتهي $x \rightarrow 0$ يكون المشتقان $f'(x)$ و $\phi'(x)$ متناهييتين في الصفر .

ونجد أن إيجاد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{\phi''(x)}$$

لايفيدنا ومن الأفضل تحويل النسبة :

$$\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$$

إلى الشكل :

$$\frac{1 - \cos^3 x}{3 \sin^2 x \cos^3 x}$$

ونلاحظ أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos^3 x = 1$$

فيكفي أن نجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{3 \sin^2 x}$$

وحسب قاعدة أوبيتال تكون هذه النهاية مساوية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x \sin x}{6 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2}$$

كما يمكننا أن نبدل من البداية $\sin^3 x$ بالمقدار المتناهي في الصفر المكافئ له x^3

ويكون لدينا عندئذ :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{3x^2 \cos^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{3x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x \sin x}{6x} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ملاحظة :

قد يحدث ألا تؤول النسبة $\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$.

عندما تؤول $x \rightarrow a$ (أو $x \rightarrow \infty$) إلى أية نهاية . وفي مثل هذه الحالات يمكن

ألا تكون للنسبة $\frac{f(x)}{\phi(x)}$.

أية نهاية أيضاً كما ويمكن أن تكون لها نهاية . مثلاً :

إذا كانت :

$$f(x) = x + \sin x$$

$$\phi(x) = x$$

فإن النسبة :

$$\frac{f'(x)}{\phi'(x)} = 1 + \cos x$$

لا تكون لها نهاية عندما $x \rightarrow \infty$ بينما تؤول النسبة :

$$\frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{x + \sin x}{x} = 1 + \frac{\sin x}{x}$$

إلى 1 عندما تؤول النسبة $x \rightarrow \infty$

9-1- تعيين الكميات غير المعينة من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

يكون قاعدة أوبيتال صحيحة أيضاً بالنسبة للتابعين $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ عندما يكون كل من

التابعين $f(x)$ ، $\phi(x)$ على حدة متناهيًا في الكبر عندما تؤول $x \rightarrow a$ (أو عندما تؤول $x \rightarrow \infty$).

مثال (1)

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}$$

الحل :

التابعان :

$$f(x) = \ln(x)$$

$$\phi(x) = x^2$$

متناهيان في الكبر عندما $x \rightarrow \infty$ ونرى أن النسبة :

$$\frac{f'(x)}{\phi'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{2x}$$

تؤول إلى الصفر عندما $x \rightarrow \infty$ ويكون :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

ملاحظة :

إذا كان للتابعين $f(x)$ و $\phi(x)$ نهايتان لانهايتان عندما $x \rightarrow a$ فإن النهايتين

$f'(x)$ ، $\phi'(x)$ (إذا وجدتا) تكونان كذلك لانهايتين. وتفيدنا قاعدة أوبيتال فقط فيما إذا

كان تحويل النسبة $f'(x)/\phi'(x)$ إلى صورة مناسبة أبسط من تحويل النسبة $f(x)/\phi(x)$.

مثال (2) : أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan 3x}{\tan x}$$

التابعان $\tan 3x$ و $\tan x$ وكذلك مشتقاتهما $\frac{3}{\cos^2 3x}$ و $\frac{1}{\cos^2 x}$ متناهية في

الكبر عندما $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ نكتب صورة المشتقين بالشكل :

$$3 \left(\frac{\cos x}{\cos 3x} \right)^2$$

ونجد :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x}$$

ونجد أن كلاً من البسط والمقام متناهيا في الصفر ، فنطبق قاعدة أوبيتال لنجد :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-3 \sin 3x} = -\frac{1}{3}$$

وبالتالي :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x} = 3 \left(-\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{3}$$

وقد كان بالإمكان تحويل النسبة الأصلية ذاتها وبطريقة أبسط إلى صورة مناسبة

إذاً :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{\cot 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 3x}{3 \sin^2 x} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

1-10- النهايات غير المعينة بأشكال مختلفة :

1- النهاية غير المعينة من الشكل $0 \times \infty$:

أي إن جداء التابعين $\phi(x)$ و $f(x)$ ينتهي إلى الشكل $0 \times \infty$. (حيث $f(x) \rightarrow 0$ و $\phi(x) \rightarrow \infty$) .

يمكن تحويل هذه النهاية إلى الشكل $\frac{0}{0}$ أو إلى الصورة $\frac{\infty}{\infty}$ وذلك بتقسيم أحد

التابعين على مقلوب الآخر .

$$f(x) \phi(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\phi(x)}} = \frac{\phi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

ومن ثم نطبق قاعدة أوبيتال .

مثال (1) : أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot g \frac{x}{2}$$

الحل :

وفقاً لما بيناه سابقاً ولكي يكون لدينا إمكانية تطبيق قاعدة أوبيتال نكتب النهاية

بالشكل :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}} = 2$$

مثال (2) أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \ln x$$

يكون لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x^4 \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{-4}{x^5}} = 0 \end{aligned}$$

2- النهاية غير المعينة من الشكل $\infty - \infty$

أي نهاية الفرق بين تابعين يكون لكل منهما نهاية تساوي $+\infty$ (أو لكل منهما نهاية تساوي $-\infty$) ويمكن تحويل هذه العبارة كذلك إلى الشكل $\frac{0}{0}$ أو إلى الصورة $\frac{\infty}{\infty}$.

مثال : أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x + 1)} \right]$$

نوجد مقام الكسرين، فيكون المقدار المطلوب إيجاداه هو :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x(e^x + 1)}$$

أي تكون لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$.

وبما أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 1) = 2$$

إذاً :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x + 1)} \right] &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3- النهايات غير المعينة من الشكل 1^∞ ، ∞^0 ، 0^0

أي التوابع التي على الشكل :

$$f^{\phi(x)}(x)$$

حيث :

$$\lim f(x) = 0$$

$$\lim \phi(x) = 0$$

أو :

$$\lim f(x) = \infty$$

$$\lim \phi(x) = 0$$

أو $\lim f(x)=1$ $\lim \phi(x) = \infty$

نجد هنا أولاً نهاية لوغاريتم التابع المعطى ونحصل في الحالات الثلاث كلها على الصورة غير المعينة $\infty \times 0$.

مثال (1) : أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x$$

النهاية غير معينة وهي من الشكل 0^0

$$y = x^x$$

نفرض :

فيكون لدينا :

$$\ln y = x \ln x$$

إذاً :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$$

ونجد من هنا أن :

مثال (2) : أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$$

النهاية غير المعينة هنا هي من الشكل ∞^0

نفرض أن :

$$y = (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$$

فيكون لدينا :

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln(1+2x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+2x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1+2x} = 0 \end{aligned}$$

إذاً :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1$$

مثال (3) : أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$$

النهاية غير المعينة هنا هي من الشكل 1^∞

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \ln y &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \ln \tan x \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \tan x}{\cot 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{\sin x \cos x}{-2}} = -1 \end{aligned}$$

إذاً :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = e^{-1}$$

1-11- تمارين غير محلولة على النهايات :

احسب نهايات التتابع الآتية :

-1 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$

-2 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

-3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 4}{x + 1}$

-4 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$

-5 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 27x + 36}{x^2 + 3x - 4}$

-6 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x - 4}{x^2 - 3x + 3}$

-7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$

-8 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$

-9 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-1}{\sqrt{x^2+2}}$

-10 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x-4}{\sqrt{x^3+5}}$

-11 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+2}{\sqrt{x^4-2}}$

-12 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+5}}{3x^2-2}$

-13 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

-14 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

-15 $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right]$

-16 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

-17 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

-18 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

-19 $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$

-20 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

-21 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

-22 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$

-23 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$

-24 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}$

-25 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

-26 $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

$$-27 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$$-28 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$$

$$-29 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9}$$

$$-30 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right)$$

$$-31 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cos x \right)$$

$$-32 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$-33 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{1/\ln x}$$

$$-34 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}$$

$$-35 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x + e^{2x})^{1/x}$$

$$-36 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-2x}$$

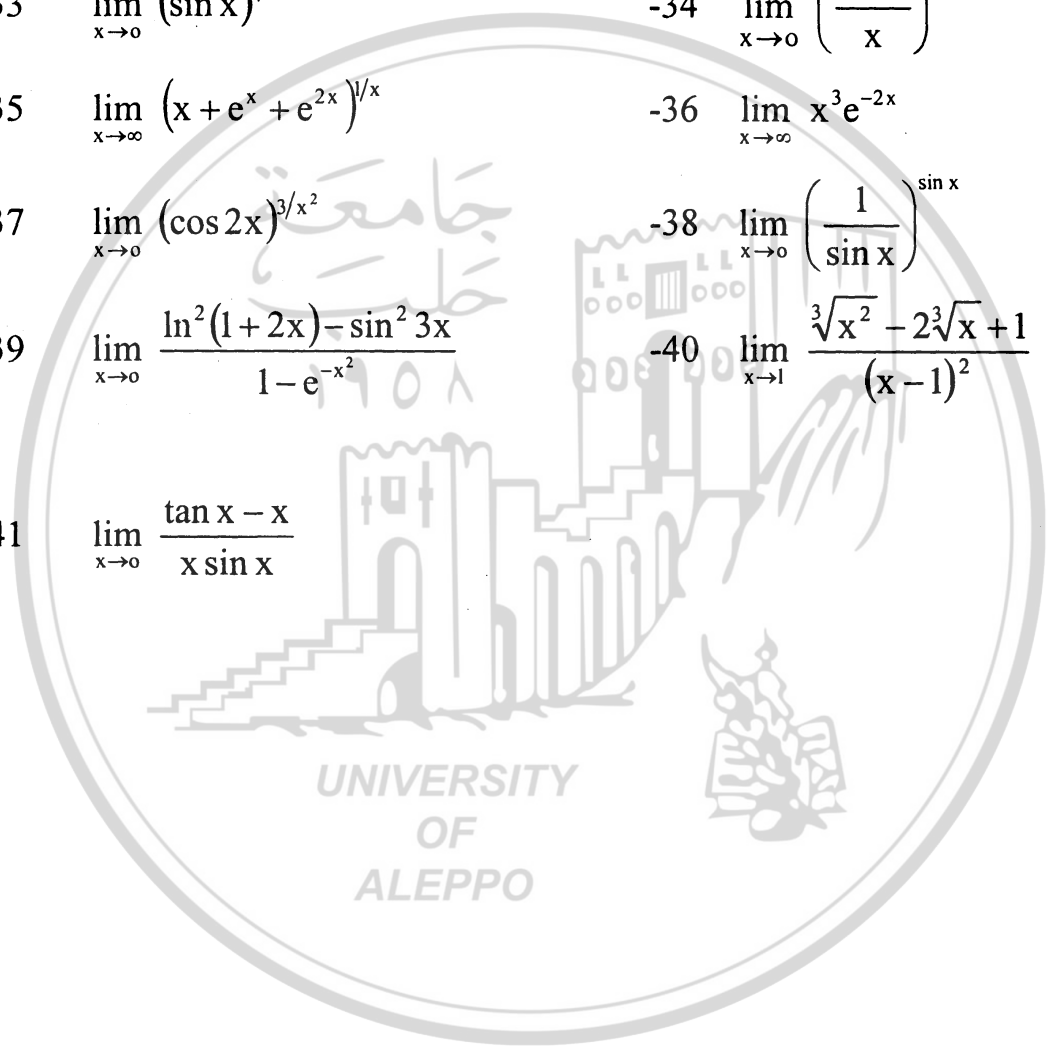
$$-37 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$$

$$-38 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} \right)^{\sin x}$$

$$-39 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+2x) - \sin^2 3x}{1 - e^{-x^2}}$$

$$-40 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$$

$$-41 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x \sin x}$$



12-1- السلاسل :

12-1-1- تعريف السلاسل :

يسمى التعبير الرياضي :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

بالمتسلسلة وتسمى الحدود $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ تسمى بالحد الأول فالثاني فالثالث... للمتسلسلة حسب ترتيبها من اليسار إلى اليمين. وهي أعداد تعتمد قيمة كل منها على ترتيب الحد في المتسلسلة تبعاً لقاعدة معينة .

إذا فقيمة الحد u_n عبارة عن تابع لرقمه n . ويمكن تحديد المتسلسلة بقدر ما يراد من الحدود إذا علمت أن العلاقة أو القاعدة التي يمكن بواسطتها الحصول على أي حد من حدودها حسب رقم ترتيبه فيها ولهذا فيمكن تحديد المتوالية الهندسية التناقصية إلى ما لانهاية إذا علم الحد الأول منها إذ يمكن الحصول على أي حد منها وفق العلاقة :

$$u_n = a q^{n-1}$$

إذا جمعنا عدداً n من الحدود الأولى للمتسلسلة اللانهائية :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

فتسمى S_n حاصل الجمع الناتج للحدود الأولى من المتسلسلة وعددها n أي :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

وهو مجموع جزئي من المتسلسلة وبالطبع فإن قيمة المجموع الجزئي تتغير تبعاً لقيم n عندما يزداد عدد الحدود n إلى ما لانهاية .

فقد يكون مجموع S_n نهاية S محدودة أي :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

وتسمى S مجموع المتسلسلة اللانهائية ويقال عن المتسلسلة حينئذ إنها تقاربية (متسلسلة يمكن جمعها) أما إذا لم يكن للمجموع S_n نهاية فإن المتسلسلة تسمى متسلسلة تباعدية (متسلسلة ليس لها مجموع نهائي) .

تعتبر المتسلسلة :

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$$

حيث : $|q| < 1$

سلسلة تقاربية (يمكن إيجاد مجموعها S_n)

حيث إن مجموعها :

$$S = \frac{a}{1-q}$$

وتسمى هذه السلسلة بالسلسلة الهندسية المتقاربة .

أما السلسلة $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ فهي سلسلة متباعدة ولا يمكن إيجاد مجموعها النهائي (غير قابلة للجمع) حيث إن مجموعها S_n يساوي عدد الحدود n والذي يزداد إلى ما لا نهاية مع $n \rightarrow \infty$.

وكذلك فإن السلسلة $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ أيضاً سلسلة متباعدة لأن مجموعها إما أن يساوي 1 أو يساوي صفراً وعندما تزداد n إلى ما لا نهاية فإن هذا المجموع لا ينتهي إلى نهاية معينة .

2-12-1- سلسلة ماکلورين :

نفرض أن التابع $f(x)$ يمكن كتابته في صورة سلسلة القوى :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

وهذه السلسلة تكون معلومة عندما تعرف معاملاتها ولتحديد هذه المعاملات نشق

السلسلة المعطاة :

$$f'(x) = (1)(a_1) + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = (1)(2a_2) + (2)(3)a_3x + \dots + (n-1)(n)a_nx^{n-2}$$

$$f^{(k)}(x) = (1)(2)\dots ka_k + (2)(3)\dots(k+1)a_{k+1}x + \dots + (n-k+1)(n-k+2)\dots na_nx^{n-k} + \dots$$

وإذا وضعنا في هذه السلاسل $x = 0$ نجد أن :

$$\begin{aligned}
f(0) &= a_0 \\
f'(0) &= a_1 \\
f''(0) &= (1)(2)(a_2) \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
f^{(k)}(0) &= (1)(2)(3)\dots k a_k
\end{aligned}$$

ومن هذه العلاقات يمكن إيجاد معاملات متسلسلة القوى :

$$a_0 = f(0)$$

$$a_1 = \frac{f'(0)}{1} = \frac{f'(0)}{1!}$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{(1)(2)} = \frac{f''(0)}{2!}$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{(1)(2)(3)\dots k} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

وبالتالي فإن التابع $f(x)$ إذا أمكن التعبير عنه في صورة سلسلة قوى فإن هذه السلسلة واحدة فقط وهي :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

وهذه السلسلة تسمى بسلسلة مكلورين .

مثال (1) : اكتب سلسلة مكلورين للتابع e^x

الحل :

$$f(x) = e^x$$

نفرض أن :

وبالاشتقاق نجد :

$$f'(x) = e^x \quad f''(x) = e^x \quad f'''(x) = e^x$$

عند القيمة $x = 0$ نجد أن :

$$f(0) = e^0 = 1 \quad f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = e^0 = 1$$

وتؤول سلسلة مكلورين إلى السلسلة :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

يجب أن نشير هنا إلى أنه ليس كل تابع يمكن نشره في صورة سلسلة ماكلورين .

$$f(x) = \ln x \quad \text{لنأخذ مثلاً التابع :}$$

والذي يمكن أن نشقه قدر ما نشاء من المرات :

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3} \dots$$

يكون للتابع ولجميع مشتقاته قيم عددية معينة من أجل جميع قيم x التي لاتساوي الصفر . ولكن عندما $x = 0$ لا يكون للقيم التي وجدناها معنى وهي التي تمثل معاملات السلسلة العددية ولهذا يصبح مستحيلًا نشر التابع $\ln x$ في سلسلة ماكلورين .

مثال (2) :

انشر وفق سلسلة ماكلورين التابع $\sin x$.

$$f(x) = \sin x \quad \text{نفرض أن :}$$

نجد أن :

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{IV}(x) = \sin x$$

عندما تكون $x = 0$ فإن :

$$f(0) = \sin 0 = 0, \quad f'(0) = \cos 0 = 1$$

$$f''(0) = -\sin 0 = 0, \quad f'''(0) = -\cos 0 = -1, \quad f^{IV}(0) = \sin 0 = 0$$

وعليه فإن التابع $\sin x$ يمكن كتابته وفق سلسلة ماك لوران على الشكل :

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

مثال (3) : انشر وفق سلسلة ماكلورين التابع $\ln(1+x)$

نفرض أن : $f(x) = \ln(1+x)$

نجد أن :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{(1)(2)}{(1+x)^3}, \quad f^{IV}(x) = -\frac{(1)(2)(3)}{(1+x)^4}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(1)(2)(3)\dots(n-1)}{(1+x)^n}$$

عندما تكون $x=0$ نجد أن :

$$f(0) = \ln 1 = 0, \quad f'(0) = 1$$

$$f''(0) = -1, \quad f'''(0) = (1)(2), \quad f^{IV}(0) = -(1)(2)(3)$$

$$\dots (-1)^{n-1} (1)(2)(3)\dots(n-1)\dots$$

وعليه فإن التابع $\ln(1+x)$ يمكن كتابته وفق سلسلة ماك لوران على الشكل :

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

مثال (4) : انشر التابع $f(x) = \cos x$ وفق سلسلة ماك لورين

الحل :

$$f(x) = \cos x$$

لدينا

$$f'(x) = -\sin x = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$f''(x) = -\cos x = \cos (x + \pi)$$

$$f^{(n)}(x) = \cos \left(x + n \frac{\pi}{2} \right)$$

لأجل $x=0$ نجد :

$$f(0)=1 \quad f'(0)=0 \quad f''(0)=-1$$

$$f^{(n)}(0)=\cos n \frac{\pi}{2}$$

ويكون من أجل n عدد فردي $f^{(n)}(0)=0$

ومن أجل n عدد زوجي $f^{(n)}(0)=\pm 1$

وبالتالي فيمكن كتابة التابع $\cos x$ على الشكل :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \dots$$

مثال (5) :

$$f(x) = (1+x)^m$$

انشر التابع

وفق سلسلة ماك لورين حيث m عدد جبري صحيح أو كسري .

الحل :

إن التابع $f(x) = (1+x)^m$ معين دوماً عندما $(1+x) > 0$ ولنشره بطريقة ماك

لورين يكون:

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$$

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \dots$$

ومن أجل $x=0$ يكون :

$$f(0)=1, \quad f'(0)=m, \quad f''(0)=m(m-1)$$

$$f'''(0)=m(m-1)(m-2)$$

ويمكن كتابة التابع $(1+x)^m$ وفق سلسلة ماك لورين على الشكل :

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{(1)(2)} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{(1)(2)(3)} x^3 + \dots$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$

بفرض $m = \frac{1}{2}$ يكون :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

وبالتالي فإنه في حالات الحسابات التقريبية وعندما $x \rightarrow 0$ يكون :

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

وبطريقة مماثلة نجد أنه في حالة الحسابات التقريبية ومن أجل $x \rightarrow 0$ يكون :

$$\sin x \approx x$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\tan x \approx x$$

$$\log(1+x) \approx x$$

$$\log(1-x) \approx -x$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x$$

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x$$

$$e^x \approx 1+x$$

3-12-1- سلسلة تايلور :

كثيراً ما نحتاج للتعبير عن التابع $f(x)$ بسلسلة قوى ليست بقوى x ولكن حسب $(x-a)$ حيث a عدد ثابت معين .

ويكون عندها التابع نفسه وجميع مشتقاته عبارة عن أعداد معينة .

سنرمز لـ $(x-a)$ بالرمز h :

$$x - a = h$$

ويكون :

$$x = a + h$$

$$f(x) = f(a + h)$$

وبما أن العدد a ثابت فإن h تكون متغيراً جديداً ويكون التابع $f(x)$ بهذه الطريقة تابعاً للمتغير h وسنرمز لهذا التابع بالرمز $\varphi(h)$

$$\varphi(h) = f(a + h)$$

باشتقاق هذه العلاقة نجد أن :

$$\varphi'(h) = f'(a + h)$$

$$\varphi''(h) = f''(a + h)$$

$$\varphi^{(n)}(h) = f^{(n)}(a + h) \dots$$

عند $h = 0$ نجد أن :

$$\varphi(0) = f(a)$$

$$\varphi'(0) = f'(a)$$

$$\varphi''(0) = f''(a)$$

$$\varphi^{(n)}(0) = f^{(n)}(a)$$

تكتب سلسلة ماك لورين للتابع $\varphi(h)$

$$\begin{aligned} \varphi(h) = & \varphi(0) + \frac{h}{1} \varphi'(0) + \frac{h^2}{(1)(2)} \varphi''(0) + \frac{h^3}{(1)(2)(3)} \varphi'''(0) + \\ & + \dots + \frac{h^n}{(1)(2)(3) \dots (n)} \varphi^{(n)}(0) + \dots \end{aligned}$$

ولكن :

$$\varphi(h) = f(x)$$

$$h = x - a$$

$$\varphi(0) = f(a)$$

$$\varphi'(0) = f'(a) \dots$$

فإذا عوضنا هذه العلاقات في سلسلة ماك لورين نجد أن :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{(1)(2)} f''(a) + \dots + \\
 &\quad + \frac{(x-a)^n}{(1)(2)\dots(n)} f^{(n)}(a) \\
 f(x) &= f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) \\
 &\quad + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)
 \end{aligned}$$

وهذه هي سلسلة تايلور . ونلاحظ أن سلسلة ماك لورين هي حالة خاصة لهذه

السلسلة عندما تكون $a = 0$.

مثال (1) : انشر : $x^3 - 3x^2 + 7x - 4$

وفق قوى $x - 1$

الحل :

نفرض أن :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 4$$

وبالاشتقاق نجد أن :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 7$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f^{IV}(x) = 0$$

ومن أجل $a = 1$ يكون :

$$f(a) = f(1) = 1 \quad f'(a) = f'(1) = 4$$

$$f''(a) = f''(1) = 0 \quad f'''(a) = f'''(1) = 6$$

$$f^{IV}(a) = f^{IV}(1) = 0$$

وجميع المعاملات التالية تساوي أيضاً الصفر ويكون :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 4 = 1 + 4(x-1) + (x-1)^3$$

مثال (2) :

انشر $\sqrt{x}$ وفق قوى $x - 4$

الحل :

نفرض :

$$f(x) = \sqrt{x}$$

وبفرض $a = 4$ نجد أن :

$$f(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$$f''(4) = -\frac{1}{32}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$$

$$f'''(4) = \frac{3}{256}, \dots$$

ويكون :

$$\sqrt{x} = 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512} - \dots$$

وواضح أن تطبيق هذه السلسلة يمكننا من حساب أي جذر وبأية دقة مطلوبة .

مثال (3) :

انشر $\cos x$ وفق القوى $x - \frac{\pi}{3}$

الحل :

$$f(x) = \cos x$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\cos x & f''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2} \\ f'''(x) &= \sin x & f'''(\pi/3) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f^{IV}(x) &= \cos x & f^{IV}(\pi/3) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ويكون :

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{12} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 \dots \end{aligned}$$

4-12-1- إجراء الحسابات باستخدام السلاسل :

لنحسب قيمة e في منشور التابع e^x ، وجدنا سابقاً أن منشور e^x حسب ماك لورين هو :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

نضع $x = 1$ فيكون :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

بالاعتماد على هذه السلسلة يمكن إيجاد العدد e بدقة كبيرة ولو بأخذ عدد ليس بالكبير من الحدود .

وإذا اقتصرنا بأخذ الحدود العشرة الأولى للسلسلة فإننا نهمل بذلك خطأ يساوي

$$\frac{1}{10!} + \frac{1}{11!} + \frac{1}{12!} + \dots \quad \text{مجموع السلسلة :}$$

وإذا أخرجنا الحد الأول خارج القوس نجد أن :

$$\frac{1}{10!} \left(1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{(11)(12)} + \frac{1}{(11)(12)(13)} \right)$$

نلاحظ أن في القوس كل مضروب (معامل) في مقامات الكسور أكبر من 10 وإذا
أبدلناه بالعدد 10 فإن المقامات تنقص أي أن الكسور تزداد ويكون الخطأ أقل من :

$$\frac{1}{10!} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right)$$

يوجد بداخل القوس مجموع لانهائي لتوالية هندسية تناقصية وهي تساوي :

$$\frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

وبالتالي فإن الخطأ يكون أقل من :

$$\frac{1}{10!} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{3269920} < 0.00001$$

كذلك فإنه لحساب $\sin 1^\circ$ يمكن أن نضع منشور $\sin x$ ونتبع طريقة مشابهة وهكذا
للتوابع الأخرى .



5-12-1- تمارين غير محلولة على السلاسل :

أولاً- انشر التوابع التالية وفق سلسلة (ماك لوران):

-1	$f(x) = \ln(x+h)$	-2	$f(x) = \ln \cos x$
-3	$f(x) = e^{\cos x}$	-4	$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$
-5	$f(x) = \ln(2+x)$	-6	$f(x) = (x+1) \ln(2+x)$
-7	$f(x) = \cos x e^{\sin x}$	-8	$f(x) = e^{e^x}$
-9	$f(x) = (x+1) \ln(x+1)$	-10	$f(x) = \sin 2x e^x$
-11	$f(x) = \sin^2 x$	-12	$f(x) = \cos^2 x$
-13	$f(x) = \arcsin x$	-14	$f(x) = \arctan x$
-15	$f(x) = e^{\sin x}$	-16	$f(x) = e^x \sin x$

ثانياً- انشر التوابع التالية وفق سلسلة (تايلور):

- 1- انشر التابع e^x حسب قوى $x-2$.
- 2- انشر التابع $3y^2 - 14y + 7$ حسب قوى $(y-3)$.
- 3- انشر التابع $5x^2 + 7x + 3$ حسب قوى $(x-2)$.
- 4- انشر التابع $4x^3 - 17x^2 + 11x + 2$ حسب قوى $(x-4)$.
- 5- انشر التابع $5y^4 + 6y^3 - 17y^2 + 18y - 20$ حسب قوى $(y+4)$.
- 6- انشر التابع e^x حسب القوى $(x+1)$.
- 7- انشر التابع $y = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ حسب قوى $(x+4)$.
- 8- انشر التابع $\sqrt{x}$ حسب قوى $(x-4)$.
- 9- انشر التابع $y = e^x$ حسب قوى $(x+2)$.
- 10- انشر التابع $y = \ln x$ بدلالة قوى $(x-1)$.
- 11- أوجد ثلاثة حدود غير معدومة من منشورات التابع : $y = x \cos x$ حسب قوى $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

الفصل الثاني

التكامل وتطبيقاته الهندسية

2-1- التابع الأصلي :

نفرض أن التابع $f(x)$ هو مشتق التابع $F(x)$ أي أن $dx f(x)$ عبارة عن تفاضل التابع $F(x)$:

$$f(x)dx = dF(x)$$

فيسمى التابع $F(x)$ بالتابع الأصلي للتابع $f(x)$.

مثال (1) :

التابع $3x^2$ هو عبارة عن مشتق x^3 أي أن $3x^2 dx$ عبارة عن تفاضل التابع x^3 :

$$3x^2 dx = d(x^3)$$

وحسب التعريف يكون التابع x^3 عبارة عن التابع الأصلي للتابع $3x^2$.

مثال (2) :

العبارة $3x^2 dx$ هي تفاضل التابع $x^3 + 7$

$$3x^2 dx = d(x^3 + 7)$$

وينتج من هذا أن التابع $x^3 + 7$ (كالتابع x^3) هو تابع أصلي للتابع $3x^2$.

يكون لأي تابع مستمر $f(x)$ عدد لانتهائي من التوابع الأصلية . وإذا كان $F(x)$ أحد هذه التوابع فإننا نعبر عن أي تابع أصلي بالصيغة $F(x) + c$ حيث c مقدار ثابت . ويمكن أن نعطي c أية قيمة اختيارية .

في الواقع نجد أن للتابع $3x^2$ مجموعة لانتهائية من التوابع الأصلية وأحد هذه التوابع هو x^3 (مثال 1) ونعبر عن أي تابع أصلي آخر بالصيغة $x^3 + c$ حيث c مقدار ثابت .

وعندما تكون $c = 7$ نحصل على التابع الأصلي $x^3 + 7$ (مثال 2) وعندما تكون $c = 0$ نحصل مرة أخرى على التابع الأصلي x^3 . وهكذا نجد عدداً لانهائياً من التوابع الأصلية. إلا أن الكثير من الإجابات تستبعد عادة في المسائل تمثيلاً مع الشروط المفروضة للمسألة.

2-2- التكامل غير المحدود :

تسمى الصورة الأكثر تعميماً التي يأخذها التابع الأصلي للعبارة $f(x) dx$ بالتكامل غير المحدود.

ويشار إلى التكامل غير المحدود للعبارة $f(x) dx$ بالرمز

$$\int f(x) dx$$

ويفترض أن الحد الثابت يدخل ضمن هذا الرمز.

تسمى العبارة $f(x) dx$ بالعبارة المكاملة ويسمى التابع $f(x)$ بالتابع المكامل ويسمى المتغير x بمتغير التكامل وتسمى عملية إيجاد التكامل غير المحدود للتابع المعطى بعملية إجراء التكامل.

2-3- خواص التكامل غير المحدود :

إن أهم خواص التكامل غير المحدود هي :

- 1- تفاضل التكامل غير المحدود يساوي المقدار المكامل.
- 2- تكامل المجموع يساوي مجموع التكاملات : أي أن التكامل غير المحدود للمجموع الجبري لعدة توابع يساوي نفس المجموع الجبري للتكاملات غير المحدودة للتوابع.
- 3- يمكن إخراج المعامل الثابت K المضروب في المقدار المكامل خارج علاقة التكامل غير المحدود

$$\int Kf(x) = K \int f(x) dx$$

2-4- جدول التكاملات :

نورد فيما يلي جدولاً بأشهر التكاملات :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\tan \frac{x}{2}| + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

2-5- التكامل بتغيير المتحول :

إذا جاء التابع المراد تكامله على صورة مختلفة عن الصور المألوفة أعلاه، وتسهيلاً لإجراء عملية التكامل فيمكن تحويل التكامل إلى صورة مألوفة يمكن أن نطبق عليها قوانين التكامل. فنلجأ في بعض الأحيان إلى استبدال المتغير، وتسمى هذه الطريقة التكامل بتغيير المتحول كما سنورد ذلك في بعض الأمثلة المحلولة.

2-6- أمثلة محلولة على التكامل بتغيير المتحول :

مثال (1) :

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3} dx$$

أوجد :

الحل :

بتفكيك الكسر إلى عدة كسور ، أي بقسمة كل من حدود البسط على المقام x^3 نجد:

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3} dx = \int \frac{dx}{x} - 2 \int x^{-2} dx + \int 3x^{-3} dx$$

ونجري التكاملات الثلاثة فيكون :

$$= \ln x + 2x^{-1} - \frac{3}{2}x^{-2} + c$$

$$= \ln x + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + c$$

مثال (2) :

$$\int \sqrt{2x-3} dx$$

أوجد :

الحل :

المقدار المكامل عبارة عن تابع مركب ، سندخل في هذه الحالة متغيراً جديداً .

$$2x - 3 = u$$

فتفرض أن :

$$dx = \frac{du}{2}$$

ويكون :

بالتعويض بهذه القيمة في التكامل نحصل على :

$$\int (2x-3)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du$$

وبإجراء التكامل نجد :

$$= \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

نعود فتعوض عن $u = (2x-3)$ فتجد :

$$= \frac{1}{3} (2x-3)^{\frac{3}{2}} + c$$

مثال (3) :

$$\int \frac{dx}{3x+5}$$

أوجد

الحل :

بإدخال المتغير الجديد :

$$3x + 5 = u$$

$$dx = \frac{du}{3}$$

يكون

إذاً :

$$\int \frac{dx}{3x+5} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln u + c$$

وبالتعويض :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \ln(3x+5) + c \\ &= \ln \sqrt[3]{3x+5} + c \end{aligned}$$

مثال (4) :

$$\int \frac{dx}{(2x-1)^2}$$

أوجد

$$2x - 1 = u$$

بوضع

$$dx = \frac{du}{2}$$

وبالتفاضل نجد :

إذاً :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2x-1)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2} \int u^{-2} du \\ &= -\frac{1}{2} u^{-1} + c = -\frac{1}{2u} + c \end{aligned}$$

وبالتعويض نجد :

$$= \frac{1}{2(1-2x)} + c$$

مثال (5) :

$$\int e^{3x} dx$$

أوجد

$$3x = u$$

بفرض :

$$dx = \frac{du}{3}$$

ويكون :

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + c = \frac{1}{3} e^{3x} + c$$

مثال (6) :

$$\int a^{nx} dx$$

أوجد

$$nx = u$$

$$dx = \frac{du}{n}$$

نضع :

فيكون :

$$\int a^{nx} dx = \frac{1}{n} \int a^u du = \frac{1}{n} \frac{a^u}{\ln a} + c$$

وبالتعويض نجد :

$$= \frac{a^{nx}}{n \ln a} + c$$

مثال (7) :

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

أوجد

بفرض :

$$x^2 + 1 = u$$

$$2x dx = du$$

بالتعويض نجد :

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + c$$

فيكون :

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + c$$

كقاعدة عامة : إذا كان التابع المراد إيجاد تكامله عبارة عن كسر وكان بسطه يمثل تفاضل مقامه فإن قيمة التكامل غيرا لمحدود لهذا التابع تساوي اللوغاريتم الطبيعي للمقام مضافاً إليه مقدار ثابت اختياري .

مثال (8) :

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+5}}$$

أوجد

الحل :

نلاحظ أن البسط x في التابع الكسري $\frac{x}{\sqrt{2x^2+5}}$ لا يساوي مشتق المقام $\sqrt{2x^2+5}$ ولهذا لا يصح وضع المقدار $u = \sqrt{2x^2+5}$. وإذا لاحظنا أن مشتق المقدار $2x^2+5$ عبارة عن $4x$ فإذا وضعنا $2x^2+5 = u$ وبأخذ تفاضل الطرفين لهذه العلاقة نجد :

$$4x dx = du$$

ومنه :

$$x dx = \frac{du}{4}$$

ويكون :

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+5}} &= \int \frac{1/4 du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{4} \int u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{(4)} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)} + c = \frac{1}{2} \sqrt{u} + c \end{aligned}$$

وبالتعويض نجد :

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + 5} + c$$

مثال (9) :

$$\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$$

أوجد

الحل :

التابع المكامل يتكون من تابعين : التابع $(\ln x)^3$ والتابع البسيط $\frac{1}{x}$ إذا فرضنا أن :

$$\ln x = u$$

$$(\ln x)^3 = u^3$$

فإن :

ويكون :

$$\frac{dx}{x} = du$$

وبالتالي فإن :

$$\int \frac{(\ln x)^3 dx}{x} = \int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + c$$

وبالتعويض نجد :

$$= \frac{1}{4} (\ln x)^4 + c$$

مثال (10) :

$$\int e^{x^4} x^3 dx$$

أوجد

الحل :

في هذه الحالة نلاحظ أن e^{x^4} هو تابع التابع و x^3 هو تابع بسيط .

$$x^4 = u$$

بوضع :

$$e^{x^4} = e^u$$

نجد أن

وبأخذ بتفاضل الطرفين نجد أن :

$$4x^3 dx = du$$

إذن :

$$\begin{aligned}\int e^{x^4} x^3 dx &= \int e^u \frac{1}{4} du = \frac{1}{4} e^u + c \\ &= \frac{1}{4} e^{x^4} + c\end{aligned}$$

مثال (11) :

$$\int \frac{4x+2}{2x-1} dx$$

أوجد

الحل :

يستحسن لإجراء هذا التكامل تطبيق طريقة التقسيم ثم تغيير المتحول .

فبإجراء التقسيم نجد :

$$\begin{aligned}\int \frac{4x+2}{2x-1} dx &= \int \left(2 + \frac{4}{2x-1} \right) dx \\ &= 2 \int dx + 4 \int \frac{dx}{2x-1}\end{aligned}$$

فنجد أن التكامل الأول سهل أما الثاني فنجري عليه تغيير المتحول فنفرض :

$$2x-1 = u$$

$$2dx = du$$

ومنه :

$$dx = \frac{du}{2}$$

ويكون :

$$\begin{aligned}\int \frac{4x+2}{2x-1} dx &= 2 \int dx + 4 \int \frac{dx}{2x-1} = 2x + 2 \int \frac{du}{u} \\ &= 2x + 2 \ln u + c = 2x + 2 \ln(2x-1) + c\end{aligned}$$

مثال (12):

$$\int x \sqrt{1+x} dx$$

أوجد تكامل

الحل :

إذا كان التابع المكامل عبارة عن حاصل ضرب فممن المفيد أحياناً وضع أحد الحدود في صورة أخرى وبحيث لا تتغير قيمته طبعاً .

فمثلاً لكي نكامل هذا المقدار بطريقة تغيير المتحول نضيف ونطرح العدد (1) من

والى الحد الأول x فتحصل على :

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x+1} dx &= \int (x+1-1) \sqrt{x+1} dx \\ &= \int [(x+1)-1] \sqrt{x+1} dx \\ &= \int (x+1)^{\frac{3}{2}} dx - \int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx \end{aligned}$$

ونلاحظ أن كلا من التكاملين يمكن حسابه بطريقة تغيير المتحول :

$$x+1=u$$

$$du=dx$$

بحيث :

$$\begin{aligned} &= \int u^{\frac{3}{2}} du - \int u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} \sqrt{u} - \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \sqrt{u} + c \\ &= \frac{2}{15} u \sqrt{u} (3u-5) + c \\ &= \frac{2}{15} (x+1) \sqrt{x+1} (3x+3-5) + c \\ &= \frac{2}{15} (x+1) (3x-2) \sqrt{x+1} + c \end{aligned}$$

مثال (13):

$$\int \cos 5x dx$$

أوجد تكامل :

الحل :

$\cos 5x$ هو تابع بسيط للتابع $5x$ ولكي نتعامل مع التابع البسيط نضع :

$$5x = u \quad dx = \frac{1}{5} du$$

فيكون :

$$\int \cos 5x dx = \int \frac{1}{5} \cos u du = \frac{1}{5} \sin u + c = \frac{1}{5} \sin 5x + c$$

مثال (14) :

$$\int \sin^3 x \cos x dx$$

أوجد تكامل

الحل :

في هذا المثال نجد أن $\sin^3 x$ هو تابع التابع و $\cos x$ هو تابع بسيط بفرض :

$$\sin x = u$$

$$\cos x dx = du$$

فيكون :

وبالتالي :

$$\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

هذا وقد كان يمكن إجراء هذا التكامل مباشرة بكتابتته على الشكل :

$$\int (\sin x)^3 d(\sin x)$$

مثال (15) :

$$\int \frac{\sin \frac{x}{3} dx}{2 + \cos \frac{x}{3}}$$

أوجد تكامل

الحل :

$$2 + \cos \frac{x}{3} = u$$

بفرض

$$-\frac{1}{3} \sin \frac{x}{3} dx = du$$

فيكون

ونجد :

$$\int \frac{\sin \frac{x}{3} dx}{2 + \cos \frac{x}{3}} = -3 \int \frac{du}{u} = -3 \ln u + c$$

$$= -3 \ln \left(2 + \cos \frac{x}{3} \right) + c$$

مثال (16):

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

أوجد تكامل

الحل:

يمكن كتابة $\sin x$ على الشكل:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

يكون:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

وبضرب كل من البسط والمقام في $\cos \frac{x}{2}$ نجد:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\cos \frac{x}{2} dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$$

بفرض:

$$\tan \frac{x}{2} = u$$

$$\frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = du$$

يكون:

بالتعويض نجد :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{du}{u} = \ln u + c = \ln \tan \frac{x}{2} + c$$

مثال (17) :

$$\int \frac{dx}{\cos x} \quad \text{أوجد التكامل}$$

الحل :

يمكن تحويل هذا التكامل إلى الصورة السابقة (مثال 15) بالاعتماد على العلاقة :

$$\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$$

بفرض أن :

$$\frac{\pi}{2} + x = u$$

$$dx = du$$

يكون

وبالتالي :

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{du}{\sin u} = \ln \tan \frac{u}{2} + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + c$$

مثال (18) :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25 - 16x^2}}$$

أوجد تكامل

الحل :

نكتب أولاً هذا التكامل بالشكل :

$$\int \frac{dx}{5 \sqrt{1 - \frac{16}{25}x^2}}$$

وهذا يمكن تحويله إلى الصورة المعروفة :

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{16}{25}x^2 = u^2 \text{ لذا نفرض}$$

$$16x^2 = 25u^2$$

أي :

إذاً :

$$x = \frac{5}{4}u, \quad dx = \frac{5}{4}du$$

ويكون :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}} &= \frac{5}{4} \int \frac{du}{\sqrt{25-25u^2}} = \frac{5}{4} \int \frac{du}{5\sqrt{1-u^2}} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{4} \arcsin u + c \\ &= \frac{1}{4} \arcsin \frac{4}{5}x + c \end{aligned}$$

مثال (19) :

$$\int \frac{dx}{5+3x^2}$$

أوجد التكامل

الحل :

نكتب التكامل أولاً على الشكل :

$$\int \frac{dx}{5\left(1+\frac{3}{5}x^2\right)}$$

ثم نحوله إلى الشكل المعروف .

$$\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$\frac{3}{5}x^2 = u^2 \text{ لذا نفرض}$$

أي

$$dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} du$$

إذاً :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5+3x^2} &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{5+5u^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{15}} \int \frac{du}{1+u^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{15}} \arctan u + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{15}} \arctan \sqrt{\frac{3}{5}} x + c \end{aligned}$$

مثال (20) :

أوجد التكامل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{3} \sqrt{1-\frac{5}{3}x^2}}$$

نحوه إلى الصورة :

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

لذا نفرض :

$$5x^2 = 3u^2$$

أي :

$$\frac{5}{3}x^2 = u^2$$

إذاً :

$$x\sqrt{5} = u\sqrt{3}$$

$$dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} du$$

ويكون :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \int \frac{du}{\sqrt{3}\sqrt{1-u^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \sqrt{\frac{5}{3}} x + c \end{aligned}$$

مثال (21) :

$$\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{2 - \sin^2 x}}$$

أوجد التكامل

الحل :

لتحويله إلى الشكل :

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\sin^2 x = 2u^2$$

نفرض أن

إذاً :

$$\sin x = \sqrt{2} u$$

ويكون :

$$\cos x \, dx = \sqrt{2} \, du$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{2 - \sin^2 x}} &= \sqrt{2} \int \frac{du}{\sqrt{2-2u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \arcsin u + c = \arcsin \frac{\sin x}{\sqrt{2}} + c \end{aligned}$$

مثال (22) :

$$\int \frac{dx}{x(4 + \ln^2 x)}$$

أوجد تكامل

الحل :

لتحويله إلى الشكل :

$$\int \frac{du}{1 + u^2}$$

$$\ln^2 x = 4u^2$$

نفرض

$$\ln x = 2u$$

ويكون :

$$\frac{dx}{x} = 2du$$

ويصبح :

وبالتالي :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4 + (\ln x)^2} \cdot \frac{dx}{x} &= 2 \int \frac{du}{4 + 4u^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{1 + u^2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan u + c \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{\ln x}{2} + c \\ &= \frac{1}{2} \arctan \ln \sqrt{x} + c \end{aligned}$$

2-7- تكامل التوابع المثلثية :

2-7-1- تكامل التوابع المثلثية ذات الأس الفردي :

لحساب تكاملات النسب المثلثية ذات الأس الفردي أي التي من الشكل :

$$\int \sin^{2n+1} x \, dx$$

أو :

$$\int \cos^{2n+1} x \, dx$$

حيث n عدد صحيح وموجب فمن المناسب استخدام التابع المساعد $\cos x$ في الحالة الأولى و $\sin x$ في الحالة الثانية ونجعل القوة زوجية بفك أحد العوامل :

$$\sin^{2n+1} x dx = \sin^{2n} x \sin x dx$$

أو :

$$\cos^{2n+1} x dx = \cos^{2n} x \cos x dx$$

ثم نحول من $\sin$ إلى $\cos$ أو العكس كما سنوضح في الأمثلة التالية :

مثال (1) :

$$\int \sin^3 x dx \quad \text{أوجد التكامل}$$

الحل :

أولاً - نفك هذا التابع بحيث تصبح القوة زوجية ثم نختار التابع المساعد $\cos x$ أي نحول $\sin$ إلى $\cos$ حسب القواعد :

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1 - \cos^2 x) \sin x$$

ولنتذكر أن $\sin x dx$ هو $-d(\cos x)$.

ويكون :

$$\int \sin^3 x dx = \int (1 - \cos^2 x) [-d(\cos x)]$$

ف نجد بسهولة أن نتيجة التكامل هي :

$$\int \sin^3 x dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c$$

$$\int \cos^3 x dx \quad \text{مثال (2) : أوجد تكامل}$$

نفك هذا التابع بحيث تصبح القوة زوجية ثم نختار التابع المساعد $\sin x$ أي نحول

$\cos$ إلى $\sin$ حسب قواعد التحويل فيكون :

$$\int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int \cos x dx - \int \sin^2 x d(\sin x)$$

$$= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + c$$

2-7-2- تكامل التتابع المثلثية ذات الأس الزوجي :

لحساب التكاملات على الشكل :

$$\int \sin^{2n} x \, dx$$

أو :

$$\int \cos^{2n} x \, dx$$

من الأنسب استخدام العلاقتين :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

وإدخال التابع المساعد $\cos 2x$ كما سنوضح ذلك بالأمثلة التالية :

مثال (1) :

أوجد تكامل :

$$\int \sin^2 x \, dx$$

الحل :

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

مثال (2)

أوجد تكامل

$$\int \cos^4 x \, dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx \end{aligned}$$

لنحسب التكاملين الأوليين مباشرة ونطبق على الثالث العلاقة :

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

فيكون :

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x dx &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c \\ &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c\end{aligned}$$

3-7-2- تكامل التوابع المثلثية التي على شكل جداء قوة زوجية في قوة فردية :

$$\int \cos^m x \sin^n x dx \quad \text{أي التكاملات التي على الشكل :}$$

حيث أحد العددين n, m فردي والآخر زوجي.

فعندما يكون m فردياً نلجأ إلى التابع المساعد $\cos x$ أما إذا كان n فردياً فعندها

نأخذ التابع المساعد $\sin x$ كما سنوضح ذلك في المثال التالي .

وبتعبير آخر فإننا نضك القوة الفردية لنجعلها زوجية .

مثال :

$$\int \cos^6 x \sin^5 x dx \quad \text{أوجد تكامل}$$

الحل :

في هذا المثال نجد أن $\sin^5 x$ هو قوة ذات أس فردي لذا نأخذ التابع $\sin x$ كتابع

مساعد فيكون:

$$\cos^6 x \sin^4 x d(-\cos x) = -\cos^6 x (1 - \cos^2 x)^2 d \cos x$$

وبالتالي يكون :

$$\begin{aligned}\int \cos^6 x \sin^5 x dx &= -\int \cos^6 x d \cos x + 2 \int \cos^8 x d \cos x \\ &\quad - \int \cos^{10} x d \cos x \\ &= -\frac{1}{7}\cos^7 x + \frac{2}{9}\cos^9 x - \frac{1}{11}\cos^{11} x + c\end{aligned}$$

4-7-2- تكامل جداء التوابع المثلثية ذات الأمثال المختلفة للزوايا

لحساب التكاملات التي من الشكل :

$$\int \sin mx \cos nx \, dx$$

$$\int \sin mx \sin nx \, dx$$

$$\int \cos mx \cos nx \, dx$$

فمن الأفضل استخدام التحويلات :

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

ونوضح ذلك في المثال التالي :

أوجد تكامل :

$$\begin{aligned} \int \sin 5x \cos 3x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(5-3)x + \sin(5+3)x] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin 2x + \sin 8x) \, dx \\ &= -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + c \end{aligned}$$

4-7-2- تكامل التوابع الأسية للظل والتظل :

لحساب التكاملات من الشكل :

$$\int \tan^n x \, dx$$

$$\int \cot g^n x \, dx$$

أو :

حيث n عدد صحيح أكبر من الواحد من الأفضل إخراج العامل $\tan^2 x$ أو $\cot^2 x$ كما سنوضح ذلك في المثال التالي :

أوجد تكامل :

$$\int \tan^5 x \, dx$$

الحل :

نخرج العامل $\tan^2 x$ أي نكتب :

$$\int \tan^3 x \tan^2 x \, dx$$

ولكن :

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

فتحصل على :

$$\int \tan^5 x \, dx = \int \tan^3 x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \tan^3 x \, dx$$

التكامل الأول هو :

$$\frac{1}{4} \tan^4 x$$

ولنحسب الثاني بنفس الطريقة :

$$\begin{aligned} \int \tan^3 x \, dx &= \int \tan x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \tan x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| \end{aligned}$$

وبالتالي يكون :

$$\int \tan^5 x \, dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + c$$

6-7-2- تكامل بعض التوابع التي تحتوي على الجذور :

بالنسبة للتكاملات التي تحتوي على الجذور من الشكل :

$$\sqrt{a^2 - x^2} \quad \sqrt{a^2 + x^2} \quad \sqrt{x^2 - a^2}$$

(وكذلك المحتوية على تربيع هذه الجذور مثلاً $\frac{1}{(a^2 + x^2)^2}$) يكون من الأفضل

غالباً اعتماد تغيير المتحول وفق ما يلي :

بالنسبة للحالة $\sqrt{a^2 - x^2}$ التعويض $x = a \sin t$

بالنسبة للحالة $\sqrt{a^2 + x^2}$ التعويض $x = a \tan t$

بالنسبة للحالة $\sqrt{x^2 - a^2}$ التعويض $x = a \sec t$

ونوضح ذلك بالأمثلة التالية :

مثال (1) :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

أوجد تكامل

الحل :

$$x = a \sin t$$

نفرض

$$dx = a \cos t dt$$

فيكون

بالتعويض نجد :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + c \end{aligned}$$

وبالعودة إلى التابع الأصلي نجد أن :

$$t = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\frac{1}{2} \sin 2t = \sin t \cos t = \frac{x}{a} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

وبالتالي يكون :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

مثال (2) :

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$$

أوجد تكامل

الحل :

$$x = a \tan t$$

نفرض أن

فيكون :

$$x^2 + a^2 = a^2(\tan^2 t + 1) = \frac{a^2}{\cos^2 t}$$

وبالتالي :

$$dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} &= \frac{1}{a^3} \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2a^3} \int (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{1}{2a^3} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + c \end{aligned}$$

نعود من جديد إلى المتحول x فتحصل على :

$$t = \arctan \frac{x}{a}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin 2t &= \sin t \cos t = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\ &= \frac{ax}{a^2 + x^2} \end{aligned}$$

وأخيراً نجد أن :

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \left(\arctan \frac{x}{a} + \frac{ax}{a^2 + x^2} \right) + c$$

مثال (3) :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$$

أوجد التكامل

الحل :

$$x = a \sec t$$

بفرض

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t$$

فيكون :

$$dx = a \tan t \sec t dt$$

إذا :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} &= \frac{1}{a} \int dt = \frac{1}{a} t + c \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + c \end{aligned}$$

2-8- التكامل بالتجزئة :

علماً أن كل صيغة يراد تكاملها يمكن كتابتها بطرق شتى على الشكل $u dv$ (حيث u, v تابعان للمتحول الأساسي في التكامل) .

وعلى هذا تتلخص طريقة التكامل بالتجزئة في تحويل التكامل المعطى $\int u dv$

تمهيد : ليكن لدينا التابع uv حيث :

$$u = f(x) \quad \text{و} \quad v = \phi(x)$$

فبإجراء التفاضل نجد :

$$d(uv) = u dv + v du$$

وبالتكامل نجد :

$$\int d(uv) = uv = \int u dv + \int v du$$

ويكون :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

فيصبح الهدف إيجاد التكامل $\int v du$ عوضاً عن $\int u dv$ فإذا كان إيجاد هذا التكامل أسهل من عملية إيجاد $\int u dv$ وهذا أمر أساسي فنكون قد أصبنا الهدف كما

سنرى في الأمثلة التالية ، أو إذا أمكن التعبير عن أحد هذين التكاملين بدلالة الآخر كما سنراه في المثال (5) .

مثال (1) :

$$\int e^x x dx \quad \text{أوجد التكامل}$$

الحل :

نكتب العبارة الكاملة على الشكل :

$$x(e^x dx) = x de^x$$

هنا تلعب x دور u والتابع e^x دور v وبتطبيق علاقة التكامل بالتجزئة نجد :

$$\int x de^x = xe^x - \int e^x dx$$

وبما أن التكامل المتبقي معروف فيكون :

$$\int e^x x dx = xe^x - e^x + c$$

ملاحظة : إذا كتبنا العبارة الكاملة على الصورة :

$$e^x d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

أي إذا أخذنا :

$$u = e^x$$

$$v = \frac{1}{2}x^2$$

وبتطبيق علاقة التكامل بالتجزئة نجد :

$$\int e^x d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x^2 e^x - \int \frac{1}{2}x^2 e^x dx$$

فتجد أن حل التكامل المتبقي ليس أسهل من التكامل الأصلي .

في الواقع يمكن كتابة العبارة $e^x x$ على الشكل $u dv$ بطرق عديدة لاتحصى . آخذين

أي تابع اختياري بدل v فمثلاً إذا فرضنا :

$$dv = 4x^3 dx \quad \text{فإن} \quad v = x^4$$

وعندئذ يكون :

$$xe^x dx = \frac{e^x}{4x^2} (4x^3 dx)$$

أي أن :

$$u = \frac{e^x}{4x^2}$$

وإذا أردنا تطبيق علاقة التكامل بالتجزئة نجد أنها تعطينا من جديد تكاملاً أصعب من التكامل الأصلي .

لذا فقبل إجراء عملية التكامل بالتجزئة يجب أن نحدد بالتقريب في الذهن ما يمكن أن يعطينا إياه اختيار التابع v هذا أو ذاك .

مثال (2) :

$$\int x \ln x dx$$

أوجد التكامل :

الحل :

من الأفضل هنا كتابة التابع المكامل على الشكل :

$$\ln x d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

فيكون :

$$v = \frac{1}{2}x^2$$

$$u = \ln x$$

وبتطبيق علاقة التكامل بالتجزئة نجد :

$$\begin{aligned} \int \ln x d\left(\frac{1}{2}x^2\right) &= \ln x \left(\frac{1}{2}x^2\right) - \int \frac{1}{2}x^2 d \ln x \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c \end{aligned}$$

مثال (3) :

$$\int x \sin x \, dx \quad \text{أوجد التكامل :}$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= \int x d(-\cos x) = -x \cos x - \int (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \sin x + c \end{aligned}$$

مثال (4) :

$$\int x^2 \cos x \, dx \quad \text{أوجد التكامل :}$$

الحل :

$$\int x^2 \cos x \, dx = \int x^2 d \sin x = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx$$

نطبق على التكامل الذي حصلنا عليه من جديد علاقة التكامل بالتجزئة (انظر المثال 3) ونحصل بالتالي :

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$$

مثال (5) :

$$\int e^x \cos x \, dx \quad \text{أوجد التكامل}$$

الحل :

$$\int e^x \cos x \, dx = \int e^x d \sin x = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx + c_1$$

التكامل الذي حصلنا عليه ليس أسهل من التكامل الأصلي ولكنه شبيه به بحيث إذا أعدنا عملية التكامل بالتجزئة نقع من جديد على التكامل الأصلي وهذا ما يؤدي إلى الحل.

$$- \int e^x \sin x \, dx \quad \text{نحل التكامل :}$$

فنجد :

$$- \int \sin x e^x \, dx = \int e^x d \cos x = e^x \cos x - \int \cos x e^x \, dx + c_2$$

وبالتعويض في العلاقة السابقة نجد :

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx + c_1 + c_2$$

ومن هذه العلاقة نجد التكامل المطلوب فيكون :

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x) + c_1 + c_2$$

ومنه :

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c$$

حيث :

$$c = \frac{c_1 + c_2}{2}$$

ملاحظة : يمكن كتابة العبارة الكاملة بالشكل $\cos x de^x$ عندئذ فعندما نجري التكامل مرة ثانية يجب أن نكتب العبارة $e^x \sin x dx$ على الشكل $\sin x de^x$ (وليس على الشكل $e^x d \cos x$) والآن تحولت العلاقة التي تستخدم لإيجاد $\int e^x \cos x dx$ إلى متطابقة .

مثال (6) :

$$\int \ln x dx \quad \text{أوجد التكامل}$$

الحل :

لإيجاد هذا التكامل نطبق طريقة التكامل بالتجزئة :

بفرض :

$$u = \ln x \quad dv = dx$$

يكون :

$$du = \frac{dx}{x} \quad v = x$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + c$$

مثال (7) :

$$\int x^n \ln x dx \quad \text{أوجد التكامل}$$

الحل :

لنطبق طريقة التكامل بالتجزئة .

بفرض :

$$\ln x = u \quad x^n dx = dv$$

فيكون :

$$du = \frac{dx}{x} \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\begin{aligned} \int x^n \ln x dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + c \end{aligned}$$

مثال (8) :

$$\int (3x^2 + 1) \cos 2x dx$$

أوجد التكامل :

الحل :

لنطبق طريقة التكامل بالتجزئة، لنفرض :

$$du = 6x dx \quad \text{فيكون} \quad 3x^2 + 1 = u$$

$$v = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \text{فيكون} \quad \cos 2x dx = dv$$

وبالتالي :

$$\int (3x^2 + 1) \cos 2x = (3x^2 + 1) \frac{\sin 2x}{2} - 3 \int x \sin 2x dx$$

لأجل إيجاد التكامل المتبقي نطبق من جديد طريقة التكامل بالتجزئة، لذا نفرض :

$$dx = du \quad \text{فيكون} \quad x = u$$

$$v = -\frac{1}{2} \cos 2x \quad \text{فيكون} \quad \sin 2x dx = dv$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned}\int x \sin 2x dx &= -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ &= -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c\end{aligned}$$

وأخيراً نجد :

$$\begin{aligned}\int (3x^2 + 1) \cos 2x dx &= (3x^2 + 1) \frac{\sin 2x}{2} + \frac{3}{2} x \cos 2x \\ &\quad - \frac{3}{4} \sin 2x + c\end{aligned}$$

مثال (9) :

$$\int x e^{3x} dx$$

أوجد التكامل

الحل : نطبق طريقة التكامل بالتجزئة بفرض :

$$dv = e^{3x} dx$$

فيكون

$$v = \frac{1}{3} e^{3x}$$

$$du = dx$$

فيكون

$$x = u$$

ويكون :

$$\begin{aligned}\int e^{3x} dx &= \frac{x e^{3x}}{3} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx = \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + c \\ &= \frac{e^{3x}}{3} \left(x - \frac{1}{3} \right) + c\end{aligned}$$

مثال (10) :

$$\int \arcsin x dx$$

أوجد التكامل

الحل :

نطبق طريقة التكامل بالتجزئة، بفرض :

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

فيكون

$$u = \arcsin x$$

$$dv = dx$$

فيكون

$$v = x$$

$$\begin{aligned}
 \int \arcsin x \, dx &= x \arcsin x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
 &= x \arcsin x + \int \frac{-2x \, dx}{2\sqrt{1-x^2}} \\
 &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c
 \end{aligned}$$

مثال (11)

أوجد التكامل : $\int \arctan x \, dx$

الحل : نطبق طريقة التكامل بالتجزئة، بفرض :

فيكون $u = \arctan x$ $du = \frac{dx}{1+x^2}$

فيكون $v = x$ $dv = dx$

وبالتالي :

$$\begin{aligned}
 \int \arctan x \, dx &= x \arctan x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2} \\
 &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c
 \end{aligned}$$

2-9- تمارين غير محلولة على التكامل غير المحدد :

أوجد التكاملات التالية :

-1 $\int (1-2x)(1+3x)dx$

-2 $\int \sqrt[3]{x} dx$

-3 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

-4 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

-5 $\int \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)dx$

-6 $\int \frac{2x+3}{x}dx$

-7 $\int \frac{(x+2)^2}{x}dx$

-8 $\int \left(\sqrt{2x} - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)dx$

-9 $\int \frac{dx}{1-x}$

-10 $\int \frac{dx}{(x+1)^2}$

-11 $\int \frac{4x^3 dx}{(x^4 + a^4)^3}$

-12 $\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^3}$

-13 $\int \frac{a x dx}{a^2 + x^2}$

-14 $\int \frac{x^{-\frac{1}{2}} dx}{1+\sqrt{x}}$

-15 $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$

-16 $\int \frac{\ln x dx}{x}$

-17 $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

-18 $\int \frac{dx}{x \ln x^2}$

-19 $\int e^{-4x} dx$

-20 $\int \frac{dx}{3e^x}$

-21 $\int \frac{x^3 + 7x^2 - 4x - 3}{x-1} dx$

-22 $\int \frac{x^3 - x^2 + x + 4}{x+1} dx$

-23 $\int x\sqrt{a^2 - x^2} dx$

-24 $\int x^2 \sqrt{x^3 - 1} dx$

-25 $\int \frac{2x+a}{x^2+ax+b} dx$

-26 $\int \frac{2x+a}{\sqrt{x^2+ax+b}} dx$

- 27 $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$
- 28 $\int \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}} dx$
- 29 $\int 3e^x \sqrt{1 + e^x} dx$
- 30 $\int 2x\sqrt{2x-1} dx$
- 31 $\int \frac{dx}{1 + e^x}$
- 32 $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$
- 33 $\int \frac{\sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x}-1} dx$
- 34 $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} dx$
- 35 $\int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}}$
- 36 $\int \frac{\arctan x dx}{1+x^2}$
- 37 $\int \sqrt{\frac{x-1}{x}} \frac{dx}{x^2}$
- 38 $\int \frac{dx}{\left(\ln \frac{x^2}{1+x^2}\right)(x+x^3)}$
- 39 $\int \sqrt{\tan x} \frac{dx}{\cos^3 x}$
- 40 $\int \sin^2 x \cos x dx$
- 41 $\int \cos^2 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} dx$
- 42 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$
- 43 $\int x^2 \sin(2x^3+3) dx$
- 44 $\int \cos \frac{3}{x} \frac{dx}{x^2}$
- 45 $\int \frac{\tan x}{\sin 2x} dx$
- 46 $\int \frac{\cos x dx}{1+2\sin 2x}$
- 47 $\int \frac{1+\cos x}{(x+\sin x)^3} dx$
- 48 $\int \frac{4dx}{1-\cos x}$
- 49 $\int \tan^2 x dx$
- 50 $\int e^{\cos x} \sin x dx$
- 51 $\int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} dx$
- 52 $\int \frac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x} dx$
- 53 $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}}$
- 54 $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{2-\sin^2 x}}$
- 55 $\int \frac{dx}{1-\sin x}$
- 56 $\int \sqrt{1+\sin x} dx$

- 57 $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$
- 58 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$
- 59 $\int \frac{\sin x - \cos x}{\cos^3 x} dx$
- 60 $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin^3 x} dx$
- 61 $\int \frac{\cos x + 2 \sin x}{1 + \sin x - 2 \cos x} dx$
- 62 $\int \frac{x \cos x dx}{(x \sin x + \cos x - 1)^m}$
- 63 $\int \frac{dx}{4 + 9x^2}$
- 64 $\int \frac{dx}{7 + 5x^2}$
- 65 $\int \frac{dx}{4 - 9x^2}$
- 66 $\int \frac{dx}{7 - 5x^2}$
- 67 $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$
- 68 $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$
- 69 $\int \frac{dx}{5 - 7x^2}$
- 70 $\int \frac{dx}{\sqrt{7 - 5x^2}}$
- 71 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$
- 72 $\int \frac{dx}{x^2 + 9}$
- 73 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 3}}$
- 74 $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 7x^2}}$
- 75 $\int \frac{5x dx}{\sqrt{1 - x^4}}$
- 76 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
- 77 $\int \frac{dx}{e^{-x} + e^x}$
- 78 $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$
- 79 $\int \frac{\cos x dx}{a^2 + \sin^2 x}$
- 80 $\int \frac{\sin x dx}{a^2 - \cos^2 x}$
- 81 $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$
- 82 $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$
- 83 $\int \frac{dx}{a \cos^2 x + b \sin^2 x}$
- 84 $\int \frac{dx}{a \cos^2 x - b \sin^2 x}$
- 85 $\int \cos^3 x dx$
- 86 $\int \sin^5 x dx$
- 87 $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x dx$
- 88 $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$

$$-89 \quad \int \cos^3 x \sin 2x \, dx$$

$$-90 \quad \int \frac{\cos^3 x \, dx}{1 - \sin x}$$

$$-91 \quad \int \frac{\sin^3 x \, dx}{1 + \cos x}$$

$$-92 \quad \int \sin^4 x \, dx$$

$$-93 \quad \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$$

$$-94 \quad \int \cos^2 x \cos 2x \, dx$$

$$-95 \quad \int \cot^3 x \, dx$$

$$-96 \quad \int \tan^4 x \, dx$$

$$-97 \quad \int \tan^5 x \, dx$$

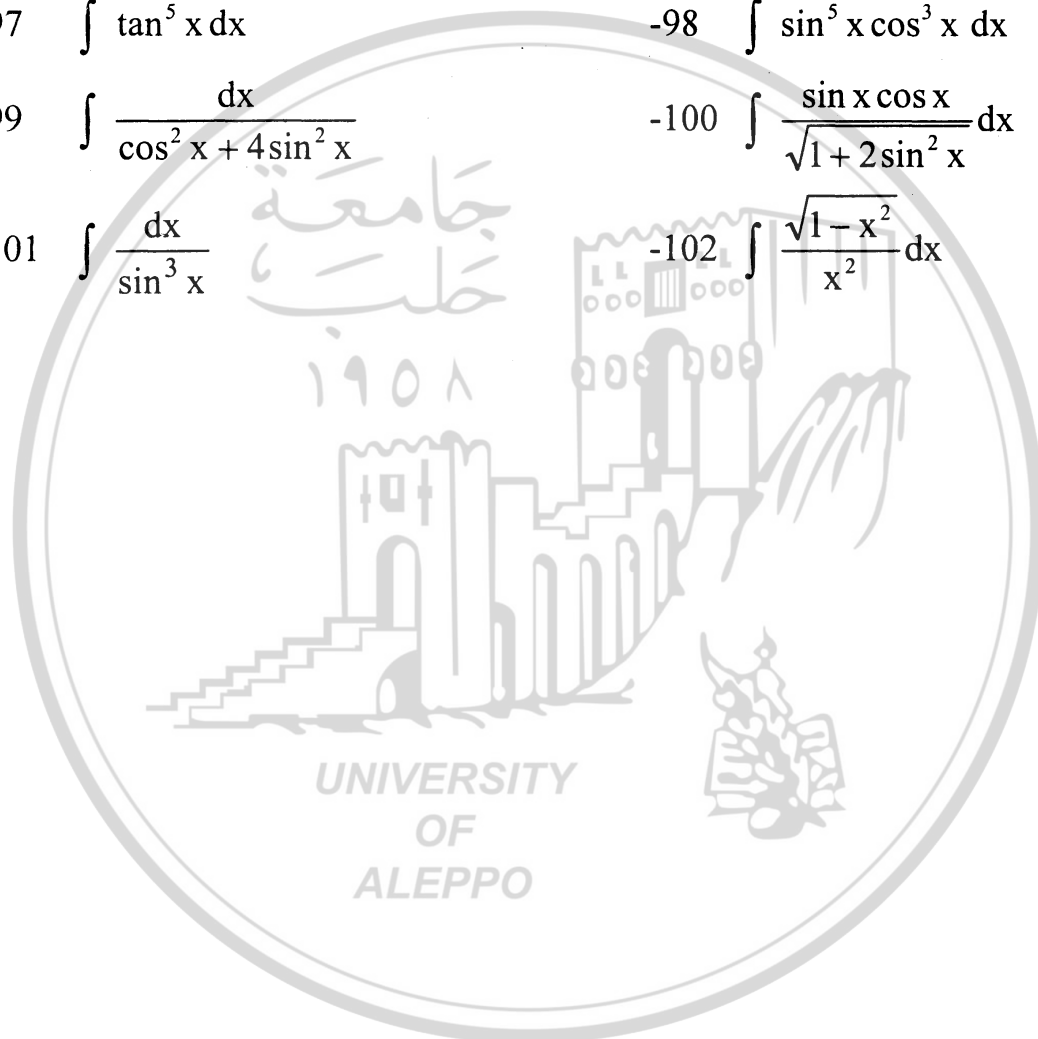
$$-98 \quad \int \sin^5 x \cos^3 x \, dx$$

$$-99 \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}$$

$$-100 \quad \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + 2 \sin^2 x}} \, dx$$

$$-101 \quad \int \frac{dx}{\sin^3 x}$$

$$-102 \quad \int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} \, dx$$



2-10- التكامل المحدد :

2-10-1- المفهوم الهندسي للتكامل المحدد :

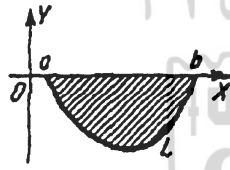
$$\int_a^b f(x) dx$$

نأخذ التكامل :

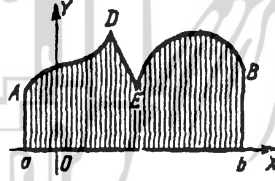
الذي تكون حدوده السفلى أقل من العليا ($a > b$) (شكل 2-1)

إذا كان التابع $f(x)$ ضمن المجال (a, b) موجباً فإن التكامل يساوي عددياً المساحة المحددة يساراً بالمخطط المستقيم $x = a$ ويميناً بالخط $x = b$ ومن الأعلى بالمنحني $f(x)$ ومن الأسفل بالمحور ox أي $(aADEBb)$ كما هو مبين بالشكل (2-1) .

إذا كان التابع $f(x)$ ضمن المجال (a, b) سالباً كما هو مبين بالشكل (2-2) فإن قيمة التكامل تكون سالبة ولكنها بقيمتها المطلقة تمثل المساحة الموصوفة حدودها أعلاه. إلا أن المنحني $f(x)$ يصبح حدودها السفلى والمحور ox من الأعلى .



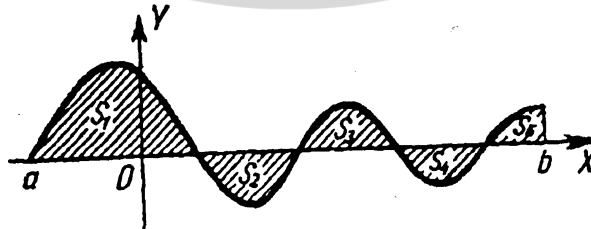
الشكل (2-2)



الشكل (2-1)

نفرض الآن أن $f(x)$ يغير إشارته في المجال (a, b) مرة أو عدة مرات كما هو مبين بالشكل (2-3) . عندئذ يكون التكامل مساوياً للفرق بين عددين أحدهما (وهو المطروح منه) يمثل المساحة التي تغطيها الإحداثيات y الموجبة والثاني (المطروح) يمثل المساحة التي تغطيها الإحداثيات y السالبة مثلاً بالنسبة للحالة المبينة في الشكل (2-3) يكون :

$$\int_a^b f(x) dx = (S_1 + S_3 + S_5) - (S_2 + S_4)$$



الشكل (2-3)

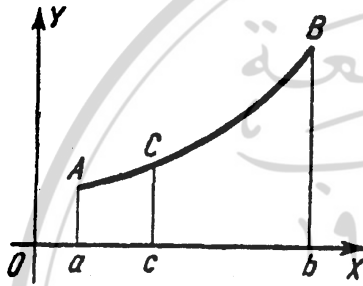
2-10-2- خواص التكامل المحدد :

إن أهم خواص التكامل المحدد هي :

1- عند تبديل نهايتي التكامل إحداهما بالأخرى يحافظ التكامل على قيمته المطلقة ولكنه يغير إشارته:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2- يمكن تقطيع مجال التكامل (a,b) إلى أكثر من مجال فلو قسمنا المجال إلى مجالين عند النقطة C يكون :



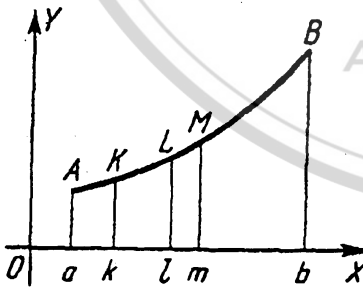
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

يوضح الشكل (2-4) هذه الخاصية
وتكون هذه الخاصية (aABb=aACc+cCBb)

الشكل (2-4)

صحيحة كذلك عندما تقع C خارج المجال (a,b) هذا ويمكن تعميم هذه الخاصية إذ يمكننا أخذ عدة نقاط تقسيم فلو أخذنا مثلاً ثلاث نقاط k,l,m يكون لدينا :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^k f(x)dx + \int_k^l f(x)dx + \int_l^m f(x)dx + \int_m^b f(x)dx$$



الشكل (2-5)

إن ترتيب النقاط غير مهم بل يهمنا عملياً الحالة التي تؤخذ فيها النقاط a,k,l,m,b بترتيب تصاعدي كما هو مبين بالشكل (2-5) أو تنازلي .

3- تكامل المجموع الجبري لعدد معين من الحدود يساوي المجموع الجبري لتكاملات الحدود كل على حدة . مثلاً عندما تكون لدينا ثلاثة حدود يكون :

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_3(x) dx$$

4- يمكن إخراج المقدار الثابت خارج التكامل :

$$\int_a^b mf(x) dx = m \int_a^b f(x) dx$$

2-11- طول قوس المنحني المستوي :

يعطى الطول S للقوس AB للمنحني المستوي $y = f(x)$ (بالإحداثيات المتعامدة)

بالعلاقة :

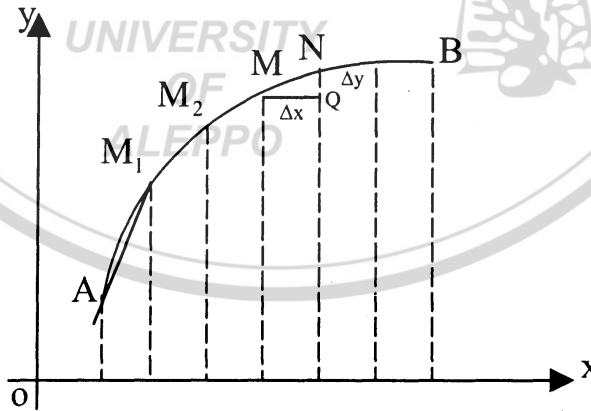
$$S = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

يعني الرمز (A) و (B) أنه كنهائي تكامل .

كما هو مبين بالشكل (2-6) القوس $\overline{MN}$ المتناهي في الصفر مكافئ للوتر MN

حيث:

$$\Delta S = MN = \sqrt{MQ^2 + QN^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \approx \sqrt{dx^2 + dy^2}$$



الشكل (2-6)

وحين يتناهي ΔS إلى الصفر $\Delta S \rightarrow ds$ يكون $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

غالباً ما يكون من الأفضل أن يعطى طول القوس بالعلاقة :

ومنه :

$$S_A^B = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_A^B \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$S = \int_A^B \sqrt{1 + y'^2} dx$$

فنكتب :

أما في حالة إعطاء المنحني بدلالة علاقاته الوسيطة فإن طول المنحني في هذه الحالة يعطى بالعلاقة :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

حيث t المتحول الوسيط .

12-2- أمثلة محلولة على التكامل المحدد والتطبيقات الهندسية عليه :

مثال (1) :

$$I = \int_0^1 \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$$

أوجد

الحل :

$$1+x^2 = u$$

بفرض

$$2x dx = du$$

يكون :

من أجل :

$$x = 0$$

$$u = 1$$

$$x = 1$$

$$u = 2$$

إذاً :

$$I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{u} \right]_1^2$$

$$I = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - 1 \right] = \frac{1}{4}$$

مثال (2) :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{1 + \sin^2 x}$$

أوجد

الحل :

$$\cos x \, dx = d(\sin x)$$

نلاحظ أن :

$$\sin x = u$$

لذا نفرض :

من أجل :

$$x = 0$$

$$u = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$u = 1$$

ويكون :

$$I = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = [\arctan u]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

مثال (3) :

أوجد

$$I = \int_0^1 x \arctan x \, dx$$

الحل :

لإنجاز هذا التكامل نطبق طريقة التكامل بالتجزئة .

$$x \, dx = du$$

$$\arctan x = v$$

بفرض :

إذاً :

$$u = \frac{x^2}{2}$$

$$dv = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2} \arctan x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x^2)} dx$$

$$I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

$$I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} [x - \arctan x]_0^1$$

$$I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

مثال (4) :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x dx}{1 + \cos x}$$

أوجد :

الحل :

$$\sin^3 x = \sin x \sin^2 x = \sin x (1 - \cos^2 x)$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x (1 - \cos^2 x)}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x (1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \cos x} dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x (1 - \cos x) dx$$

$$du = -\sin x dx \quad \text{يكون} \quad \cos x = u$$

بفرض :

من أجل :

$$x = 0$$

$$u = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$u = 0$$

وبالتالي :

$$I = \int_1^0 -(1 - u) du = \int_1^0 (u - 1) du$$

$$I = \left[\frac{u^2}{2} - u \right]_1^0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

مثال (5):

$$I = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$$

أوجد :

الحل :

لنضرب الصورة والمخرج بمرافق المخرج $\sqrt{1+x} - \sqrt{x}$ فيكون :

$$I = \int_0^3 \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}}{1+x-x} dx = \int_0^3 (1+x)^{1/2} dx - \int_0^3 x^{1/2} dx$$

$$I = \frac{2}{3} \left[(1+x)^{3/2} - x^{3/2} \right]_0^3$$

$$I = \frac{2}{3} (8 - 3\sqrt{3}) - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} (7 - 3\sqrt{3})$$

مثال (6):

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x \cos x dx}{1 + \cos^2 2x}$$

أوجد

الحل :

$$dt = -2 \sin 2x dx \quad \text{يكون}$$

$$\cos 2x = t \quad \text{بفرض}$$

$$dt = -4 \sin x \cos x dx$$

ولدينا :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1-t}{2}$$

$$\sin^3 x \cos x dx = \sin^2 x \sin x \cos x dx = \frac{1-t}{2} \left(\frac{-dt}{4} \right)$$

من أجل :

$$x = 0$$

$$t = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

$$t = 0$$

وبالتالي :

$$I = - \int_1^0 \frac{(1-t)dt}{8(1+t^2)} = \frac{1}{8} \left[\int_0^1 \frac{-tdt}{1+t^2} + \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \right]$$

$$I = \frac{1}{8} \left[-\frac{1}{2} \log(1+t^2) \right]_0^1 + \frac{1}{8} [\arctan t]_0^1$$

$$I = \frac{1}{8} \left(-\frac{\log 2}{2} \right) + \frac{1}{8} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{16} \left(\frac{\pi}{2} - \log 2 \right)$$

مثال (7) :

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$$

أوجد :

الحل :

يمكن أن نطبق التكامل بالتجزئة على التكامل المحدود مباشرة بالاعتماد على

العلاقة:

$$\int_{x_1}^{x_2} u dv = [uv]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} v du$$

يكون تطبيق هذه العلاقة أفضل من إجراء حساب مسبق للتكامل غير المحدود خصوصاً عندما نجري عملية التكامل بالتجزئة أكثر من مرة .

لذا من أجل هذا المثال نفرض أن :

$$u = x \quad dv = \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = d \left[-\frac{1}{2(1+x^2)} \right]$$

فتجد أن :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\sqrt{3}} x d \left[-\frac{1}{2(1+x^2)} \right] = \left[-\frac{x}{2(1+x^2)} \right]_0^{\sqrt{3}} + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{2(1+x^2)} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{2} \arctan \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{6} = 0.307 \end{aligned}$$

مثال (8) :

$$I = \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx \quad \text{أوجد :}$$

الحل :

بتطبيق طريقة التكامل بالتجزئة نجد :

$$I = \int_0^{\pi/2} x \, d(-\cos x) = [-x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$$

يؤول الحد الأول إلى الصفر ونحصل على :

$$I = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$$

مثال (9) :

$$\int_5^{13} \sqrt{2x-1} \, dx$$

أوجد

الحل :

لإيجاد هذا التكامل سنعتمد على طريقة تغيير المتحول فنفرض أن :

$$u = 2x - 1$$

فيكون :

$$x = \frac{u+1}{2}$$

بالتعويض نجد :

$$\sqrt{2x-1} \, dx = \frac{1}{2} u^{1/2} du$$

إن حدود التكامل $x_1 = 5$ و $x_2 = 13$ لا تمثل حدود المتحول الجديد u المقابلة بل لابد من تغيير النهايتين $x_1 = 5$, $x_2 = 13$ بالنهايتين الجديدتين u_1, u_2 طبقاً للعلاقة $u = 2x - 1$ وعليه يكون :

$$u_1 = 2x_1 - 1 = 9$$

$$u_2 = 2x_2 - 1 = 25$$

وبالتالي نحصل :

$$\int_5^{13} \sqrt{2x-1} dx = \int_9^{25} \frac{1}{2} u^{1/2} du = \left[\frac{1}{3} u^{3/2} \right]_9^{25} = 32,67$$

مثال (10) :

$$\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

أوجد

الحل :

نكتب الصيغة المكاملة بالشكل :

$$\sqrt{a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)} = a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2}$$

فنعبر :

$$\frac{x}{a} = \sin t \rightarrow \cos t = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2}$$

$$dx = a \cos t dt$$

ويكون :

وتصبح العلاقة المكاملة بالشكل :

$$a^2 \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \pm a^2 \cos^2 t dt$$

وبما أن t تمثل زاوية فتؤخذ الحدود العليا للتكامل باعتبار وضع t في الربع الأول أو الربع الرابع، وتؤخذ الحدود السفلى على اعتبار وضع t في الربع الثاني أو الربع الثالث .

ويجب أن نختار الحدود الجديدة t_1, t_2 للتكامل بحيث يكون :

$$-a = a \sin t_1$$

$$+a = a \sin t_2$$

$$t_1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$t_2 = \frac{\pi}{2} \quad \text{وهذا ممكن وبشكلين ، إذ يمكن أن نأخذ :}$$

عندئذ تتغير t في مجال الربعين الرابع والأول ، لذا سنأخذ الإشارة العليا في العلاقة السابقة $(+ a^2 \cos^2 t)$ فنحصل على :

$$\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right)_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\pi a^2}{2}$$

ويمكن كذلك أن نأخذ :

$$t_1 = \frac{3\pi}{2} \quad t_2 = \frac{\pi}{2}$$

ولكن سنأخذ الإشارة السفلى في العلاقة السابقة $(-a^2 \cos^2 t)$ فنحصل على :

$$\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = -a^2 \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi a^2}{2}$$

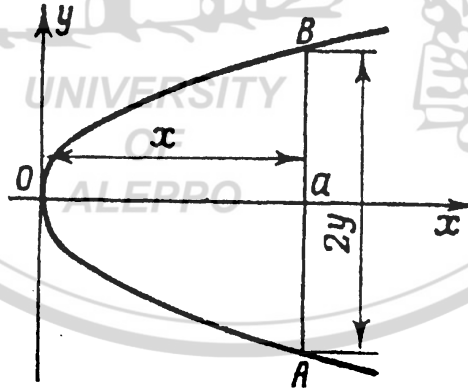
لو كنا أخذنا الإشارة العليا في هذه الحالة لحصلنا على نتيجة غير صحيحة وهي

$$-\frac{\pi a^2}{2}$$

مثال (11) :

احسب المساحة S لجزء OAB من القطع المكافئ $y^2 = 2Px$ المبين في

الشكل (2-7).



الشكل (2-7)

الحل :

من العلاقة المعلومة للقطع المكافئ نجد أن : $y = \pm \sqrt{2Px}$

ونأخذ نقط المنحني الواقعة فوق المحور OX قيماً موجبة أما النقط الواقعة تحته فتأخذ قيماً سالبة وبما أن المنحني متناظر بالنسبة للمحور OX فيكفي حساب مساحة نصف الجزء OAB ونضاعف النتيجة . نهائياً تغير المتحول المستقل هما من الصفر إلى X :

$$\frac{S}{2} = S_1 = \int_0^x \sqrt{2Px} dx = \sqrt{2P} \int_0^x x^{1/2} dx$$

$$S_1 = \sqrt{2P} \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^x = \frac{2}{3} \sqrt{2p} x \sqrt{x}$$

$$S_1 = \frac{2}{3} x \sqrt{2px} = \frac{2}{3} xy$$

$$S = 2S_1 = 2 \frac{2}{3} xy$$

وتصبح المساحة الكلية :

$$S = \frac{2}{3} x 2y$$

أو :

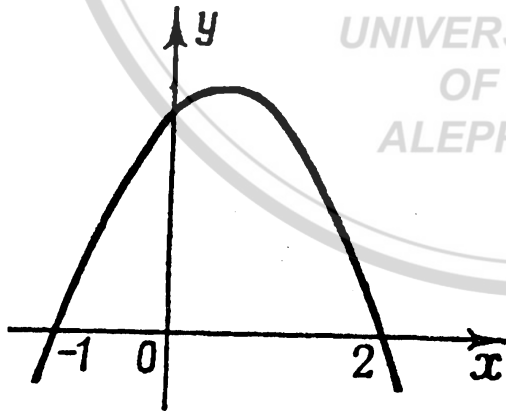
ونلاحظ أن $2y$ عبارة عن طول الوتر لهذا الجزء وأن x هو بُعد النقطة O عن هذا الوتر (طول السهم) .
وعلى هذا فإن مساحة جزء القطع المكافئ المحصور بين الذروة وأي وتر عمودي على محوره تساوي ثلثي مساحة المستطيل المكون من هذا الوتر وسهمه .
مثال (12) :

احسب المساحة المحصورة بالمنحني :

$$y = 2 + x - x^2$$

والمحور x المبين بالشكل (2-8) .

الحل :



الشكل (2-8)

نلاحظ أن المساحة المطلوبة محددة

بنقطتي تقاطع المنحني y مع المحور x .

وبجعل $y = 0$ في المعادلة :

$$y = 2 + x - x^2$$

نحصل على نقطتي تقاطعهما $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ كما هو مبين بالشكل (2-8) .

ويكون :

$$S = \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2$$

$$S = 4,5$$

ومنه :

هذا ويمكن التحقق من هذه النتيجة بالحساب المباشر حسب القاعدة المذكورة في

المثال (11) السابق .

فبالعودة إلى القطع نرى محوره يمر بالنقطة $x = \frac{1}{2}$ ويقابلها $y = 2,25$ وهو السهم

$$S = \frac{2}{3}(2,25)(3) = 4,5$$

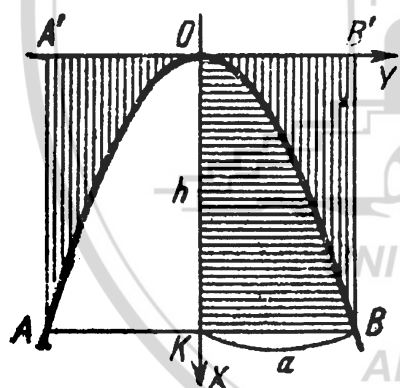
وطول الوتر هو $3 - (-1) = 3$ فيكون :

مثال (13) :

أوجد مساحة القطع المكافئ AOB المبين بالشكل (2-9) الذي قاعدته $AB=2a$

وارتفاعه $KO = h$.

الحل :



الشكل (2-9)

نختار المحورين كما في الشكل . نقسم القطع

المكافئ AOB إلى مساحتين متساويتين OKB,

OKA .

وتكون مساحة OKB هي :

$$S_1 = \int_0^h y dx$$

يرتبط الإحداثيان x, y أحدهما بالآخر حسب العلاقة :

$$y^2 = 2Px$$

نجد الثابت P من شرط مرور القطع المكافئ بالنقطة $B(h, a)$.

$$a^2 = 2Ph$$

وبالتالي :

$$y = \frac{a}{\sqrt{h}} \sqrt{x}$$

بالتعويض بعلاقة التكامل نجد :

$$S_1 = \frac{a}{\sqrt{h}} \int_0^h \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} a h$$

$$S = 2S_1 = \frac{2}{3} (2a) h$$

وتكون المساحة الكلية :

مثال (14) :

أوجد مساحة الشكل المحصور بين القطعين المكافئين :

$$y^2 = 2Px$$

$$x^2 = 2Py$$

كما هو مبين بالشكل (2-10) .

الحل :

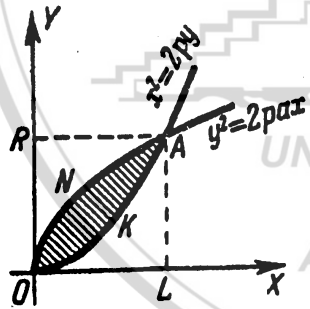
المساحة S هي الفرق بين المساحتين ONAL و OKAL .

يتقاطع القطعان المكافئان في النقطتين

O(0,0) و A(2P,2P) ويكون لدينا :

$$S = \int_0^{2P} \sqrt{2Px} dx - \int_0^{2P} \frac{x^2}{2P} dx$$

$$S = \frac{4}{3} P^2 = \frac{(2P)^2}{3}$$



الشكل (2-10)

أي أن المساحة S تساوي ثلث مساحة المربع

. OLAR

مثال (15) :

أوجد مساحة القطع الناقص :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

الحل :

$$S = 2 \int_{-a}^{+a} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

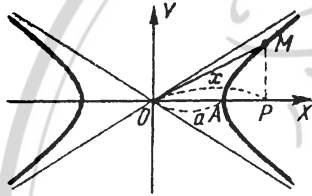
ومنه :

$$S = \pi ab$$

مثال (16) :

أوجد المساحة المحددة بين القطع الزائد والمحور X وذلك بفرض أن علاقة القطع

الزائد هي :



الشكل (2-11)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

الحل :

كما هو مبين بالشكل (2-11) لدينا :

$$AMP = \int_a^x \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} dx$$

$$AMP = \frac{b}{2a} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{ab}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

$$= \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)$$

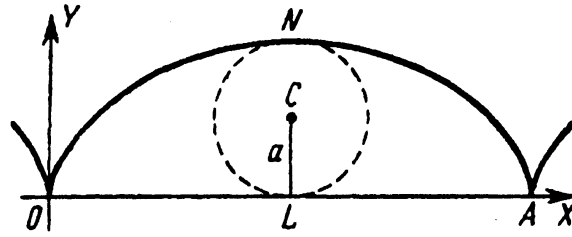
مثال (17) :

أوجد مساحة السيكلويد المعين بالعلاقتين الوسيطيتين :

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

الحل :



الشكل (2-12)

من الشكل (2-12) يكون :

$$\begin{aligned} \text{ONALO} &= \int_0^{2\pi} y dx = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt \\ \text{ONALO} &= 3\pi a^2 \end{aligned}$$

أي أن مساحة السيكلويد أكبر بثلاث مرات من مساحة الدائرة المولدة .

مثال (18) :

أوجد طول قوس أحد فرعي السيكلويد المعين بالعلاقتين الوسيطيتين :

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

الحل :

وجدنا سابقاً أن طول المنحني المعطى بدلالة علاقته الوسيطية يعطى بالعلاقة :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

فيكون :

$$\begin{aligned} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} &= a \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} \\ &= a \sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right| \end{aligned}$$

وبالتالي :

$$S = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 8a$$

فنجـد أن طول أحد فرعي السيكلويد يساوي أربعة أضعاف قطر الدائرة المولدة .

إذا حسبنا الطول الكلي لفرعي السيكلويد معاً حسب العلاقة :

$$S = \int_0^{4\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt$$

فسنحصل على صفر وسبب هذه النتيجة الخاطئة هو أنه في المجال $(2\pi, 4\pi)$.

يكون :

$$\left| \sin \frac{t}{2} \right| = -\sin \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2}$$

وليس :

ملاحظة :

عندما نقيس مساحة أرض متعرجة على الخارطة معدة لإنشاء بناء عليها فإننا ننطلق آنذاك عملياً من أن القوس والوتر متكافئان . بذلك نرى أن هذه الخاصة تتبادر للذهن نتيجة التجربة اليومية. ولكن إذا لم نرد أخذ هذه الخاصة كبديهية ورغبنا في إثباتها رياضياً فإنه يترتب علينا الاتفاق على تعريف ما لطول القوس .

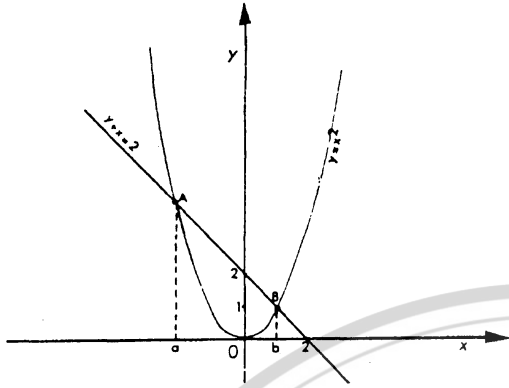
ويعرف هذا المفهوم عادة بالشكل الآتي :

تعريف : طول قوس المنحني المستوي أو الفراغي هو النهاية التي يؤول إليها محيط الخط المنكسر المرسوم داخل القوس، عندما يزداد عدد أضلاع الخط المنكسر بلا حدود بحيث يؤول إلى الصفر . طول كل من الأضلاع العديدة وكل جزء من المنحني يغلف الضلع المنتهـي في الصفر .

انطلاقاً من هذا التعريف يمكننا القول إن طول القوس الصغير يكافئ تقريباً الوتر

المقابل له .

مثال (19):



احسب المساحة المحصورة بين

المنحني: $y = x^2$ والمستقيم $y + x = 2$

الحل:

نحصل على نقاط التقاطع بين

المنحني والمستقيم بحل المعادلة:

$$x^2 = 2 - x$$

$$x = -2, \quad x = 1$$

فتجد:

وتكون المساحة المحصورة بين المنحني والمستقيم هي:

$$A = \int_{-2}^1 (2 - x) dx - \int_{-2}^1 x^2 dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx$$

$$A = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}$$

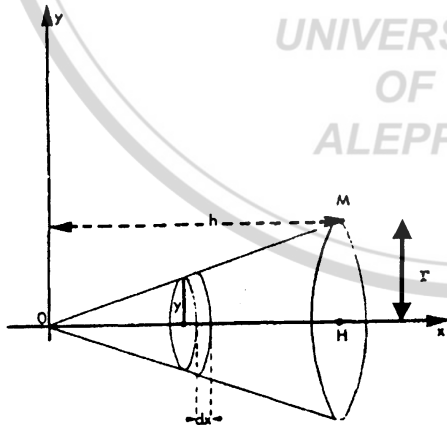
مثال (20):

أوجد الحجم الناتج عن دوران

المثلث OMH حول المحور OH المبين

بالشكل (2-14)

الحل:



الشكل (2-14)

عند دوران المثلث OMH حول

المحور OH ينتج لدينا مخروط العنصر

الحجمي التفاضلي فيه محدد بين مستويين.

المسافة بينهما dx وهما عموديان على المحور Ox ويمكن اعتبار هذا العنصر الحجمي كأسطوانة بارتفاع dx ونصف قطر y وبالتالي يكون حجم هذا العنصر الحجمي :

$$dv = \pi y^2 dx$$

$$y = \frac{r}{h} x \quad \text{فكون} \quad MH = r, \quad OH = h \quad \text{بفرض}$$

وبالتالي :

$$dv = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 dx$$

ويكون الحجم المطلوب هو :

$$v = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 dx$$

$$v = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

مثال (21) :

أوجد الحجم الناتج من دوران المنحني $y = e^x$ حول المحور x من أجل x تتحول بين : $x \rightarrow -\infty$ إلى $x = 0$ (الشكل 2-15).

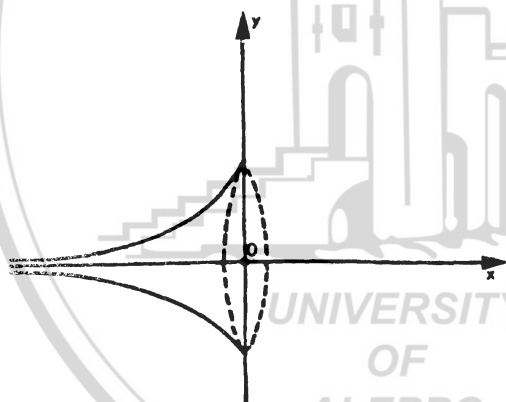
الحل : بنفس طريقة المثال (20)

السابق نجد :

$$v = \int_{-\infty}^0 \pi y^2 dx$$

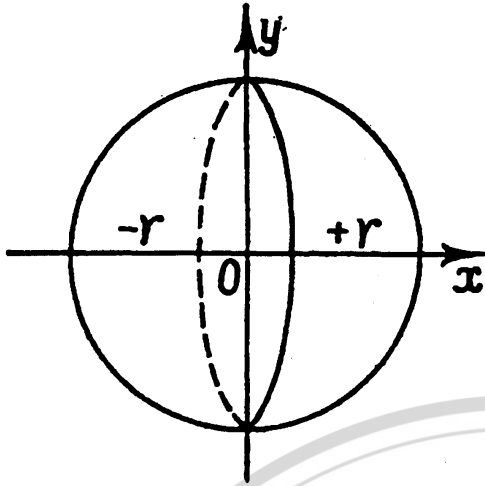
$$v = \int_{-\infty}^0 \pi e^{2x} dx$$

$$v = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_{-\infty}^0 = \frac{\pi}{2}$$



الشكل (2-15)

مثال (22) :



الشكل (2-16)

أوجد حجم الكرة التي نصف قطرها

r والناتجة عن دوران الدائرة :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

حول المحور OX كما في الشكل (2-16) .

الحل :

من المثالين السابقين لدينا :

$$v = \pi \int_{-r}^{+r} y^2 dx = 2\pi \int_0^{+r} (r^2 - x^2) dx$$

$$v = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

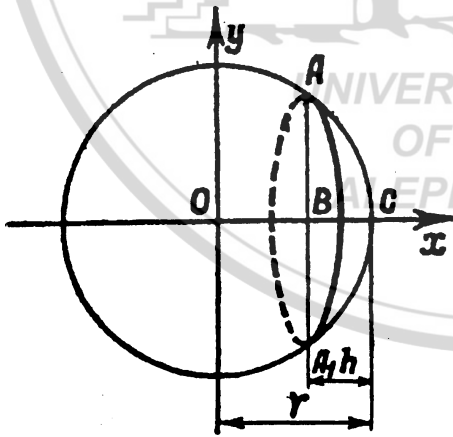
وبوضع هذا المقدار بالشكل :

$$v = \left(4\pi r^2 \right) \left(\frac{r}{3} \right)$$

نلاحظ أن حجم الكرة يساوي حاصل ضرب أربعة أمثال مساحة دائرتها الكبرى في

ثلث نصف قطرها .

مثال (23) :



الشكل (2-17)

أوجد حجم القبة الكروية المبين

بالشكل (2-17) .

الحل :

يسمى الجزء ACA_1 المقطوع من

الكرة بواسطة مستوي ما AA_1 بالقبة

الكروية.

افترض أن نصف قطر الكرة r وارتفاع القبة h (وهو بعد المستوى القاطع عن قمة الكرة)، فيكون حجم القبة الكروية :

$$v = \pi \int_{r-h}^r y^2 dx = \pi \int_{r-h}^r (r^2 - x^2) dx$$

$$v = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{r-h}^r$$

$$v = \pi \left\{ \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \left[r^2(r-h) - \frac{(r-h)^3}{3} \right] \right\}$$

$$v = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)$$

ويمكن أن نعتبر أن المقدار rh^2 هو مساحة دائرة نصف قطرها h وأن المقدار

$\left(r - \frac{h}{3} \right)$ ارتفاع بحيث يمكن اعتبار هذا الحجم

مكافئاً لحجم أسطوانة دائرية نصف قطر قاعدتها

h وارتفاعها $\left(r - \frac{h}{3} \right)$.

مثال (24) :

أوجد حجم جذع المخروط المبين بالشكل (2-18)

الحل :

جذع المخروط الذي ارتفاعه h الشكل (2-18) ونصفا قطر قاعدته الكبرى R ونصفا

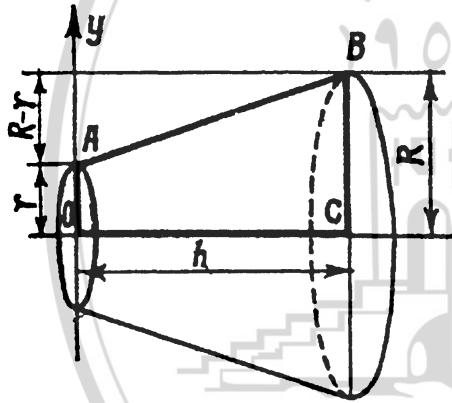
قطر قاعدته الصغرى r وهو ينتج عن دوران شبه المنحرف $OABC$ حول المحور OC

(نلاحظ أن OA , OC ينطبقان على كل من محوري الإحداثيات ox , oy).

لنكتب معادلة المستقيم AB :

$$y = \frac{R-r}{h} x + r$$

ويكون حجم جذع المخروط :



الشكل (2-18)

$$v = \pi \int_0^h \left(\frac{R-r}{h} x + r \right)^2 dx$$

بفرض :

$$\frac{R-r}{h} x + r = u$$

نجد أن :

$$dx = \frac{h}{R-r} du$$

ويكون :

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{R-r}{h} x + r \right)^2 dx &= \frac{h}{R-r} \int u^2 du = \frac{h}{R-r} \frac{u^3}{3} + C \\ &= \frac{h}{3(R-r)} \left(\frac{R-r}{h} x + r \right)^3 + C \end{aligned}$$

ويكون :

$$v = \frac{\pi h}{3(R-r)} \left[\left(\frac{R-r}{h} x + r \right)^3 \right]_0^h$$

$$v = \frac{\pi h}{3(R-r)} \left[\left(\frac{R-r}{h} h + r \right)^3 - r^3 \right]$$

$$v = \frac{\pi h (R^3 - r^3)}{3(R-r)} = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$$

أو :

$$v = \frac{1}{3} \pi R^2 h + \frac{1}{3} \pi r^2 h + \frac{1}{3} \pi R r h$$

ومنه نجد :

أن حجم جذع المخروط يساوي مجموع حجوم ثلاثة مخاريط كاملة ذات ارتفاع موحد
هو نفس ارتفاع جذع المخروط أما قواعدها فهي : للأول القاعدة الكبرى لجذع المخروط
وللثاني القاعدة الصغرى لجذع المخروط وللثالث المتوسط الهندسي للقاعدتين .

2-13- تمارين غير محلولة على التكامل المحدد :

احسب التكاملات المحدودة التالية :

-1 $\int_2^3 \frac{dx}{x^2}$

-2 $\int_1^4 \frac{32 dx}{x^3}$

-3 $\int_1^2 \sqrt{x} dx$

-4 $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

-5 $\int_1^4 \sqrt{2x-2} dx$

-6 $\int_1^3 \frac{dx}{1+x^2} dx$

-7 $\int_0^1 e^x dx$

-8 $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$

-9 $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

-10 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$

-11 $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x dx$

-12 $\int_0^1 \sqrt{9-4x^2} dx$

-13 $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$

-14 $\int_0^1 (x^3 - 2x + 5) e^{-\frac{x}{2}} dx$

-15 $\int_0^1 x^2 e^x dx$

-16 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

17- احسب مساحة نصف موجة واحدة من منحنى جيبى علاقته :

$$y = \sin 2x$$

18- احسب المساحة المحصورة بالقطع الزائد المتساوي الأضلاع $xy = 1$ بين الإحداثيين

$$x = a \text{ و } x = 1 \quad (a > 1).$$

19- احسب بطريقة التكامل المساحة المشكلة من تقاطع المستقيمات الآتية :

$$x = 3$$

$$y = 0$$

$$y = 4x$$

$$x = 3 \quad y = 0 \quad y = 2x + 1 \quad -20$$

$$x = 3 \quad x = 1 \quad y = 0 \quad 2y - 3x - 5 = 0 \quad -21$$

$$x = -4 \quad y = 0 \quad x + 2y + 8 = 0 \quad -22$$

- احسب المساحة المحصورة بين كل من المنحنيات التالية :

$$y = 0 \quad y = 2x - x^2 \quad -23$$

$$y = 0 \quad y = x^2 - x \quad -24$$

$$y = 2x \quad y = x^3 \quad -25$$

$$y^2 = x^3 \quad y^2 = 4x \quad -26$$

$$y = x + 1 \quad y^2 = 4(x + 1) \quad -27$$

$$y = x + 4 \quad y^2 = 2(x + 4) \quad -28$$

$$y = -x \quad y = 2x - x^2 \quad -29$$

$$x = 8 \quad y = -2 \quad y^3 = x \quad -30$$

احسب المساحة المحصورة بين تقاطع المنحنيات التالية :

$$2x^2 - 9y + 36 = 0 \quad 4x^2 - 9y + 18 = 0 \quad -31$$

$$x^2 - 12x + 2y + 32 = 0 \quad 5x^2 - 60x + 4y + 160 = 0 \quad -32$$

$$y^2 = 2x \quad x^2 + y^2 = 8 \quad -33$$

$$y^2 = 4(x + 1) \quad x^2 + y^2 = 16 \quad -34$$

-35 احسب مساحة جزء من القطع المكافئ $x^2 - 12y = 0$ المحصور بين منحنى القطع

والمستقيم المار بنقطة الأصل 0 وبنقطة على القطع فاصلتها $x = 6$.

36- احسب مساحة جزء من القطع المكافئ $4y - x^2 = 0$ المقطوع بالوتر الواصل بين نقطتين على هذا القطع فاصلتهما $x = 2$, $x = 4$.

37- أوجد حجم الجسم المتولد من دوران جزء من قطع مكافئ معادلته $y^2 = x$ حول المحور OX وارتفاعه x .

38- احسب الحجم الناتج من دوران موجة واحدة من منحنٍ جيبي علاقته $y = \sin x$ حول المحور OX .

39- احسب المساحة المحدودة بتقاطع المنحنيين :

$$y = x^2 \quad y = 2 - x^3$$

40- احسب المساحة المحددة بمنحني التابع $y = \ln x$ ومحور الفواصل والمستقيم $x = e$.

41- احسب طول القوس من منحنى التابع $y = 2\sqrt{x}$ والمحصورة بين نقطتين فاصلتهما $x = 1$, $x = 0$.

42- احسب طول القوس من منحنى التابع : $y = \ln x$ والمحصور بين نقطتين منه فاصلتهما $x = \sqrt{8}$, $x = \sqrt{3}$.

43- احسب الحجم المتولد من دوران الشكل المحصور بين منحنيي التابعين :

$$y = \sqrt{x} \quad y = x^2$$

حول المحور OX .

44- برهن أن الحجم المتولد من الدوران حول المحور OX للشكل المحدد بمنحني التابع :

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{والمستقيم} \quad x = 2a \quad \text{يساوي حجم كرة نصف قطرها} \quad a$$



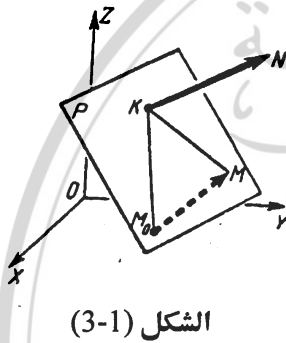


الفصل الثالث

الهندسة التحليلية في الفراغ

3-1- معادلة المستوي :

المستوي المار بالنقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ والعمودي على المتجه $\vec{N}$ (كما هو مبين بالشكل 3-1) حيث :



$$\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

يمكن استنتاج معادلة هذا المستوي من الجداء السلمي للشعاعين المتعامدين :

$$\vec{M_0M} \cdot \vec{N} = 0$$

وبالتالي يكون :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

أو :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

حيث تمثل D المقدار الثابت الناجم عن فك العلاقة الأولى :

$$-(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$

ويسمى المتجه $\vec{N}$ بالمتجه العمودي على المستوي P .

إن الإحداثيات x,y,z لأية نقطة من هذا المستوي تحقق معادلته، وكل نقطة ذات إحداثيات تحقق معادلة المستوي يجب أن تقع عليه ، أما النقاط التي لا تحقق إحداثياتها معادلته فلا تقع على هذا المستوي .

من جهة أخرى كل معادلة من الدرجة الأولى :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

حيث A, B, C ثوابت غير معدومة في آن واحد تمثل معادلة مستوي، وتكتب معادلة المستوي بالشكل الشعاعي على النحو التالي :

$$\vec{N} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

حيث $\vec{r}_0, \vec{r}$ هما متجهها موضع النقطتين M_0, M .

مثال :

المستوي المار بالنقطة $(2, 1, -1)$ والعمودي على المتجه :

$$\vec{N} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

يعبر عنه بالمعادلة :

$$-2(x - 2) + 4(y - 1) + 3(z + 1) = 0$$

أو :

$$-2x + 4y + 3z + 3 = 0$$

ملاحظة : يمكن أن تمثل نفس المستوي بعدة معادلات تكون فيها جميع المعاملات المتناظرة متناسبة كما تكون الحدود المطلقة كذلك متناسبة .

3-2- الحالات الخاصة لوضع المستوي بالنسبة لمجموعة الإحداثيات :

أ - المعادلة :

$$Ax + By + Cz = 0$$

حيث الحد المطلق $D = 0$ تمثل مستويًا ماراً بنقطة الأصل .

ب - المعادلة :

$$Ax + By + D = 0$$

حيث $C = 0$ تمثل مستويًا موازيًا للمحور OZ وتمثل المعادلة :

$$Ax + Cz + D = 0$$

مستوياً موازياً للمحور oy .

والمعادلة :

$$By + Cz + D = 0$$

تمثل مستوياً موازياً للمحور ox .

ومن المفيد أن نتذكر الآتي : ((إذا لم يرد في المعادلة الحرف z فإن المستوي يوازي

المحور oz وكذلك هو الأمر بالنسبة للمحورين ox و oy .

مثال :

$$x + y - 1 = 0$$

تمثل المعادلة

مستوياً موازياً للمحور oz .

ج - المعادلة

$$Ax + D = 0$$

حيث $B = 0$, $C = 0$ تمثل مستوياً موازياً لكل من المحورين oz , oy أي تمثل

مستوياً موازياً للمستوي الإحداثي yoZ وب نفس الطريقة تمثل المعادلة :

$$By + D = 0$$

مستوياً موازياً للمستوي xoz . وتمثل المعادلة :

$$Cz + D = 0$$

مستوياً موازياً للمستوي xoy .

د - المعادلات :

$$x = 0 , \quad y = 0 , \quad z = 0$$

تمثل على التوالي المستويات xoy , xoz , yoZ .

3-3- شرط توازي مستويين :

إذا كان المستويان :

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

متوازيين فإن المتجهين $\vec{N_1}, \vec{N_2}$ العموديين عليهما متوازيان (وبالعكس).

لذلك فإن شرط التوازي (وهو الشرط اللازم والكافي) هو تناسب الأمثال :

وهكذا :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}$$

مثال (1) :

المستويان :

$$2x - 3y - 4z + 11 = 0$$

$$-4x + 6y + 8z + 36 = 0$$

متوازيان لأن :

$$\frac{-4}{2} = \frac{6}{-3} = \frac{8}{-4}$$

مثال (2) :

المستويان :

$$2x - 3z - 12 = 0$$

$$4x + 4y - 6z + 7 = 0$$

$$B_1 = 0$$

$$B_2 \neq 0$$

ملاحظة : إذا كانت معاملات الإحداثيات المتناظرة متناسبة ومتناسبة أيضاً مع الحدين

المطلقين ، أي إذا كانت :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1}$$

فإن المستويين مُنطبقان. فالمعادلتان :

$$3x + 7y - 5z + 4 = 0$$

$$6x + 14y - 10z + 8 = 0$$

مثلاً ، تمثّلان نفس المستوى إذا إن المعادلة الثانية ليست سوى المعادلة الأولى إذا ضربنا جميع حدودها بالعدد 2 .

3-4- شرط تعامد مستويين :

إذا كان المستويان :

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

متعامدين ، فإن متجهيهما العموديين :

$$\vec{N}_1 = A_1 \vec{i} + B_1 \vec{j} + C_1 \vec{k}$$

$$\vec{N}_2 = A_2 \vec{i} + B_2 \vec{j} + C_2 \vec{k}$$

يكونان كذلك متعامدين (والعكس بالعكس)

وشرط التعامد كما نعلم هو :

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

مثال (1):

المستويان :

$$3x - 2y - 2z + 7 = 0$$

$$2x + 2y + z + 4 = 0$$

متعامدان لأن :

$$(3)(2) + (2)(-2) + (-2)(1) = 0$$

مثال (2):

المستويان :

$$3x - 2y = 0$$

$$z = 4$$

$$(3)(0) + (-2)(0) + (0)(1) = 0$$

متعامدان لأن :

3-5- الزاوية بين مستويين :

إن الزاوية بين مستويين هي نفسها الزاوية بين المتجهين العموديين عليهما وليكن مثلاً المستويان:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

فالزاوية ϕ بين هذين المستويين هي الزاوية بين المتجهين $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ العموديين عليهما .

$$\vec{N}_1 = A_1 \vec{i} + B_1 \vec{j} + C_1 \vec{k}$$

$$\vec{N}_2 = A_2 \vec{i} + B_2 \vec{j} + C_2 \vec{k}$$

وبالتالي يكون :

$$\cos \phi = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

إذا أخذنا الإشارة العليا (+) فإننا نحصل على الزاوية $\cos(\vec{N}_1, \vec{N}_2)$ وإذا أخذنا السفلى (-) نحصل على الزاوية $\cos(180^\circ - (\vec{N}_1, \vec{N}_2))$

مثال :

أوجد الزاوية بين المستويين :

$$x - y + \sqrt{2}z + 2 = 0$$

$$x + y + \sqrt{2}z - 3 = 0$$

لدينا :

$$\cos \phi = \pm \frac{(1)(1) + (-1)(1) + (\sqrt{2})(\sqrt{2})}{\sqrt{1+1+2} \sqrt{1+1+2}} = \frac{1}{2}$$

فتحصل على :

$$\phi = 120^\circ \text{ أو } \phi = 60^\circ$$

إذا كان المتجه $\overline{N_1}$ يصنع مع المحاور ox , oy , oz الزوايا $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ويصنع المتجه $\overline{N_2}$ مع هذه المحاور الزوايا $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$.

فإن قيمة الزاوية ϕ بين المتجهين تعطى بالعلاقة :

$$\cos \phi = \pm (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2)$$

3-6- المستوي المار بنقطة معطاة والموازي لمستوي معطى بمعادلته

إن معادلة هذا المستوي هي :

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

وهو يمر بالنقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ويوازي المستوي المعرف بمعادلته :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

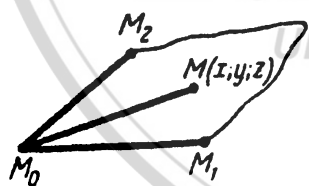
3-7- المستوي المار بثلاث نقاط :

إذا لم تكن النقط الثلاث :

$$M_2(x_2, y_2, z_2), M_1(x_1, y_1, z_1), M_0(x_0, y_0, z_0),$$

واقعة على نفس الخط المستقيم ، فإن المستوي المار بهذه النقط كما هو مبين بالشكل (3-2)

يمثل بالمعادلة :



الشكل (3-2)

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}$$

وتعبر هذه المعادلة على أن المتجهات

$$\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}$$

واقعة في مستوي واحد .

مثال :

لتكن النقط $M_0(1,2,3), M_1(2,1,2), M_2(3,3,1)$ وهي غير واقعة على استقامة

واحدة لأن المتجهين :

$$\overrightarrow{M_0M_2} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

غير متوازيين ، ويعطى المستوي $M_0M_1M_2$ بالمعادلة :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$x + z - 4 = 0$$

ملاحظة : إذا كانت النقط الثلاث M_0, M_1, M_2 واقعة على مستقيم واحد ، فإن معادلة المستوي السابق تصبح عندئذ متطابقة .

3-8- الأجزاء المقطوعة من المحاور :

إذا كان المستوي :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

لايوازي المحور x (أي إذا كانت $A \neq 0$ فإنه يقطع هذا المحور في نقطة تكون إحداثياتها :

$$x = a, \quad y = 0, \quad z = 0$$

$$a = -\frac{D}{A}$$

فتكون :

وكذلك الأمر بالنسبة للمحورين OZ , OY وتكون :

$$b = -\frac{D}{B}$$

(إذا كانت $B \neq 0$) و

$$c = -\frac{D}{C}$$

مثال :

$$3x + 5y - 4z - 3 = 0 \quad \text{يقطع المستوى :}$$

المحاور الإحداثية ox , oy , oz في النقاط a, b, c على الترتيب وتكون :

$$a = \frac{3}{3} = 1, \quad b = \frac{3}{5}, \quad c = -\frac{3}{4}$$

3-9- معادلة المستوى بدلالة نقاط تقاطعه مع المحاور الإحداثية :

إذا علمنا أن المستوى المراد معرفة معادلته يقطع المحاور الإحداثية ox , oy , oz في النقاط A , B , C على الترتيب ولا تنطبق إحداها على نقطة الأصل المبدأ (0) .

$$C(0,0,c) \quad B(0,b,0) \quad A(a,0,0) \quad \text{حيث :}$$

فيمكن التعبير عن معادلة المستوى بالشكل التالي :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

البرهان :

إذا عوضنا في هذه المعادلة $z = 0$, $y = 0$ تكون $x = a$ وهي النقطة A من المستوى.
 $z = 0$, $x = 0$ وتكون $y = b$ وهي النقطة B من المستوى.
 $z = c$, $x = 0$, $y = 0$ تكون $z = c$ وهي النقطة C من المستوى .

هذا ويمكن أن نحصل على معادلة المستوى السابق كمعادلة للمستوي المار بالنقط الثلاث $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$.

مثال :

اكتب معادلة المستوى :

$$3x - 6y + 2z - 12 = 0$$

بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور .

نجد أن :

$$a = \frac{12}{3} = 4 \quad b = \frac{12}{-6} = -2 \quad c = \frac{12}{2} = 6$$

وبذلك تكون معادلة المستوي بدلالة الأجزاء المقطوعة هي :

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{6} = 1$$

ملاحظة (1) : لا يمكن أن نمثل المستوي المار بنقطة الأصل بمعادلة بدلالة نقاط التقاطع مع المحاور لأن النقاط الثلاث ستكون واقعة في أحد المستويات الثلاثة المشكلة من المحاور ومعبرة عنه .

ملاحظة (2) : يمكن أن نعطي المستوي الموازي للمحور OX والذي يقطع المحور OY في B والمحور OZ في C بالمعادلة :

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

حيث b, c هما فاصلتا B, C على المحورين OY, OZ .

وبالمثل : فإن معادلة المستوي الموازي للمحور OY والذي يقطع المحورين الآخرين في A و C :

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$$

ومعادلة المستوي الموازي للمحور OZ ويقطع المحورين الآخرين في A, B :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

أما المستوي الموازي للمحورين X, Y ويقطع الثالث في النقطة C فتكون معادلته :

$$\frac{z}{c} = 1$$

حيث c فاصلة C على المحور OZ

وبالمثل تعطى معادلة المستويات الموازية للمحاور الأخرى مثنى مثنى أي :

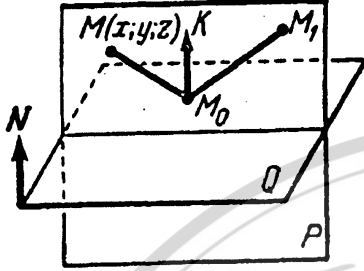
$$\frac{y}{b} = 1, \quad \frac{x}{a} = 1$$

10-3- المستوى المار بنقطتين والعمودي على مستوي معطى بمعادلته :

معادلة المستوى P المبين بالشكل (3-3) المار بالنقطتين :

$$M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$M_1(x_1, y_1, z_1)$$



الشكل (3-3)

والعمودي على المستوي Q المعطى بالمعادلة :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

هي المعادلة :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

وتبين هذه المعادلة أن المتجهات الثلاثة :

$$\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M_1}, \vec{N}$$

تقع في مستوي واحد .

مثال :

المستوي المار بالنقطتين $M_0(1,2,3), M_1(2,1,1)$ والعمودي على المستوي :

$$3x + 4y + z - 6 = 0$$

يعطى بالمعادلة :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2-1 & 1-2 & 1-3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

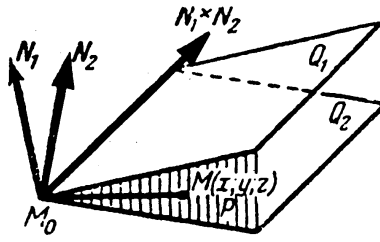
وبحل هذه المحددة نجد المعادلة :

$$x - y + z - 2 = 0$$

ملاحظة : في الحالة التي يكون فيها المستقيم M_0M_1 عمودياً على المستوي Q ، يكون

المستوي P غير محدد . ووفقاً لهذا تتحول المعادلة إلى متطابقة .

3-11- المستوى المار بنقطة معطاة والعمودي على مستويين غير متوازيين :



الشكل (3-4)

إن معادلة المستوي P المبين بالشكل (3-4) المار بالنقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ والعمودي على كل من المستويين (غير المتوازيين) Q_1, Q_2 المعطيين بالمعادلتين :

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

هي المعادلة :

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

وتبين هذه المعادلة أن المتجهات الثلاثة :

$$\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}$$

تقع في مستوي واحد .

مثال :

المستوي المار بالنقطة (1,3,2) والعمودي على المستويين :

$$x + 2y + z - 4 = 0$$

$$2x + y + 3z + 5 = 0$$

وهما غير متوازيين لعدم تناسب الأمثال كما مر معنا سابقاً .

يعطى بالمعادلة :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

أي بالمعادلة :

$$5x - y - 3z + 4 = 0$$

ملاحظة : في الحالة التي يكون فيها المستويان Q_1, Q_2 متوازيين ويتبين ذلك من تناسب الأمثال في معادلتيهما يكون المستوي P غير محدد وتحول المعادلة إلى متطابقة.

12-3- نقطة تقاطع ثلاث مستويات :

- أ - قد لا تكون لثلاثة مستويات أية نقطة مشتركة (إذا كان مستويان منهما على الأقل متوازيين أو كانت الفواصل المشتركة (مستقيمات التقاطع) لهذه المستويات متوازية .
- ب - أما إذا كانت المستويات الثلاثة مارةً جميعاً بمستقيم مشترك فيكون هذا المستقيم ممثلاً لعدد لا يحصى من نقاط التقاطع .
- ج - هذا ويمكن أن يكون للمستويات الثلاثة نقطة مشتركة وحيدة (كما هو الحال في رؤوس الهرم رباعي الأوجه) .

ففي الحالة الأولى (أ) لا يكون لمجموعة المعادلات :

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

أي حل.

وفي الحالة الثانية (ب) يكون لها عدد لا يحصى من الحلول .

أما في الحالة الثالثة (ج) فيكون لها حل وحيد .

ولدراسة هذه الحالات، من الأفضل استخدام المحددات.

إنما يمكننا أيضاً القيام بهذه الدراسة عن طريق الجبر الابتدائي .

مثال :

إن المستويات :

$$x - y + 2 = 0$$

$$x + 2y - 1 = 0$$

$$x + y - z + 2 = 0$$

لها نقطة مشتركة واحدة هي $(-1, 1, 2)$ لأن للمجموعة حلاً واحداً هو :

$$x = -1 \quad y = 1 \quad z = 2$$

3-13- العلاقة المتبادلة بين المستوي وموقع نقطتين بالنسبة له :

يمكن أن نحدد العلاقة بين موقع كل من النقطتين $M_1(x_1, y_1, z_1)$ و $M_2(x_2, y_2, z_2)$ بالنسبة للمستوي :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

حسب الشروط التالية :

أ - تقع النقطتان M_1, M_2 في جهة واحدة من المستوي عندما تكون للعددين :

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$$

إشارة واحدة .

ب - تقع النقطة M_2 أو M_1 (أو كليهما) في المستوي .

إذا حققت إحداثيات النقطة معادلة المستوي :

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \text{ بالنسبة لـ } M_1$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \text{ بالنسبة لـ } M_2$$

مثال (1) :

النقطتان $(1, 2, -1)$ ، $(2, 3, 3)$ تقعان في جهة واحدة من المستوي :

$$6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

لأن كلا العددين :

$$(6)(1) + (3)(2) + (2)(-1) - 6 = 4$$

$$(6)(2) + (3)(3) + (2)(3) - 6 = 21$$

موجبان (من إشارة واحدة) .

مثال (2) :

تقع نقطة الأصل (0,0,0) والنقطة (2,1,1) في جهتين مختلفتين من المستوى :

$$5x + 3y - 2z - 5 = 0$$

لأن للعددين :

$$(5)(2) + (3)(1) + (-2)(1) - 5 = 6$$

$$(5)(0) + (3)(0) + (-2)(0) - 5 = -5$$

إشارتين متعاكستين .

14-3- بعد نقطة عن مستوى :

إذا فرضنا أن d هي بعد النقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ عن المستوى

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

فإن d تساوي بقيمتها المطلقة المقدار :

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

مثال :

أوجد بعد النقطة (3,9,1) عن المستوى :

$$x - 2y + 2z - 3 = 0$$

الحل :

$$\begin{aligned} d &= \frac{|(1)(3) + (-2)(9) + (2)(1) - 3|}{\sqrt{1 + (-2)^2 + (2)^2}} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

ملاحظة : بواسطة إشارة المقدار d يمكننا الحكم على موقع كل من النقطة M_1 ونقطة

الأصل O بالنسبة للمستوي .

3-15- معادلات المستقيم في الفراغ :

كل خط مستقيم UV كما هو مبين بالشكل (3-5) يعطى بمجموعة المعادلتين :

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (2)$$

بشرط عدم تناسب الأمثال .

إذ إن كلا من هاتين المعادلتين تمثل مستويًا يمر بالمستقيم UV فيكون المستقيم UV

في الواقع الفصل المشترك للمستويين وكل نقطة

من المستقيم تحقق كلا من المعادلتين. وتسمى

المعادلتان بمعادلتى المستقيم UV .

ملاحظة : يقال عن المستقيم UV إنه يعطى أو

يعرّف بمجموعة المعادلتين (1) و (2) لأن :

1- إحداثيات أية نقطة $M(x,y,z)$ من نقط

المستقيم UV تحقق كلتي المعادلتين (1) و (2).

2- إحداثيات أية نقطة لاتقع على المستقيم UV

لا تحقق كلتي المعادلتين (1) و (2) في آن واحد، رغم أنه يمكن أن تحقق إحداهما .

مثال (1) :

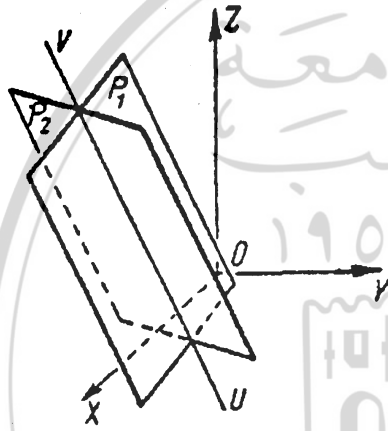
اكتب معادلة المستقيم (شكل 3-6) المار

بنقطة الأصل O وبالنقطة $k(4,3,2)$.

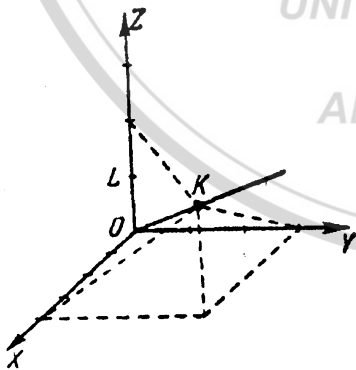
الحل :

المستقيم ok هو مستقيم تقاطع المستويين

. kox , koz



الشكل (3-5)



الشكل (3-6)

نأخذ على المحور oz نقطة ما $L(0,0,1)$ ونكتب معادلة المستوي koz (أي نجد

معادلة المستوي المار بالنقط الثلاث O,K,L فتحصل على :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$3x - 4y = 0$$

أي أن :

وبنفس هذه الطريقة ، نجد معادلة المستوي kox فتكون : $2y - 3z = 0$

ويعرف المستقيم ok بمجموعة المعادلتين السابقتين .

في الواقع نرى أن أية نقطة M من نقط المستقيم ok تقع في آن معاً في المستوي koz والمستوي kox أي إن إحداثياتها تحقق معادلتى المستويين في آن واحد .

ومن ناحية أخرى، فإن النقطة N التي لاتقع على المستقيم ok لايمكن أن تقع في كليّ المستويين kox , koz في آن واحد ، ولايمكن أن تحقق إحداثياتها معادلتى المستويين معاً ولو أنه يمكن أن تكون تابعة لأحد المستويين دون الآخر .

مثال (2) :

يمكن أن يُعطى المستقيم ok في المثال (1) بمجموعة المعادلتين :

$$3x - 4y = 0$$

$$2x - 4z = 0$$

وتمثل المعادلة الأولى المستوي koz والثانية المستوي koy

كما يمكن أن يُعطى نفس المستقيم ok بالمعادلتين :

$$2y - 3z = 0$$

$$2x - 4z = 0$$

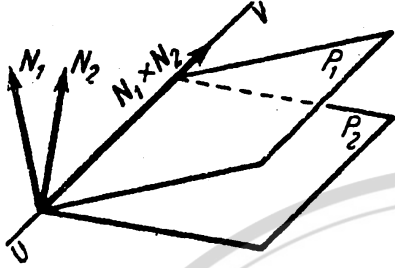
3-16- متجه الاستدلال :

أ - كل متجه $\vec{a}$ غير معدوم :

$$\vec{a} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

ينطبق على المستقيم UV (أو يكون موازياً له) .

يسمى بمتجه استدلال هذا المستقيم وتسمى A, B, C المعاملات الاتجاهية لهذا المستقيم .



الشكل (3-7)

ملاحظة : إذا ضربنا المعاملات الاتجاهية

A, B, C في نفس العدد k ($k \neq 0$) ،

نحصل على الأعداد Ak, Bk, Ck

التي تكون كذلك معاملات اتجاهية

وهي عبارة عن إحداثيات المتجه $\vec{ak}$

الموازي لـ $\vec{a}$.

ب - يمكن أن نجد متجه الاستدلال للمستقيم UV المبين بالشكل (3-7) كما يلي :

بفرض أن لدينا معادلتين المستويين P_1, P_2 :

$$P_1 \rightarrow A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$P_2 \rightarrow A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

إن المتجه الناطم على المستوي الأول P_1 هو :

$$\vec{N}_1 = A_1 \vec{i} + B_1 \vec{j} + C_1 \vec{k}$$

والمتجه الناطم على المستوي الثاني P_2 هو :

$$\vec{N}_2 = A_2 \vec{i} + B_2 \vec{j} + C_2 \vec{k}$$

فيكون متجه الاستدلال للمستقيم UV هو الجداء الاتجاهي :

$$\vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2$$

وذلك لأن UV عمودي على المتجهين الناطمين $\vec{N}_1, \vec{N}_2$.

مثال :

أوجد المعاملات الاتجاهية للمستقيم :

$$2x - 2y - z + 8 = 0$$

$$x + 2y - 2z + 1 = 0$$

إن متجه الاستدلال $\vec{a}$ للمستقيم المعطى هو :

$$\vec{a} = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2$$

لدينا :

$$\vec{N}_1 = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{N}_2 = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

فيكون :

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

وتكون المعاملات الاتجاهية هي :

$$A = 6 \quad B = 3 \quad C = 6$$

ملاحظة : نضرب هذه الأعداد في $1/3$ فنحصل على المعاملات الاتجاهية

$$A' = 2 \quad B' = 1 \quad C' = 2$$

ويمكن أن نعتبر الأعداد :

$$A'' = -2 \quad B'' = -1 \quad C'' = -2$$

معاملات اتجاهية وهكذا

3-17 المعادلات المتماثلة للمستقيم :

يعطى المستقيم L المار بالنقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ والذي متجه استدلاله هو :

$$\vec{a} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

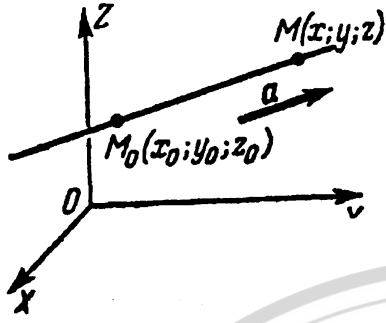
بالمعادلات :

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

وتعبر هذه المعادلات عن توازي المتجهين :

$$\vec{a} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$$



الشكل (3-8)

كما هو مبين بالشكل (3-8) .

وتسمى هذه المعادلات بالمعادلات المتماثلة للخط المستقيم .

ملاحظة : بما أننا نستطيع أن نأخذ بدلاً عن

M_0 أية نقطة أخرى من المستقيم L

ويمكننا أن نأخذ بدلاً عن متجه

استدلال $\vec{a}$ المتجه $k\vec{a}$ فيمكننا إذاً أن نعطي كل مقدار من المقادير A, B, C ، x_0, y_0, z_0 على حدة أية قيمة اختيارية .

مثال :

اكتب المعادلات المتماثلة للمستقيم المار بالنقطتين :

$$B(3, 1, -2) \text{ و } A(5, -3, 2)$$

الحل :

يمكننا أن نأخذ النقطة A لتحل مكان النقطة M_0 ، ويمكننا أن نأخذ المتجه $\overrightarrow{AB}$ ليلعب دور المتجه $\vec{a}$. وتكون المعادلات المتماثلة هي :

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-2}{-4}$$

وإذا أخذنا النقطة B لتلعب دور M_0 وأخذنا المتجه :

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

لي لعب دور المتجه $\vec{a}$ فإن المعادلات المتماثلة ستكون :

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{2}$$

18-3- معادلة السطح :

إن المعادلة التي تربط بين الإحداثيات x, y, z تسمى بمعادلة السطح S . إذا تحقق الشرطان :

1- إذا كانت إحداثيات أية نقطة x, y, z من نقط السطح S تحقق هذه المعادلة .

2- إذا كانت إحداثيات أية نقطة x, y, z غير واقعة على السطح S لاتحقق هذه المعادلة .

ملاحظة : إذا غيرنا مجموعة الإحداثيات فإن معادلة السطح تتغير كذلك .

مثال (1) :

$$x + y + z - 1 = 0$$

المعادلة

هي معادلة سطح مستو ، ويمكن تمثيل هذا السطح نفسه بأية معادلة أخرى من الدرجة الأولى وذلك باختيار مجموعة إحداثيات متعامدة بطريقة مناسبة .

مثال (2) :

يعطى سطح الكرة التي نصف قطرها R ومركزها مبدأ الإحداثيات بالمعادلة :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

لأنه :

1- إذا كانت النقط $M(x, y, z)$ واقعة على هذا السطح فإن البعد :

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

وبالرجوع إلى المعادلة نجد :

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$$

وعليه فإن $OM = R$

أي : أن المعادلة السابقة محققة .

2- إذا لم تقع M على السطح فإن :

$$OM \neq R$$

ولاتتحقق المعادلة السابقة .

مثال (3) :

الكرة التي نصف قطرها R ومركزها في النقطة C(a,b,c) تعطى بالمعادلة :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

إن العلاقة التي تربط بين الإحداثيات x,y,z قد لاتمثل سطحاً مستوياً بل أشكالاً هندسية أخرى .

هذا وقد تكون العلاقة غير معبرة عن أي شكل هندسي كما في المثال التالي :

مثال (4) :

المعادلة :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$

لاتمثل أي شكل هندسي إذ ليس لها حلول (حقيقية) .

مثال (5) :

المعادلة

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

التي لها حل حقيقي واحد هو :

$$x=0 \quad y=0 \quad z=0$$

فهي تمثل نقطة واحدة فقط .

مثال (6) :

$$(x-y)^2 + (z-y)^2 = 0$$

المعادلة :

مؤلفة من مجموع مربعين ولذلك فهي لاتتحقق إلا عندما تكون :

$$x - y = 0 \rightarrow x = y \quad z - y = 0 \rightarrow z = y$$

في آن واحد . إذن فالمعادلة هذه تمثل خطاً مستقيماً

$$x = y = z$$

19-3- السطوح الأسطوانية التي تكون رواسمها موازية لأحد محاور الإحداثيات :

يسمى السطح المتولد من دوران خط مستقيم (الرأس) حول مستقيم آخر ثابت ومواز له بالسطح الأسطواني. وكل خط يحتله الرأس في أي وضع من أوضاعه يسمى بخط الاتجاه (أو خط الاستدلال) .

وكل معادلة لاتحتوي على الإحداثي z وتمثل في المستوي xoy خطاً ما مثل L ، تمثل في الفراغ سطحاً أسطوانياً يكون رأسه موازياً للمحور OZ ، وخط اتجاهه هو الخط L .
مثال (1) :

إن المعادلة :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

إن هذه المعادلة تمثل في الواقع قطعاً ناقصاً في المستوي xoy مركزه في O .
ولما كانت قيمة z حرة ويمكن أن تأخذ أية قيمة فهذا يعني أن القطع الناقص يمكنه الانتقال موازياً لنفسه وبموازاة المحور OZ فيتولد بذلك سطح أسطواني غير محدود محوره OZ ومقطعه العمودي على OZ هو القطع الناقص .

وبتعبير آخر فإن المعادلة المذكورة تمثل في المستوي xoy القطع الناقص $ABA'B'$ الذي نصفاه محوريه هما :

$$a = OA$$

$$b = OB$$

كما هو مبين بالشكل (3-9) .

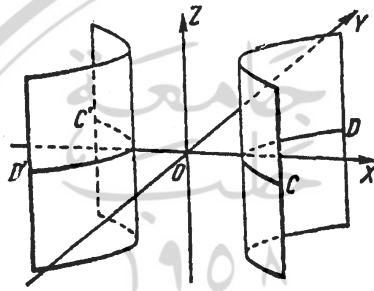
وهي تمثل في الفراغ السطح الأسطواني S الذي توازي رواسمه المحور OZ وخط اتجاهه هو القطع الناقص $ABA'B'$ (أسطوانة ناقصية) .

مثال (2) :

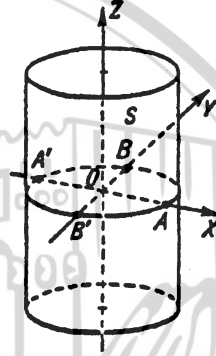
إن المعادلة :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

تمثل في المستوي xoy قطعاً زائداً بينما تمثل في الفراغ سطحاً أسطوانياً كما هو مبين بالشكل (3-10) تكون رواسته موازية للمحور oz وخط اتجاهه هو القطع الزائدة CDC'D' (أسطوانة زائدية) .



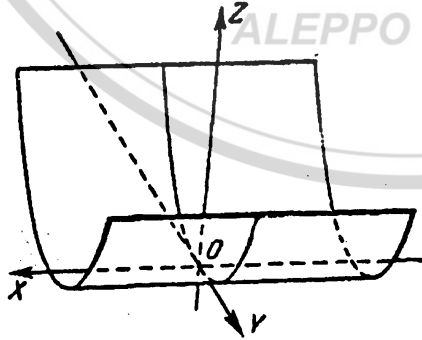
الشكل (3-10)



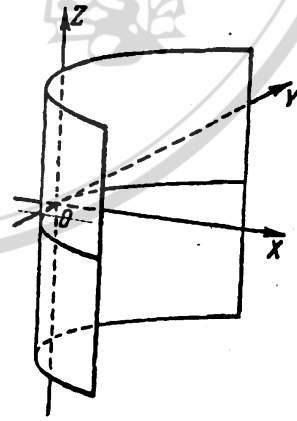
الشكل (3-9)

مثال (3) :

وكذلك فإن المعادلة $y^2 = 2Px$ تمثل اسطوانة مكافئة كما هو مبين بالشكل (3-11).



الشكل (3-12)



الشكل (3-11)

مثال (4) :

$$y^2 = 2Pz$$

تمثل المعادلة

أسطوانة مكافئة تأخذ الوضع المبين بالشكل (12-3) وتكون رواسمها موازية للمحور OX لعدم وجود العنصر X في المعادلة .

ملاحظة : إذا كان خط الاتجاه خطأً مستقيماً ، فإن السطح الأسطواناني يكون مستوياً ، ووفقاً

$$Ax + By + D = 0$$

لهذا فإن المعادلة :

تمثل في الفراغ مستوياً موازياً للمحور OZ .

20-3- السطوح الجبرية ورتبتها :

يقال عن المعادلة الجبرية أنها من الدرجة الثانية (يوجد فيها ثلاثة مجاهيل X,Y,Z) إذا كانت صيغتها العامة على النحو التالي :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

حيث تمثل المقادير الستة A,B,C,D,E,F أمثالا عددية، وقد يكون بعضها معدوماً على أن يكون واحد منها على الأقل غير معدوم . وبالمثل تتعين المعادلة الجبرية من أية رتبة . إن السطح الذي يُمثل بمعادلة من الدرجة n يسمى بالسطح الجبري من المرتبة n . وكل سطح من المرتبة الأولى عبارة عن مستوٍ .

21-3- الكرة :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

إن المعادلة

وهي من الدرجة الثانية تمثل كرة نصف قطرها R ومركزها نقطة الأصل . فإذا لم ينطبق مركز الكرة مع نقطة الأصل فإن الكرة تمثل كذلك بمعادلة من الدرجة الثانية وهي :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

حيث a,b,c إحداثيات مركز الكرة .

والمعادلة من الدرجة الثانية بصيغتها :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

تمثل أيضاً كرة فقط إذا تحققت الشروط التالية :

$$A = B = C$$

$$D = E = F = 0$$

$$(G^2 + H^2 + K^2 - 4AL) > 0$$

وعند تحقق هذه الشروط تكون إحداثيات مركز الكرة .

$$a = -\frac{G}{2A} \quad b = -\frac{H}{2A} \quad c = -\frac{K}{2A}$$

ونصف قطرها :

$$R^2 = \frac{C^2 + H^2 + K^2 - 4AL}{4A^2}$$

مثال :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$

المعادلة :

حيث :

$$A = B = C = 1 \quad D = E = F = 0$$

$$G = -2 \quad H = -4 \quad K = 0 \quad L = -4$$

نعمل على تحويل المعادلة إلى الصيغة :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

ولذلك نكمل إلى المربع الكامل كلا من العبارتين :

$$x^2 - 2x \quad y^2 - 4y$$

بإضافة العددين $1^2, 2^2$ إلى طرفي المعادلة فنحصل على المعادلة :

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$$

وبالمقارنة مع الصيغة المذكورة أعلاه نجد :

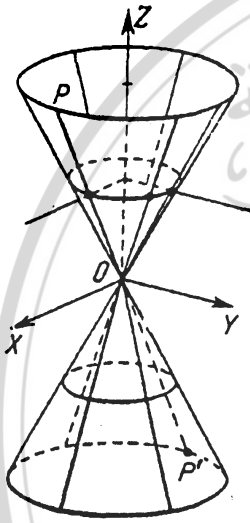
$$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 0 \quad R = 3$$

ويمكننا إيجاد هذه النتيجة أيضاً بالاعتماد على العلاقات السابقة .

3-22- السطوح الدورانية :

نفرض أن الخط L يقع في المستوي OXZ . عندئذ نحصل على معادلة السطح الناشئ من دوران الخط L حول المحور OZ من معادلة الخط L بتعويض x بالمقدار $\sqrt{x^2 + y^2}$:
البرهان :

حين يدور الخط L حول OZ فإن كل نقطة منه ترسم دائرة نصف قطرها $r = x$ في مستوي يوازي السطح xOy ومعادلتها :
مثال (1) :



ليكن المستقيم pp' الذي معادلته $z = 2x$ والواقع في المستوي xOz حيث $y = 0$ الشكل (3-13) فحين يدور المستقيم pp' حول المحور OZ تأخذ معادلة السطح المخروطي الناشئ عن دوران المستقيم pp' الشكل :

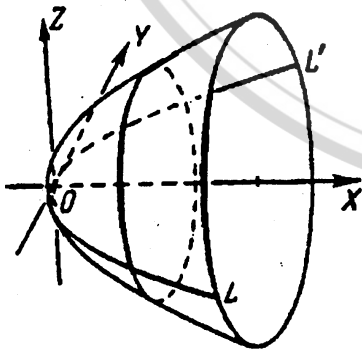
$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0 \quad \text{أي أن :}$$

الشكل (3-13)

وتكون القواعد المماثلة لهذه القاعدة صحيحة عندما يكون الخط L واقعاً في مستوي إحداثي آخر ثم يدور حول أحد محوريه ليولد سطحاً فراغياً .

مثال (2) :



أوجد معادلة السطح الناشئ من دوران القطع المكافئ :

$$y^2 = 2px$$

(الشكل 3-14 LOL') حول المحور OX .

الحل :

الشكل (3-14)

حين يدور القطع المكافئ حول OX فإن كل نقطة

منه سترسم في المستوي yOz دائرة نصف قطرها r هو الإحداثي y للنقطة الدوارة .

نعوض y بالمقدار :

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}$$

أي بدل y^2 المقدار :

$$y^2 + z^2$$

فتحصل على :

$$y^2 + z^2 = 2px$$

(مجسم مكافئ دوراني ومحور الدوران هو

المحور OX).

مثال (3) :

أوجد معادلة السطح الناشئ من دوران

القطع المكافئ :

$$z^2 = 2px$$

(الشكل 3-15) حول المحور Z .

الحل :

الشكل (3-15)

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

نعوض x بالمقدار :

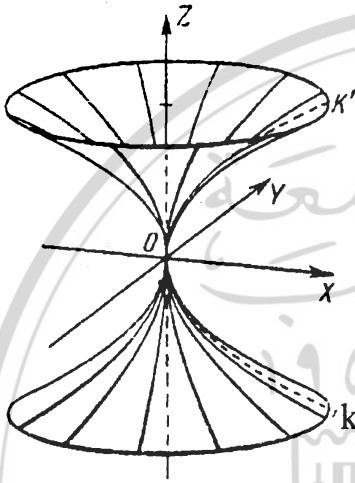
فتحصل على المعادلة :

$$z^2 = 2p\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z^4 = 4p^2(x^2 + y^2)$$

أو :

وهو سطح من المرتبة الرابعة .



23-3- تمارين غير محلولة على الفصل الثالث :

1- أوجد معادلة الكرة التي نصف قطرها 5 ومركزها النقطة (2,-1,3) .

2- صف السطح الذي تعطى معادلته بالصيغة :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49$$

3- صف السطح الذي معادلته :

$$x^2 + 4x + y^2 + z^2 - 8z = 5$$

4- أوجد معادلة الكرة التي أحد أقطارها AB حيث A(7,-1,-2) و B(3,4,6) .

5- برهن أن النقاط الثلاث A(1,2,3), B(4,-5,2), C(0,0,0) تشكل رؤوس مثلث قائم.

6- أوجد معادلة الكرة التي يقع مركزها في المستوي xz والتي تمر من النقاط A(0,8,0)

$$B(4,6,2) \quad C(0,12,4)$$

7- صف تقاطع السطحين الممثلين بالمعادلتين :

$$x^2 + y^2 = 1 \quad z = 2$$

8- اكتب معادلة الكرة التي نصف قطرها 2 r والتي مركزها على المحور x وتمس

المستوي yz .

9- أوجد معادلة الكرة التي مركزها النقطة C(1,2,3) والتي تمس المستوي yz .

10- أوجد المحل الهندسي لكل النقاط (x,y,z) التي تبعد كل منها عن النقطة (3,2,0)

ضعف بعدها عن النقطة (3,2,6) .

11- أوجد المتجه $\vec{N}$ العمودي على المستوي المعين بالنقاط :

$$A(0,2,3) \quad B(2,0,1) \quad C(1,-1,4)$$

12- أوجد حجم متوازي السطوح المنشأ على المتجهات $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ حيث :

$$A(0,0,0) \quad B(1,2,3) \quad C(1,1,2) \quad O(2,1,1)$$

13- بفرض أن المتجه :

$$\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

عمودي على المستوي p_1 وأن المتجه :

$$\vec{B} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

عمودي على المستوى p_2 . برهن أن المستويين p_1, p_2 يتقاطعان وأوجد متجهها يوازي فصلهما المشترك .

14- أوجد التمثيل المتجهي والمعادلات الوسيطة للمستقيم المار من النقطتين :

$$A(3,4,6) \quad , \quad B(1,-2,5)$$

15- أوجد معادلة المستوى الذي يمر من النقطة $A(3,-2,5)$ ويتعامد مع المتجه :

$$\vec{N} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$$

16- أوجد معادلة المستوى الذي يمر بالنقاط :

$$A(4,4,0) \quad B(-1,2,4) \quad C(1,3,5)$$

17- أوجد بعد النقطة $(3,-5,2)$ عن المستوى :

$$8x - 2y + z = 5$$

18- أوجد معادلة المستوى الذي يوازي المستوى :

$$x - 2y + 2z = 1$$

ويمر بالنقطة $(1,-1,2)$.

19- لتكن لدينا كرة مركزها المبدأ ونصف قطرها 3 والمطلوب :

إيجاد نقطة تقاطع المستوى المماسي لهذه الكرة عند النقطة $(1,2,2)$ مع المحور x .

20- أوجد قيمة K بحيث يتعامد المستويان :

$$3x - 4y + 2z + 9 = 0$$

$$3x + 4y - Kz + 7 = 0$$

21- برهن أن الفصل المشترك للمستويين :

$$x + y - z = 0$$

$$x - y - 5z + 7 = 0$$

يوازي المستقيم الذي معادلته :

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-5}{1}$$

22- أوجد معادلة المستوى المار من النقطة $C(1,2,3)$ والموازي للمتجهين .

$$\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{B} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$$

23- أوجد معادلة المستوى المار من النقطتين : $B(1,2,3)$ ، $A(2,-1,-1)$ والمتعامد مع

المستوي :

$$2x + 3y - 5z - 6 = 0$$





القسم الثاني الميكانيك والتوازن





الفصل الأول

موجز في المتجهات

1-1 المتجه (الشعاع) :

المتجه هو كل قطعة مستقيمة لها اتجاه ويرمز إلى المتجه الذي تكون النقطة A بدايته والنقطة B نهايته بالرمز $\overrightarrow{AB}$ كما يمكن أن يرمز للمتجه بحرف واحد ويكتب الحرف بلون داكن A وطويلة المتجه هي كمية سلمية ونرمز إلى طول المتجه $\overrightarrow{AB}$ بـ $|\overrightarrow{AB}|$.

1-2 - الجبر الاتجاهي (الشعاعي) :

يمكن أن نجري على المتجهات عمليات مختلفة مثل جمع وطرح وضرب المتجهات ولهذه العمليات خواص كثيرة مشتركة مع خواص العمليات الجبرية كالجمع والضرب والطرح ولذلك فإن موضوع العمليات التي تجري على المتجهات يسمى بالجبر الاتجاهي. ولما كان لطلابنا معرفة جيدة بهذه المواضيع فإننا لن نفصل إلا فيما نراه ضرورياً ويهم الطالب في دراسة الفصول القادمة من هذا الكتاب .

1-2-1 - ضرب المتجه وقسمته على عدد ما :

إن ضرب المتجه $\vec{A}$ (المضروب) في العدد السلمي x (المضروب فيه) يعني تكوين متجه جديد (حاصل ضرب) له نفس منحى المتجه وطويلته هي حاصل ضرب طول المتجه $\vec{A}$ في القيمة المطلقة للعدد x أما اتجاهه فيتفق أو يختلف مع اتجاه المتجه $\vec{A}$ بحسب ما تكون إشارة العدد x موجبة أو سالبة . وإذا كان $x=0$ فإن حاصل الضرب هو عبارة عن متجه صفري .

ويرمز إلى الضرب إما بـ $\vec{A}x$ أو $x\vec{A}$.

إن قسمة المتجه $\vec{A}$ على العدد السلمي x تعني إيجاد متجه يعطي $\vec{A}$ إذا ضربناه في العدد x ونرمز إلى القسمة بـ $\vec{A} : x$ أو $\vec{A}/x$.

يمكننا أن نجري بدل عملية $\bar{A}/x$ عملية الضرب $\bar{A}(1/x)$ ويخضع ضرب المتجه في عدد لنفس تلك القوانين التي يخضع لها ضرب الأعداد :

أ- خاصة التوزيع إذا كان المجموع يمثل عدداً :

$$(x + y)\bar{A} = x\bar{A} + y\bar{A} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

ب- خاصة التوزيع إذا كان المجموع يمثل شعاعاً :

$$x(\bar{A} + \bar{B}) = x\bar{A} + x\bar{B} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ت- خاصة الترتيب أو التجمع

$$x(y\bar{A}) = (xy)\bar{A} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

وبالاعتماد على هذه الخواص يمكننا وضع عبارات اتجاهيه تكون لها نفس الصورة الخارجية التي لكثير الحدود من الدرجة الأولى في الجبر، ويمكن تحويل هذه العبارات مثلما تحول العبارات الجبرية المناظرة لها (تجميع الحدود المشابهة ، وفك الأقواس ، والإخراج خارج القوس ونقل الحدود من أحد طرفي المساواة إلى الطرف الآخر مع تغيير الإشارة وهكذا) .

أمثلة :

$$2\bar{A} + 3\bar{A} = 5\bar{A}$$

(حسب الخاصة أ)

$$2(\bar{A} + \bar{B}) = 2\bar{A} + 2\bar{B}$$

(حسب الخاصة ب)

$$5 \times 12\bar{C} = 60\bar{C}$$

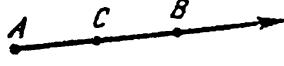
(حسب الخاصة ج)

كذلك :

$$\begin{aligned} 4(2\bar{A} - 3\bar{B}) &= 4[2\bar{A} + (-3\bar{B})] \\ &= 4 \times 2\bar{A} + 4(-3)\bar{B} = 8\bar{A} + (-12)\bar{B} \\ &= 8\bar{A} - 12\bar{B} \end{aligned}$$

1-2-2 - مسقط نقطة على محور:

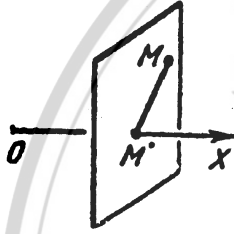
المحور هو كل مستقيم معين عليه أحد الاتجاهين (بغض النظر عن أيهما) ويسمى هذا الاتجاه بالاتجاه الموجب ويرمز إليه في الشكل بسهم . أما الاتجاه المضاد فيسمى بالاتجاه



الشكل (1-1)

السالب ويمكننا أن نسمي المحور بأي متجه يقع عليه وله نفس اتجاهه فمثلاً يمكننا أن نسمي المحور المبين بالشكل (1-1) بالمتجه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ولكن لا يمكن تسميته بالمتجه $\overrightarrow{BA}$.

لنفرض أنه لدينا المحور OX المبين بالشكل (1-2) ونفرض أن النقطة M هي نقطة



الشكل (1-2)

اختيارية من المحور أو خارجه . ولنرسم مستويًا عمودياً على المحور يمر بالنقطة M . يقطع هذا المستوي المحور في نقطة ما مثل M' تسمى النقطة M' بالمسقط القائم للنقطة M على المحور OX . فإذا كانت النقطة M واقعة على المحور فإنها تكون مسقطاً لنفسها .

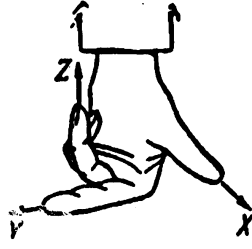
بكلمة أخرى يمكننا أن نقول أن المسقط القائم

لنقطة M على المحور OX هو نقطة التقاء العمود النازل من النقطة M على المحور OX . غير أن التعريف الذي أوردناه أعلاه يبين بوضوح ، أننا نقوم بإجراء التركيب في الفراغ .

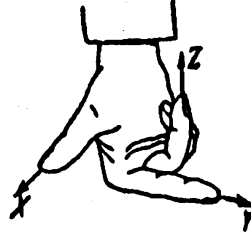
1-2-3 - مجموعة الإحداثيات المتعامدة في الفراغ :

إذا اتخذنا ثلاثة محاور متعامدة OX, OY, OZ متقاطعة في نقطة ما O كما هو مبين بالشكل (1-3) فإن هذه المحاور تشكل جملة إحداثيات متعامدة ، تسمى النقطة O مبدأ الإحداثيات (أو نقطة الأصل) وتسمى المستقيمات الموجهة OX, OY, OZ بالمحاور الإحداثية (OX المحور X , OY المحور Y , OZ المحور Z) وتسمى المستويات XOY, YOZ, ZOX بالمستويات الإحداثية كما تؤخذ قطعة مستقيمة ما مثل UV بمثابة وحدة قياس موحدة للمحاور الثلاثة على السواء .

إذا أخذنا على المحاور OX, OY, OZ وفي الاتجاه الموجب ثلاث قطع مستقيمة هي $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ بحيث يساوي طول كل منها وحدة القياس المعتمدة فإننا نحصل على ثلاثة



الشكل (1-4)



الشكل (1-3)

متجهات هي $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ تسمى بالمتجهات الأساسية أو أشعة الواحدة ويرمز لها على التوالي $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

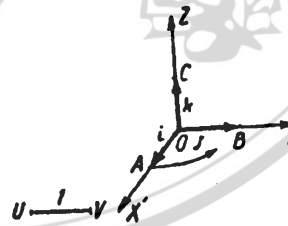
ويختار الاتجاه الموجب على المحاور بحيث لو أدركنا الشعاع الموجب OX بزاوية مقدارها 90° وبعكس دوران عقارب الساعة لانطبق على الشعاع OY كما في الشكل (1-3) وذلك بفرض أننا ننظر للدوران من جهة الشعاع OZ ، مثل مجموعة الإحداثيات هذه تسمى بالمجموعة اليمنى.

وتستعمل في بعض الأحيان مجموعة من الإحداثيات اليسرى. وفي هذه المجموعة يكون الدوران المذكور باتجاه دوران عقارب الساعة. كما هو مبين بالشكل (1-4).

تعود تسمية المجموعة باليمنى أو باليسرى إلى وضع أصابع اليد الإبهام والسبابة والوسطى، فلو وضعناها بصورة متعامدة على غرار المحاور OX, OY, OZ وبنفس التسلسل كما في الشكل (1-5) لتشكلت المجموعة في اليد اليمنى واليسرى في اليد اليسرى كما في الشكل (1-6).



الشكل (1-6)

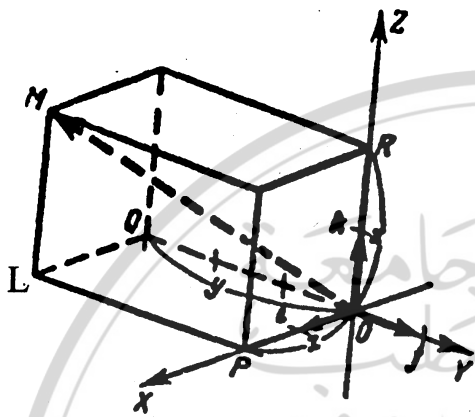


الشكل (1-5)

1-2-4 - إحداثيات النقطة

يمكن تعيين موضع أي نقطة M من الفراغ بثلاث إحداثيات على الشكل التالي نرسم ثلاثة مستويات MP, MQ, MR بحيث تمر بالنقطة M كما في الشكل (1-7) وتكون موازية

للمستويات xOy , zOx , yOz على التوالي ونقط تقاطع هذه المستويات مع المحاور هي P , Q , R . والأعداد x (الإحداثي x) و y (الإحداثي y) و z (الإحداثي z) والتي هي أطوال المستقيمات OP, OQ, OR على التوالي والمقدرة وفق وحدة القياس المعتمدة، تسمى بالإحداثيات المتعامدة للنقطة M . تؤخذ هذه الأعداد موجبة أو سالبة حسب ما تكون المتجهات $\vec{OP}, \vec{OQ}, \vec{OR}$ متفقة أو مخالفة في الاتجاه مع المتجهات الأساسية $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



الشكل (1-7)

إن المتجه $\vec{OM}$ الواصل بين نقطة الأصل O ونقطة M من الفراغ يسمى بمتجه موضع النقطة M ويرمز له بـ $\vec{r}$.

يمكن أن نضع إلى جانب الحرف r ومن الأسفل رمزاً ليبدل على أنه (متجه موضع)

فمثلاً متجه موضع النقطة M نرمز

له بـ $\vec{r}_M$.

إن كل متجه $\vec{m}$ يساوي مجموع

حاصل ضرب كل من المتجهات الأساسية الثلاثة في إحداثيات المتجه $\vec{m}$ المناظرة لها :

$$\vec{m} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

1-2-5 - العمليات المختلفة للمتجهات المعطاة بمركباتها

عند جمع المتجهات تجمع إحداثياتها أي إذا كان :

$$\vec{A}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{A}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

وكان :

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

$$\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$x' = x_1 + x_2 \quad y = y_1 + y_2 \quad z = z_1 + z_2 \quad \text{فإن :}$$

ونطبق نفس القاعدة بالنسبة لطرح المتجهات :

عند ضرب متجه في عدد ما ، فإن جميع إحداثياته تُضرب بهذا العدد أيضاً . أي إذا

$$\vec{M}_2 = \lambda \vec{M}_1$$

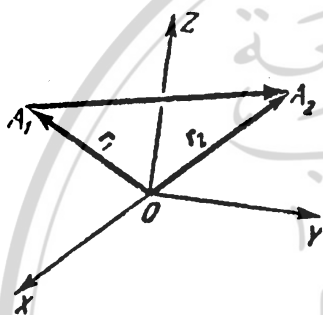
$$x_2 = \lambda x_1, y_2 = \lambda y_1, z_2 = \lambda z_1 \quad \text{فإن :}$$

وتطبق نفس القاعدة بالنسبة لقسمة متجه على عدد ما .

1-2-6 - إيجاد المتجه بدلالة متجهي موضع نقطتي بدايته ونهايته

$$\vec{A_1A_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{OA_1} \quad \text{حيث :}$$



الشكل (1-8)

يمثل متجه الموضع للنقطة A_1 كما هو موضح

بالشكل (1-8) كذلك فإن : $\vec{r}_2 = \vec{OA_2}$

يمثل متجه الموضع للنقطة A_2 . ومنه :

$$x = x_2 - x_1$$

$$y = y_2 - y_1$$

$$z = z_2 - z_1$$

حيث x, y, z هي إحداثيات المتجه $\vec{A_1A_2}$ بينما x_1, y_1, z_1 هي إحداثيات النقطة A_1 (وهي تساوي إحداثيات متجه الموضع $\vec{r}_1 = \vec{OA_1}$) في حين إن x_2, y_2, z_2 هي إحداثيات النقطة A_2 (وهي تساوي إحداثيات متجه الموضع $\vec{r}_2 = \vec{OA_2}$) .

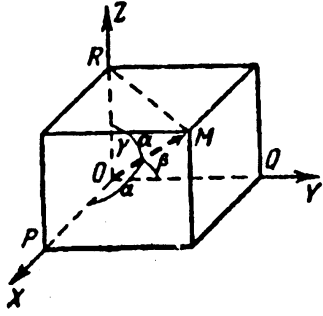
1-2-7 - الزاوية المحصورة بين محور الإحداثيات والمتجه

إذا كانت الزوايا α, β, γ هي الزوايا التي تشكلها الاتجاهات الموجبة للمحاور

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad \text{مع المتجه } ox, oy, oz$$

فيمكننا معرفة هذه الزوايا من العلاقات التالية :

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{|\vec{a}|}$$



$$\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{|\vec{a}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{|\vec{a}|}$$

إذا كان طول المتجه : $|\vec{a}| = 1$

فإن :

الشكل (1-9)

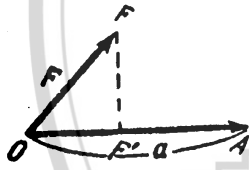
$$\cos \alpha = x \quad \cos \beta = y \quad \cos \gamma = z$$

وبالتالي :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

1-2-8 - الجداء السلمي لشعاعين

حاصل الضرب السلمي للمتجهين $\vec{A}, \vec{B}$ هو حاصل ضرب طويلتي هذين المتجهين في جيب تمام الزاوية المحصورة بينهما ويرمز إلى الضرب السلمي بـ $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ، ويقرأ $\vec{A}$ نقطة $\vec{B}$ ويكون :



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta \quad ; 0 \leq \theta \leq \pi$$

نلاحظ أن ناتج الجداء هو كمية سلمية وليس كمية

الشكل (1-10)

اتجاهيه .

يمكننا أن نبرهن بسهولة بأن مسقط $\vec{A}$ على $\vec{B}$ يساوي $\vec{A} \cdot \vec{b}$ حيث $\vec{b}$ هو المتجه الواحد في اتجاه $\vec{B}$.

أما المعنى الفيزيائي لهذا الضرب فيمكن شرحه بالمثال التالي :

إذا كان المتجه $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ كما في الشكل (1-10) يمثل انتقال نقطة مادية ، بينما يمثل المتجه $\vec{F} = \overrightarrow{OF}$ القوة المؤثرة في هذه النقطة فإن حاصل الضرب السلمي $\vec{a} \cdot \vec{F}$ يساوي العمل الذي تبذله القوة $\vec{F}$.

9-2-1 - خواص الضرب السلمي :

1- ينعدم حاصل الضرب السلمي $\vec{A} \cdot \vec{B}$ إذا كان $|\vec{A}| = 0$ أو $|\vec{B}| = 0$ أو $\cos \theta = 0$ أي إذا كان أحد المتجهين متجهاً صفرياً أو كان المتجهان $\vec{A}, \vec{B}$ متعامدين $\left(\cos \frac{\pi}{2} = 0 \right)$.

2- خاصية التبديل :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

3- خاصية التوزيع :

$$(\vec{A}_1 + \vec{A}_2) \cdot \vec{B} = \vec{A}_1 \cdot \vec{B} + \vec{A}_2 \cdot \vec{B}$$

وهذه الخاصية صحيحة مهما كان عدد المتجهات .

4- خاصية التجميع لنتائج سلمي :

$$(m\vec{A}) \cdot \vec{B} = m(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

بينما لا تكون خاصية التجميع هذه صحيحة لنتائج شعاعي أي :

$$(\vec{C} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{A} \neq \vec{C} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{A})$$

5- إذا كان المتجهان $\vec{A}, \vec{B}$ على استقامة واحدة فإن : $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}|$

حيث نأخذ الإشارة (+) إذا كان للمتجهين $\vec{A}, \vec{B}$ نفس الاتجاه ، ونأخذ الإشارة (-) إذا كانا متعاكسين في الاتجاه.

وكحالة خاصة :

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

10-2-1 - الضرب السلمي بدلالة مركبات المتجهات

ينتج مما سبق :

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= i^2 = 1 & \vec{j} \cdot \vec{j} &= j^2 = 1 & \vec{k} \cdot \vec{k} &= k^2 = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= \vec{j} \cdot \vec{i} = 0 & \vec{j} \cdot \vec{k} &= \vec{k} \cdot \vec{j} = 0 & \vec{k} \cdot \vec{i} &= \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \end{aligned}$$

بفرض أنه لدينا:

$$\vec{A}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

$$\vec{A}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

يكون :

$$\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

ويكون شرط تعامد متجهين :

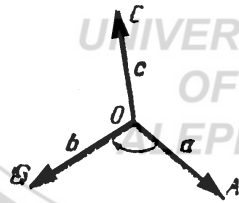
$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

أما لحساب الزاوية بين متجهين فلدينا العلاقة :

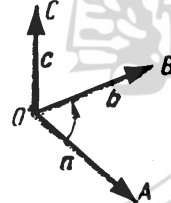
$$\cos \varphi = \frac{\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}{|\vec{A}_1| |\vec{A}_2|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

1-2-11 - مجموعة المتجهات الثلاثة المباشرة وغير المباشرة :

نفرض أن $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ثلاثة متجهات (غير صفرية) لا توازي كلها مستويًا واحدًا ومأخوذة بالترتيب المذكور (أي أن $\vec{A}$ هو المتجه الأول و $\vec{B}$ المتجه الثاني و $\vec{C}$ المتجه الثالث). بنقل هذه المتجهات إلى نقطة أصل مشتركة O كما في الشكل (1-11) فنحصل على ثلاثة متجهات $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ لا تقع في مستوي واحد.



الشكل (1-12)



الشكل (1-11)

وتسمى مجموعة المتجهات الثلاثة $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ مجموعة مباشرة (أو مجموعة يمنى) إذا كان دوران المتجه $\vec{OA}$ اللازم لكي ينطبق على المتجه $\vec{OB}$ قاطعاً أقصر مسافة يتم عكس دوران عقارب الساعة فيما إذا كانت عين المراقب تنظر من النقطة C .

أمّا إذا كان الدوران يتم في اتجاه دوران عقارب الساعة كما في (1-12) فإن مجموعة المتجهات الثلاثة $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ تسمى مجموعة غير مباشرة (أو مجموعة يسرى) .

فمثلاً تكون المتجهات الأساسية $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ في مجموعة الإحداثيات اليمنى مجموعة يمنى أو مجموعة مباشرة ، أما مجموعة المتجهات $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (نفس المتجهات السابقة ولكن بترتيب آخر) فتكون مجموعة يسرى أو مجموعة غير مباشرة .

إذا كانت لدينا مجموعتان كل منهما مكونة من ثلاث متجهات وكانتا كلتاهما معاً إمّا يمينيتان أو يساريّتان فيقال عندئذٍ أن للمجموعتين نفس الاتجاه . وإذا كانت إحدى المجموعتين يمنى والأخرى يسرى فيقال عندئذٍ أن للمجموعتين اتجاهين متعاكسين .

إذا أبدلنا موضعي متجهين مرة واحدة فإن المجموعة تغير اتجاهها . وتحافظ المجموعة على اتجاهها عند إجراء تبديل دائري للمتجهات كما هو مبين بالشكل (1-13) كأن يصبح المتجه الثاني متجهاً أولاً والثالث ثانياً والأول يصبح ثالثاً فنحصل على المجموعة $\vec{B}, \vec{C}, \vec{A}$ بدلاً عن المجموعة $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$.



فمثلاً بإجراء تبديل دائري على المجموعة اليمنى $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ نحصل على المجموعة اليمنى $\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}$ وبتكرار العملية ثانية على هذه الأخيرة نحصل على المجموعة اليمنى $\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}$.

وكمثال آخر إذا كانت المتجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ تشكل مجموعة يمنى فإن المجموعات الثلاث الآتية تكون مجموعة يمنى :

$$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \quad \vec{B}, \vec{C}, \vec{A}, \quad \vec{C}, \vec{A}, \vec{B},$$

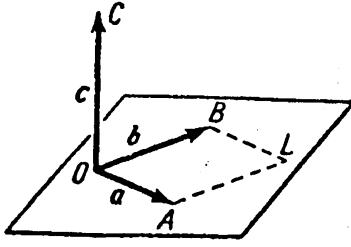
1-2-12 - الجداء الاتجاهي لمتجهين :

إنّ ناتج الجداء الاتجاهي للمتجه $\vec{A}$ (المضروب) في المتجه $\vec{B}$ (المضروب فيه) وغير الموازي له هو متجه ثالث $\vec{C}$ (حاصل الضرب) مكون على النحو التالي :

1- قيمته المطلقة تساوي عددياً مساحة متوازي الأضلاع المرسوم على المتجهين $\vec{A}, \vec{B}$ كما هو مبين بالشكل (1-14) أي :

$$|\vec{A} \parallel \vec{B}| \sin \theta$$

2- منجاء (حامله) هو المنحى العمودي على مستوى متوازي الأضلاع هذا .



الشكل (1-14)

3- يكون اتجاهه على النحو الذي يجعل مجموعة المتجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ مجموعة مباشرة ويرمز إلى الجداء الاتجاهي بـ :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$

إذا كان المتجهان $\vec{A}, \vec{B}$ يقعان على

مستقيمين متوازيين فمن الطبيعي أن نعتبر أن مساحة متوازي الأضلاع مجازاً تساوي الصفر. ولذلك يعتبر الجداء الاتجاهي لمتجهين واقعين على مستقيمين متوازيين (أو منطبقين) متجهاً صفرياً نلاحظ أن ناتج الجداء الاتجاهي إنما هو متجه.

13-2-1 - خواص الجداء الاتجاهي :

1- إن حاصل الجداء الاتجاهي $\vec{A} \wedge \vec{B}$ يساوي الصفر عندما يكون المتجهان $\vec{A}, \vec{B}$ متوازيين وكحالة خاصة إذا كان أحد هذين المتجهين (أو كلاهما) يساوي متجهاً صفرياً .

2- إذا أبدلنا ترتيب المتجهين المضروبين ، فإن الجداء الاتجاهي يضرب في -1 أي :

$$\vec{B} \wedge \vec{A} = -(\vec{A} \wedge \vec{B})$$

وعليه فليس للضرب الاتجاهي خاصية تبديلية .

3- خاصية التوزيع :

$$(\vec{A} + \vec{B}) \wedge \vec{I} = \vec{A} \wedge \vec{I} + \vec{B} \wedge \vec{I}$$

وهذه الخاصية صحيحة مهما كان عدد المتجهات .

1- خاصية التجميع :

$$m\vec{A} \wedge n\vec{B} = mn(\vec{A} \wedge \vec{B})$$

1-2-14 - الجداء الاتجاهي بدلالة مركبات المتجهات :

لدينا من تعريف الجداء الاتجاهي حيث $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ هي الأشعة الأساسية على المحاور

الإحداثية

$$\begin{array}{lll} \bar{i} \wedge \bar{i} = \bar{o} & \bar{i} \wedge \bar{j} = \bar{k} & \bar{i} \wedge \bar{k} = -\bar{j} \\ \bar{j} \wedge \bar{i} = -\bar{k} & \bar{j} \wedge \bar{j} = \bar{o} & \bar{j} \wedge \bar{k} = \bar{i} \\ \bar{k} \wedge \bar{i} = \bar{j} & \bar{k} \wedge \bar{j} = -\bar{i} & \bar{k} \wedge \bar{k} = \bar{o} \end{array}$$

فإذا اعتبرنا المتجهين :

$$\bar{A}_1 = x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k}$$

$$\bar{A}_2 = x_2 \bar{i} + y_2 \bar{j} + z_2 \bar{k}$$

فإن جداءهما يكون :

$$\bar{A}_1 \wedge \bar{A}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

وناتج هذا الجداء هو متجه.

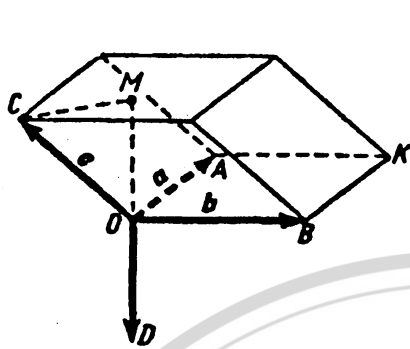
1-2-15 - الجداء المختلط :

الجداء المختلط للمتجهات الثلاثة $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ مأخوذة بهذا الترتيب هو حاصل الجداء السلمي للمتجه $\bar{A}$ في حاصل الجداء الاتجاهي $\bar{B} \wedge \bar{C}$ أي أن العدد $\bar{A} \cdot (\bar{B} \wedge \bar{C})$ أو العدد $(\bar{B} \wedge \bar{C}) \cdot \bar{A}$ هو نفس العدد السابق.

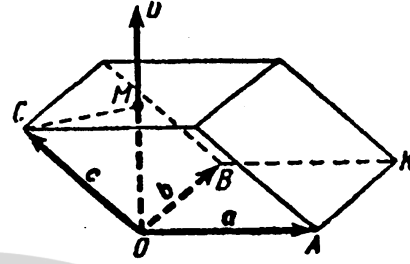
إذا كانت المتجهات $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ تشكل مجموعة مباشرة فإن الجداء $\bar{A} \cdot (\bar{B} \wedge \bar{C})$ المختلط يكون موجبا . أما إذا كانت تشكل مجموعة غير مباشرة فإن الجداء يكون سالبا . وإذا كانت المتجهات $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ واقعة في مستوٍ فإن الجداء المختلط لها يكون معدوماً وبتعبير آخر فإن انعدام حاصل الضرب المختلط هو شرط ودليل على وقوع المتجهات الثلاثة في مستوٍ واحد .

أما المفهوم الهندسي لحاصل الجداء المختلط للأشعة $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ (بفرض أن هذه المتجهات لا تقع في مستوٍ واحد) فيمثل حجم متوازي السطوح المرسوم على المتجهات

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$, ويعتبر هذا الحجم موجباً إذا كانت المجموعة $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ يمتنى كما هو مبين بالشكل (1-15) وسالباً إذا كانت المجموعة يسرى كما هو في الشكل (1-16) .



الشكل (1-16)



الشكل (1-15)

1-2-16 - خواص الجداء المختلط :

1- إذا أجرينا تبديلاً دائرياً للمتجهات المضروبة ، فإن حاصل الجداء المختلط لا يتغير ، أما إذا أجرينا تبديلاً بين متجهين فقط (من المتجهات المضروبة) فإن إشارة حاصل الجداء المختلط تنعكس :

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) &= \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = -\vec{B} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{C}) \\ &= -\vec{C} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{A}) = -\vec{A} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{B})\end{aligned}$$

2-خاصة التوزيع:

$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D}) = \vec{A} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D}) + \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D})$$

3-خاصة التجميع بالنسبة للعدد :

$$(m\vec{A}) \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = m[\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})]$$

4- يكفي وجود التوازي بين متجهين فقط من المتجهات الثلاثة الداخلة في الجداء المختلط ليصبح هذا الجداء صفراً .

تسمح هذه الخواص بإجراء تحويلات عديدة في الضرب المختلط ولا تختلف هذه التحويلات عن التحويلات الجبرية العادية إلا من حيث تغير ترتيب المتجهات المضروبة ومراعاة إشارة حاصل الضرب .

5- الجداء المختلط بدلالة إحداثيات المتجهات :

يكون من الأسهل و الأنسب في كثير من الحالات وعند حساب الجداء المختلط ، استخدام الصيغة :

$$\vec{A}_1 \cdot (\vec{A}_2 \wedge \vec{A}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

حيث يمثل السطر الأول مركبات الشعاع $\vec{A}_1$ والثاني مركبات $\vec{A}_2$ والثالث مركبات $\vec{A}_3$.

3-1- عزم قوة حول نقطة :

تعرف المبادئ الأولية للميكانيك عزم قوة حول نقطة بأنه جداء قيمة القوة في المسافة العمودية بين النقطة والقوة أي ما يعرف بذراع القوة .

إن هذا التعريف لعزم القوة غير كاف في الواقع إذ إن عزم قوة حول نقطة هو مقدار اتجاهي يتضمن قيمة ومنحى واتجاهاً . أما ما يعطيه التعريف المذكور أعلاه فهو فقط القيمة العددية للعزم دون أن يتطرق إلى اتجاهه . وهذه القيمة تساوي ضعف مساحة المثلث المشكل من شعاع القوة والنقطة المأخوذ حولها العزم وفق الوحدات المعتبرة .

ويمكننا أن نبرهن بسهولة أن عزم قوة حول نقطة هو بالتعريف الجداء الشعاعي لشعاعين الأول هو المتجه الذي يبدأ بهذه النقطة وينتهي بأية نقطة تقع على خط عمل القوة (حاملها) والثاني هو القوة ذاتها كما سنوضح ذلك في المثال التالي :

ليكن لدينا المتجه :

$$\vec{F} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

والذي يمر حامله من النقطة $B(2,3,3)$ والمطلوب إيجاد عزم هذا الشعاع حول النقطة $A(1,1,2)$.

الحل :

$$\vec{M}_A = \vec{AB} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

4-1- عزم قوة حول محور موجه :

يعرف عزم قوة حول محور موجه بأنه المسقط العمودي على هذا المحور لعزم القوة حول أية نقطة من المحور .

يتبين من ذلك أن عزم قوة حول محور موجه هو مقدار سلمي محمول على هذا المحور لأنه مسقط متجه .

من هذا التعريف نجد أن عزم قوة حول محور هو الجداء المختلط للأشعة الثلاث:

1- الشعاع الواصل من نقطة ما من المحور إلى نقطة من حامل القوة .

2- شعاع القوة .

3- شعاع الواحدة للمحور .

ونوضح ذلك في المثال التالي :

ليكن لدينا المتجه :

$$\vec{F} = 20\vec{i} + 12\vec{j}$$

والذي يمر من النقطة $A(4,12,0)$ والمطلوب حساب عزم هذا المتجه حول المحور

$\vec{BC}$ مع العلم أن $B(12, 20, 6)$ ، $C(10, 14, -2)$.

الحل :

1- الشعاع الواصل من النقطة B من المحور إلى النقطة A من حامل القوة :

$$\vec{BA} = -8\vec{i} - 8\vec{j} - 6\vec{k}$$

2- شعاع القوة :

$$\vec{F} = 20\vec{i} + 12\vec{j}$$

3- شعاع الواحدة للمحور :

$$\overrightarrow{BC} = -2\vec{i} - 6\vec{j} - 8\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

ويكون شعاع الواحدة :

$$\overrightarrow{e_{BC}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{1}{\sqrt{26}}(-\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k})$$

ويكون عزم الشعاع $\vec{F}$ حول المحور $\overrightarrow{BC}$ هو :

$$\frac{1}{\sqrt{26}} \begin{vmatrix} -8 & -8 & -6 \\ 20 & 12 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \frac{32}{\sqrt{26}} = 6,276$$

5-1- اختزال جملة قوى فراغية بقوة محصلة وعزم محصل :

القوى الفراغية المتفرقة هي القوى غير الواقعة في مستو واحد وغير متوازية وغير متلاقية في نقطة واحدة . وبما أن محصلة جملة القوى المتفرقة تعتمد على القوى نفسها بينما محصلة عزوم هذه القوى حول نقطة معينة تعتمد على موضع هذه النقطة بالإضافة إلى اعتمادها على القوى ، لذلك فإن جملة القوى المتفرقة الفراغية تختزل ، عند نقطة معينة ، إلى محصلة عامة هي المجموع الاتجاهي لقوى الجملة وإلى عزم محصل هو المجموع الاتجاهي لعزوم قوى الجملة حول هذه النقطة . وعند اختزال جملة القوى عند نقطة أخرى فإن المحصلة العامة تبقى ثابتة مقدارا واتجاهاً ولكن العزم المحصل يختلف مقدارا واتجاهاً عن سابقه .

وبتعبير رياضي نقول : إذا كانت لدينا جملة القوى الفراغية المتفرقة $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ حيث يمر حامل كل قوة بالنقاط $A_1, A_2, \dots, A_n$ على الترتيب، ونريد اختزالها في النقطة O بمحصلة عامة $\vec{R}_O$ وعزم محصل $\vec{M}_O$ فيكون :

$$\vec{R}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA_1} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{OA_2} \wedge \vec{F}_2 + \dots + \overrightarrow{OA_n} \wedge \vec{F}_n$$

مثال :

لدينا المتجهات $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ والتي تمر حواملها بالنقاط A, B, C على الترتيب

حيث :

$$\vec{F}_1 = 16\vec{j} + 12\vec{k} \quad A(3,2,0)$$

$$\vec{F}_2 = 9\vec{i} + 12\vec{j} \quad B(0,0,1)$$

$$\vec{F}_3 = -6\vec{i} + 8\vec{j} \quad C(6,0,6)$$

والمطلوب اختزال جملة القوى السابقة في مبدأ الإحداثيات O .

الحل :

- المحصلة العامة :

$$\vec{R}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\vec{R}_0 = 3\vec{i} + 36\vec{j} + 12\vec{k}$$

- العزم المحصل :

$$\vec{M}_0 = \vec{OA} \wedge \vec{F}_1 + \vec{OB} \wedge \vec{F}_2 + \vec{OC} \wedge \vec{F}_3$$

$$\vec{OA} \wedge \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 16 & 12 \end{vmatrix} = 24\vec{i} - 36\vec{j} + 48\vec{k}$$

$$\vec{OB} \wedge \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 9 & 12 & 0 \end{vmatrix} = -12\vec{i} + 9\vec{j}$$

$$\vec{OC} \wedge \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 0 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -48\vec{i} - 36\vec{j} + 48\vec{k}$$

ويكون :

$$\vec{M}_0 = -36\vec{i} - 63\vec{j} + 96\vec{k}$$

1-6- أمثلة محلولة على الفصل الأول :

مثال (1)

أوجد مساحة المثلث الذي تقع رؤوسه في :

$$R(3,6,4) \quad Q(4,2,-1) \quad P(2,3,5)$$

الحل :

$$\overrightarrow{PQ} = (4-2)\vec{i} + (2-3)\vec{j} + (-1-5)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{PQ} = 2\vec{i} - \vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\overrightarrow{PR} = (3-2)\vec{i} + (6-3)\vec{j} + (4-5)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{PR} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

مساحة المثلث :

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}|$$

$$S = \frac{1}{2} |(2\vec{i} - \vec{j} - 6\vec{k}) \wedge (\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k})|$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2} |19\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}|$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(19)^2 + (-4)^2 + (7)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{426}$$

مثال (2) :

$$\vec{A} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \quad \text{أوجد قيمة مسقط المتجه :}$$

$$\vec{B} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k} \quad \text{على المتجه :}$$

الحل :

لنوجد شعاع الواحدة لـ $\vec{B}$:

$$\vec{e}_B = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{4\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}}{\sqrt{(4)^2 + (-4)^2 + (7)^2}}$$

$$\vec{e}_B = \frac{4}{9}\vec{i} - \frac{4}{9}\vec{j} + \frac{7}{9}\vec{k}$$

ويكون مسقط المتجه $\vec{A}$ على المتجه $\vec{B}$.

$$\vec{A} \cdot \vec{e}_B = (\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) \cdot \left(\frac{4}{9}\vec{i} - \frac{4}{9}\vec{j} + \frac{7}{9}\vec{k} \right)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{e}_B = (1)\left(\frac{4}{9}\right) + (-2)\left(-\frac{4}{9}\right) + (1)\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{19}{9}$$

مثال (3)

إذا كان :

$$\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{B} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

فأوجد نتيجة كل من الجداءات الشعاعية :

$$\vec{A} \wedge \vec{B}$$

أ -

$$\vec{B} \wedge \vec{A}$$

ب -

$$(\vec{A} + \vec{B}) \wedge (\vec{A} - \vec{B})$$

ج -

الحل :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}) \wedge (\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k})$$

أ -

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = 10\vec{i} + 3\vec{j} + 11\vec{k}$$

$$\vec{B} \wedge \vec{A} = (\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}) \wedge (2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}) \quad \text{ب -}$$

$$\vec{B} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} \wedge \vec{A} = \vec{i} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} \wedge \vec{A} = -10\vec{i} - 3\vec{j} - 11\vec{k}$$

بالمقارنة مع (أ) نجد أن :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}) + (\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k})$$

$$\vec{A} + \vec{B} = 3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}) - (\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k})$$

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) \wedge (\vec{A} - \vec{B}) = (3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) \wedge (\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k})$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) \wedge (\vec{A} - \vec{B}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) \wedge (\vec{A} - \vec{B}) = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) \wedge (\vec{A} - \vec{B}) = -20\vec{i} - 6\vec{j} - 22\vec{k}$$

مثال (4)

إذا كان :

$$\vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{C} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

فهل يتساوى الجداءان الشعاعيان المختلطان :

$$\bar{A} \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C}) - \text{ب}$$

$$(\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge \bar{C} - \text{أ}$$

الحل :

أ -

$$\bar{A} \wedge \bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\bar{i} + 7\bar{j} + 5\bar{k}$$

$$(\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge \bar{C} = (-\bar{i} + 7\bar{j} + 5\bar{k}) \wedge (\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k})$$

$$(\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge \bar{C} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 24\bar{i} + 7\bar{j} - 5\bar{k}$$

ب -

$$\bar{B} \wedge \bar{C} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -5\bar{j} - 5\bar{k}$$

$$\bar{A} \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C}) = (3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}) \wedge (-5\bar{j} - 5\bar{k})$$

$$\bar{A} \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 15\bar{i} + 15\bar{j} - 15\bar{k}$$

ومنه نجد :

$$(\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge \bar{C} \neq \bar{A} \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C})$$

مثال (5)

لدينا في جملة محاور متعامدة الشعاعان :

$$\vec{U} = m\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{V} = m\vec{i} + 2m\vec{j} + 4\vec{k}$$

أوجد قيمة m ليكون الشعاعان متعامدين .

الحل :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = (m)(m) + 2(2m) + (1)(4) = m^2 + 4m + 4$$

ولكي يكون الشعاعان متعامدين يجب أن يكون هذا الجداء معدوماً ، أي :

$$m^2 + 4m + 4 = 0$$

ومنه يكون قيمة m :

$$m = -2$$

مثال (6)

في جملة محاور متعامدة لدينا $A(1, 1, 3)$, $B(3, 2, 5)$

أوجد الجداء السلمي $\vec{OA} \cdot \vec{AB}$ ثم أوجد عزم الشعاع $\vec{AB}$ بالنسبة لـ O .

الحل :

فانكتب الشعاع $\vec{AB}$ بدلالة مركباته لدينا :

$$\vec{AB} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

كذلك :

$$\vec{OA} \cdot \vec{BA} = 9$$

وبالتالي :

ولنحسب عزم الشعاع $\vec{AB}$ بالنسبة لـ O لدينا :

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \wedge \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$$

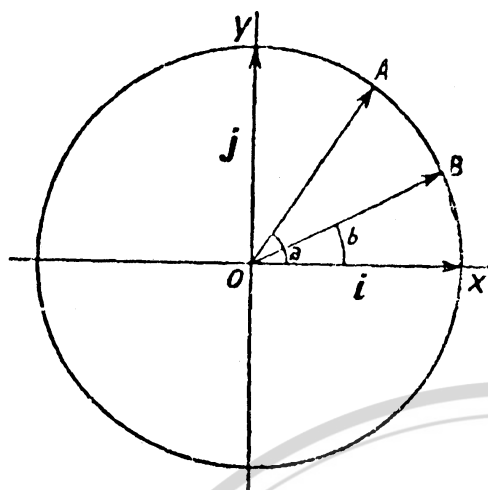
مثال (7)

بالاعتماد على علاقة الجداء السلمي :

برهن صحة المتطابقة :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

الحل :



الشكل (1-17)

لنأخذ دائرة بنصف قطر يساوي إلى الواحد كما هو مبين بالشكل (1-17) وليكن لدينا الشعاع $\vec{OA}$ يصنع زاوية a مع المحور ox والشعاع $\vec{OB}$ يصنع الزاوية b مع نفس المحور .

لدينا إذا :

$$\vec{OA} = \cos a \vec{i} + \sin a \vec{j}$$

$$\vec{OB} = \cos b \vec{i} + \sin b \vec{j}$$

بإجراء الجداء السلمي نجد :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos(a - b) = \cos(a - b)$$

بإجراء هذا الجداء وفقاً للمركبات :

$$\vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{ومع ملاحظة أن } \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \text{ فتجد :}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

وبالتالي يكون :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

7-1- تمرينات غير محلولة على الفصل الأول :

1- عيّن مركبات الشعاع $\vec{V}$ الذي بدايته النقطة $(-2, -3, -1)$ ونهايته النقطة $(0,0,0)$ ثم احسب $|\vec{V}|$.

2- أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط :

$$A(1,3,2) \quad B(2,-1,1) \quad C(-1,2,3)$$

3- بالاعتماد على الأشعة برهن أن قطري متوازي الأضلاع متناصفان .

$$4- \text{أوجد مسقط المتجه } \vec{k} + 6\vec{j} - 3\vec{i} \text{ على المتجه } \vec{k} - 2\vec{j} + \vec{i}$$

5- بالاعتماد على الأشعة : احسب زوايا المثلث الذي رؤوسه عند النقاط :

$$A(1,1,0) \quad B(3,1,0) \quad C(1,3,0)$$

6- احسب عزم القوة :

$$\vec{F} = 10\vec{i} + 6\vec{j}$$

حول المحور الموجه $\overrightarrow{BC}$ إذا علمت أن خط عمل القوة يمر من النقطة A وأن

إحداثيات النقاط هي :

$$A(2,6,0) \quad B(6,10,3) \quad C(5,7,-1)$$

7- بالاعتماد على علاقات الجبر الشعاعي أثبت صحة العلاقات :

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\vec{P} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

8- لدينا القوة :

يمر حاملها من النقطة $(1, -1, 2)$ أوجد عزم القوة بالنسبة للنقطة $(2, -1, 3)$.

9- عين حجم رباعي الوجوه الذي رؤوسه النقاط :

$$(3,3,3) , (1,-1,2) , (2,1,0) , (4,7,-1)$$

$$10- \text{برهن أن : } \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{b} \cdot \vec{d}) \vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{d}$$

الفصل الثاني

الجميل الإنشائية وأنواع القوى التي تخضع لها

2-1- مقدمة :

يجب أن تستند عناصر المنشآت على مساند تكون قادرة على نقل الحمولات إلى الأساسات ثم إلى تربة التأسيس وبحيث يتمتع حدوث أي انتقال أو دوران للمنشأ تحت تأثير الحمولات الخارجية فيبقى المنشأ ثابتاً . وعليه فستتولد ردود الأفعال اللازمة عند نقاط الاستناد لإحداث التوازن في المنشأ تحت تأثير الحمولات والمؤثرات الخارجية والداخلية.

ومع أن المؤلف هو أن نتصور مواضع محددة للمساند التي يستند عليها الإنشاء إلا أن بعض الإنشاءات تستند على مساحة معينة توزع عليها قوى ردود الفعل كما يحدث في الإنشاءات التي تعوم في الماء أو تغوص فيه، وكذلك الإنشاءات التي تطير في الجو وفي تلك الحالات تنشأ قوى رد الفعل من ضغط المياه أو ضغط الهواء على التوالي. فإذا انعدمت محصلة جميع القوى المؤثرة على الإنشاء حدث التوازن الذي يبدو في صورة سكون أو انطلاق بسرعة ثابتة، أما إذا اختلفت قيمة القوى المؤثرة عن قيمة ردود الفعل حدثت الحركة ذات السرعة المتغيرة زيادة أو نقصاناً .

على كل حال فإن المعنى المفهوم لكلمة المساند كمواضع محددة للاستناد هو الذي يعيننا في الوقت الحالي، ويمكن أن يحدد الفرض من أي مسند بأنه منع الحركة كلياً أو جزئياً عند نقطة الاستناد (ويؤدي ذلك لنقل الحمولات من المنشأ إلى المساند ومن ثم إلى الأرض أو إلى المكان الآخر الذي يجب أن تنتقل إليه تلك الحمولات).

ويمكن أن نعرف المساند بشكل عام بأنها العناصر النقطية التي تربط العناصر الإنشائية ببعضها أو بالوسط الخارجي وهي تشكل مجموعة الشروط الطرفية لأي جملة

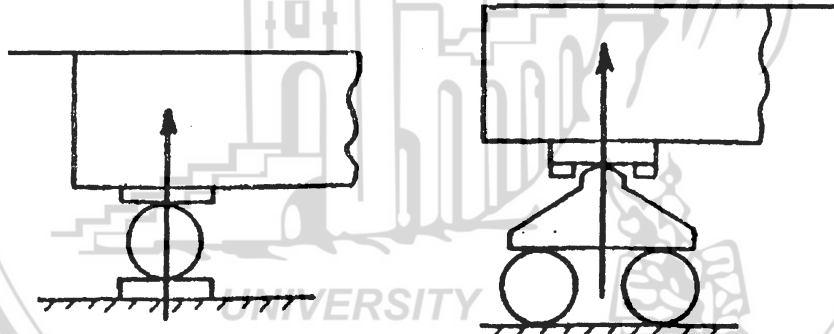
إنشائية وعدد ردود الأفعال فيها تساوي عدد درجات التقييد للحركة ، فكل درجة تقييد للحركة يقابلها رد فعل مناسب.

ويمكن تقسيم المساند بأشكالها المتعددة إلى عدة أنواع بالنسبة للمنشآت المستوية وسنبين فيما يلي تركيب كل مسند من هذه المساند وردود أفعاله .

2-2- المساند المستوية للجمل الإنشائية :

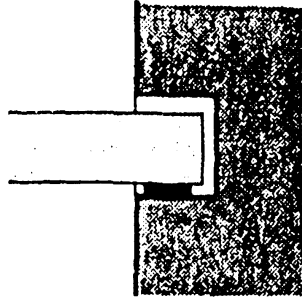
1-المسند البسيط المتحرك :

هو المسند الذي يمتلك درجتين من الحرية هما الانتقال والدوران ومقيد باتجاه وحيد للحركة فيكون له بالتالي رد فعل واحد ينطبق منحاه على منحى التقييد للحركة. وبالتالي فهو عمودي على الاتجاه الحر للحركة ، حيث اعتبرنا الاحتكاك في المسند مهملاً ، ويكون رد الفعل في هذا المسند عبارة عن قوة مارة من مركز المفصل وعمودية على مستوي الاستناد .

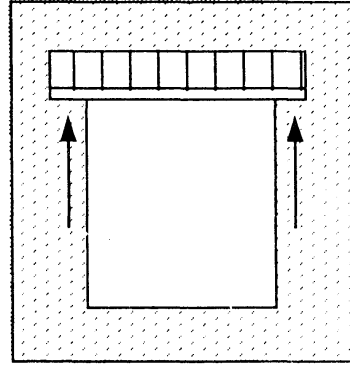


الشكل رقم (2-1)

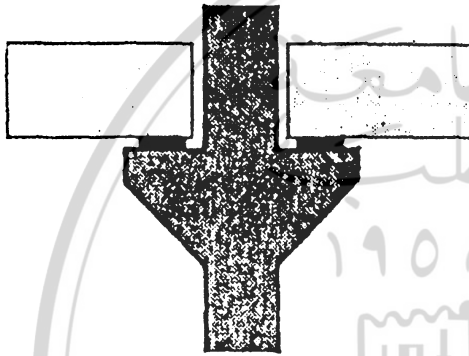
إن أبسط شكل من أشكال المساند المتحركة كما هو مبين بالشكل (2-1) يتألف من صفيحتي استناد علوية وسفلية تحصران بينهما كرة فولاذية. على أنه يمكن استبدال هذه الكرة بأسطوانة فولاذية، ففي الحالة الأولى يكون الاستناد على نقطة ويسمى المسند بالمسند النقطي ، أما في الحالة الثانية فيكون الاستناد على طول مولد الأسطوانة، ويسمى في هذه الحالة بالمسند الخطي .



الشكل (2-3)



الشكل (2-2)



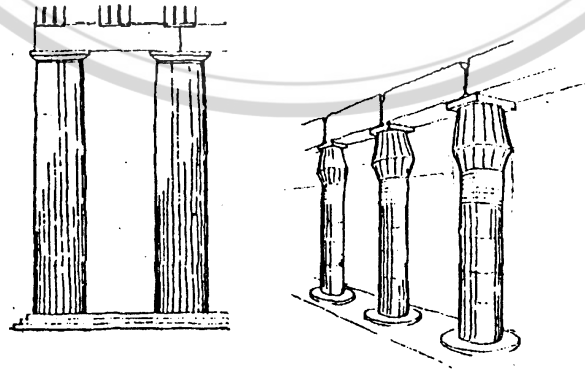
الشكل (2-4)

يجب ألا يغيب عن ذهننا أن الشكل

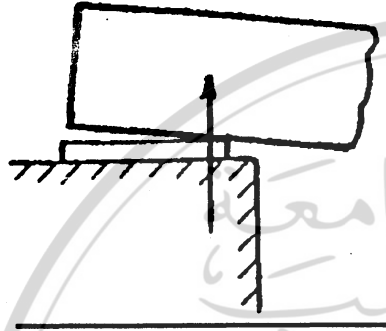
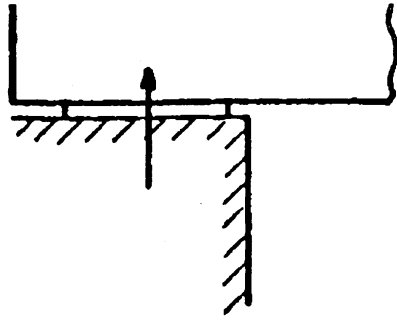
الموصوف أعلاه للاستناد البسيط هو أحد هذه الأشكال . وبشكل عام فإن أي استناد يمنع الحركة باتجاه وحيد فقط هو استناد بسيط فالعتبات التي فوق النوافذ والأبواب مثلاً تعتبر جوائز ذات استناد بسيط، كما هو مبين بالشكل (2-2) كذلك يمكن اعتبار استناد الجوائز الأرضية الموضوعة في تجويف الحائط

الاستنادي استناداً بسيطاً كما في الشكل (2-3) . وكذلك فإن استناد الجائز البيتوني المسبق الصنع على وسادة مطاطية ، موضوعة بدورها على بروز لعمود هو استناد بسيط كما هو مبين بالشكل (2-4) .

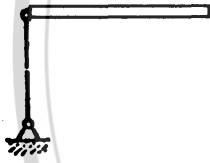
وكذلك استناد الجوائز على الأعمدة الحجرية المبينة بالشكل (2-5) هو استناد بسيط.



الشكل (2-5)



الشكل (2-6)



الشكل (2-7)

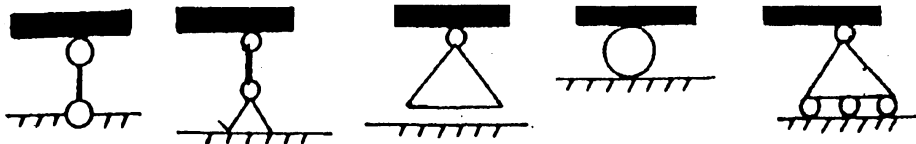
كما أن الاستناد المبين بالشكل (2-6) هو استناد بسيط. وفي هذه الحالة إذا استند الجائز بشكل نظامي فإن رد فعل المسند يمر من منتصف صفيحة الاستناد ولكن الجائز يتغير تحت تأثير التحميل وعندها لا يستند الجائز إلا على طرف الصفيحة وبذلك ينتقل رد الفعل إلى هذا الطرف . وينجم عن ذلك محذوران لهذا المسند البدائي :

أ- إن موقع رد الفعل وطول الجائز الفعال ليسا بثابتين بل يتغيران بعد التحميل .

ب- يتعرض المسند إلى إجهاد موضعي كبير .

أما المسند البسيط المبين بالشكل (2-7) ويدعى أحيانا بالمسند النوسي حيث يتصل فيه الإنشاء عند نقطة الاستناد اتصالاً مفصلياً بعنصر مستقيم يستند مفصلياً أيضاً عند طرفه الآخر على جسم ثابت . وهذا النوع من المساند يسمح بالدوران عند نقطة اتصاله بالإنشاء ، كما يسمح بالحركة باتجاه ناظمي (عمودي) على الخط الواصل بين المفصلين فهو يمثل إذا مسنداً بسيطاً . إن هذا النوع من الاستناد هو الأكثر شيوعاً في الإنشاءات البيتونية المسلحة لسهولة عمله وقلة تكاليفه بالنسبة للأشكال الأخرى من الاستنادات البسيطة.

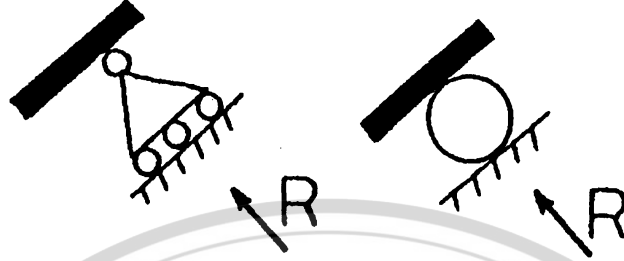
يرمز عادة للمسند البسيط بأحد الأشكال التالية المبينة بالشكل (2-8).



الشكل (2-8)

ويكون رد الفعل لكل مسند في هذه الحالة ذا منحى شاقولي متجه نحو الأعلى أو الأسفل، أما إذا كانت هذه المساند كما في الشكل (2-9).

فإن منحى رد الفعل يكون عمودياً على منحى حرية الحركة ومتجهاً للأعلى أو للأسفل.

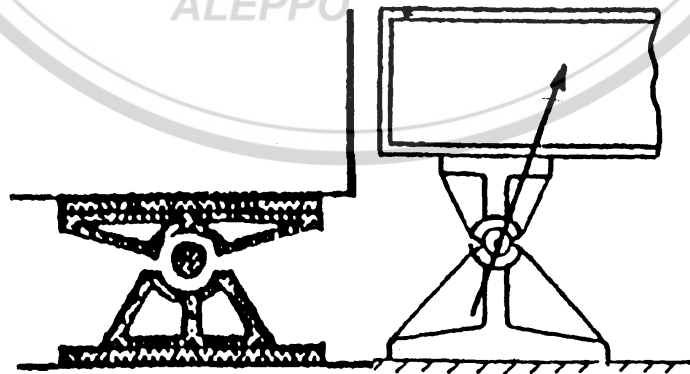


الشكل (2-9)

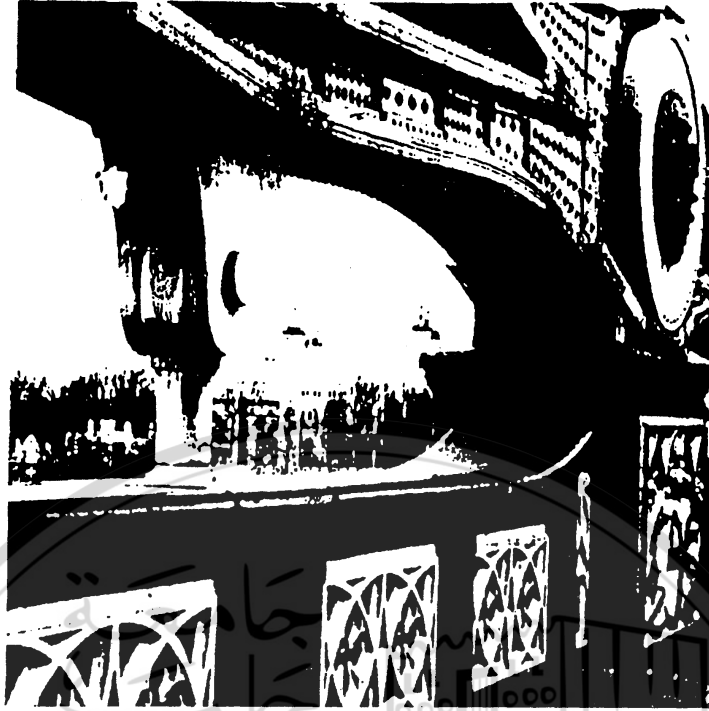
2-المسند الثابت :

هذا النوع من المساند يسمح بالدوران فقط ولكنه لا يسمح بالحركة الانتقالية في أي اتجاه، وعليه فإن لرد الفعل لهذا المسند مركبتين أفقية وشاقولية ، ولتقريب الفكرة نورد مثلاً عليها مفصل الباب الذي يمكن اعتباره مسنداً ثابتاً إذ يسمح بدوران الباب ولا يسمح بانتقاله أفقياً أو شاقولياً. وهكذا فالمسند الثابت عبارة عن مفصل ثابت غير قابل للانتقال، حيث يرمز للمفصل بدائرة صغيرة.

يمثل الشكل (2-10) مسنداً ثابتاً، ونلاحظ أن هذا المسند يحدد بالضبط نقطة تطبيق رد الفعل وهي نقطة وحيدة لا تتبدل إلا أن منحى رد الفعل يبقى مجهولاً ولرد الفعل هذا مركبتان واحدة أفقية وأخرى شاقولية ، ويختلف المسند الثابت عن المسند البسيط بأن الكتلة السفلى من المسند الثابت مثبتة بالأرض أو بجملعة ثابتة.

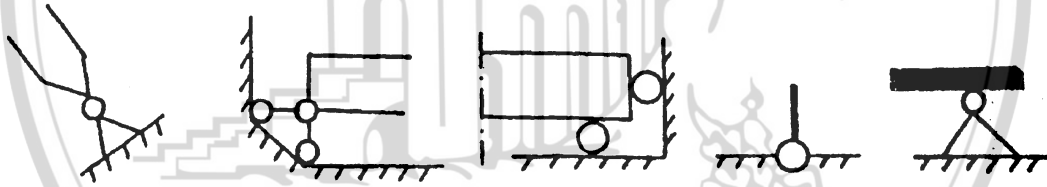


الشكل (2-10)



الشكل (2-11)

يمثل الشكل (2-11) صورة لجسر في (لندن) حيث يبدو فيه مثلاً لمسند ثابت .
يرمز عادة للمسند الثابت بأحد الأشكال الممثلة بالشكل (2-12).



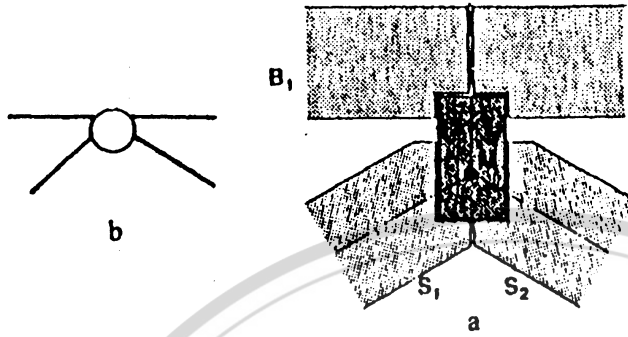
الشكل (2-12)

عندما يكون المفصل السابق قابلاً للانتقال أي موجوداً ضمن فتحة الجائز فإنه
يسمح بدوران المقطع على يمينه بشكل مستقل عن يساره عندها تكون عزوم القوى الواقعة
على يسار المقطع أو على يمينه معدومة ، لأنه أي المقطع حر الدوران . ويمثل الشكل
(2-13 a) وضعية المفصل بالمنشأ أما الشكل (2-13-b) فهو تمثيله الإنشائي .



الشكل (2-13)

كما يمكن للمفصل أن يتصل بعدة عناصر ، فالشكل (a 2-14) يبين وضعية مثل هذا المفصل في المنشأ، أما الشكل (b 2-14) فيبين تمثيله الإنشائي .



الشكل (2-14)

يسمح هذا المفصل بالدوران لكل من الأجزاء B_1, B_2, S_1, S_2 حول مقطع التمثيل، فالعزم المطبق عند مقطع المفصل ولكل جهة يجب أن يكون معدوماً، لأنه حر الدوران، وعندئذ نقول عن المفصل إنه كامل .

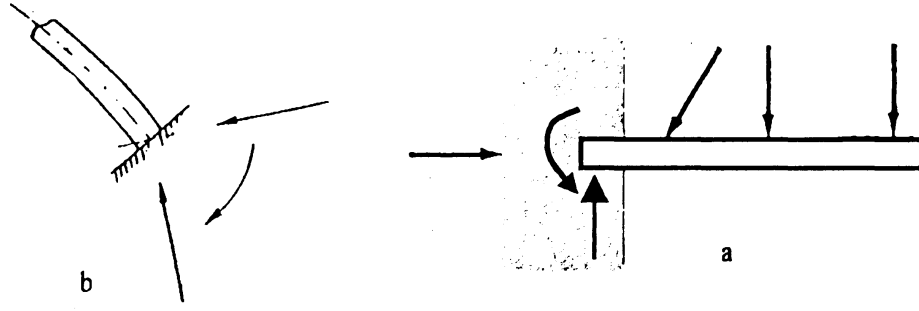
أما إذا كانت إحدى الجهات أو بعضها غير حرة في الدوران حول مقطع التمثيل نسمي المفصل عندها بالمفصل الجزئي .

3- الوثاقة :



الشكل (2-15)

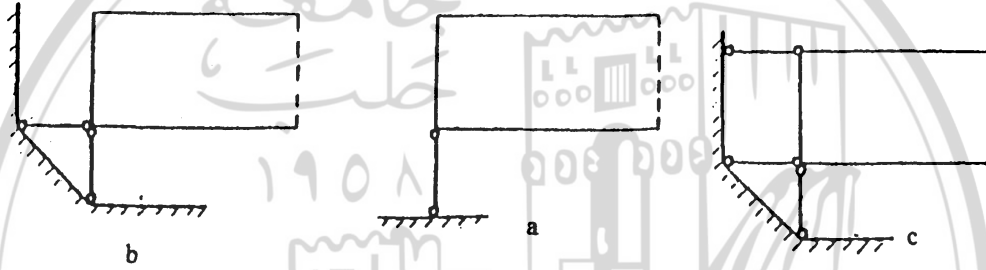
هذا النوع من الارتباط لا يعطي أي درجة حرية للمقطع حيث لا يسمح له بالانتقال الأفقي ولا الشاقولي ولا بالدوران . لذا سيكون هناك رد فعل أفقي وآخر شاقولي وعزم، ومن أجل تصور هذا النوع من الارتباط نسوق مثلاً عليه المسمار المثبت في جدار فارتباطه يعتبر وثاقه، وكذلك ارتباط الشجرة بالأرض كما هو مبين بالشكل (2-15) يعتبر وثاقه أما من الناحية الإنشائية فالشكل (a-b 2-16) يمثل هذا النوع من الارتباط .



الشكل (2-16)

وأخيراً يمكن تمثيل المساند الثلاثة السابقة بحسب نوعها كما يلي :

أ- المسند البسيط أو المتحرك ويُمثل بشكل قضيب متمفصل في طرفيه شكل (2-17-a) أي بمسند نوسي .



الشكل (2-17)

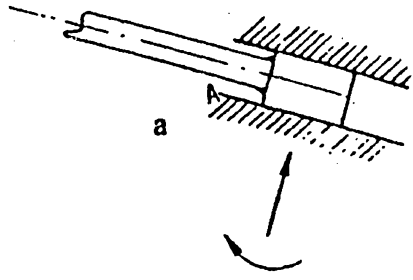
ب- المسند الثابت أو المضاعف ويُمثل بقضيبين متمفصلين في طرفيهما شكل (2-17-b) أي بمسندين نوسيين .

ج- الوثاقة (المسند الموثوق) ، ويمثل بثلاثة مساند نوسية كما في الشكل (2-17-c) .

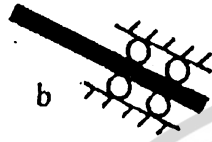
د- إن هذا الشكل من التمثيل يُظهر عدد المجاهيل اللازم معرفتها لتعيين رد الفعل في كل مسند، فالمسند المتحرك يتعين بمجهول واحد أمّا المسند الثابت فيتعين بمجهولين، والمسند الموثوق يتعين بثلاثة مجاهيل.

4- المسند الموثوق والمتحرك باتجاه ما :

لايسمح لهذا المسند بالدوران وهو مقيد الحركة باتجاه وحر بالاتجاه الآخر وعليه فإن رد الفعل فيه يتكون من عزم وقوة عمودية على منحى الحركة المسموحة .



ولتقريب الفكرة لهذا النوع من الارتباط نقول إنه أشبه بحركة المكبس ضمن اسطوانة كما هو مبين بالشكل (2-18-a) ويمثل هذا الارتباط إنشائياً كما في الشكل (2-18-b).



الشكل (2-18)

2-3- المساند المستوية المرنة :

نقول عن مسند إنه يعاني إنتقالات

عندما يخضع إلى إنتقالات وفق اتجاهات

مركبات ردود أفعاله كلها أو بعضها. وعندما تكون هذه الإنتقالات متناسبة خطياً مع مركبات ردود الأفعال، نقول عن المسند بأنه مسند مرن خطي، فمثلاً النوابض المبيّنة بالشكل (2-19-a, b, c) تمثل مساند مرنة خطية، وبحسب الحمولات التي تخضع لها هذه النوابض

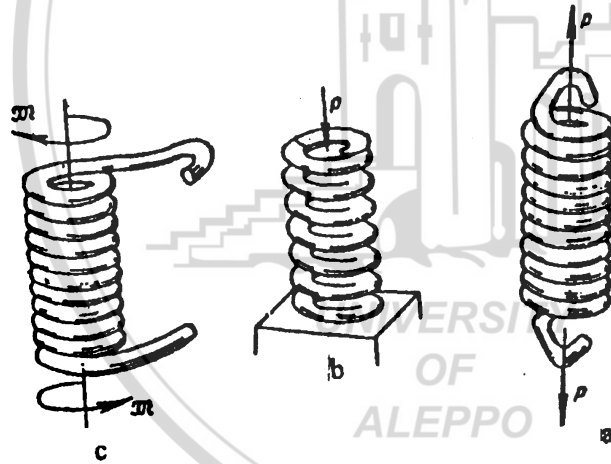
فإنها تقسم إلى نوابض

شد الشكل (2-19-a)

ونوابض ضغط (2-19-b)

ونوابض فتل شكل

(2-19-c).



الشكل (2-19)

في الحالتين

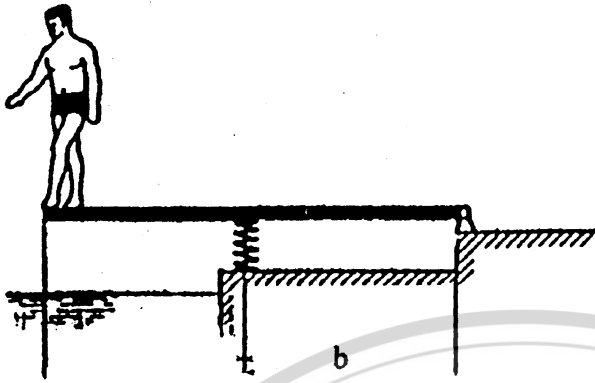
الأوليتين يتم التحميل بقوى

ذات محصلة تتجه على طول

محور النابض، أما نابض

الفتل فيُحمل بعزمين واقعين في مستويين عموديين على محور ذلك النابض. إن الاختلافات في تصميم هذه الأنواع من النوابض تتلخص في شكل نهاياتها، فالحلقات النهائية لنوابض الشد والفتل تعطف بحيث يسهل تثبيتها بالعناصر الأخرى، أما الحلقات النهائية لنوابض الضغط فتجلخ لتؤمن سطوحاً استنادية كافية.

يسمى K عامل مرونة النابض على الضغط أو الشد وهو يمثل النسبة بين القوة

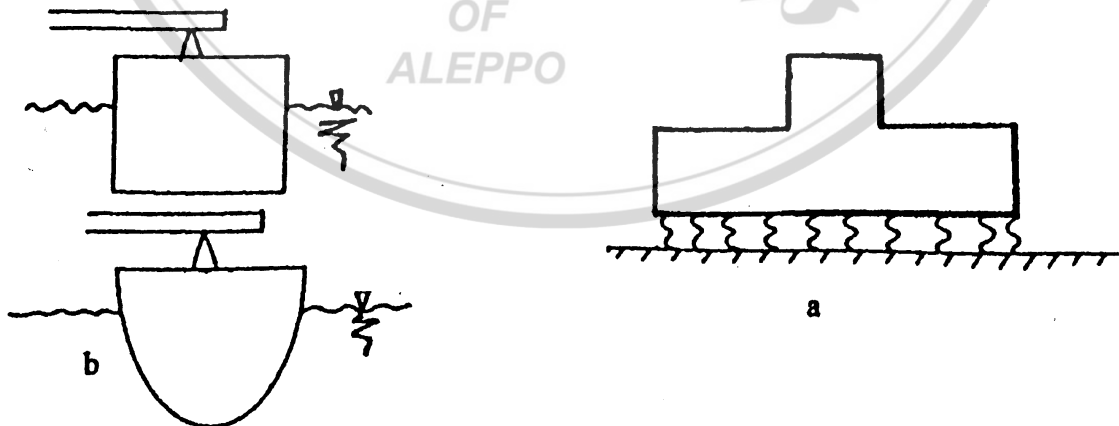


الشكل (2-20)

التي يخضع لها
النابض ومقدار
انتقاله. وعليه
فوحدة قياس K
هي وحدات قوة
مقسومة على
وحدة انتقال
(وحدة الأطوال)
أي تكتب مثلاً tf/cm .

ولتسهيل الرسم يمثل الاستناد على نابض كما هو مبين بالشكل (2-20-a)، أما
الشكل (2-20-b) فيمثل مثلاً على ذلك.

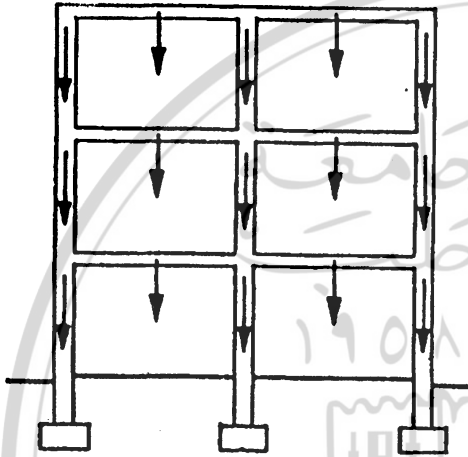
في الواقع ليس ضرورياً أن يمثل الاستناد النابضي استناداً على نابض حقيقي.
فمثلاً استناد أساس على تربة وهبوط هذه التربة بشكل متناسب مع القوة المطبقة عليها
يعتبر بمثابة استناد نابضي كما هو مبين بالشكل (2-21-a)، كما يمكن اعتبار الاستناد على
عوامة في الماء استناداً نابضياً إذ إن انتقال هذه العوامة يتناسب مع القوة المطبقة عليها كما
هو مبين بالشكل (2-21-b).



الشكل (2-21)

2-4- أنواع القوى التي تخضع لها الجمل الإنشائية :

كما هو معلوم ، إن الهدف الرئيسي للهيكل الإنشائي هو نقل الحمولات المطبقة على المنشأ إلى قواعد ثابتة في الأرض ، لذلك فإن الدراسة الإنشائية تتطلب تحديد مقدار الحمولات التي يمكن أن تطبق على الهيكل الإنشائي . فمثلاً يوضح الشكل (2-22) الحمولات الناتجة عن الوزن الذاتي لعناصر المنشأ وكيفية انتقالها إلى أساسات هذا المنشأ.



الشكل (2-22)

وفي الحقيقة تتطلب الدراسة الكاملة معرفة قيمة كل حمولة من الحمولات وشكل تطبيقها وفترة الحدوث المحتملة، وخلال كامل عمر المنشأ الافتراضي.

إن أغلب القوى المطبقة على الهيكل الإنشائي هي عبارة عن القوى الناتجة عن تأثير الجاذبية، كوزن المنشأ نفسه، والأوزان الناتجة عن استخدام هذا المنشأ ، وهناك قوى أخرى مهمة وذات طبيعة مختلفة كالقوى

الناتجة عن الرياح والهزات الأرضية ، وفي المنشآت البحرية هناك القوى الناتجة عن الأمواج.

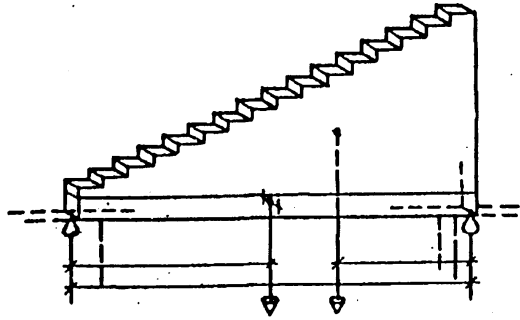
مما تقدم يمكننا أن نصنف القوى : حسب طبيعتها ، أو مدة تأثيرها أو سرعة تطبيقها.

2-5- تصنيف القوى :

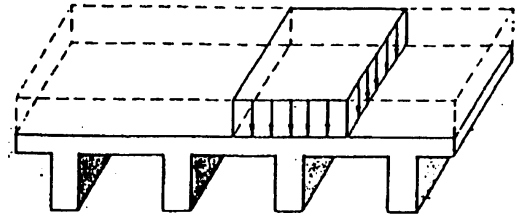
1-2-5- تصنيف القوى حسب طبيعتها :

تقسم القوى بحسب طبيعتها إلى :

- أ- **قوى حجمية :** وهي القوى التي تتوزع على حجم الجسم وتؤثر في كل جزء منه كحمولة الوزن الذاتي للبلاطة المبينة بالشكل (2-23) أو الوزن الذاتي للجائز وجدار القرميد الذي يستند عليه كما هو مبين بالشكل (2-24).



الشكل (2-24)

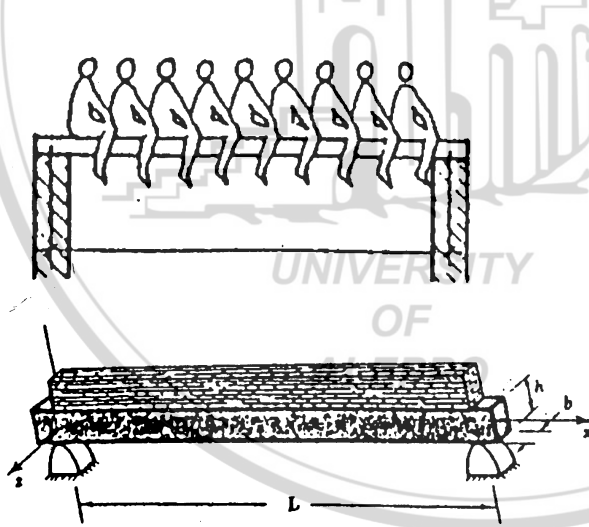


الشكل (2-23)

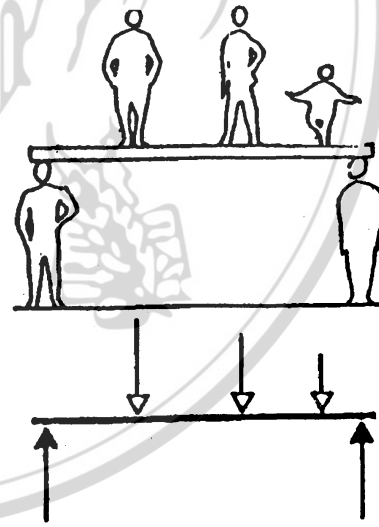
ب- **قوى سطحية:** وهي القوى التي تؤثر على مجالات سطحية للمنشأ وتصنف:

1- **القوى المركزة:** وهي القوى التي تكون مساحة تأثيرها صغيرة بالمقارنة مع السطح الكلي للمنشأ إذ يمكن الاعتبار أن هذه القوى تؤثر في نقطة ونسُميها بقوة مركزة ويبين الشكل (2-25) مثلاً توضيحياً على ذلك .

2- **القوى الموزعة:** وهي القوى الموزعة على طول العنصر ونسُميها بالحمولة الموزعة كما هو مبين بالشكل (2-26) .

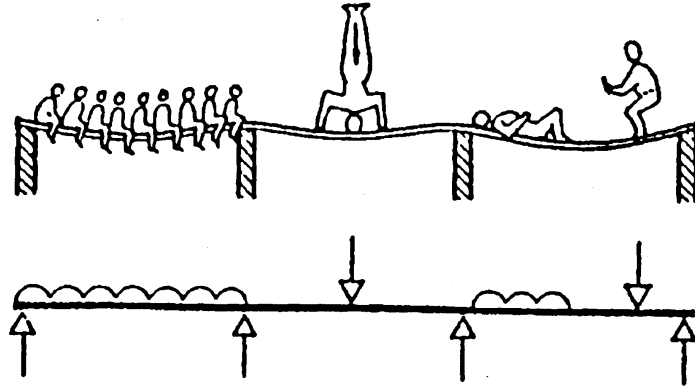


الشكل (2-26)



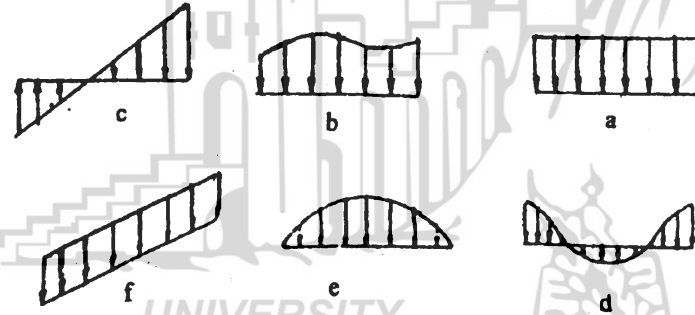
الشكل (2-25)

كما يمكن أن تكون هذه الحمولة موزعة على رقعة من العنصر فتدعى عندئذ بالحمولة الموزعة الجزئية ويبين الشكل (2-27) مثلاً توضيحياً يشمل الحمولة الموزعة، والموزعة الجزئية والمركزة .



الشكل (2-27)

في الواقع يمكن أن تكون الحمولة موزعة بانتظام كما في الشكل (2-28-a) أو موزعة بغير انتظام وذلك كما في الشكل (2-28-b) ، كما أن الحمولات قد تكون موزعة توزيعاً يمثلها تابع رياضي كأن يكون التغير في الشدة خاضعاً لعلاقة خطية من الدرجة الأولى كما في الشكل (2-28-c) ويسمى التوزيع في هذه الحالة توزيعاً خطياً، أو لعلاقة قطع مكافئ من الدرجة الثانية، كما في الشكل (2-28-d). ويمكن أن يسمى هذا توزيعاً مكافئاً، وأخيراً يبين الشكل (2-28-e) حمولات موزعة على شكل منحني جيبي.

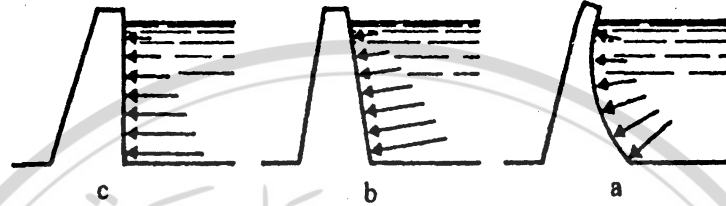


الشكل (2-28)

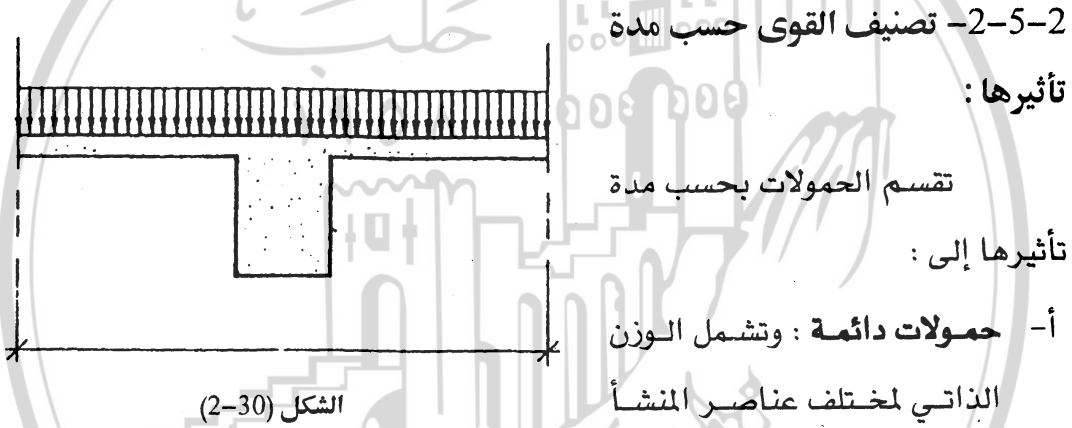
في الحقيقة ليس من الضروري أن تكون الحمولات الموزعة متعامدة مع محور الإنشاء عند نقاط تأثيرها فالشكل (2-28-f) يبين حمولة شاقولية موزعة بانتظام تؤثر على محور مائل في هذه الحالة تعطى الشدة عند أية نقطة بمقدار ما يقع من حمولة على المتر الطولي ، ويمكن أن يكون هذا الطول في الاتجاه الأفقي وتسمى الشدة في هذه الحالة : شدة على المتر الأفقي ، ويمكن أن يكون قياس الشدة بالمتر على طول المحور المائل وتسمى: شدة المتر المائل. من الواضح أن قيمة الشدة لحمولة معينة إذا أعطيت على المتر الأفقي أو الشاقولي تكون أكبر مما لو أعطيت على المتر المائل وذلك لأن المتر الأفقي أو الشاقولي يقابل طولاً

أكبر من متر على المائل. وعلى العكس من ذلك فإن حمولة معينة بشدتها على المتر المائل تكون أقل من تلك التي لها نفس القيمة العددية ولكن على المتر الأفقي أو الشاقولي .

والشكل (2-29) يوضح هذه الفكرة ، فشدة دفع الماء الأفقي بالمتر الشاقولي في الشكل (2-29-c) أكبر من شدة دفع الماء الأفقية بالمتر المائل في الشكل (2-29-b) أو المنحنية (2-29-a).



الشكل (2-29)



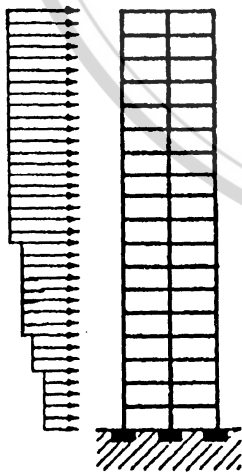
2-5-2- تصنيف القوى حسب مدة تأثيرها :

تقسم الحمولات بحسب مدة تأثيرها إلى :

أ- حمولات دائمة : وتشمل الوزن الذاتي لمختلف عناصر المنشأ

وجميع الحمولات التي لها صفة الاستمرار ويبين الشكل (2-30) مثالا عليها .

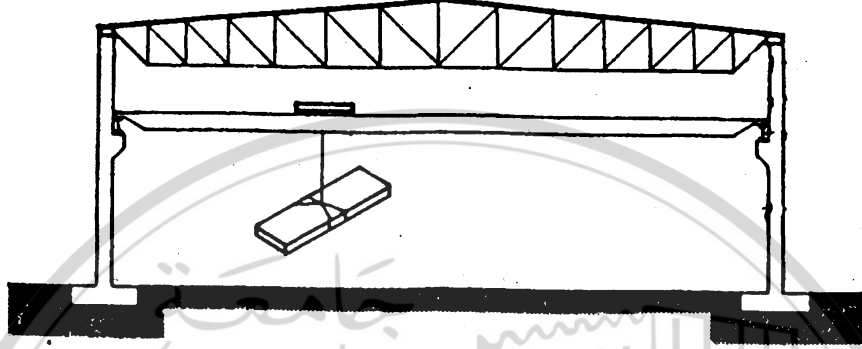
ب- حمولات حية : وهي الحمولات التي تطبق خلال فترة زمنية محددة قد تقصر أو تطول ومثال على ذلك في الأبنية دفع الرياح وأوزان الثلوج ، والحمولات الناجمة عن تواجد الأشخاص في القاعات الدراسية وقاعات السينما والأماكن العامة ، ويبين الشكل (2-31) مثالا للحمولة الحية التي تمثل دفع الرياح على البناء .



الشكل (2-31)

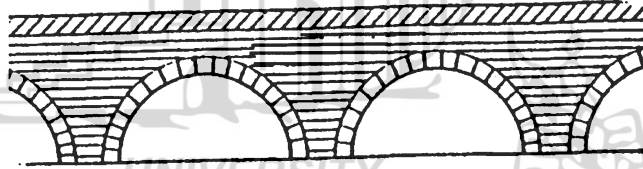
ليس من الضروري أن تكون الحمولات الحية متحركة ولكن العكس هو الصحيح فإذا كانت الحمولات المتحركة هي حمولات حية فإن أوزان الثلج على البناء وهي حمولات حية أيضاً بينما حمولة الناقلات على الجسور هي حمولة حية متحركة .

الشكل (2-32) يبين الحمولة الحية المتحركة التي يخضع لها جائر تنزلق عليه

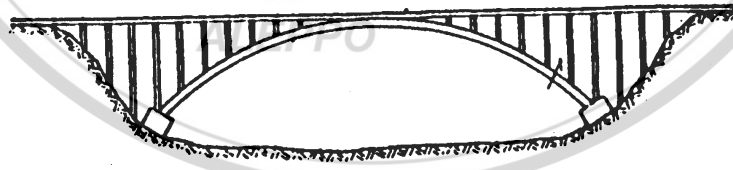


الشكل (2-32)

رافعة. أما عن نسبة الحمولة الحية إلى الحمولة الدائمة فهي تختلف باختلاف طبيعة مادة المنشأ ووظيفته ، ففي الجسر الحجري مثلاً المبين في الشكل (2-33) تعتبر الحمولة الحية صغيرة بالنسبة للحمولة الدائمة بينما العكس هو الصحيح في الجسر الفولاذي المبين بالشكل (2-34).



الشكل (2-33)

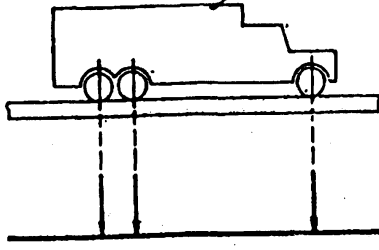


الشكل (2-34)

3-5-2- تصنيف القوى حسب سرعة تطبيقها:

تقسم الحمولات بحسب سرعة تطبيقها إلى:

أ- **حمولات ستاتيكية** : حيث تكون سرعة التحميل بطيئة كحمولة الوزن الذاتي للمنشأ.



الشكل (2-35)

ب- **حمولات ديناميكية :** حيث تكون سرعة التحميل كبيرة كالحمولات التي تتعرض لها الجسور من جراء مرور الناقلات كما هو موضح بالشكل (2-35) .

6-2- أنواع الجمل الإنشائية :

يمكن تقسيم الجمل الإنشائية تبعاً للفرضيات الحسابية إلى الأنواع الأساسية

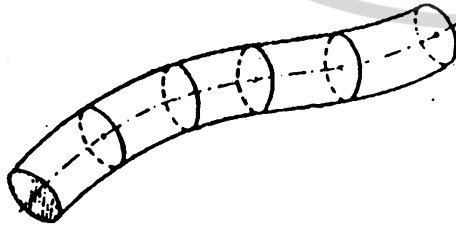
التالية:

1- الجمل الإنشائية الخطية : وهي التي يكون مقطعها العرضي ذا أبعاد أصغر بكثير من طولها وبتعبير آخر إنها الجمل الإنشائية التي يكون فيها أحد الأبعاد (هنا الطول) أكبر بكثير من البعدين الآخرين (هنا العرض والارتفاع) وتشمل هذه الجمل الأعمدة والجوائز والإطارات والأقواس .

2- الجمل الإنشائية السطحية : وهي جمل لا ينطبق عليها التعريف السابق للإنشاءات الخطية بل يكون فيها أحد الأبعاد (السمكة) أصغر بكثير من البعدين الآخرين (الطول ، العرض) ولذلك فهي تتكون إجمالاً من سطوح رقيقة نسبياً وتشمل الألواح المعدنية والبلاطات والقشريات .

3- الجمل الإنشائية الكتلية : تكون الأبعاد الثلاثة في هذا النوع من الجمل الإنشائية متقاربة بالاتجاهات الثلاثة بحيث لا يمكن إهمال أحد الأبعاد بالنسبة لبعد آخر ومثال عليها ركائز الجسور .

7-2- الجمل الإنشائية الخطية :



الشكل (2-36)

تسمى الأجسام المنتمية إلى هذه الجمل بالأجسام الموشورية ويمكن تعريف الجسم الموشوري بكونه الجسم الناتج عن انتقال مقطعٍ مستوٍ بشكلٍ ناظمي على

منحنٍ يمر من مركز ثقل هذا المقطع كما في الشكل (2-36).

ندعو هذا المنحني بالمحور أو الخط الأوسط للجسم الموشوري وندعو المقطع المشكل له بالمقطع العمودي على المحور أو المقطع العرضي وقد يكون المحور فراغياً أو مستوياً كما من خطوط مستقيمة أو خطوط منحنية وقد يكون المقطع العرضي ذا أشكال مختلفة أيضاً فيمكن أن يكون ثابتاً أو أن يكون متغيراً .

يتم انتقال المقطع العرضي على المحور بشكل انسحاب وبدون دوران حول المحور وبذلك فإن كل نقطة من المقطع ترسم في انتقالها خطاً موازياً للمحور أو للخط الأوسط وندعو ليفاً من الجسم الموشوري ويتحدد موقع الليف بتحديد إحداثيات النقطة المشكلة له على أنه يمكن في جميع حالات الجمل الإنشائية الخطية هذه تمثيل الإنشاء بالخط السال على المحور دون اعتبار لشكل مقطعه العرضاني وذلك لسهولة الرسم .

2-8- استقرار الجمل الإنشائية المستوية :

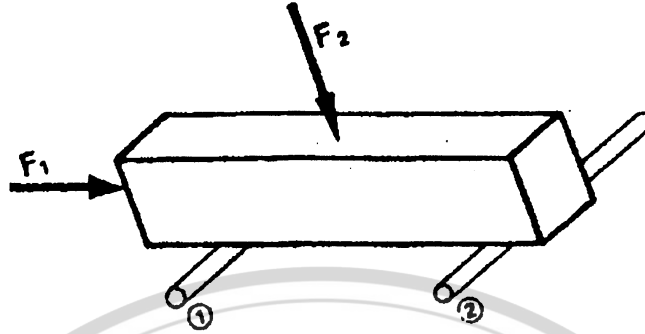
نقول عن جملة إنشائية أنها مستوية عندما تقع جميع محاور عناصرها والقوى الخارجية المطبقة عليها في مستوي واحد . ولكي يكون جسم أو منشأ في الحالة المستوية ثابتاً تحت تأثير القوى المستوية التي تؤثر عليه، أي أنه لا يتحرك في أي اتجاه ولا يدور، فيجب أن تتحقق ثلاثة شروط للتوازن تتعلق بمجموع القوى المستوية التي تؤثر عليه وهي:

- 1- أن تكون محصلة القوى بالاتجاه الشاقولي معدومة لتمنعه من الحركة الشاقولية .
 - 2- أن تكون محصلة القوى بالاتجاه الأفقي معدومة لتمنعه من الحركة الأفقية .
 - 3- أن تكون محصلة العزوم حول أية نقطة منه أو خارجة عنه معدومة لتمنعه من الدوران.
- وبناءً على ذلك فإن لدينا ثلاث معادلات واجبة التحقيق ليتحقق التوازن بالحالة المستوية.

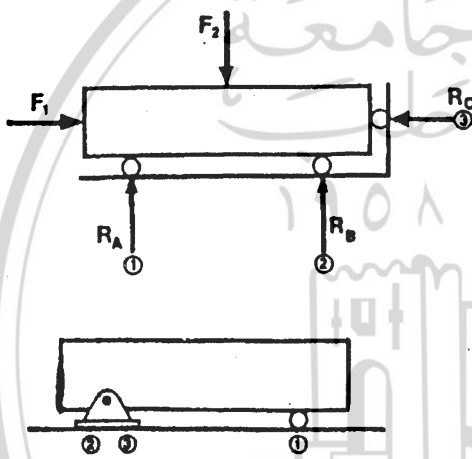
1-2-8- الجمل الإنشائية المستوية التي لاتحوي مفاصل داخلية :

لنناقش المثال التالي:

بفرض أن لدينا الجائز المبين بالشكل (2-37) والمستند على أسطوانتين . فإذا طبقنا عليه قوة أفقية فإنه سينزلق أفقياً تحت تأثير هذه القوة.



الشكل (2-37)



الشكل (2-38)

إن كل اسطوانة تمثل مسنداً بسيطاً أي ارتباطاً واحداً وبالتالي فسيكون هناك رد فعل شاقوليّان وهما لا يكفيان لمنع حركة الجائز الأفقية ولا بد من وجود ارتباط ثالث أفقي لمنع الحركة الأفقية . وعليه يتم تأمين رد فعل أفقي يحقق توازن القوى الأفقية في الجائز كما هو مبين في الشكل (2-38).

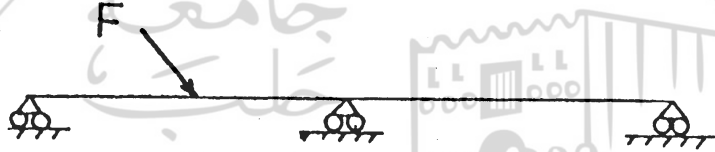
وهكذا نستنتج أنه يلزم على الأقل ثلاثة ارتباطات ليكون الجائز مستقراً وثابتاً وهذا ما يمكن تفسيره من وجهة نظر رياضية إذ إن عدد معادلات التوازن كما ذكرنا ثلاث وكل ارتباط يمثل مجهولاً لرد الفعل فوجود ثلاثة ارتباطات يعني وجود ثلاثة مجاهيل الأمر الذي يمكن من حل جملة المعادلات الثلاث . أما إذا كان عدد الارتباطات أقل من ثلاثة فسيكون عدد المجاهيل أقل من عدد المعادلات وجملة المعادلات السابقة تقبل أي حل لها وبالتالي فالجملة غير مستقرة .

ومنه نستنتج لكي يكون المنشأ المستوي مستقراً يجب أن يوجد على الأقل ثلاثة ارتباطات لمنع حركته الأفقية والشاقولية والدورانية أما إذا كان عدد الارتباطات أقل من

ثلاثة فنقول عن المنشأ إنه غير مستقر . فالجائز المبين بالشكل (2-37) غير مستقر لوجود ارتباطين بينما الجائز المبين بالشكل (2-38) مستقر لوجود ثلاثة ارتباطات .

2-8-2- الجمل الإنشائية المستوية التي تحوي مفاصل داخلية .

وجدنا سابقاً أنه لكي يبقى المنشأ ثابتاً يجب أن يكون له على الأقل ثلاثة ارتباطات مستقلة إلا أن هذا الشرط لازم ولكنه غير كافٍ (لأنه ملتزم بمنع حركته الأفقية والشاقولية والدورانية) كما أن استقرار المنشأ لا يعتمد فقط على عدد الارتباطات بل أيضاً على ترتيبها الهندسي ، فالجائز المبين بالشكل (2-39) ليس مستقراً إذ ينتقل تحت تأثير أي قوة أفقية بالرغم من وجود ثلاثة ارتباطات .

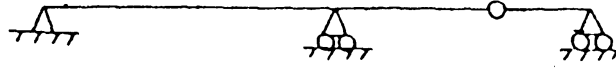


الشكل (2-39)

وعليه، ولكي يكون المنشأ المستوي مستقراً يجب أن يتحقق شرطان هما أولاً وجود ثلاثة ارتباطات وذات ترتيب هندسي من شأنه أن يمنع حركته الأفقية والشاقولية والدورانية ثانياً .

عندما يحوي المنشأ مفصلاً أو عدة مفاصل داخلية كالجائز المبين بالشكل (2-40) الذي يحوي مفصلاً داخلياً فإن عزوم القوى على يسار المفصل أو على يمينه تساوي الصفر وبالتالي فإن كل مفصل يعطي معادلتين إضافيتين للتوازن إلا أن إحدى هاتين المعادلتين تمثل واحدة من معادلات التوازن الثلاث للمنشأ فلدينا والحالة هذه معادلة إضافية واحدة فقط مستقلة .

وفي حالة وجود عدة مفاصل يكون لدينا عدد من المعادلات الإضافية المساوية لعدد هذه المفاصل ومنه يمكننا القول : إن كل مفصل داخلي في منشأ متصل بعنصرين يضيف معادلة واحدة إلى معادلات التوازن وتكون عزوم القوى الواقعة على يمين أو يسار المفصل تساوي الصفر .



الشكل (2-40)

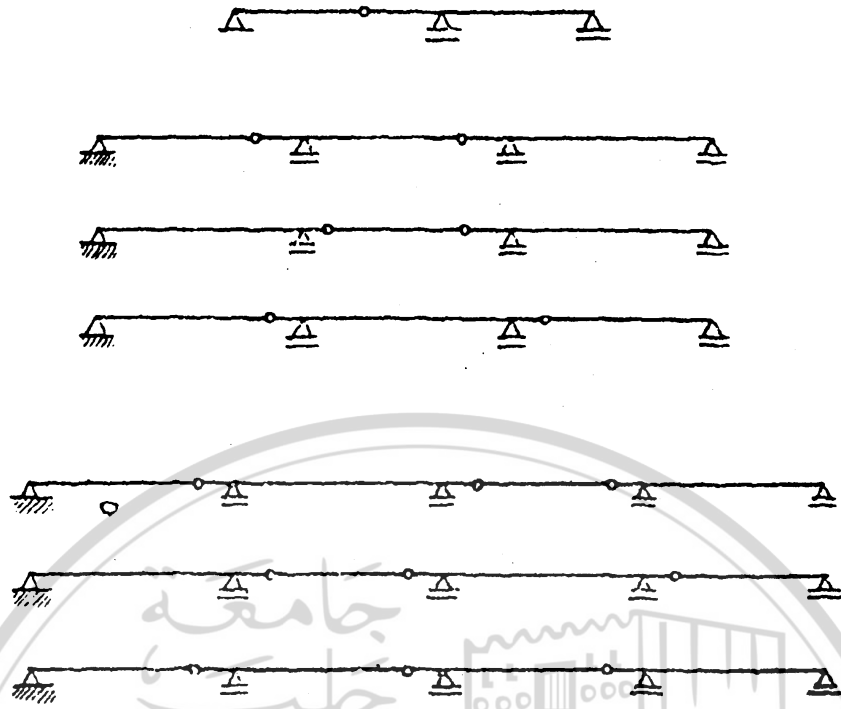
يجب أن نشير هنا إلى أن الفرق بين مقطع داخلي ومفصل داخلي في منشأ هو أن عزوم القوى المطبقة على كامل الجائز في هذا المقطع الداخلي تساوي الصفر بينما تكون عزوم القوى الواقعة إما على يمين المفصل وإما على يساره أو لكامل الجائز تساوي الصفر.

وكما أشرنا سابقاً فإنه بالإضافة لتساوي عدد المعادلات مع عدد المجاهيل ليكون الجائز مقررًا أو مستقرًا يجب أن يكون ترتيب ارتباطاته الهندسية على النحو الذي يمنع حركته الأفقية والشاقولية والدورانية في كل جزء من أجزائه وبالتالي فيجب عند تحديد مواضع المفاصل في مثل هذه الجوائز أن تتحقق الشروط التالية لتكون الجوائز مستقرة :

- 1- ينبغي ألا تحوي الفتحة الخارجية أكثر من مفصل داخلي واحد ولا يجوز في هذه الحالة أن تحوي الفتحة التي تليها أكثر من مفصل واحد أيضاً وعلى ذلك فإن مجموع عدد المفاصل الداخلية في الفتحة الخارجية والفتحة التي تليها ينبغي ألا يزيد عن اثنين .
- 2- يجب ألا تحوي فتحة داخلية أكثر من مفصلين داخليين (أي يجب ألا يوجد بين مسندين أكثر من مفصلين) على أن لا يزيد عدد المفاصل الداخلية في فتحتين داخليتين متجاورتين عن ثلاثة مفاصل .
- 3- ينبغي ألا يزيد عدد المفاصل الداخلية في مجموعة متجاورة من الفتحات عن عدد هذه الفتحات إذا كانت تشمل فتحة خارجية واحدة فإذا اشتملت على فتحتين خارجيتين لزم ألا يزيد عدد المفاصل عن عدد الفتحات مطروحاً منه واحد .
- 4- لا يمكن أن يقل عدد المفاصل الداخلية في فتحتين متجاورتين عن مفصل واحد .
- 5- إذا كان الارتباط الطرفي للجائز من النوع الموثوق اعتبرت الفتحة الأخيرة بمثابة فتحة داخلية بالمناقشات السابقة .

والشكل (2-41) يبين أمثلة لجوائز مستقيمة مستقرة ومقررة تحقق الشروط

السابقة .



الشكل (2-41)

9-2- الجمل الإنشائية المستوية المستقرة والمقررة :

نقول عن جملة مستوية إنها مقررة عندما تكفي شروط التوازن وحدها لمعرفة جميع ردود أفعال المساند ومعرفة جميع القوى الداخلية في أي مقطع داخلي والتي تتكون من قوة عمودية على المقطع وأخرى مماسية له وقوة ثالثة تمثل عزمًا .
يمكننا أن نستنتج من التعريف السابق للجملة المقررة أن كل سطح مغلق في منشأ مستوي يعطي ثلاثة مجاهيل إضافية .

لنفرض أنه من أجل منشأة مستوية لدينا :

a : عدد المجاهيل الناتجة عن الارتباطات الخارجية .

b : عدد المجاهيل الكلية الناتجة عن السطوح المغلقة .

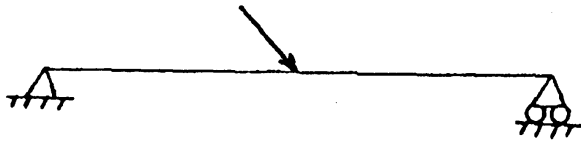
m : عدد المعادلات الناتجة عن المفاصل الداخلية .

وباعتبار أن الجملة مستوية فهناك ثلاث معادلات ناتجة عن التوازن وبالتالي يكون :

$$a + b \quad \text{وعدد المجاهيل} \quad 3 + m \quad \text{عدد المعادلات}$$

وهنا نميز ثلاث حالات :

$$3 + m = a + b \quad \text{عندهما يكون : 1-}$$



الشكل (2-42)

فالجملّة مقررّة ومستقرّة

إذا كان ترتيب ارتباطاتها الهندسية

مستقرّاً لكل جزء من الجملّة

وللجملّة ككل وهذه الجمل هي موضوع بحثنا في هذا الكتاب (انظر الشكل 2-42) .

2- عندما يكون

$$(3 + m) > (a + b)$$

فالجملّة غير مستقرّة ، وسنستبعد هذه الجمل من المناقشة إذ لا يمكن استخدامها في المنشآت المدنية .

$$3 - \text{عندما يكون } (3 + m) < (a + b)$$

فالجملّة مستقرّة إلاّ أنّها غير مقررّة ويمكن استخدامها في المنشآت المدنية، إلاّ أنّها تخرج عن أبحاث هذا الكتاب وتدرس في السنوات المقبلة. ولنأخذ عدة أمثلة على ذلك :

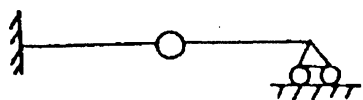


الشكل (2-43)

فمن أجل الجائز المبين بالشكل (2-43) :

نجد أن المسند الثابت يعطي مجهولين، المسند البسيط مجهولاً واحداً أي أن $a = 3$ وبما أنه لا يوجد أي سطح مغلق تكون $b = 0$ كذلك لا يوجد مفصل داخلي فتكون $m = 0$ وبالتالي يكون عدد المجاهيل 3 وعدد المعادلات 3 فالمنشأ مقرر ويعدى عادة بالجائز البسيط وهو يمثل عنصراً إنشائياً يستند على مسندين أحدهما ثابت والآخر متحرك. وللمسند المتحرك بشكل عام وظيفة أساسية في الجمل الإنشائية إذ يسمح للجملّة بالتمدد بحرية عند تغير درجة الحرارة كما في الشكل (2-43-a) . وهكذا فالجائز البسيط في حالتنا هذه يتمدد ويتقلص بحرية عندما تتغير درجة الحرارة كما في الشكل (2-43-b) .

وفي حالة عدم وجود هذا المسند المتحرك في حال كون المسندين ثابتين فإن المسافة بينهما ثابتة، الأمر الذي يعرض الجائز إلى إجهادات كبيرة .

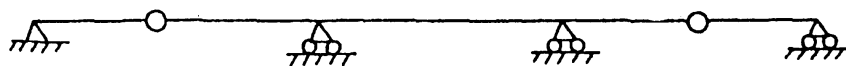


الشكل (2-44)

أما في حالة المنشأ المبين بالشكل (2-44) فالوثاقة تعطي ثلاثة مجاهيل، والمسند البسيط مجهولاً وبالتالي $a = 4$ و $b = 0$ و $m = 1$ والمنشأ مقرر .

أما في حالة الجائز المبين بالشكل (2-45)

فلدينا :



الشكل (2-45)

$a = 5$, $b = 0$, $m = 2$ فالجائز مقرر .

وفي حالة الجائز المبين بالشكل (2-46) لدينا أيضاً :



الشكل (2-46)

$a = 5$, $b = 0$, $m = 2$ فعدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل إلا أن ارتباطاته الهندسية غير مستقرة لوجود مفصلين في فتحة طرفية .



الفصل الثالث

توازن الجمل الإنشائية

3-1- مقدمة :

إذا كانت محصلة مجموعة القوى المؤثرة على جسم ما معدومة فالجسم في هذه الحالة لا ينتقل ولكنه يستطيع الدوران حول أية نقطة . ولنع دوران الجسم حول نقطة ما . يجب أن تكون محصلة عزوم القوى حول أية نقطة معدومة .

يجب أن نشير هنا إلى أن هناك farkاً أساسياً بين توازن الأجسام بالميكانيك وتوازنها بمقاومة المواد ، فالتوازن بالميكانيك يعني أن تكون محصلة القوى الخارجية وعزومها وردود الأفعال معدومة وذلك بغض النظر عما إذا كانت مادة وأبعاد هذا الجسم تتحمل هذه القوى أم لا ؟ أما في مقاومة المواد فبالإضافة إلى التوازن الميكانيكي فيجب دراسة تحمل مادة وأبعاد هذه الأجسام للقوى المطبقة عليها .

3-2- إيجاد ردود الأفعال للجمل الإنشائية المستوية :

كما مر معنا سابقاً هناك ثلاثة شروط للتوازن . أما شروط التوازن الثلاثة فهي :
1- يجب أن يكون مجموع القوى الأفقية المؤثرة على المنشأ بما فيها ردود الأفعال معدوماً . وباعتبار x محوراً أفقياً موجهاً (وفق جهة اختيارية) تكون الصيغة الرياضية لهذا الشرط:

$$\sum F_x = 0 \quad (1)$$

حيث F_x كل قوة موازية للمحور x .

وهذا الشرط كفيل بمنع الجملة من الانتقال وفق المنحى الأفقي .

2- يجب أن يكون مجموع القوى الشاقولية المؤثرة على المنشأ بما فيها ردود الأفعال معدوماً . وباعتبار y محوراً شاقولياً موجهاً (وفق جهة اختيارية) تكون الصيغة الرياضية لهذا الشرط:

$$\sum F_y = 0 \quad (2)$$

حيث F_y كل قوة موازية للمحور y .

وهذا الشرط كفيل بأنه يمنع الحركة وفق المنحى الشاقولي

3- يجب أن يكون مجموع عزوم القوى المؤثرة على المنشأ بما فيها ردود الأفعال حول أي نقطة من المستوي معدوماً، وباعتبار العزم موجهاً وفق جهة اختيارية تكون الصيغة الرياضية

لهذا الشرط :

$$\sum M = 0 \quad (3)$$

حيث M عزم كل قوة حول أي نقطة من المستوي .

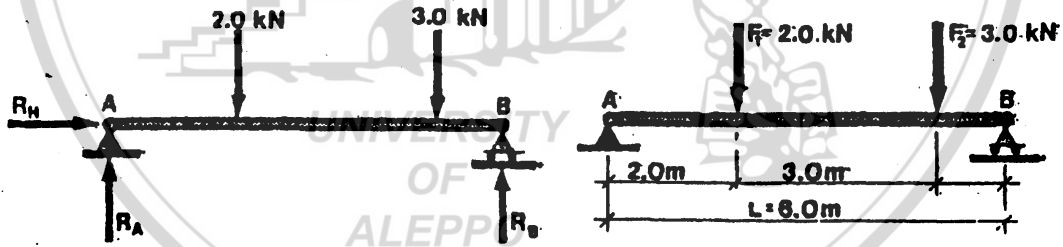
وهذا الشرط كفيل بمنع دوران المنشأ حول أي نقطة من المستوي .

وبما أن الجملة مستوية فمن المفترض أن تكون القوى المؤثرة في الجملة واقعة في

نفس مستوي الجملة .

3-3- أمثلة محلولة :

3-3-1 أمثلة محلولة على حساب ردود الأفعال للجوائز التي لاتحتوي مفاصل داخلية مثال (1) : ليكن الجائز المبين بالشكل (3-1-a) والمطلوب حساب ردود الأفعال في المساند



الشكل (3-1-a)

الشكل (3-1-b)

الحل : نطبق شروط التوازن الثلاثة لحساب ردود الأفعال لهذا الجائز .

تدعى المسافة بين المسندين بفتحة الجائز وهي تمثل البعد بين محاور الأعمدة.

إن فتحة الجائز المعطى هي $l = 6 \text{ m}$ وهو محمل بقوتين شاقوليتين $F_1 = 2 \text{ kN}$ و

$F_2 = 3 \text{ kN}$ ، ولرد فعل المسند الثابت A مركبتان : المركبة الشاقولية R_A والمركبة الأفقية

R_H ، أما في المسند المتحرك B فهناك رد فعل شاقولي واحد R_B كما في الشكل (3-1-b) حيث الاتجاه الموجب المعتبر لردود الأفعال هو اتجاه اختياري .

$$1- \text{بتطبيق الشرط الأول لتوازن القوى : } \sum F_x = 0$$

نجد أن رد الفعل R_H هو القوة الوحيدة المؤثرة في الجائز بالاتجاه الأفقي وبما أن

مجموع القوى الأفقية المؤثرة في الجائز معدوم فرد الفعل الأفقي : $R_H = 0$

$$2- \text{بتطبيق الشرط الثاني لتوازن القوى : } \sum F_y = 0$$

وباعتبار الاتجاه الموجب نحو الأعلى (وهو اتجاه اختياري) يكون لدينا :

$$R_A - F_1 - F_2 + R_B = 0$$

وبالتعويض نجد :

$$R_A + R_B = 5$$

وبالتالي فإننا لانستطيع حساب R_A , R_B من شرط التوازن الثاني فقط لأن لدينا

معادلة واحدة بمجهولين .

$$3- \text{لذلك نطبق شرط توازن العزوم : } \sum M = 0$$

ولنأخذ توازن العزوم حول النقطة B وبذلك نحذف R_B من المعادلة (لأن عزوم أي

قوة حول نقطة واقعة على حاملها معدوم) وباعتبار الاتجاه الموجب للعزم مع دوران عقارب

الساعة (وهو اتجاه اختياري) يكون لدينا :

$$6R_A - 4F_1 - 1F_2 = 0$$

وبالتعويض نجد :

$$R_A = 1,83 \text{ KN}$$

وتعني الإشارة الموجبة أن افتراضنا لاتجاه R_A كان صحيحاً .

نعوض عن قيمة R_A بالشرط الثاني فنجد :

$$1,83 + R_B = 5$$

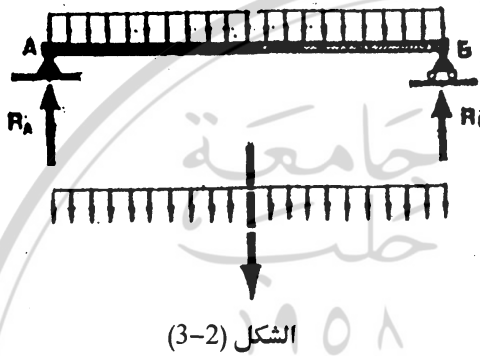
$$R_B = 3,17 \text{ KN}$$

بما أن توازن العزوم يتطلب أن تنعدم محصلة العزوم حول أي نقطة في المستوي
فستطيع حساب R_B مباشرة بأخذ معادلة العزوم حول النقطة A وبذلك فإن رد الفعل R_A
يحذف من المعادلة (لأن النقطة A واقعة على حامل القوة R_A).
$$-6R_B + 2F_1 + 5F_2 = 0$$

وبالتمويض نجد :

$$R_B = 3,17 \text{ KN}$$

وبذلك نكون قد تحققنا من النتيجة التي حصلنا عليها من الشرط الثاني .



مثال (2) :

المطلوب إيجاد ردود الأفعال
للجائز المبين بالشكل (3-2) الذي
يخضع لحمولة موزعة بانتظام
مقدارها $q = 2 \text{ t.m}$ و $L = 6 \text{ m}$.

الحل :

نعوض عن الحمولة الموزعة بمحصلة مقدارها :

$$R = qL = 12 \text{ t}$$

ومنحاهما شاقولي واتجاهها نحول الأسفل ومطبقة في نقطة تمثل مركز ثقل الحمولة
المطبقة .

$$\sum F_x = 0 \quad \text{بتطبيق شرط التوازن الأول :}$$

$$H_A = 0$$

نجد :

$$\sum F_y = 0 \quad \text{فإذا طبقنا شرط التوازن الثاني :}$$

لحصلنا على معادلة بمجهولين . لذا يفضل أن نطبق دوماً الشرط الثالث بأخذ العزوم حول
أحد المساند وبالتالي نحصل على قيمة أحد ردود الأفعال الشاقولية مباشرة، وبتطبيق
الشرط الثاني نحصل على رد الفعل الشاقولي الآخر .

بأخذ العزوم حول B وبفرض أن الدوران مع عقارب الساعة موجب نجد :

$$6R_A - (12)(3) = 0$$

$$R_A = 6 \text{ t}$$

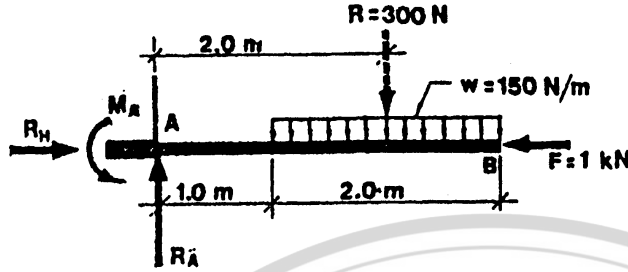
وبالإسقاط على y باعتبار الاتجاه الموجب نحو الأعلى نجد : $R_A + R_B - 12 = 0$

ومنه : $R_B = 6t$

ملاحظة :

كان يمكن إيجاد النتيجة مباشرة بالاعتماد على التناظر .

مثال (3) :



ليكن المطلوب

حساب ردود الأفعال للجائز

الظفري المبين بالشكل

(3-3).

الشكل (3-3)

الحل :

يمكننا اعتبار الاتجاهات الموجبة لردود الأفعال كما نشاء لأنها اختيارية، إلا أنه يفضل عند اختيار هذه الاتجاهات أن تكون هي الاتجاهات الصحيحة ويتم ذلك بمناقشة القوى الخارجية المطبقة على الجائز. ففي هذا الجائز مثلاً نجد أن القوة الأفقية الخارجية الوحيدة المطبقة تتجه من اليمين إلى اليسار، فمن الطبيعي أن يكون رد الفعل الأفقي معاكساً لهذا الاتجاه. وكذلك فإن القوى الشاقولية الخارجية المطبقة على هذا الجائز تتجه نحو الأسفل وبالتالي سيكون رد الفعل الشاقولي متجهاً نحو الأعلى . وكذلك فسيكون اتجاه دوران العزوم الخارجية المطبقة حول A مع عقارب الساعة، فمن الطبيعي أن يكون اتجاه دوران عزم رد الفعل في الوثاقة بعكس عقارب الساعة . باعتبار أن الارتباط في A وثاقة فسيكون هناك رد فعل أفقي وآخر شاقولي وعزم.

و يتم اختيار اتجاهاتها الموجبة وفق المناقشة السابقة .

بالإسقاط على المحور x واعتبار اتجاهه الموجب من اليسار إلى اليمين نجد :

$$R_H = 1\text{KN} \quad R_H - I = 0$$

والنتيجة الموجبة تعني أن اتجاه R_H المختار كان صحيحاً .

بالإسقاط على المحور y وباعتبار اتجاهه الموجب نحو الأعلى نجد :

$$R_A - R = 0 \quad R_A - (150)(2) = 0 \quad R_A = 300\text{N}$$

والقيمة الموجبة تعني صحة الاتجاه المختار لرد الفعل الشاقولي .

أخيراً بأخذ العزوم حول A ونعتبر الاتجاه الموجب للدوران مع عقارب الساعة

فتجد:

$$-M_A + R(2) = 0 \quad -M_A + (300)(2) = 0 \quad M_A = 600\text{Nm}$$

وتعني الإشارة الموجبة صحة الاتجاه المختار للعزم M_A ولا يعني ذلك أن اتجاهه

كان مع عقارب الساعة .

مثال (4) :

ليكن المنشأ المبين بالشكل (3-4-a) والمؤلف من جائزين ظفرين وجائز بسيط

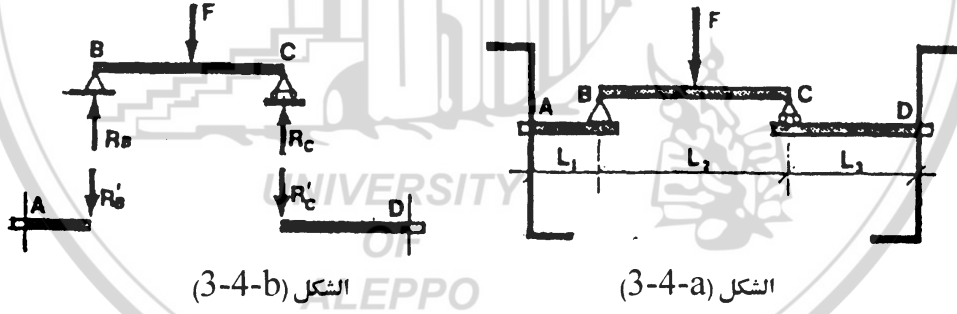
يستند على نهايتي الظفرين والمطلوب حساب ردود الأفعال في مساند ووثاقات المنشأ .

الحل :

نبدأ بحل هذا المثال باعتبار الجائز البسيط BC كمنشأة منفصلة كما في الشكل

(3-4-b) ونحدد ردود أفعال هذا الجائز التي تؤثر بدورها على نهايتي الظفرين كقوى

خارجية. وهكذا يصبح المثال عبارة عن حل ثلاثة جوائز مقررة بسيطة .



بتطبيق معادلات التوازن الثلاث على كل جائز نحصل على ردود الأفعال التالية لكل

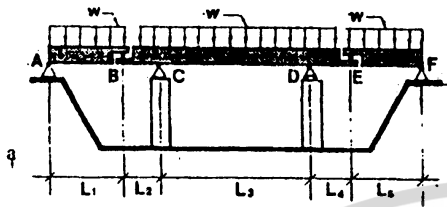
جائز :

$$\begin{array}{lll} H_A = 0 & R_B = R_c = F/2 & M_A = F/2 L_1 \\ H_B = 0 & R_A = F/2 & M_D = F/2 L_2 \\ H_D = 0 & R_D = F/2 & \end{array}$$

3-3-2- أمثلة محلولة على حساب ردود الأفعال للجوائز التي تحوي مفاصل داخلية:

مثال (1)

ليكن المنشأ المبين بالشكل (3-5-a) حيث الارتباط الداخلي في كل من B و E

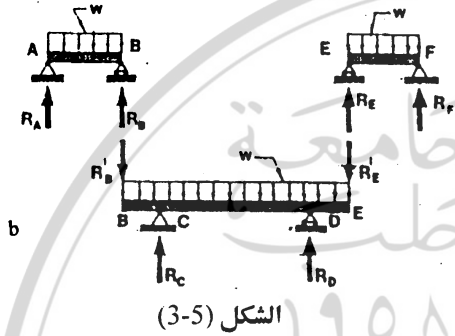


مفصل بسيط ، والمطلوب حساب ردود الأفعال

والقوى المتبادلة في المفصل بفرض :

$$W = 2t/m \quad L_2 = L_4 = 1m$$

$$L_3 = 4m \quad L_1 = L_5 = 2m$$



باعتبار أن كلاً من المقطع B , E

يمثل ارتباطاً مفصلياً بسيطاً فيمكن التعويض

عنه برد فعل شاقولي وحيد متبادل بين طرفي

الجائز كما هو مبين بالشكل (3-5-b)

وبالتالي يمكن تحليل المنشأ إلى جائز بسيط

BE يحوي ظفرين وجائزين بسيطين AB و

EF يستند أحد طرفي كل منهما على الظفر ويستند الطرف الآخر على مسند ثابت .

ولإيجاد ردود الأفعال نبدأ بالجائز AB حيث نجد من التناظر :

$$R_{AH} = 0 \quad R_A = R_B = (2)(2)/2 = 2t$$

وكذلك بالنسبة للجائز EF نجد :

$$R_{FH} = 0 \quad R_E = R_F = (2)(2)/2 = 2t$$

وباعتبار الجائز BE متناظراً أيضاً يكون :

$$R_{CH} = 0 \quad R_C = R_D = \frac{(2)(6) + (2)(2)}{2} = 8t$$

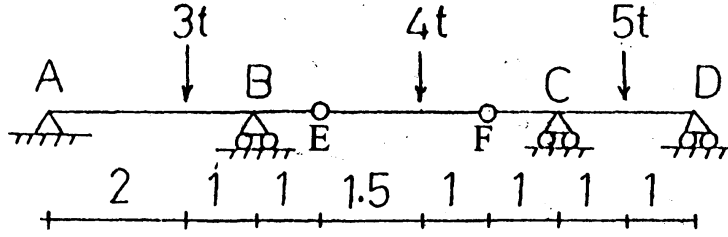
مثال (2) :

ليكن الجائز المبين بالشكل (3-6-a) حيث يمثل كل من E و F مفصلاً والمطلوب

حساب ردود الأفعال والقوى المتبادلة بين المفصلين .

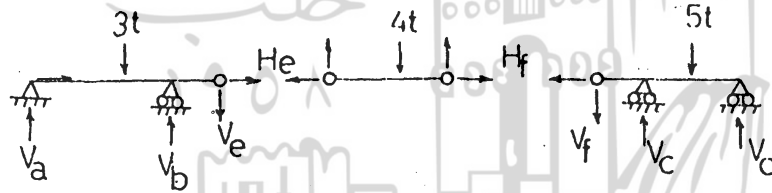
الحل :

بالإسقاط على x لكامل الجائز نجد $H_A = 0$



الشكل (3-6-a)

فإذا أخذنا العزوم حول أي مسند أو عزوم القوى الواقعة على يسار أو يمين أي مفصل فسيكون في المعادلة مجهولان، لذا فمن الأفضل عزل الجائز إلى ثلاثة أجزاء كما هو مبين بالشكل (3-6-b) مع التعويض عن القوى المتبادلة في كل مفصل بقوتين أفقية وشاقولية متساويتين ومتعاكستين لأن المفصل في كل من E و F ليس مفصلاً بسيطاً بل هو يمنع الحركة الانتقالية النسبية بالاتجاهين بين طرفي كل جزء .



الشكل (3-6-b)

من الجزء الأول وبالإسقاط على x نجد :

وفي الجزء الثاني وبالإسقاط على x نجد :

وبأخذ العزوم حول F نجد :

$$2,5V_E - (4)(1) = 0$$

$$V_E = 1,6t$$

ومنه :

وبالإسقاط على y نجد :

$$1,6 - 4 + V_F = 0$$

$$V_F = 2,4t$$

ومنه :

نعود للجزء الأول :

بأخذ العزوم حول A نجد :

$$(1,6)(4) - 3V_B + (3)(2) = 0$$

$$V_B = 4,133t$$

ومنه :

وبالإسقاط على y نجد :

$$V_A - 3 + 4,133 - 1,6 = 0$$

$$V_A = 0,467 \text{ t} \quad \text{ومنه :}$$

لنطبق الآن شروط التوازن على الجزء الثالث :

وبأخذ العزوم حول D نجد :

$$-(2,4)(3) + 2V_C - (5)(1) = 0$$

ومنه :

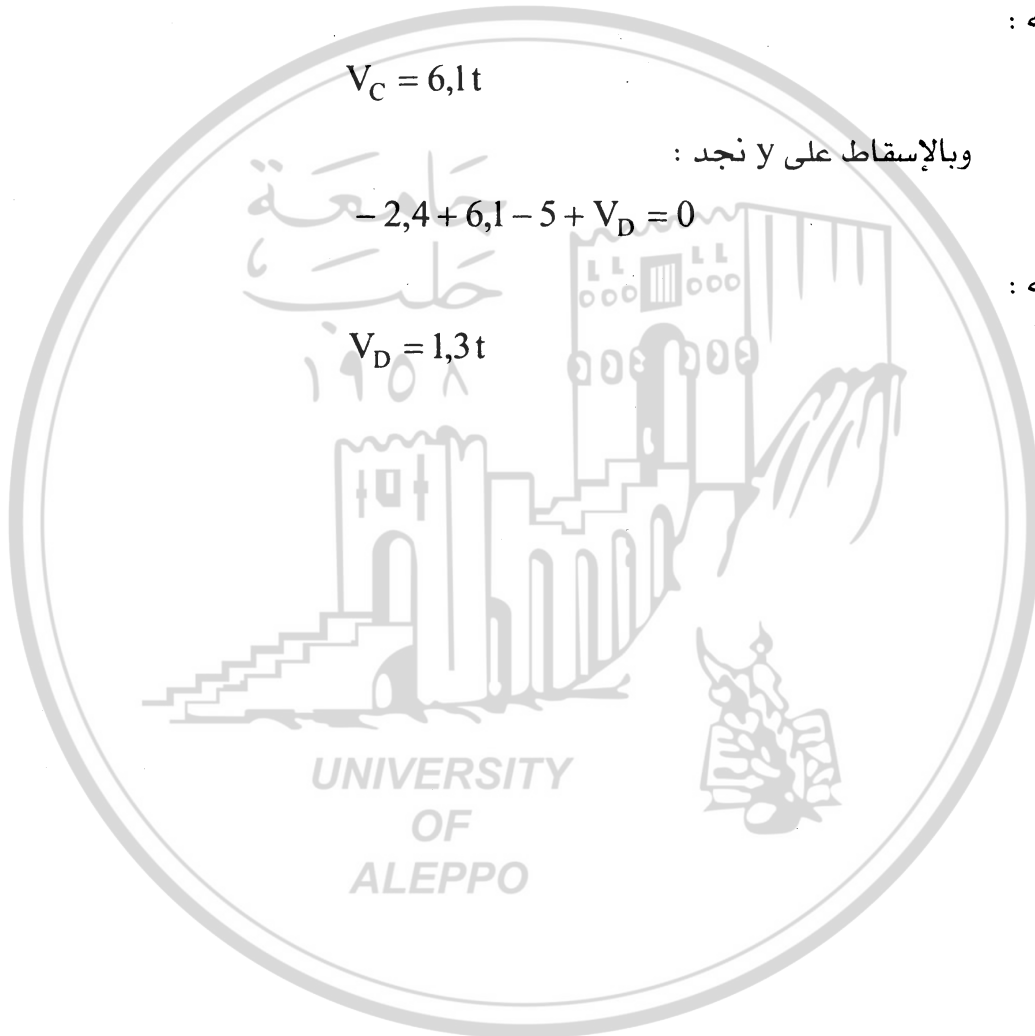
$$V_C = 6,1 \text{ t}$$

وبالإسقاط على y نجد :

$$-2,4 + 6,1 - 5 + V_D = 0$$

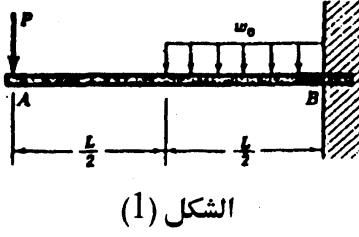
ومنه :

$$V_D = 1,3 \text{ t}$$



4-3- مسائل غير محلولة على الفصل الثالث:

مسألة (1) :

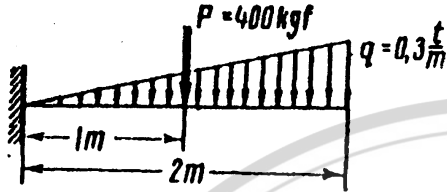


أوجد رد الفعل والعزم في الوثاقة B بفرض

$P = 1t, W_0 = 2t/m, L = 6m$ كما هو مبين

بالشكل (1)

مسألة (2) :



أوجد رد الفعل والعزم في الوثاقة

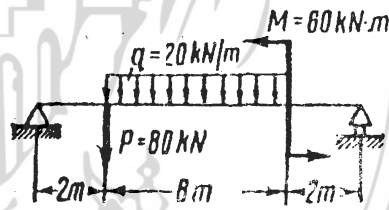
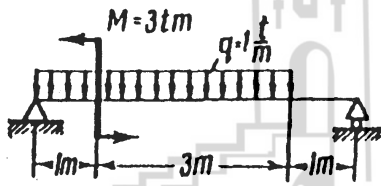
للجائز المبين بالشكل (2) .

مسألة (3) :

أوجد ردود الأفعال للمسندين المبينين بالشكل (3) .

مسألة (4) :

أوجد ردود الأفعال للمسندين المبينين بالشكل (4) .



مسألة (5) :

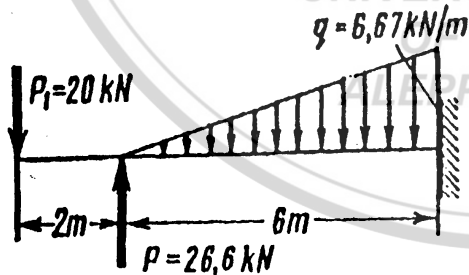
أوجد رد الفعل والعزم في الوثاقة

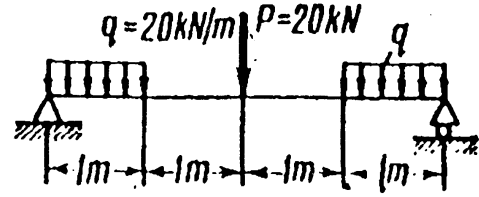
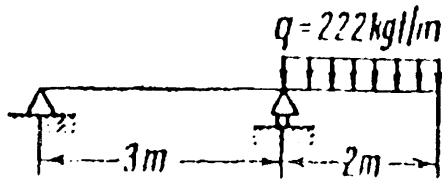
للجائز المبين بالشكل (5) .

مسألة (6) :

أوجد ردود الأفعال في المساند

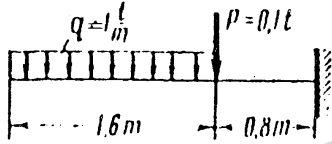
للجائزين المبينين بالشكل (6) .





الشكل (6)

مسألة (7) :

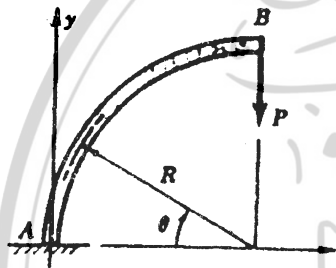


الشكل (7)

أوجد رد الفعل والعزم في الوثاقـة للجائز

المبين بالشكل (7) .

مسألة (8) :



الشكل (8)

أوجد رد الفعل والعزم في الوثاقـة A لمنشأ مكوّن

من ربع دائرة نصف قطرها R بالشكل (8) .

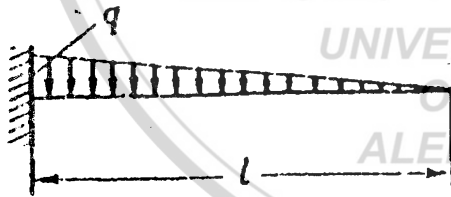
مسألة (9) :

أوجد رد الفعل والعزم في الوثاقـة للجائزين

المبينين بالشكل (9) وذلك بفرض أنهما يخضعان

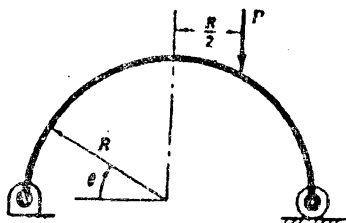
لحمولة مثلثية شدتها الأعظمية $q = 2 \text{ t/m}$ وأن طول

فتحة الجائز $l = 3 \text{ m}$.



الشكل (9)

مسألة (10) :



الشكل (10)

أوجد ردود الأفعال في المسندين للمنشأ المكون من

قوس على شكل نصف دائرة نصف قطرها :

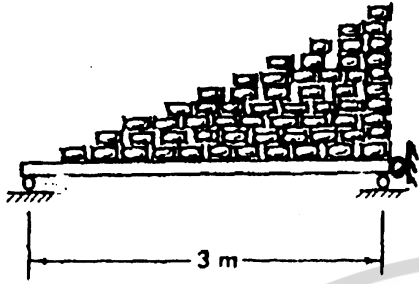
(10) الشكل ، $P = 6 \text{ t}$ ، $R = 6 \text{ m}$

مسألة (11):

جائز يخضع لحمولة مثلثية شدتها العظمى $0,2 \text{ t/m}$ والمطلوب إيجاد ردود الأفعال

في المساند ، الشكل (11).

مسألة (12):



الشكل (11)

أوجد رد الفعل والعزم في الوثاقة لكل من الجائزين

المبينين بالشكل (12) وذلك بفرض أن: $L = 6$

$W_0 = 1 \text{ t/m}$, $a = 1 \text{ m}$

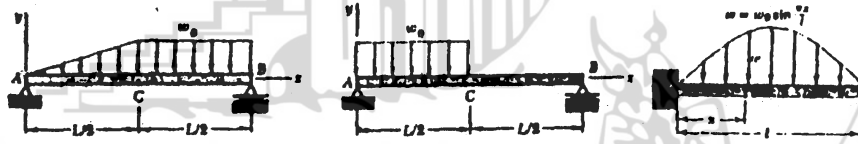


الشكل (12)

مسألة (13):

أوجد ردود الأفعال في المساند للجوائز المبينة بالشكل (13):

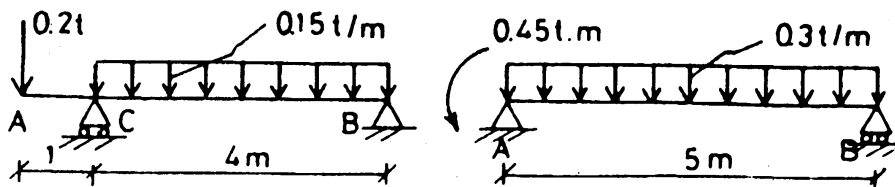
بفرض: $L = 6 \text{ m}$, $W_0 = 2 \text{ t/m}$



الشكل (13)

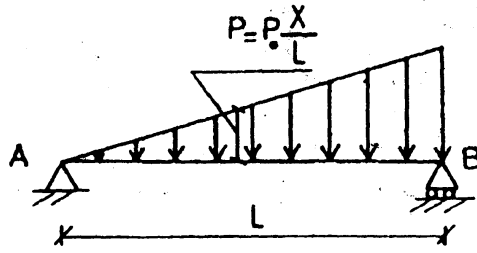
مسألة (14):

أوجد ردود الأفعال للجائزين التاليين المبينين بالشكل (14):



الشكل (14)

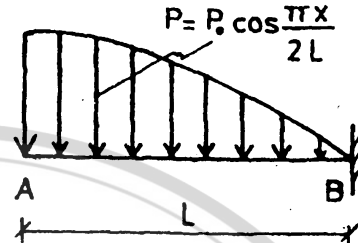
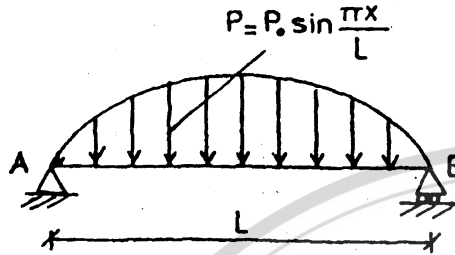
مسألة (15):



لدينا الجوائز المبينة بالشكل (15)

حيث : $P_0 = 2t/m$, $L = 6 m$ والمطلوب

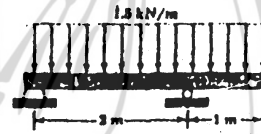
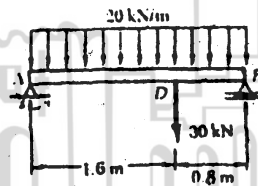
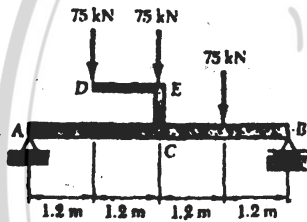
إيجاد ردود الأفعال في المساند .



الشكل (15)

مسألة (16):

أوجد ردود الأفعال للجوائز التالية ، الشكل (16):

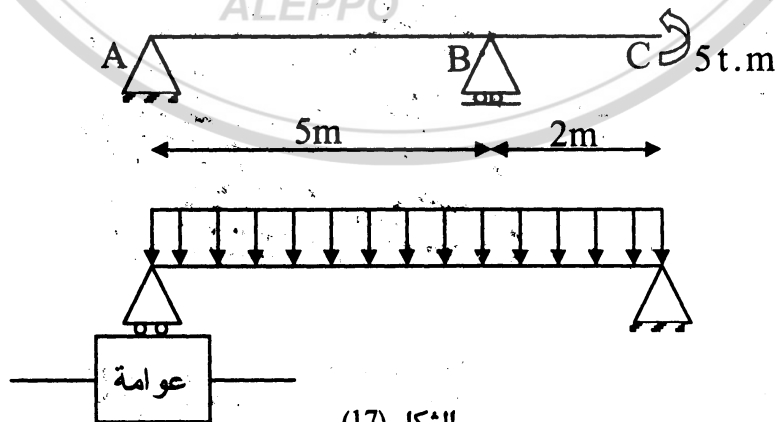


الشكل (16)

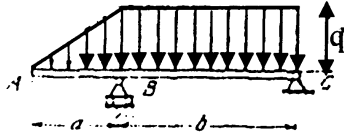
مسألة (17):

أوجد ردود الأفعال للجوائز التالية ، الشكل (17) وذلك بفرض أن الحمولة الموزعة

على الجائز-المستند على عوامة هي $q = 2t/m$ وطوله 8m .



الشكل (17)



الشكل (18)

أوجد رد الفعل في B , C للجائز المبين بالشكل

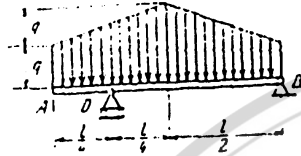
مسألة (١٨) :

(18) .

الجواب :

$$R_B = \frac{q}{6} \left(3a + 3b + \frac{a^2}{b} \right)$$

$$R_C = \frac{q}{6} \left(3b - \frac{a^2}{b} \right)$$



الشكل (19)

مسألة (19):

أوجد رد الفعل في D,B للجائز المبين بالشكل (19) :

الجواب :

$$R_B = 0.5ql$$

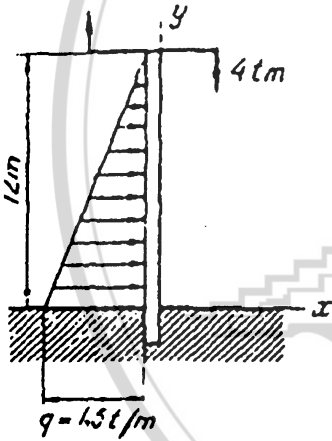
$$R_D = ql$$

مسألة (20):

أوجد ردود الأفعال والعزم في الوثاقة للجائز المبين

بالشكل (20) .

الجواب :



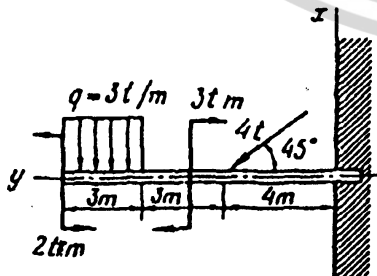
الشكل (20)

$$X = -9t \quad y = 0 \quad M = 40t.m$$

مسألة (21) :

أوجد ردود الأفعال والعزم في الوثاقة للجائز الظفري المبين بالشكل (21) .

الجواب :

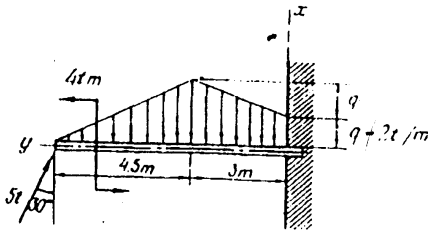


الشكل (21)

$$X = 11,8t \quad Y = -2,8t$$

$$M = -86,8t.m$$

مسألة (22) :



الشكل (22)

ليكن الجائز المبين بالشكل (22) والخاضع للحمولات المبينة والمطلوب إيجاد ردود الأفعال والعزم في الوثاقة .

الجواب :

$$X = 13,7t \quad Y = 2,5t$$

$$M = -27t.m$$

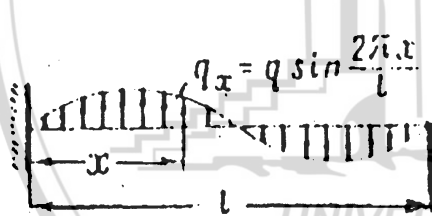
مسألة (23) :

أوجد ردود الأفعال للجائز المبين بالشكل (23) والخاضع لحمولة علاقتها

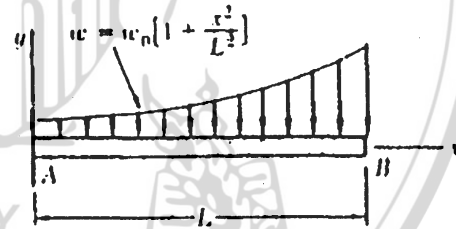
$$W = W_0 \left(1 + \frac{x^2}{L^2} \right)$$

مسألة (24) :

ليكن الجائز الظفري المبين بالشكل (24) والخاضع لحمولة علاقتها $q_x = q \sin \frac{2\pi x}{l}$ والمطلوب إيجاد ردود الأفعال في الوثاقة .



الشكل (24)



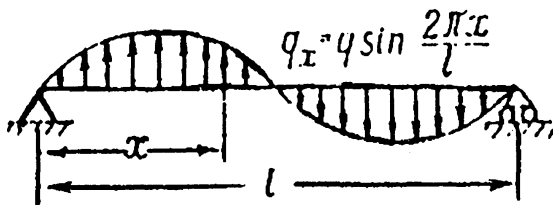
الشكل (23)

مسألة (25) :

أوجد ردود الأفعال للجائز البسيط المبين بالشكل (25) والخاضع لحمولة علاقتها

$$q_x = q \sin \frac{2\pi x}{l}$$

مسألة (26) :



الشكل (25)

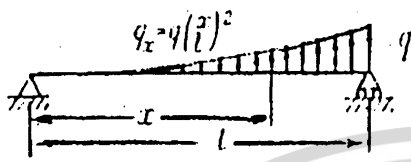
ليكن الجائز الظفري المبين

بالشكل (26) والخاضع لحمولة

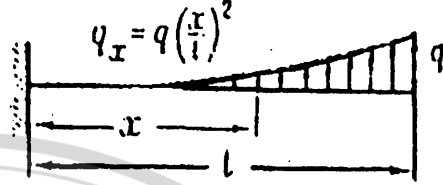
علاقتها $q_x = q \left(\frac{x}{l} \right)^2$ والمطلوب إيجاد ردود الأفعال في الوثيقة .

مسألة (27) :

ليكن الجائز البسيط المبين بالشكل (27) والمطلوب إيجاد ردود الأفعال في المساند .



الشكل (27)



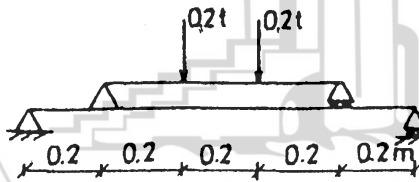
الشكل (26)

مسألة (28) :

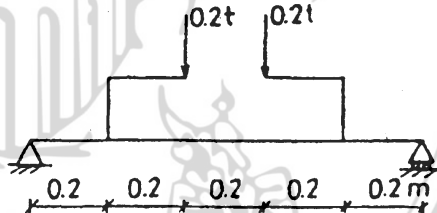
ليكن الجائز البسيط المبين بالشكل (28) والمطلوب إيجاد ردود الأفعال في المساند .

مسألة (29) :

لدينا الجائزان البسيطان المبينان بالشكل (29) والمستند أحدهما على الآخر والمطلوب إيجاد ردود الأفعال في المساند .



الشكل (29)



الشكل (28)

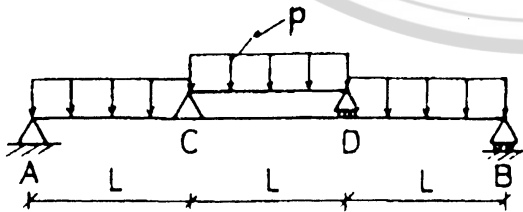
مسألة (30) :

لدينا الجائزان المبينان بالشكل

(30) والمستند أحدهما على الآخر

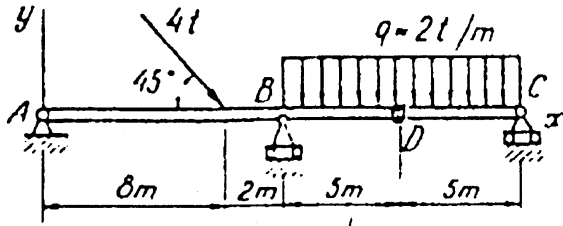
والمطلوب إيجاد ردود الأفعال في المساند

بفرض $P = 2 \text{ t/m}$ $L = 3 \text{ m}$



الشكل (30)

مسألة (31):



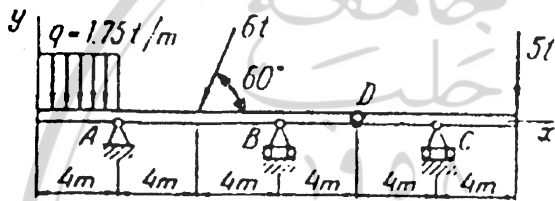
الشكل (31)

لدينا الجائز المبين بالشكل
(31) حيث D مفصل والمطلوب إيجاد
ردود الأفعال والقوى المتبادلة
بالمفصل.

الجواب :

$$\begin{aligned} X_A &= -2,8t & Y_A &= -4,4t & Y_B &= 22,2t \\ Y_C &= 5t & X_D &= 0 & Y_D &= 5t \end{aligned}$$

مسألة (32):



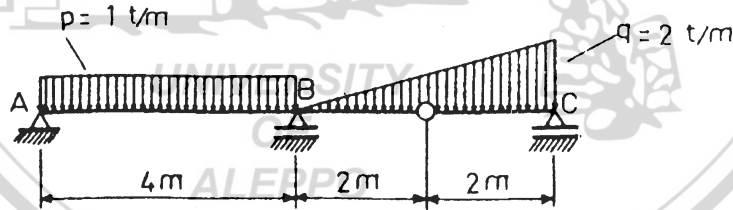
الشكل (32)

لدينا الجائز المبين بالشكل
(32) حيث يمثل D مفصلاً، والمطلوب
تعيين ردود الأفعال في المساند والقوى
المتبادلة في هذا المفصل D.

الجواب :

$$X_A = 3t \quad y_A = 13,8t \quad y_B = -6,6t \quad y_C = 10t \quad X_D = 0 \quad y_D = +5t$$

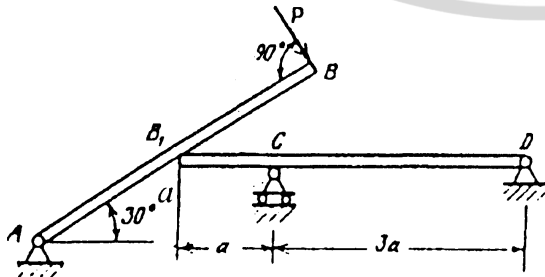
مسألة (33): أوجد ردود الأفعال والقوى المتبادلة في المفصل للجائز المبين بالشكل (33).



الشكل (33)

مسألة (34): ليكن المنشأ المبين
بالشكل (34) والمكون من جائز مائل
AB يستند بدون احتكاك عند النقطة
B₁ على الجائز CD والمطلوب إيجاد
ردود الأفعال.

بفرض $AB_1 = B_1B$



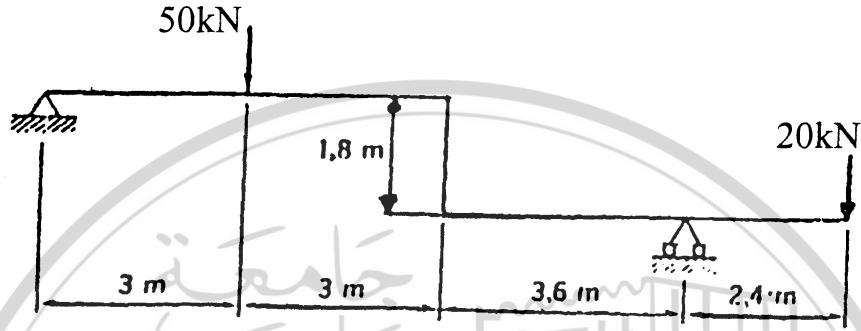
الشكل (34)

الجواب :

$$R_A = P \quad R_C = \frac{4\sqrt{3}}{3}P \quad R_D = \frac{2\sqrt{3}}{3}P$$

مسألة (35) :

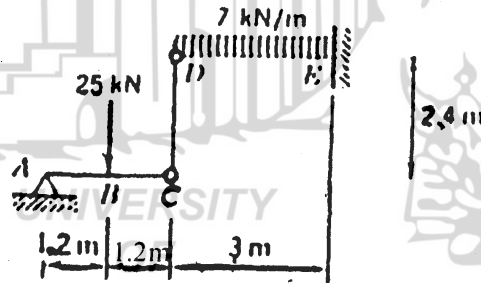
ليكن الجائز المبين بالشكل (35) والمطلوب إيجاد ردود الأفعال في مسنديه .



الشكل (35)

مسألة (36) :

ليكن المنشأ المبين بالشكل (36) حيث CD يمثل شداداً والمطلوب إيجاد ردود الأفعال والقوة الناعمية المؤثرة في الشداد .



الشكل (36)

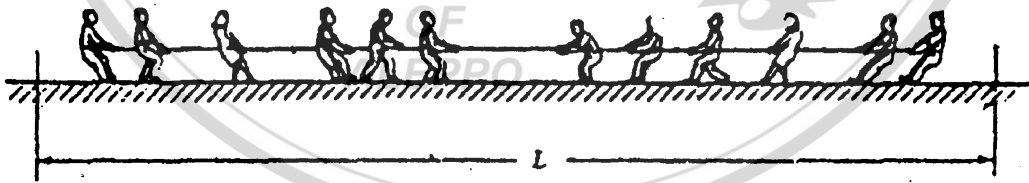
الفصل الرابع

القوى الداخلية في المنشآت

4-1- مقدمة :

عندما تؤثر جملة قوى على جسم ما تتولد عند نقاط الارتكاز ردود فعل نتيجة لانتقال تأثير القوى عبر البنية الداخلية للجسم وتنشأ بذلك داخل الجسم قوى تدعى بالقوى الداخلية . ولا علاقة لهذه القوى بشرط التوازن وهو انعدام محصلة القوى المؤثرة على الجسم لأن هذه القوى ذات المحصلة المعدومة هي قوى خارجية أما القوى الداخلية فإنها تعدم بعضها البعض ولا تظهر إلا إذا جزئ الجسم .

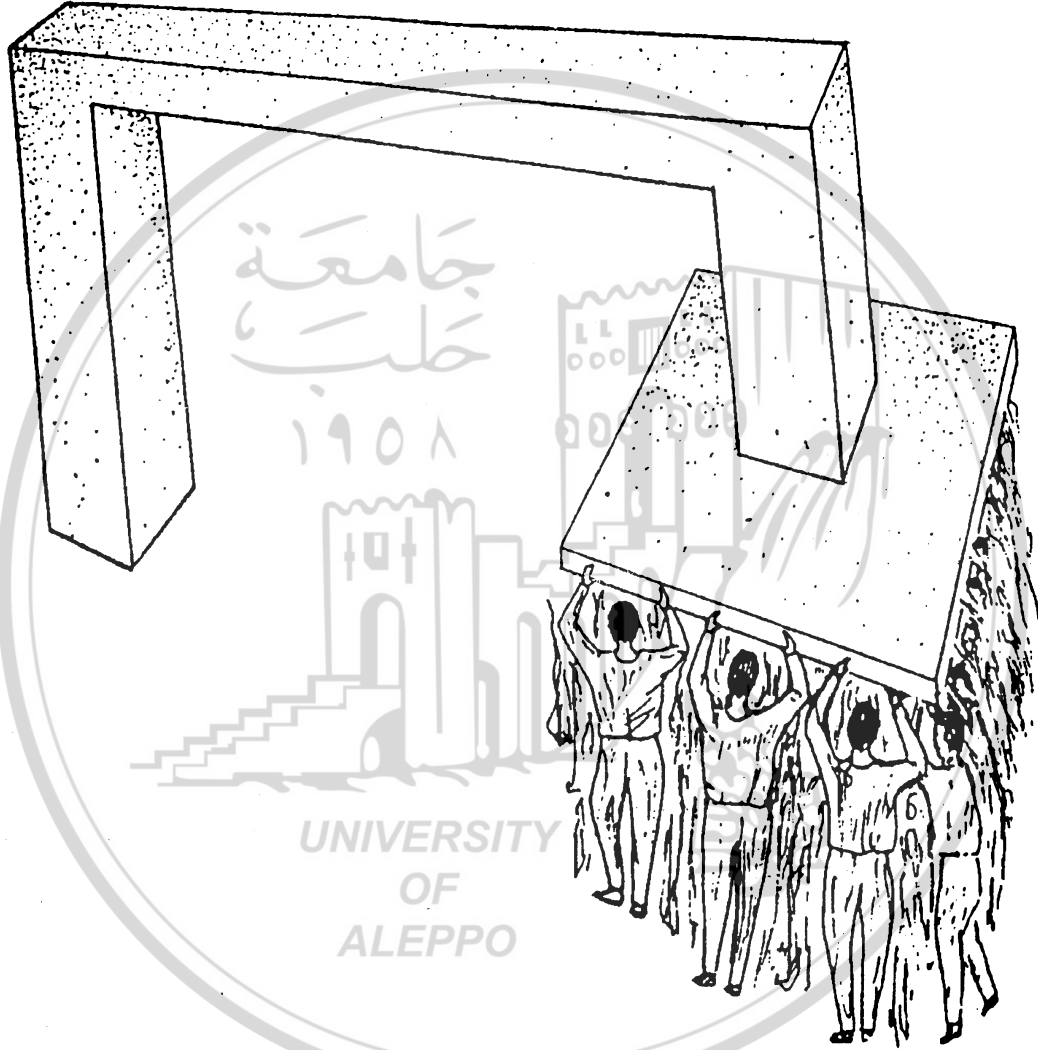
فمثلاً لإظهار القوى الداخلية في حبل استعمل لرفع دلو من الماء علينا أن نتخيل مقطوعاً داخلياً لهذا الحبل كذلك لإظهار القوى الداخلية في حبل يشده مجموعة من الأشخاص كما هو مبين بالشكل (4-1) فيجب أن نتخيل أننا قطعنا هذا الحبل في مقطع منه .



الشكل (4-1)

كذلك إذا اعتبرنا العمود المبين بالشكل (4-2) ولنتخيل أننا قطعناه وأزلنا قسمه السفلي، فقبل إجراء القطع كان المنشأ متوازناً ولكنه سيهبط عند إزالة العمود تحته، فلكي نمنع المنشأ من الهبوط علينا أن نؤثر عليه بقوى نحو الأعلى مساوية للقوى التي كان يولدها

الجزء السفلي للعمود على جزئه العلوي أي أنه يجب على الأشخاص الذين يستندون المنشأ في موقع القطع لمنعه من الهبوط ، عليهم أن يطبقوا قوى مكافئة لما كان يطبقه الجزء السفلي للعمود على جزئه العلوي .



الشكل (2-4)

هذه القوى التي يؤثر الجزء السفلي من العمود على الجزء العلوي والمساوية بالقيمة والمعاكسة بالإشارة للقوى التي يطبقها الجزء العلوي للعمود على جزئه السفلي نسميها بالقوى الداخلية المتبادلة.

عند إعادة تجميع جزئي العمود تعدم القوى الداخلية بعضها البعض ولا علاقة لها حينئذ بشرط انعدام محصلة القوى الخارجية المؤثرة على العمود. ولكن حين دراسة توازن كل جزء من العمود على حدة فإن القوى الداخلية المذكورة سابقاً تصبح خارجية ويجب أخذها بعين الاعتبار .

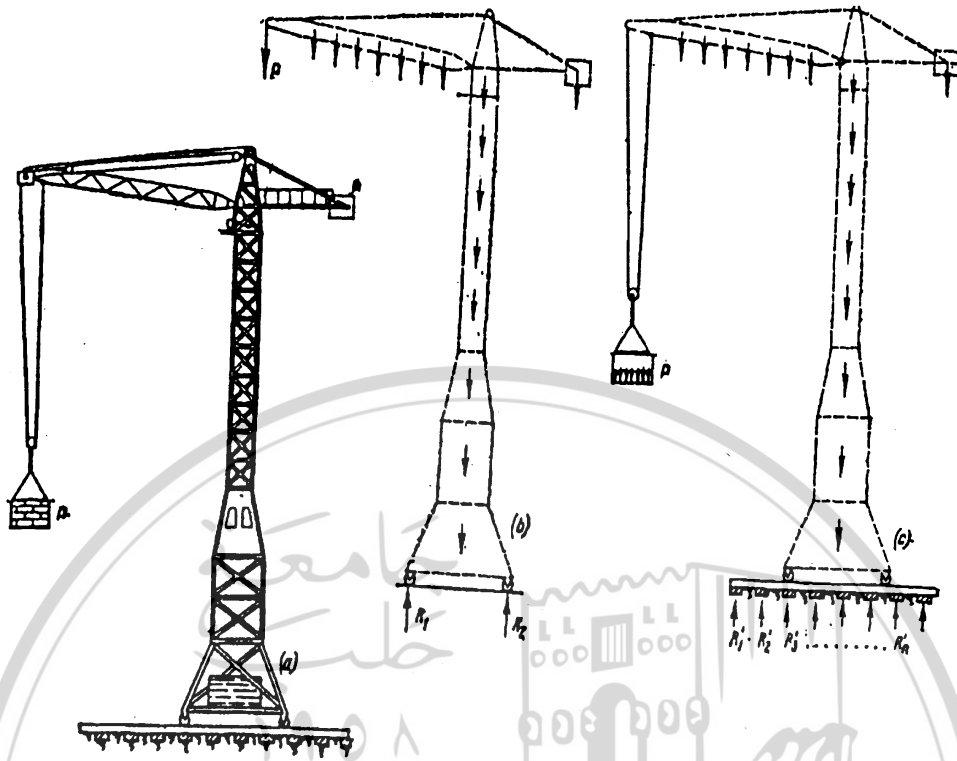
2-4- المفهوم العام للقوى الخارجية والداخلية :

إن القوة هي مقياس التأثير الميكانيكي للأجسام فإذا ما درسنا الإنشاء مستقلاً عن الأجسام المحيطة فإن تأثير هذه الأجسام المحيطة على الإنشاء تستبدل بقوى تدعى بالقوى الخارجية، ويدخل في عدادها قوى ردود فعل الارتباطات التي توازن مجموعة القوى الفعلية المؤثرة .

فمثلاً، الرافعة المبينة بالشكل (a-3-2) يمكن اعتبار القوة الناجمة عن وزن الثقل المرفوع P ، وكذلك الوزن الذاتي للرافعة وردود وأفعال الدعامات R_1 , R_2 كقوى خارجية كما هو مبين بالشكل (b-3-4) فهي بالتالي تشكل مجموعة قوى متوازنة .

في الواقع إن مفهوم القوى الخارجية وطبيعة توزيعها تتعلق بالدرجة الأولى بالحدود بين الجملة المدروسة والأجسام المحيطة بها، فمثلاً في مثال الرافعة إذا اعتبرنا السكة التي تسير عليها الرافعة هي جزء من جملتنا المدروسة لاختلفت مجموعة القوى الخارجية كما هو مبين بالشكل (c-3-4) فإذا كنا في الحالة الأولى قد اعتبرنا ردود الأفعال في الدعامات كقوى خارجية فإنها تصبح في حالتنا هذه قوى داخلية وتصبح ردود الأفعال في هذه الحالة هي R'_1 , R'_2 , ... R'_n

وبشكل عام تدعى القوى المؤثرة على الإنشاء المدروس النابعة أو الناجمة عن الأجسام المتوضعة خارج الحدود الاعتبارية للإنشاء بالقوى الخارجية. أما قوى التأثير المتبادل بين أجزاء الإنشاء داخل حدوده الاصطلاحية فتدعى بالقوى الداخلية .



الشكل (4-3)

ففي مثال الرافعة تعتبر قوى التأثير المتبادل R_1 , R_2 بين الدواليب المتدحرجة والسكة شكل (4-3-b) قوى خارجية إلا أنها بعد توسيع حدود الإنشاء (4-3-c) قد أصبحت قوى داخلية .

إن القوى الداخلية لا تظهر فقط بين أجزاء الإنشاء المؤثرة ببعضها بل وبين جميع الجزيئات المتجاورة من الإنشاء في حالة تحميله .

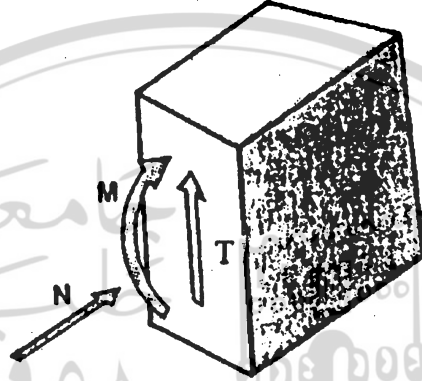
4-3- القوى الداخلية في الجمل المستوية :

نقول عن جملة إنشائية إنها جملة مستوية إذا كانت جميع عناصرها والقوى الخارجية المطبقة عليها واقعة في مستوى واحد . وعليه فإن القوى الداخلية (غير المعدومة) هي القوى التي تقع في مستوى هذه الجملة وهي ثلاث كما هو مبين بالشكل (4-4) .

1- قوى منحها منطبق على منحى العنصر وبالتالي فهي عمودية على المقطع العرضاني وتسمى بالقوى الناعمية .

2- قوة منحها مماس للمقطع العرضاني وتقع في مستوى المنشأ وعمودية على منحى العنصر وتدعى بالقوى القاطعة .

3- عزم يقع مستواه في مستوى المنشأ ويدعى بعزم الانعطاف .



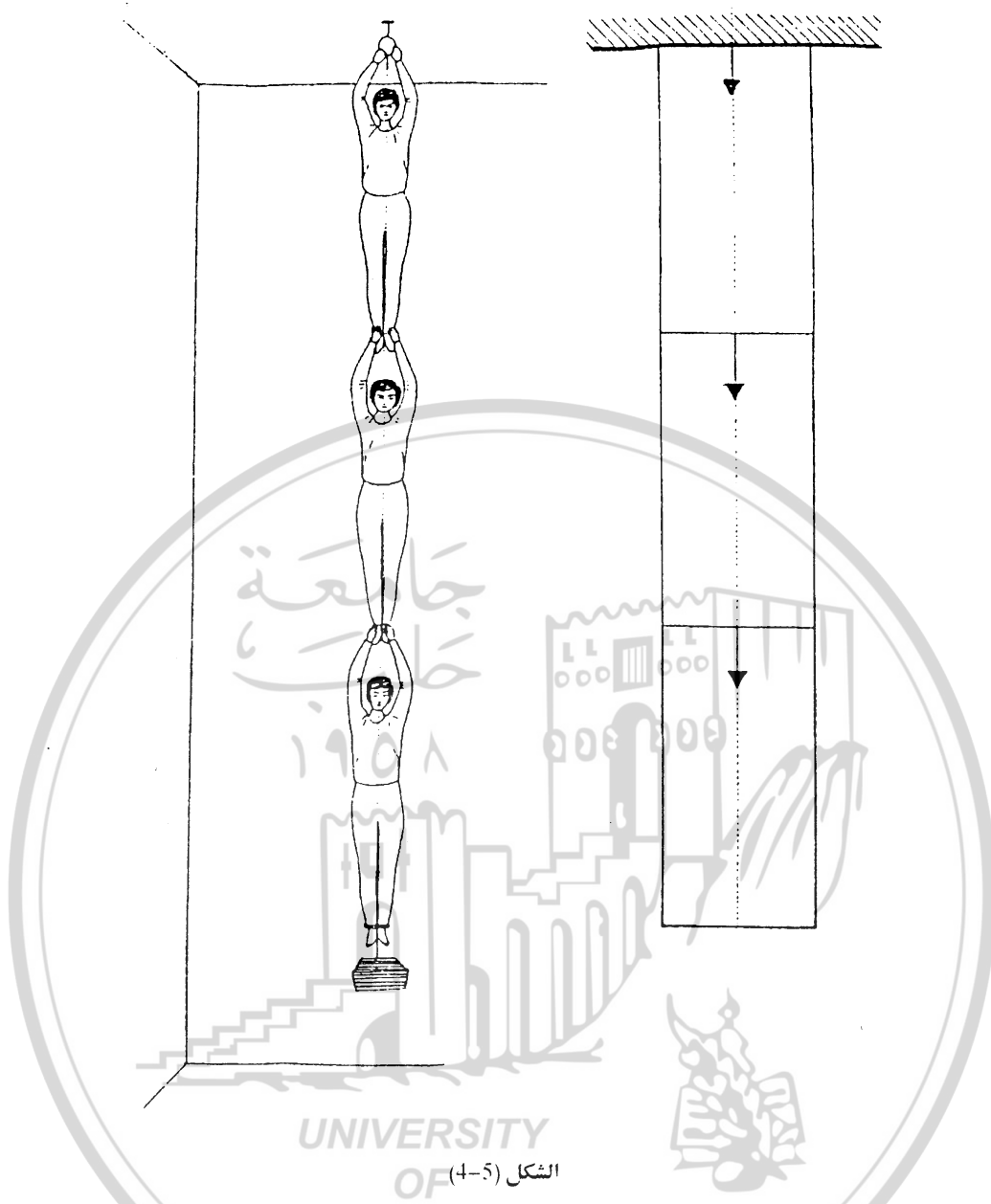
الشكل (4-4)

وسنفصل كل من هذه القوى الداخلية في الفقرات التالية :

1-3-4- القوى الداخلية الناعمية :

لتوضيح مفهوم القوى الداخلية الناعمية نناقش الأمثلة التالية :

فالشكل (4-5) يبين أن الشخص الأخير من الأسفل لا يحمل إلا وزنه وبالتالي فهو لا يخضع لقوة ناعمية شادة تزيد عن وزنه بينما يخضع الشخص الذي قبله لقوة ناعمية شادة ممثلة بوزنه ووزن الشخص المتعلق به من الأسفل ، أما الشخص الذي في الأعلى فيخضع لقوى ناعمية شادة مقدارها مجموع وزن الشخصين بالإضافة إلى وزنه الذاتي ومعنى ذلك أن جميع الأشخاص يخضعون لقوى شادة ولكن هذه القوى متغيرة بحسب موقع الشخص إذ تكون أكبر للشخص الذي في الأعلى وأصغر للذي قبله وهكذا.



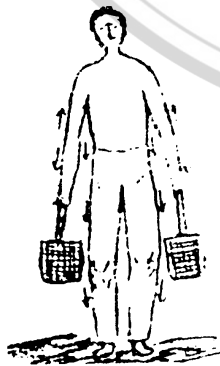
الشكل (4-5)
UNIVERSITY OF ALEPPO

كما يبين الشكل (4-6) أن القوى المحورية

يمكن أن تكون شادة أو ضاغطة ، فالذراعان بحالة شد أما باقي الجسم فهو بحالة ضغط .

كما يبين الشكل (4-7) جسراً معلقاً

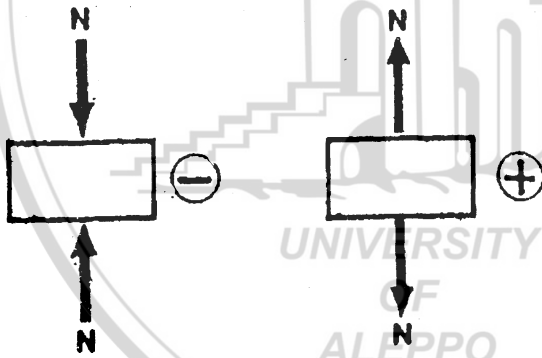
بواسطة (كابلات) خاضعة لقوى ناظرية فقط.



الشكل (4-6)



الشكل (4-7)



الشكل (4-8)

ولإيجاد علاقات القوى
الناظمية سنعتبر أن القوى
الناظمية الشادة موجبة
والضاغطة سالبة كما هو مبين
بالشكل (4-8).

لنفرض الآن أن لدينا
العمود المبين بالشكل (4-9)

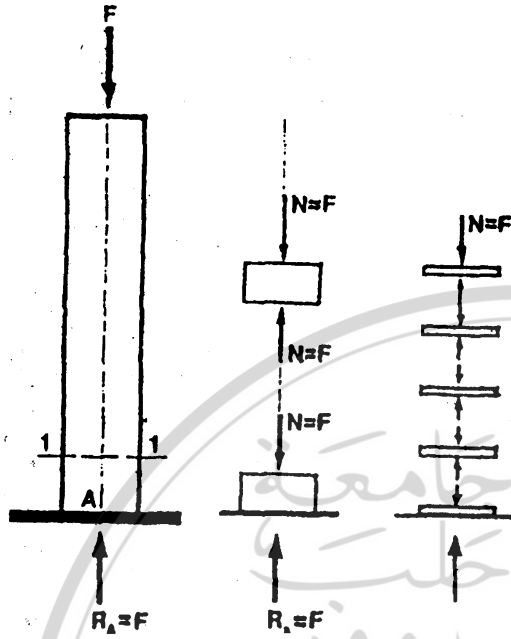
يخضع في نهايته العلوية لقوة ضاغطة محورية تؤثر في مركز ثقل مقطعه العرضاني وناتجة
عن استناد أحد أطراف جائز ما عليه. ويجب أن تنتقل هذه القوة إلى الجزء السفلي للعمود
ثم إلى التربة الموجودة تحته . إن رد الفعل عند الجزء السفلي من العمود يمكن أن يحسب

من شرط توازن القوى الشاقولية المؤثرة على العمود حيث نجد ، بإهمال الوزن الذاتي

للعמוד :

$$R_A - F = 0$$

$$R_A = F \quad \text{ومنه :}$$



الشكل (4-9)

لنأخذ الآن المقطع 1-1 النازمي

على محور العمود ولنعزل الجزء السفلي الناتج عن هذا القطع فإذا افترضنا أن رد الفعل R_A هو القوة الوحيدة التي تؤثر على هذا الجزء السفلي فإنه أي الجزء السفلي لن يكون متوازناً بل سيبدأ بالانتقال نحو الأعلى وهذا لا يمكن لأن الجزء متوازن، بتطبيق شروط التوازن نجد أن هناك قوة

داخلية $N = F$ عند المقطع وهي تمثل تأثير الجزء العلوي من العمود على الجزء السفلي. كذلك هناك قوة داخلية $N = F$ معاكسة للأولى مطبقة على الجزء العلوي للعمود وتمثل تأثير الجزء السفلي منه على جزئه العلوي وبالتالي فإن كل جزء يخضع لقوة ضاغطة ناظرية مقدارها $N = -F$ وعليه فإن قوة الضغط الداخلية المحورية مطبقة في كل المقاطع المأخوذة على طول العمود وهي قيمة ثابتة (إذا ما أهمل الوزن الذاتي للعمود).

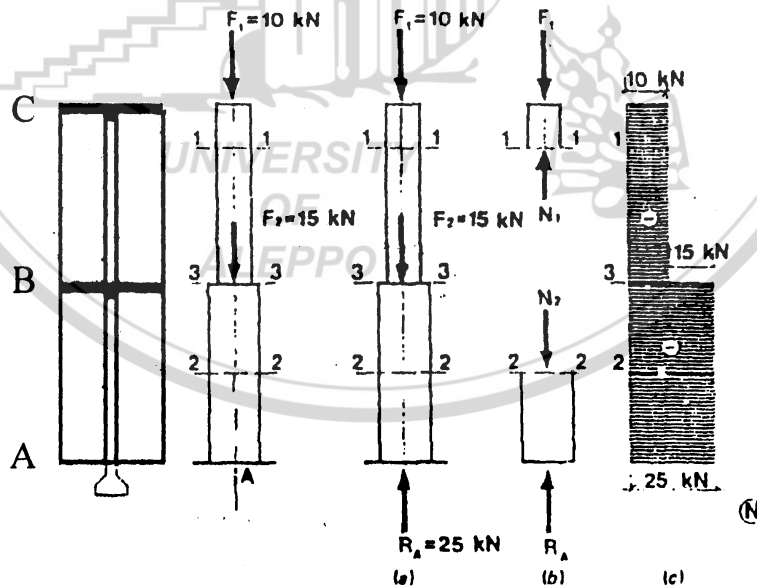
إذا لمعرفة القوى الداخلية النازمية المؤثرة على المقاطع الداخلية لعنصر ما من منشأ نعمل مقطعاً داخلياً يقسم العنصر إلى جزئين مستقلين ونعوّض عن تأثير كل جزء على الآخر بالقوى الداخلية المتساوية والمتعاكسة. ونطبق شرط توازن القوى الداخلية المؤثرة على هذا الجزء وبالتالي ستكون نفسها التي تؤثر على الجزء الآخر إنما بإشارة معاكسة. هذه القوى يمكن أن تكون شادة أو ضاغطة ويتميز الضغط عن الشد بإشارة القوة N ففي الشد تتجه القوة النازمية N من المقطع ونعتبرها موجبة ، أما في الضغط فتتجه N إلى المقطع ونعتبرها سالبة .

ونستنتج مما سبق ما يلي :

تمثل القوى الناعظمية الداخلية في أي مقطع داخلي لعنصر من منشأ بمحصلة مساقط القوى الخارجية (بما فيها ردود الأفعال) على المنحى الموازي للعنصر (أي على المنحى الناعظمي على المقطع العرضاني للعنصر) والمطبقة على يسار أو يمين هذا المقطع . وتعتبر موجبة في حالة الشد وسالبة في حالة الضغط .

مثال :

- يمثل الشكل (4-10) عموداً في مبنى مؤلف من طابقين يخضع لقوة مقدارها $F_1 = 10\text{KN}$ ناتجة عن الحمولات التي يطبقها الطابق الثاني وقوة مقدارها $F_2 = 15\text{KN}$ ناتجة عن الحمولات التي يطبقها الطابق الأول. ويهمل الوزن الذاتي للعمود يُطلب :
- 1- إيجاد رد الفعل عند أسفل العمود .
 - 2- حساب القوة الناعظمية الداخلية المؤثرة في المقطع 1-1 .
 - 3- إيجاد علاقات القوى الناعظمية الداخلية للعمود بالاعتماد على طريقة أخذ مجموع مساقط القوى الخارجية الناعظمية الواقعة على أحد أجزاء القطع .
 - 4- رسم مخططات القوى الناعظمية الداخلية للعمود .



الشكل (4-10)

الحل :

1- من معادلات التوازن وبالإسقاط على الشاقول نجد : $R_A = 10 + 15 = 25\text{KN}$

2- لحساب القوة الناعمية المؤثرة في المقطع 1-1 نازل الجزء الذي يعلو المقطع 1-1 كما هو مبين بالشكل (4-10-b) حيث نعوض عن تأثير الجزء السفلي على العلوي بالقوة الناعمية N_1 (باعتبار أن العمود هنا لا يخضع إلا لقوة ناعمية . فالقوة الداخلية تكون ناعمية حتماً).

بتطبيق معادلات التوازن على الجزء العلوي نجد :

$$F_1 - N_1 = 0$$

$$N_1 = F_1 = 10\text{KN}$$

إن اتجاه القوة N_1 يعبر عن كونها قوة ضاغطة وهي قيمة ثابتة على جميع المقاطع الواقعة بين أعلى العمود C وفي المقطع B .

كذلك لإيجاد القوة الناعمية الداخلية المؤثرة في المقطع 2-2 نازل الجزء أسفل المقطع 2-2 كما هو مبين بالشكل (4-10-b) حيث نعوض عن تأثير الجزء العلوي على السفلي بالقوة الناعمية N_2 وبتطبيق معادلات التوازن على الجزء السفلي نجد :

$$R_A - N_2 = 0$$

$$N_2 = R_A = 25\text{KN}$$

وحيث إن N_2 تتجه نحو الأسفل فهي قوة ضاغطة ولها قيمة ثابتة على جميع

المقاطع الواقعة بين A و B .

3- يمكن إيجاد علاقة القوى الناعمية والتي تمثل تغير قيم القوى الناعمية للمقاطع العرضانية في مجال ما من العمود باعتبارها تمثل مجموع مساقط القوى الخارجية على منحى العمود (هنا المنحى الشاقولي) والمطبقة على أحد جزئي القطع . فمن أجل المجال BC إذا أخذنا مساقط القوى الخارجية المؤثرة على الجزء الأعلى للمقطع 1-1 وجدنا :

$$N_{BC} = -10\text{KN}$$

أي أن المقاطع العرضية للعمود والمحصورة ضمن المجال BC تخضع جميعها لقوة
ناظرية ضاغطة وثابتة مقدارها -10KN .

ومن أجل المجال الثاني AB إذا أخذنا مساقط القوى الخارجية (بما فيها ردود
الأفعال) المؤثرة في أسفل المقطع 2-2 وجدنا : $N_{AB} = -25\text{KN}$

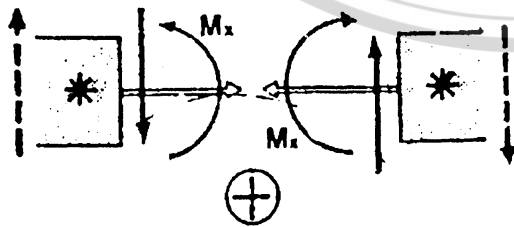
أي أن المقاطع العرضية للعمود والمحصورة ضمن المجال BC تخضع جميعها إلى
قوة ناظرية ضاغطة وثابتة مقدارها -25KN .

4- لرسم هذه المخططات نعتبر أن المحور X ينطبق على محور العمود والمحور الثاني العمودي
يمثل المحور N وحيث تمثل القوى النازمية في المجالين قيماً ثابتة أي مستقيمات موازية
للمحور X كما هو مبين بالشكل (4-10-c) مع الأخذ بعين الاعتبار اصطلاح الإشارات كما
بينناه سابقاً (موجب بحالة الشد وسالب بحالة الضغط). كما نلاحظ أنه في المقطع B
التي تؤثر به القوة الخارجية $F_2 = 15\text{KN}$ حصل تغير مفاجئ بمقدار القوة النازمية إذ
تغير من -10KN إلى -25KN وهذا التغير مساو لمقدار القوة الخارجية المطبقة في
المقطع B.

2-3-4- القوى القاطعة وعزوم الانعطاف الداخلية :

كما بينا سابقاً، أنه في العناصر التي تخضع لقوى خارجية محورية فقط تكون القوى
الداخلية الوحيدة التي تؤثر على مقاطعها الداخلية هي القوى النازمية، إلا أنه بشكل عام
تكون القوى الداخلية بالجمال المستوية مؤلفة من ثلاث مركبات قوى ناظرية N وقوى قاطعة

T . وعزوم انعطاف M كما هو مبين



الشكل (4-11)

بالشكل (4-11) وفي مثل هذه الحالة
ستظهر في المقطع الداخلي الذي نجريه
والذي يفصل المنشأ إلى جزئين مستقلين
ثلاث مركبات (المذكورة أعلاه) للقوى

الداخلية المتبادلة بين الجزئين والتي تمثل تأثير كل جزء على الجزء الآخر .

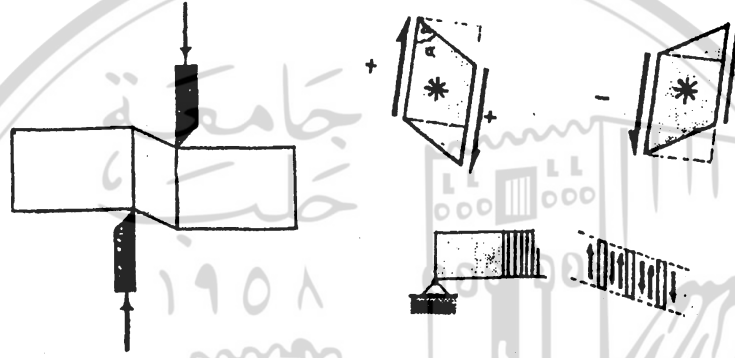
بتطبيق معادلات التوازن على أحد الأجزاء يمكننا حساب هذه القوى الداخلية

المتبادلة بين الجزئين .

أما بالنسبة لاصطلاح الإشارات فهي كما يلي :

- تعتبر القوة القاطعة موجبة عندما تحاول تدوير العنصر مع عقارب الساعة وسالبة

عندما تحاول تدويره بعكس عقارب الساعة كما هو مبين بالشكل (4-12).



الشكل (4-12)



الشكل (4-13)

-تعتبر العزوم موجبة

عندما تؤدي إلى الشد في

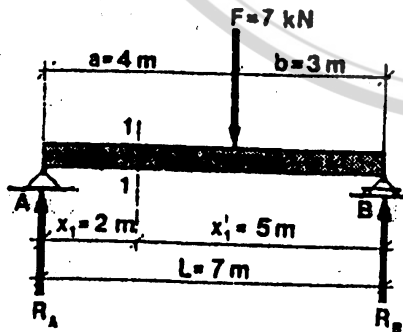
الألياف السفلية للعنصر

وضغط في الألياف العلوية

والعكس بالعكس فهي سالبة عندما تؤدي إلى

الشد في الألياف العلوية وضغط في الألياف

السفلية كما هو مبين بالشكل (4-13) .



الشكل (2-14-a)

ولإيضاح ذلك نأخذ الجائز المبين بالشكل

(a - 14 - 4) كمثال وهو بطول 7m ويخضع

لقوة مركزة شاقولية مقدارها $F=7\text{KN}$ وتبعد

بمسافة 3m عن المسند B. ويُفترض أن الوزن الذاتي للجائز مهمل .

لنحسب أولاً ردود الأفعال في المساند .

فمن معادلة العزوم حول النقطة B ومعادلة توازن القوى الشاقولية نجد :

$$R_A = 3\text{KN}$$

$$R_B = 4\text{KN}$$

ولتحديد القوى الداخلية في المقطع 1-1 نغزل الجزء اليساري من الجائز كما

هو مبين بالشكل (4-14-b) ونطبق شروط التوازن الثلاثة على هذا الجزء:

1- من شرط توازن القوى الأفقية وباعتبار هذا الجزء غير خاضع لأي قوة خارجية محورية

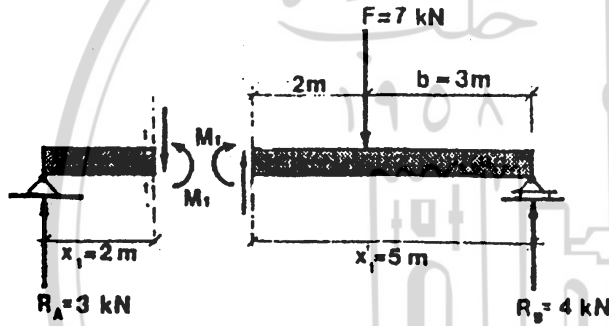
(بما في ذلك ردود الأفعال) فإن

القوى المحورية في المقاطع 1-1

تكون معدومة وذلك من معادلة

الإسقاط على الأفق أي :

$$N_1 = 0$$



الشكل (4-14-b)

2- من الواضح أنه إذا لم توجد أية

قوة شاقولية داخلية تؤثر في المقطع 1-1 فلن يكون لرد الفعل R_A أية قوة شاقولية توازنه

وهذا غير ممكن لأن هذا الجزء متوازن. وعليه فلا بد أن يكون هناك قوة داخلية شاقولية

تؤثر على المقطع 1-1، وبفرض أن اتجاهها للأسفل وبتطبيق معادلة الإسقاط على

الشاقول نجد :

$$R_A - T_1 = 0$$

$$R_A = T_1 = 3\text{KN}$$

والإشارة الموجبة للقوة T_1 تعني أن الاتجاه الذي فرضناه لهذه القوة صحيح .

3- باعتبار أن هناك قوتين متوازيتين ومتعاكستين R_A, T_1 والمسافة بينهما 2m وبفرض أن الاتجاه الموجب للعزم مع عقارب الساعة فإن هاتين القوتين تولدان عزمًا على هذا الجزء مقداره :

$$M = R_A x_1 = T_1 x_1 = (3)(2) = 6\text{KN.m}$$

وإذا كانت العزوم غير متوازنة في هذا الجزء فإنه سيبدأ بالدوران باتجاه عقارب الساعة. ولذلك حتى يتحقق التوازن لابد أن يكون هناك عزم داخلي في المقطع 1-1 جهته عكس عقارب الساعة يقاوم العزم المتولد المحسوب أعلاه. وبتطبيق معادلة العزوم حول أي نقطة من المقطع 1-1 يكون :

$$\begin{aligned} -M_1 + R_A x_1 &= 0 \\ M_1 &= 6\text{KN.m} \end{aligned}$$

وبالتالي فإن الإشارة الموجبة للعزم M_1 تعني أن الاتجاه المفروض لهذا العزم والذي بعكس عقارب الساعة صحيح .
والخلاصة :

- تسمى القوة الداخلية T في مقطع عرضي لعنصر ما من منشأ وعمودية على محور هذا العنصر ، أي مماسية للمقطع العرضاني، بالقوة القاطعة أو القاصة أو المماسية .
- يسمى العزم الداخلي M الذي ينطبق مستواه على مستوي الجائز والمطبق بأي مقطع عرضاني، بعزم الانعطاف .
- وبشكل عام يظهر في جملة مستوية وتحت تأثير قوى خارجية تقع في مستوي الجملة، يظهر في المقطع العرضاني لأي عنصر من المنشأ ثلاث قوى داخلية هي : قوة محورية N وقوة قاطعة T وعزم انعطاف M إذا عدنا الآن وطبقنا معادلات التوازن على الجزء الأيمن كالمبين بالشكل (4-14) فإننا نحصل على نفس القيم M, T وإنما

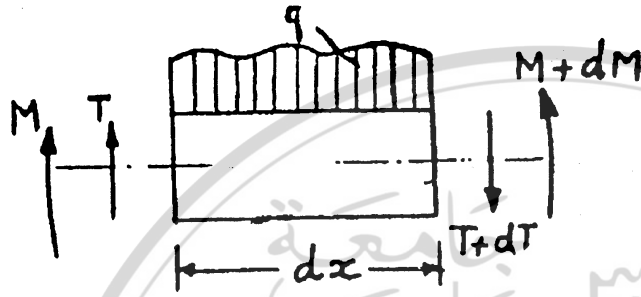
باتجاهات متعاكسة وهذا ضروري لأن القوى الداخلية في أي مقطع هي قوى متساوية ومتعاكسة.

4-4- العلاقة بين القوة المطبقة والقوى القاطعة وعزم الانعطاف :

لنعتبر عنصراً تفاضلياً من عنصر إنشائي محصوراً بين مقطعين عموديين على

المحور والمسافة بينهما dx كما

هو مبين بالشكل (4-15).



الشكل (4-15)

ولتكن M, T مركبتي

القوى القاطعة وعزم الانعطاف

المؤثرتين على المقطع الأيسر

فيكون المقطع الأيمن تحت تأثير

عزم قدره $M+dM$ وقوة قاطعة $T+dT$.

قد تكون الحملات التي تؤثر على هذا العنصر من المنشأ قوى موزعة أو قوى مركزة

أو عزوماً ، ولنفرض في هذه الحالة أنها موزعة وبما أن الطول dx صغير جداً فيمكن اعتبار

شدة الحمولة الموزعة ثابتة q فمن معادلات التوازن نكتب :

$$T - qdx - (T + dT) = 0$$

$$\frac{dT}{dx} = -q$$

فعندما تؤثر قوة موزعة شدتها q على العنصر تتغير القوى القاطعة على طول هذا

العنصر ويكون معدل التغير بالنسبة لـ x مساوياً لـ $-q$ وإذا كانت $q=0$ فهذا يعني أن القوى

القاطعة تبقى ثابتة.

$$M + q dx \left(\frac{dx}{2} \right) + (T + dT)dx - (M + dM) = 0$$

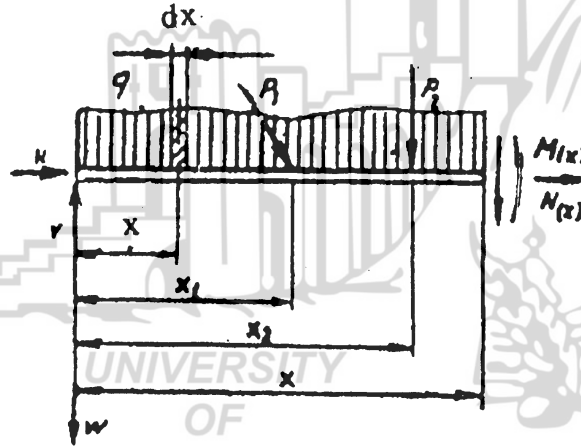
وبإهمال الحدود التي تحوي على جداء التفاضلات نحصل على :

$$\frac{dM}{dx} = T$$

فمعدل تغير عزم الانعطاف على طول الجائز يساوي القيمة الجبرية للقوى القاطعة وذلك مهما تكن طبيعة القوى المؤثرة على العنصر . أي أن مشتق علاقة عزم الانعطاف بالنسبة x يمثل علاقة النسوى القاطعة وبالتالي فعندما يكون هذا المشتق معدوماً تكون القوى القاطعة معدومة. وهذا يقابل النهايات العظمى أو الصغرى لقيم عزوم الانعطاف. كذلك إذا كانت علاقة عزم الانعطاف من الدرجة الثانية فعلاقة القوى القاطعة من الدرجة الأولى أي تنطبق على هذين التابعين جميع العلاقات التي تربط بين تابع ومشتقه .

4-5- مفاهيم أساسية لإيجاد ورسم علاقات القوى الداخلية :

لتوضيح هذه المفاهيم نفرض أن لدينا الجائز المبين بالشكل (4-16) وبفرض أننا عملنا مقطعاً على بعد x من المسند A حيث يمكننا إيجاد القوى الداخلية في هذا المقطع.



الشكل (4-16)

تخضع منطقة القطع لـ T, N, M التي يمكن حسابها بتطبيق شروط التوازن على هذا الجزء المقطوع. وكما يظهر بالشكل فإن القوى الداخلية تتغير بتغيير البعد x للمقطع فهي تابع لقيم x ، وهذا يعني أن القوة النازمية $N(x)$ والقوة القاطعة $T(x)$ وعزم الانعطاف $M(x)$ هي توابع للإحداثي x وذلك باعتبار أن المحور x ينطبق دوماً على محور العنصر المدروس .

وللسهولة نقول إنه يمكن الاستعاضة عن معادلات التوازن السابقة والمطبقة على الجزء المقطوع بغية إيجاد القوى الداخلية بما يلي : إذا أجرينا قطعاً داخلياً بعنصر من منشأ بحيث يفصله إلى جزئين مستقلين أيسر وأيمن وعزلنا كل جزء مع القوى الخارجية المطبقة عليه والتي تشمل ردود الأفعال بالمساند فإن المركبات الثلاث للقوى الداخلية تكون :

1- القوى الناعظمية $N(x)$: وهي في أي مقطع داخلي تساوي محصلة مساقط القوى الخارجية على محور العنصر للجزء الواقع على يسار المقطع أو يمينه وتكون :

- للجزء الأيسر : موجبة إذا كانت مساقط القوى الخارجية على محور العنصر تتجه من اليمين إلى اليسار (شادة) والعكس بالعكس .
- للجزء الأيمن : موجبة إذا كانت تتجه من اليسار إلى اليمين (شادة) والعكس بالعكس.

2- القوى القاطعة $T(x)$: وهي في أي مقطع داخلي تساوي محصلة مساقط القوى الخارجية على المنحى العمودي على محور العنصر للجزء الواقع على يسار المقطع أو على يمينه وتكون :

- للجزء الأيسر : موجبة إذا اتجهت نحو الأعلى وسالبة إذا اتجهت نحو الأسفل.
- للجزء الأيمن : موجبة إذا اتجهت نحو الأسفل وسالبة إذا اتجهت نحو الأعلى .

3- عزوم الانعطاف $M(x)$: إنها في أي مقطع داخلي تساوي عزوم القوى الخارجية الواقعة على يسار أو يمين المقطع حول مركز ثقل المقطع وتكون :

- للجزء الأيسر : موجبة إذا كانت تدور باتجاه عقارب الساعة وسالبة بعكسها.
- للجزء الأيمن : موجبة إذا دارت بعكس اتجاه عقارب الساعة وسالبة بعكسها .

وتفادياً للالتباس في تعيين الجهة العلوية والسفلية وبالتالي الجهة اليسرى واليمنى للمقطع في العنصر فإننا نضع خطاً متقطعاً تحت محور العنصر ليشير إلى الجزء السفلي

وبالتالي إلى اتجاه النظر. وهكذا نحدد الجزء السفلي والعلوي وبالتالي الجزء الأيمن والأيسر.

وبهدف توحيد اتجاهات رسم مخططات القوى الناعمية والقوى القاطعة وعزوم الانعطاف نعتبر عند رسم مخطط $N(x)$ أو $T(x)$ لعنصر ما أن الاتجاه الموجب لكل منهما عمودي على منحى العنصر ويتجه نحو الأعلى بينما من أجل $M(x)$ نعتبر الاتجاه الموجب العمودي على منحى العنصر إنما للأسفل . وتفادياً لتعقيد الشكل عند رسم المخططات فليس من الضروري بيان هذه المحاور واتجاهاتها على المنشأ إذ إنها معروفة وثابتة لكل المخططات كما حددناها.

نستنتج مما سبق أن علاقات القوى الداخلية تكون غير مستمرة عند المقاطع التي تؤثر فيها قوى مركزة، كذلك عند المقاطع التي تتغير فيها الحملات الموزعة تغيراً فجائياً أي عند تغير تابع الحملات المطبقة، أو عند تطبيق عزم مركز في مقطع .

وهكذا تكون علاقات القوى الداخلية ممثلة بتابع رياضي مستقل ومستمر في كل جزء من العنصر والذي يسمى مجالاً .

كما أن هناك إمكانية اختيار عدة إحداثيات x_i يحدد الإحداثي الواحد منها مجالاً واحداً فقط ويبتدئ في نقطة ابتداء المجال، أو اختيار إحداثي x مستمر ووحيد لكل المجالات. والخلاصة فإن حدود مجالات القوى الداخلية تتعين كما يلي :

- 1- تطبيق حملات وحيدة (قوى مركزة أو عزوم) بما فيها ردود الأفعال بالمساند .
 - 2- التغير المفاجئ للحملات الموزعة أي تغير تابع الحملات الموزعة ويندرج في إطار التغير المفاجئ انقطاع الحملات الموزعة بوجود جزء غير محمل . كما سنبين ذلك في الأمثلة :
- مثال (1) :

ليكن الجائز المبين بالشكل (17-4) والمطلوب إيجاد عزم الانعطاف والقوى القاطعة في المقاطع 1 و 2 و 3 ثم رسم مخطط القوى القاطعة وعزم الانعطاف .

الحل :

نحسب ردود الأفعال فتجد :

$$R_A = R_B = 4 \text{ kN}$$

ونجد بالنسبة للمقطع 1 :

$$R_A - T_1 - wx_1 = 0$$

$$T_1 = 2 \text{ kN} \quad \text{ومنه :}$$

وكذلك :

$$R_A x_1 - Q_1 \times r_1 - M_1 = 0$$

$$M_1 = 6 \text{ kN.m}$$

وبالنسبة للمقطع 2 :

$$R_A - Q_2 - T_2 = 0$$

$$T_2 = 0$$

وكذلك :

$$R_A x_2 - Q_2 r_2 - M_2 = 0$$

$$M_2 = 8 \text{ kN.m}$$

وبالنسبة للمقطع 3 :

$$R_A - Q_3 - T_3 = 0$$

$$T_3 = -2 \text{ kN}$$

وكذلك :

$$R_A x_3 - Q_3 r_3 - M_3 = 0$$

$$M_3 = 6 \text{ kN.m}$$

- لرسم مخطط القوى القاطعة وعزم الانعطاف نوجد علاقة كل منهما كتابع لـ x :

$$T_{AB} = 4 - x$$

$$M_{AB} = 4x - \frac{x^2}{2}$$

من الواضح أن للجائز مجالاً واحداً وأن

علاقة القوى القاطعة هي علاقة خطية أي مستقيم
بينما تمثل علاقة عزم الانعطاف قطعاً مكافئاً ،

ويمكننا أن نلاحظ بسهولة أن مشتق علاقة

الانعطاف هو علاقة القوى القاطعة ويبين الشكل

(4-18) كلاً من مخطط القوى القاطعة وعزم

الانعطاف وقد تم الرسم بالقواعد المعروفة لرسم

تابع رياضي ما (تحديد النهايات العظمى، التقاطع،

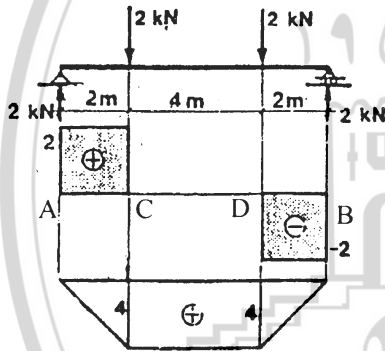
اتجاه التقعر... الخ) . ونذكر ثانية أن علاقة القوى القاطعة هي المشتق لعلاقة عزم

الانعطاف ، وعليه فعندما يصل عزم الانعطاف إلى

قيمته العظمى تكون القوى القاطعة معدومة إلى غير

ذلك من الخواص المعروفة بين تابع رياضي ومشتقه .

مثال (2) :



ليكن الجائز المبين بالشكل (4-19)

والمطلوب إيجاد مخطط القوى القاطعة وعزم

الانعطاف.

الشكل (4-19)

UNIVERSITY
OF
ALEPPO

$$R_A = R_B = 2 \text{ KN}$$

الحل :

- علاقات القوى القاطعة :

$$T_{AC} = +2$$

$$T_{CD} = 0$$

$$T_{DB} = -2$$

- علاقات عزوم الانعطاف :

وبفرض أن مبدأ الإحداثيات لكل المجالات هو A يكون :

$$M_{AC} = 2x$$

$$M_{CD} = 4$$

$$M_{DB} = 2x - 2(x - 2) - 2(x - 6)$$

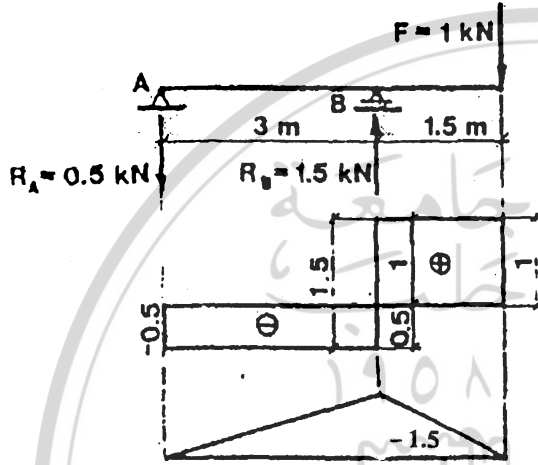
ومنه :

$$M_{DB} = 2x + 16$$

والشكل (4-19) يبين رسم هذه

المخططات .

مثال (3) :



الشكل (4-20)

ليكن الجائز المبين

بالشكل (4-20) والمطلوب إيجاد

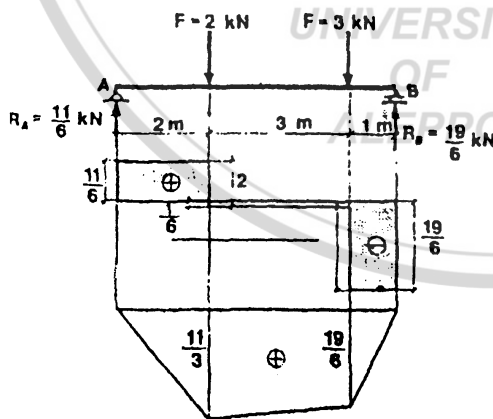
مخططات القوى القاطعة وعزم

الانعطاف .

الحل : بتطبيق المفاهيم السابقة

بإيجاد علاقات القوى القاطعة

وعلاقات عزوم الانعطاف نجد المخططات المطلوبة والموضحة بالشكل (4-20) .



الشكل (4-21)

مثال (4) : ليكن الجائز المبين

بالشكل (4-21) والمطلوب إيجاد

مخططات القوى القاطعة وعزم

الانعطاف

الحل : يمكننا رسم هذه المخططات

كما هي مبينة بالشكل (4-21)

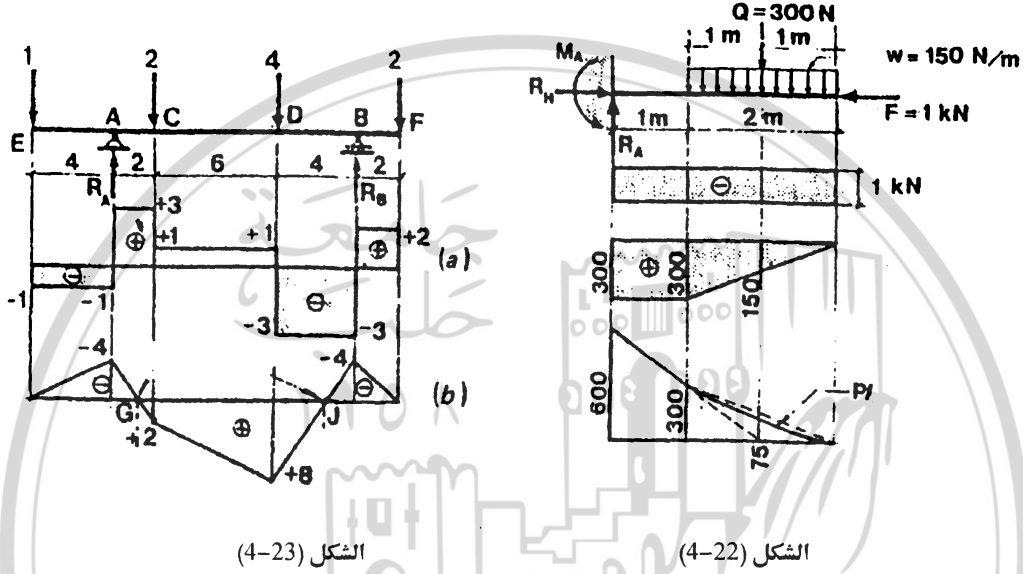
ونترك للطالب إيجاد العلاقات

وتحقيقها وفق المخططات المرسومة .

مثال (5) :

ليكن الجائز المبين بالشكل (4-22) والمطلوب إيجاد مخططات القوى الناعمية والقوى القاطعة وعزم الانعطاف .

الحل : يبين الشكل (4-22) مخططات القوى الناعمية والقوى القاطعة وعزم الانعطاف.



الشكل (4-23)

الشكل (4-22)

مثال (6) :

ليكن الجائز المبين بالشكل (4-23) والمطلوب رسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف، حيث القوة بالـ t والأبعاد بالـ m .

الحل :

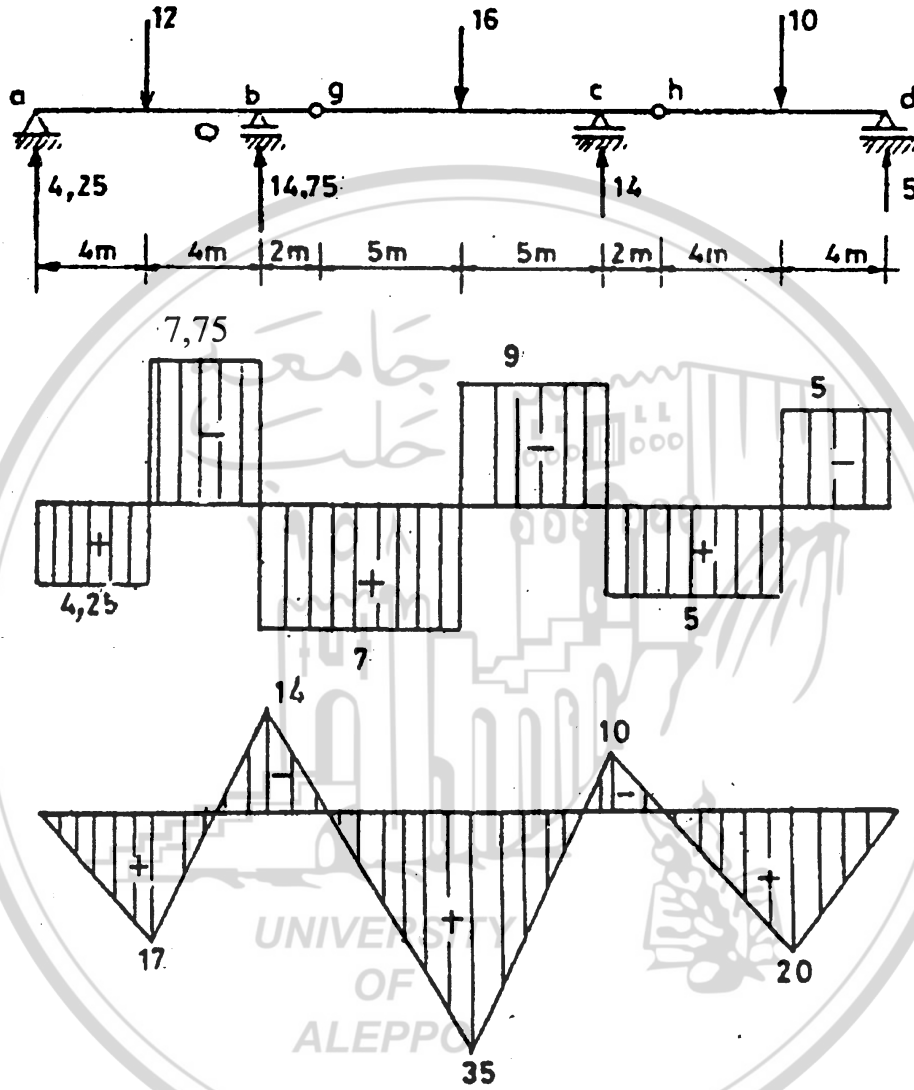
يبين الشكل (4-23) رسم هذه المخططات .

مثال (7) :

ليكن الجائز المبين بالشكل (4-24) والمطلوب إيجاد مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف ، حيث الحمولة بالـ t .

الحل :

لدينا خمسة مجاهيل وثلاث معادلات توازن بالإضافة إلى معادلتين ناتجتين عن وجود المفصلين g,h .



الشكل (4-24)

بأخذ العزوم على يمين المفصل h نجد :

$$-8V_d + (10)(4) = 0$$

ومنه :

$$V_d = 5t$$

وبأخذ العزوم على يمين المفصل g نجد :

$$(16)(5) - 10V_c + (10)(16) - (5)(20) = 0$$

ومنه :

$$V_c = 14t$$

وبأخذ العزوم لكامل الجائز حول المسند b نجد :

$$(16)(7) - (14)(12) + (10)(18) - (5)(22) - (12)(4) + 8V_A = 0$$

ومنه :

$$V_A = 4,25t$$

وبأخذ العزوم لكامل الجائز حول المسند a نجد :

$$(12)(4) - 8V_B + (16)(15) - (14)(20) + (10)(26) - (5)(30) = 0$$

ومنه :

$$V_B = 14,75t$$

وبهذا تتحدد جميع المجاهيل .

هذا ويمكن تدقيق هذه النتائج كما يلي :

مجموع الحمولات الشاقولية

$$12 + 16 + 10 = 38t$$

مجموع ردود الأفعال الشاقولية :

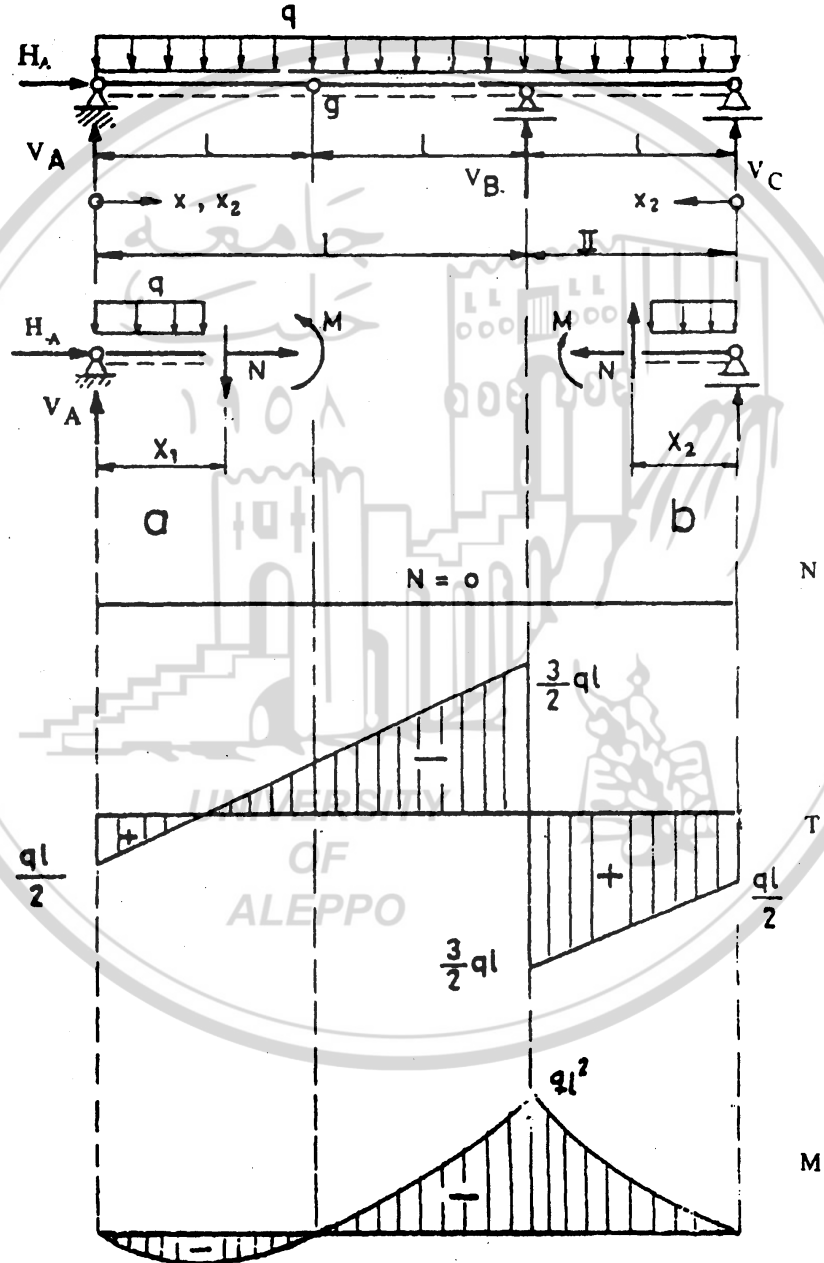
$$-(4,25 + 14,75 + 14 + 5) = -38t$$

-رسم مخططات القوى الداخلية :

يبين الشكل (4-25) مخططات القوى القاطعة وعزوم الانعطاف .

مثال (8) :

ليكن الجائز المبين بالشكل (4-25) والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ورسم مخططات القوى الداخلية .



الشكل (4-25)

الحل :

(1) ردود أفعال المساند

بالإسقاط على x نجد : $H_A = 0$

وبأخذ مجموع العزوم على يسار المفصل g

$$V_A l - ql \frac{1}{2} = 0 \quad \text{نجد :}$$

$$V_A = \frac{ql}{2} \quad \text{ومنه :}$$

وبأخذ مجموع العزوم لكامل الجائز حول المسند B نجد :

$$V_A 2l - V_C l + ql \frac{1}{2} - q(2l) \frac{2l}{2} = 0$$
$$V_C = -\frac{ql}{2} \quad \text{ومنه :}$$

بالإسقاط على y نجد :

$$V_A + V_B + V_C - q(3l) = 0$$
$$V_B = 3ql \quad \text{ومنه :}$$

(2) علاقات القوى الداخلية ورسمها :

يتكون الجائز من مجالين هما AB , BC .

المجال الأول : نقتطع جزءاً من المجال الأول ونطبق عليه شروط التوازن فنجد :

$$N_{AB} = 0 \quad \text{بالإسقاط على x}$$

$$T_{AB} - V_A + qx_1 = 0 \quad \text{وبالإسقاط على y}$$

$$T_{AB} = \frac{ql}{2} - qx_1 \quad \text{ومنه :}$$

وهي تمثل علاقة مستقيم ميله q - ولا يمر بمبدأ الإحداثيات .

وبأخذ العزوم نجد :

$$M_{AB} - V_A x_1 + qx_1 \frac{x_1}{2} = 0$$

$$M_{AB} = \frac{ql}{2} x_1 - q \frac{x_1^2}{2} \quad \text{ومنه :}$$

وهي تمثل علاقة قطع مكافئ من الدرجة الثانية .

المجال الثاني : لنطبق شروط التوازن على الجزء المقطوع الأيمن من المجال BC .

$$N_{BC} = 0 \quad \text{نجد :}$$

وبالإسقاط على y نجد :

$$T_{BC} + V_C - qx_2 = 0$$

ومنه :

$$T_{BC} = \frac{ql}{2} + qx_2$$

وهي علاقة مستقيم ميله +q ولا يمر من مركز الإحداثيات .

وبتطبيق معادلة العزوم نجد :

$$M_{BC} - V_C x_2 + qx_2 \frac{x_2}{2} = 0$$

ومنه :

$$M_{BC} = -\frac{ql}{2} x_2 - q \frac{x_2^2}{2}$$

وهي تمثل علاقة قطع مكافئ من الدرجة الثانية .

وبين الشكل (4-25) رسم مخططات القوى الناعمية والقوى القاطعة وعزم الانعطاف مع ملاحظة ما يلي :

- بما أن علاقة القوى القاطعة هي مشتق علاقة عزم الانعطاف نلاحظ أن علاقة عزم

الانعطاف التي لدينا هي من الدرجة الثانية ، بينما علاقة القوى القاطعة من

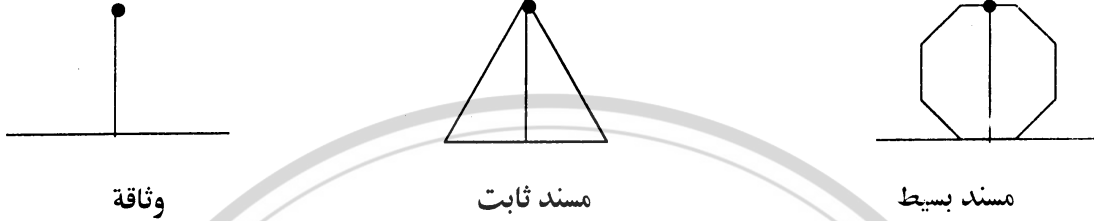
الدرجة الأولى.

- انعدام مخطط عزم الانعطاف عند المفصل .

4-6 - أمثلة عامة محلولة على الفصل الرابع :

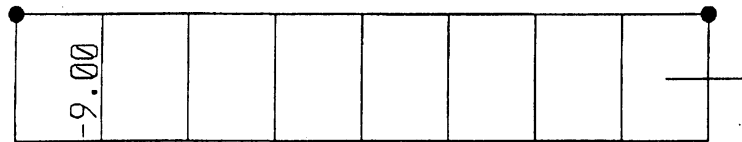
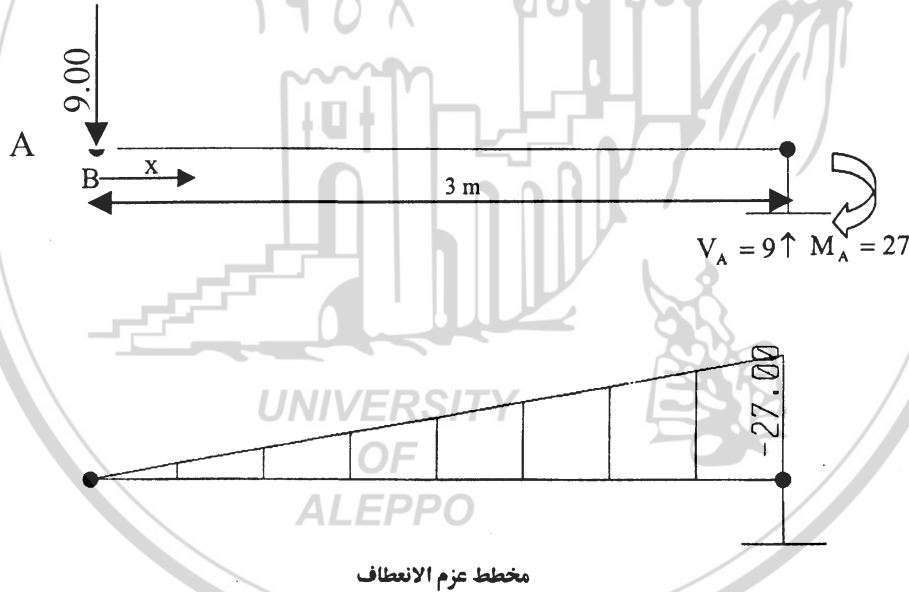
إن وحدات القياس في جميع هذه الأمثلة هي الطن الثقلي للقوى (t.f) والمتر للأطوال (m) .

وقد رُمز إلى كل من المسند البسيط والثابت والوثاقة بالرموز :



مثال (1) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (1) حيث الطرف A موثوق والطرف B حر والمطلوب : إيجاد ردود الأفعال ومخططي عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



الشكل (1)

الحل :

1- ردود الأفعال :

$$\begin{array}{lll} \Sigma F_x = 0 & H_A = 0 & \text{بالإسقاط على } x \text{ نجد :} \\ \Sigma F_y = 0 & V_A = 9t & \text{وبالإسقاط على } y \text{ نجد :} \end{array}$$

ويأخذ العزوم حول A ويفرض الاتجاه الموجب للعزم بحسب جهة دوران عقارب

الساعة نجد :

$$\Sigma M_A = 0$$

ومنه :

$$M_A - (9)(3) = 0 \quad M_A = 27 \text{ t.m}$$

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

أ - علاقة العزوم :

$$M_{BA} = -9x$$

وهي علاقة مستقيم .

فمن أجل $x = 0$ يكون $M_B = 0$

ومن أجل $x = 3$ يكون $M_A = -27$

ب - علاقة القوى القاطعة :

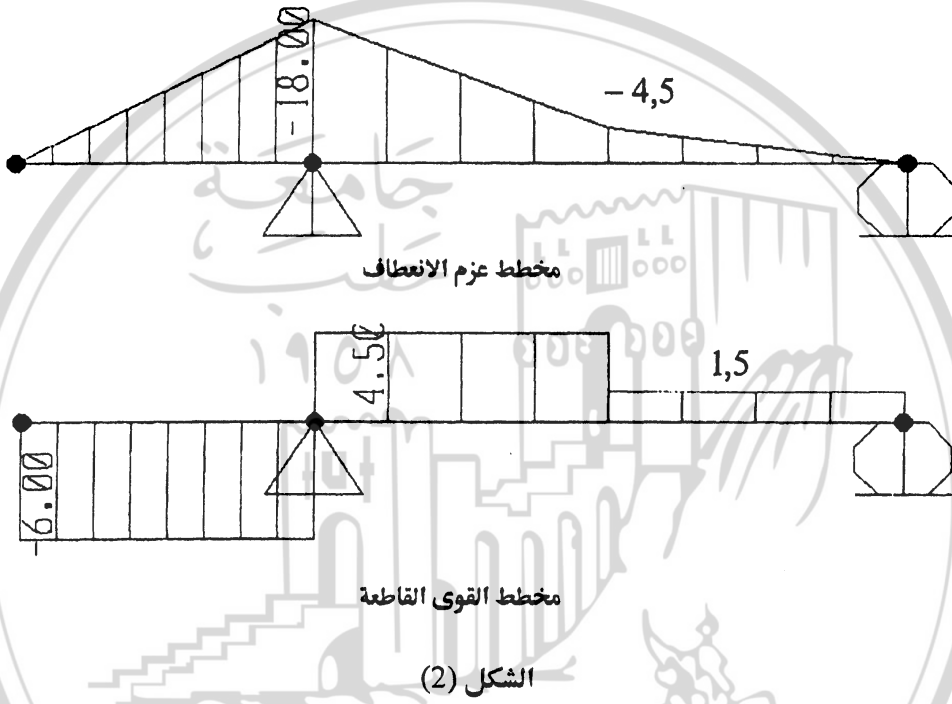
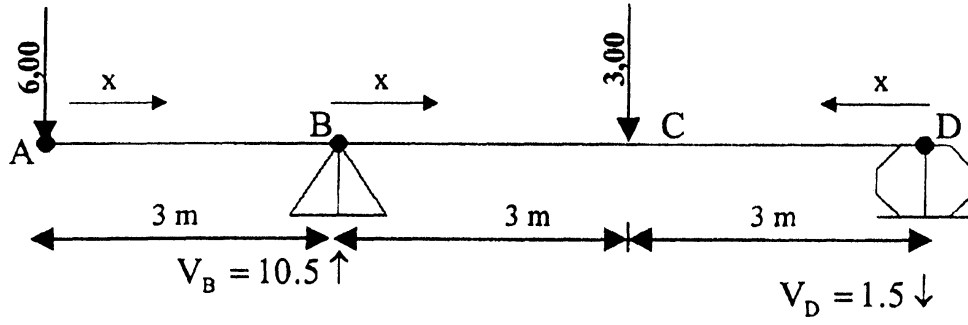
$$T_{AB} = -9$$

وهي تمثل مستقيماً يوازي المحور x ويبين الشكل (1) المخططين المطلوبين .

مثال (2) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (2) حيث B مسند ثابت و D مسند بسيط والمطلوب

إيجاد ردود الأفعال ومخططي عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



الحل :

1- ردود الأفعال :

بالإسقاط على x نجد : $H_B = 0$

بأخذ العزوم حول D بفرض أن العزم الموجب يتفق مع اتجاه دوران عقارب الساعة

نجد :

$$-(6)(9) + 6V_B - (3)(3) = 0$$

ومنه :

$$V_B = 10,5t$$

وبالإسقاط على y نجد :

$$-6 + 10,5 - 3 - V_D = 0$$

ومنه :

$$V_D = 1,5t$$

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

❖ المجال AB

أ - العزوم : بأخذ القوى على يسار المقطع نجد : $M_{AB} = -6x$

وكذلك $M_A = 0$ من أجل $x = 0$

ويكون $M_B = -18$ من أجل $x = 3$

ب - القوى القاطعة : $T_{AB} = -0$ وهي قيمة ثابتة .

❖ المجال BC :

أ - العزوم : بأخذ القوى على يسار المقطع نجد :

$$M_{BC} = -6(3 + x) + 10,5x$$

$$M_{BC} = 4,5x - 18$$

فمن أجل $x = 0$ نجد $M_B = -18$

ومن أجل $x = 3$ نجد $M_C = -4,5$

$$T_{BC} = 4,5$$

ب - القوى القاطعة

وهي قيمة ثابتة .

❖ المجال DC :

أ - العزوم : بأخذ القوى على يمين المقطع نجد : $M_{DC} = -1,5x$

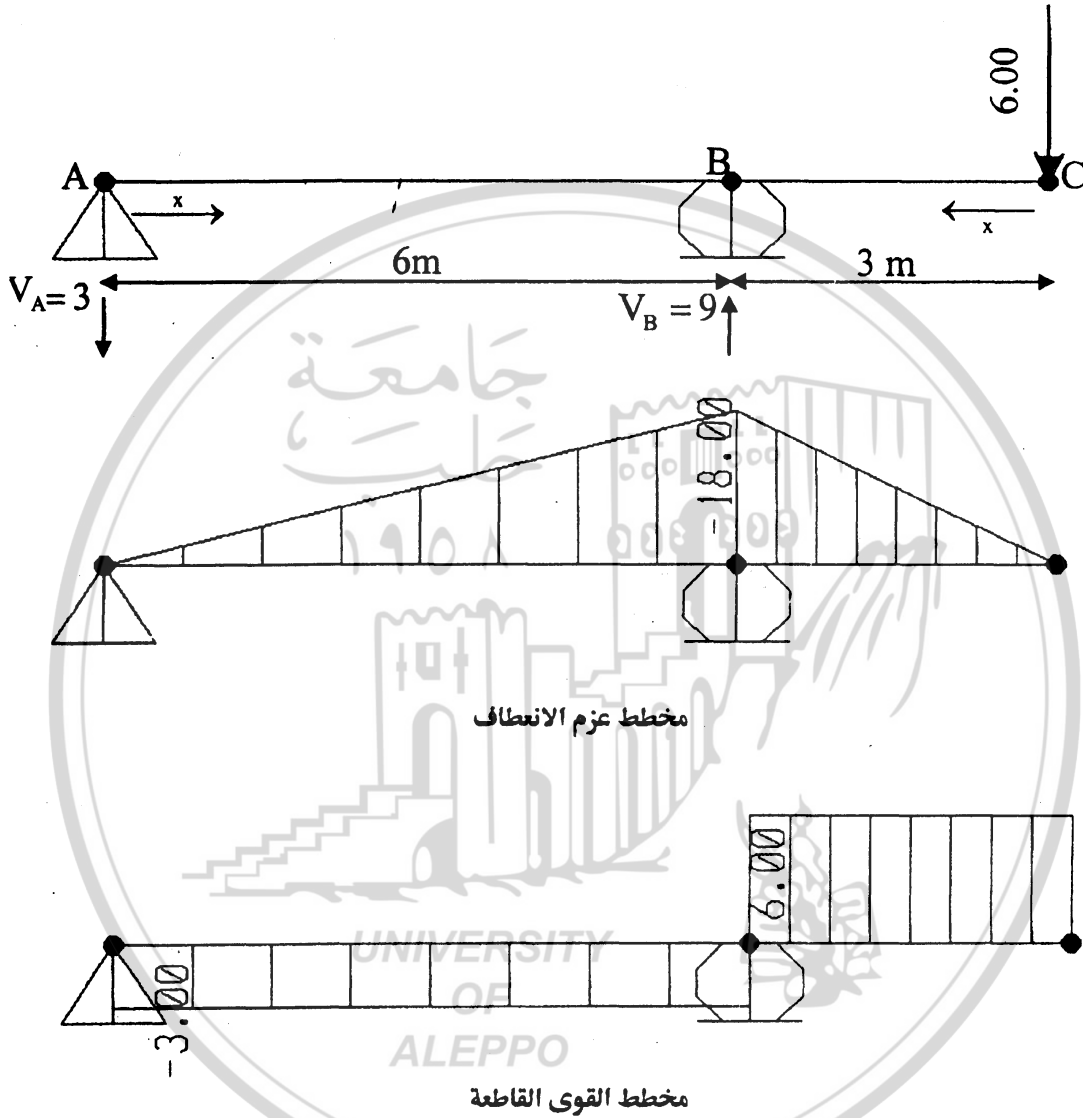
فمن أجل $x = 0$ نجد $M_D = 0$ ومن أجل $x = 3$ نجد $M_C = -4,5$

ب - القوى القاطعة $T_{CD} = 1,5$ وهي قيمة ثابتة .

وبين الشكل (2) مخططي عزوم الانعطاف والقوى القاطعة

مثال (3) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (3) حيث A مسند ثابت ، B مسند بسيط والمطلوب : إيجاد ردود الأفعال ومخططي عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



الشكل (3)

الحل :

1- ردود الأفعال :

$$H_A = 0$$

بالإسقاط على X نجد :

بأخذ العزوم حول B بفرض أن العزم الموجب يتفق مع اتجاه دوران عقارب الساعة

نجد :

$$-6V_A + (6)(3) = 0$$

$$V_A = 3t$$

ومنه :

$$-3 + V_B - 6 = 0$$

وبالإسقاط على y نجد :

$$V_B = 9t$$

ومنه :

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

❖ المجال AB

أ - العزوم :

$$M_{AB} = -3x$$

ويكون $M_A = 0$ من أجل $x = 0$

و $M_B = -18$ من أجل $x = 6$

ب - القوى القاطعة : $T_{AB} = -3$ وهي قيمة ثابتة .

❖ المجال CB

أ - العزوم :

$$M_{CB} = -6x$$

ويكون $M_C = 0$ من أجل $x = 0$

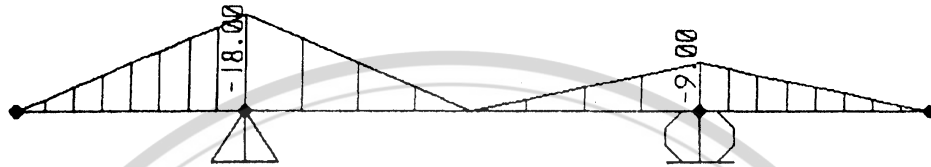
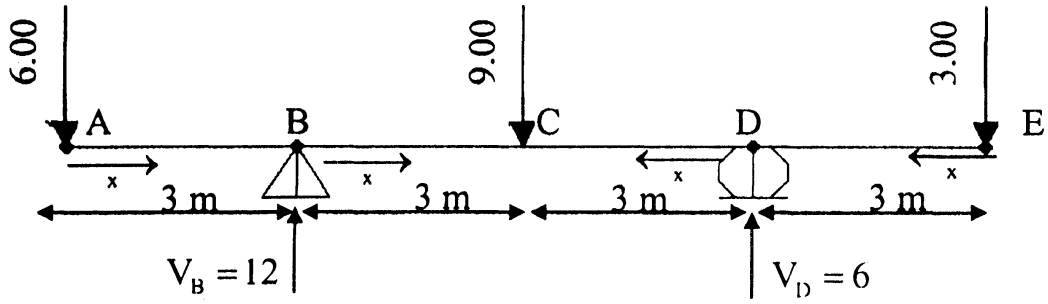
و $M_B = -18$ من أجل $x = 3$

ب - القوى القاطعة : $T_{CB} = 6$ وبين الشكل (3) المخططين المطلوبين .

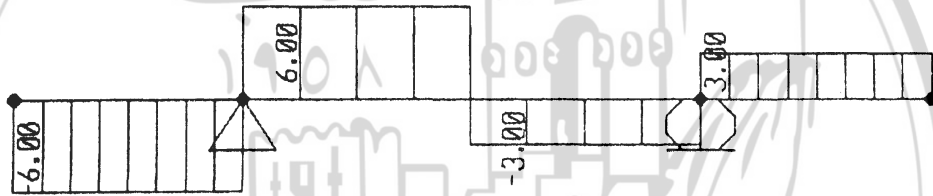
مثال (4) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (4) حيث B مسند ثابت ، D مسند بسيط والمطلوب :

إيجاد ردود الأفعال ومخططي عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



مخطط عزم الانعطاف



مخطط القوى القاطعة

الشكل (4)

الحل :

1- ردود الأفعال

بالإسقاط على X نجد : $H_B = 0$

بأخذ العزوم حول D نجد :

$$-(6)(9) + 6V_B - (9)(3) + (3)(3) = 0$$

$$V_B = 12 \text{ t}$$

ومنه :

وبالإسقاط على y نجد : $-6 + 12 - 9 + V_D - 3 = 0$

$$V_D = 6 \text{ t}$$

ومنه

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

❖ المجال AB

أ - العزوم : $M_{AB} = -6x$

ويكون $M_A = 0$ من أجل $x = 0$

و $M_B = -18$ من أجل $x = 3$

ب - القوى القاطعة : $T_{AB} = -6$

وهي قيمة ثابتة .

❖ المجال BC

أ - العزوم

$$M_{BC} = -6(3+x) + 12x$$

$$M_{BC} = 6x - 18$$

$$x = 0 \quad M_B = -18 \quad x = 3 \quad M_C = 0$$

$$T_{BC} = 6$$

ب - القوى القاطعة :

❖ المجال DC

أ - العزوم

$$M_{DC} = 6x - 3(3+x)$$

$$M_{DC} = 3x - 9$$

$$x = 0 \quad M_D = -9 \quad x = 3 \quad M_C = 0$$

$$T_{DC} = -3$$

ب - القوى القاطعة :

❖ المجال ED

أ - العزوم

$$M_{ED} = -3x$$

$$x = 0 \quad M_E = 0 \quad x = 3 \quad M_D = -9$$

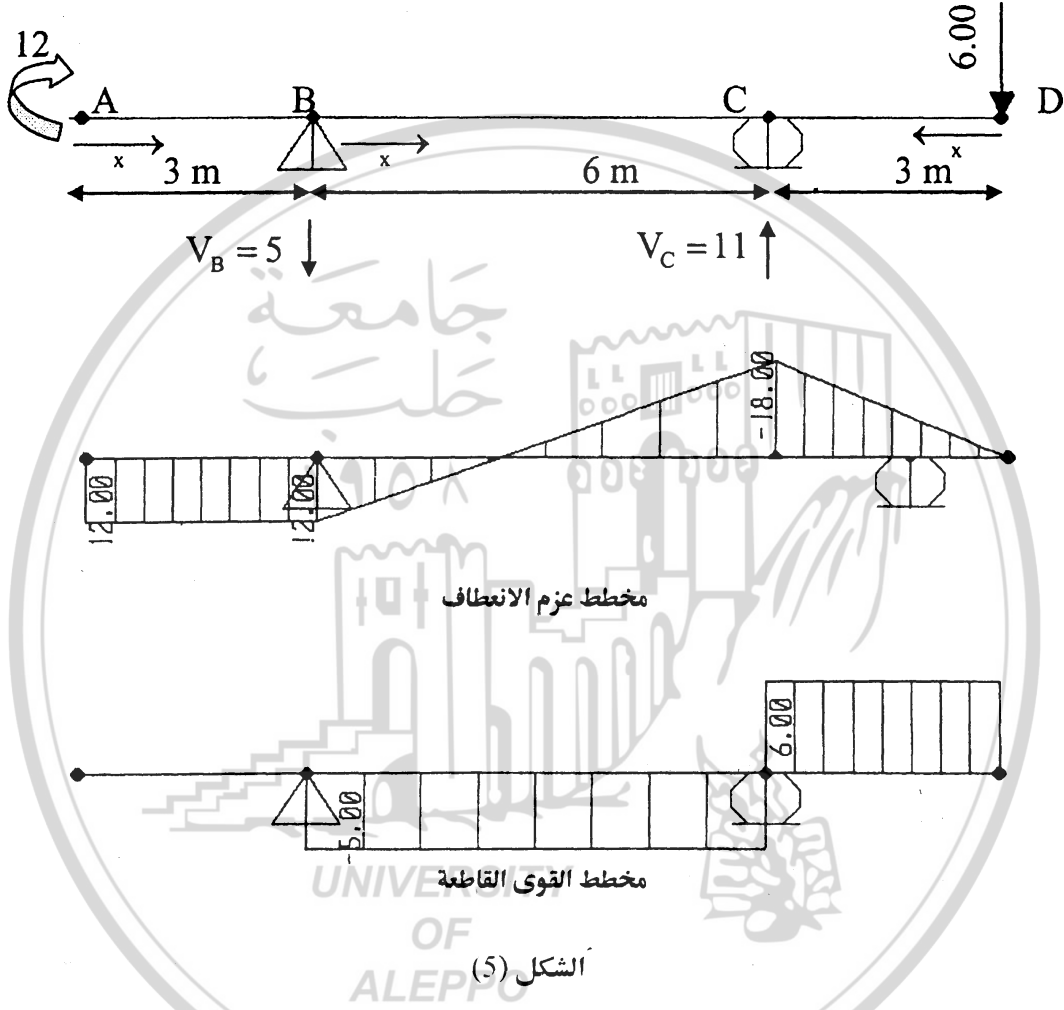
$$T_{ED} = 3$$

ب - القوى القاطعة :

وبين الشكل (4) المخططات المعنية .

مثال (5) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (5) حيث B مسند ثابت ، C مسند بسيط والمطلوب:
إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



الحل :

1- ردود الأفعال

بالإسقاط على x نجد : $H_B = 0$

بأخذ العزوم حول C نجد :

$$12 - 6V_B + (3)(6) = 0$$

$$V_B = 5t$$

ومنه :

وبالإسقاط على y نجد :

$$-5 + V_C - 6 = 0$$

$$V_C = 11t \quad \text{ومنه}$$

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

❖ المجال AB

$$M_{AB} = 12 \quad \text{أ - العزوم :}$$

$$T_{AB} = 0 \quad \text{ب - القوى القاطعة :}$$

❖ المجال BC

أ - العزوم

$$M_{BC} = 12 - 5x$$

ويكون $M_B = 12$ من أجل $x = 0$

و $M_C = -18$ من أجل $x = 6$

$$T_{BC} = -5 \quad \text{ب - القوى القاطعة :}$$

❖ المجال DC

أ - العزوم

$$M_{DC} = -6x$$

ويكون $M_D = 0$ من أجل $x = 0$

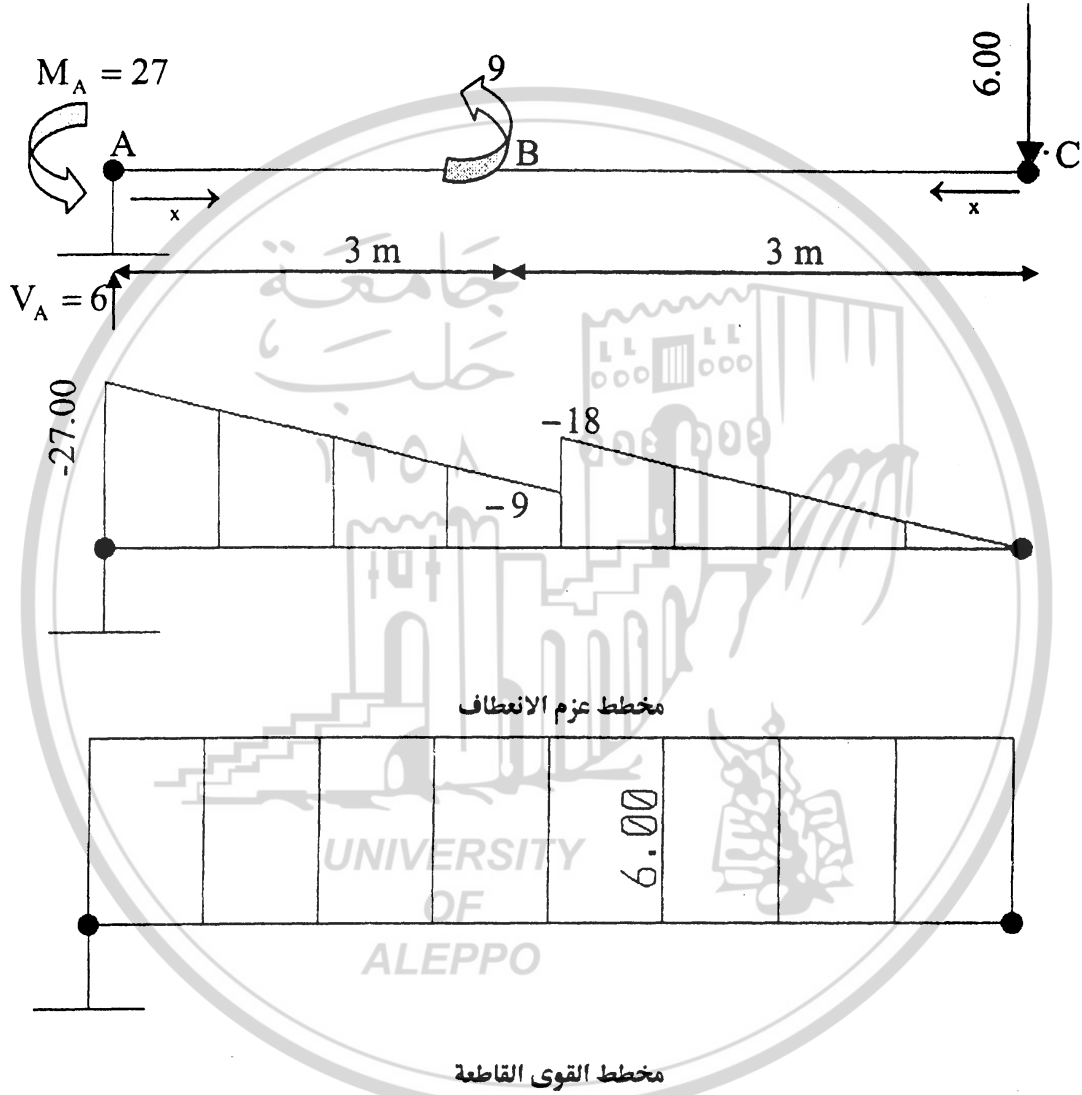
و $M_C = -18$ من أجل $x = 3$

$$T_{DC} = 6 \quad \text{ب - القوى القاطعة :}$$

وبين الشكل (5) المخططات المعنية .

مثال (6) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (6) حيث توجد في A وثاقة والمطلوب: إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



الشكل (6)

الحل :

1- ردود الأفعال

$$H_A = 0$$

بالإسقاط على x نجد :

وبالإسقاط على y نجد :

$$V_A - 6 = 0$$

$$V_A = 6t$$

ومنه

بأخذ العزم حول A يكون :

$$-M_A - 9 + (6)(6) = 0$$

$$M_A = 27t.m$$

ومنه :

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

❖ المجال AB

$$M_{AB} = -27 + 6x$$

أ - العزم :

ويكون $M_A = -27$ من أجل $x = 0$

و $M_B = -9$ من أجل $x = 3$

$$T_{AB} = 6$$

ب - القوى القاطعة :

❖ المجال CB

أ - العزوم

$$M_{CB} = -6x$$

ويكون $M_C = 0$ من أجل $x = 0$

و $M_B = -18$ من أجل $x = 3$

$$T_{CB} = 6$$

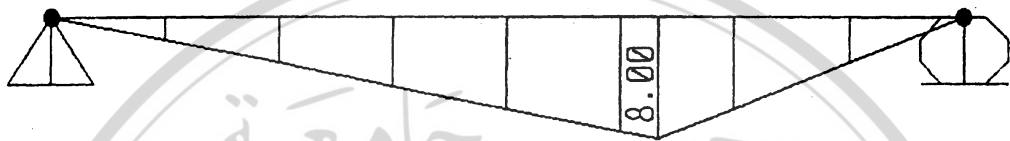
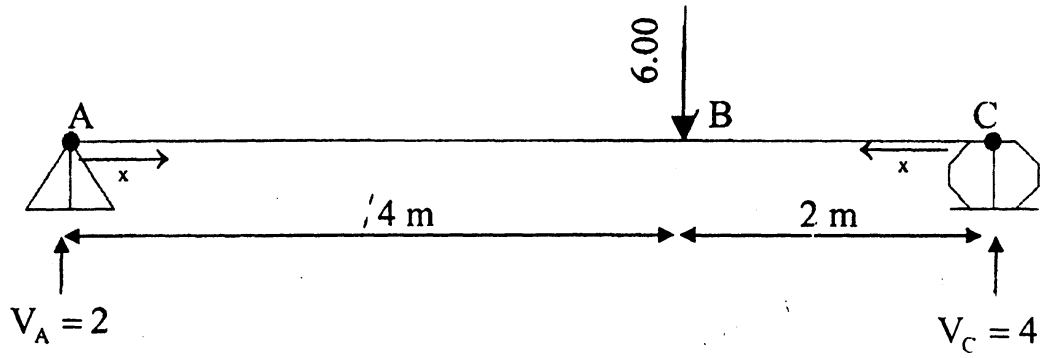
ب - القوى القاطعة :

وبين الشكل (6) المخططات المعنية .

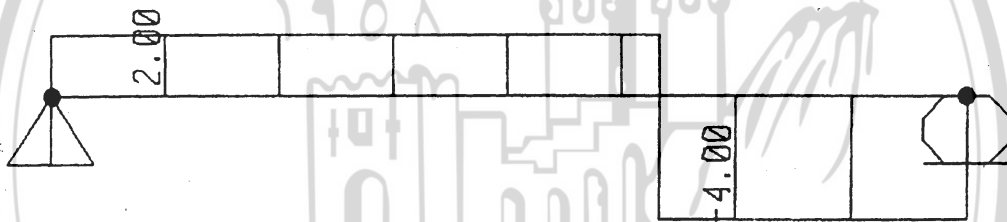
مثال (7) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (7) حيث A مسند ثابت و C مسند بسيط والمطلوب :

إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



مخطط عزم الانعطاف



مخطط القوى القاطعة

الحل :

1- ردود الأفعال

$$H_A = 0$$

بالإسقاط على X نجد :

بأخذ العزوم حول C نجد :

$$6V_A - (6)(2) = 0$$

$$V_A = 2t$$

ومنه

$$2 - 6 + V_C = 0 \quad \text{بالإسقاط على } y \text{ نجد :}$$

$$V_C = 4t$$

ومنه

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

المجال AB ♦

$$M_{AB} = 2x \quad \text{أ - العزوم :}$$

ويكون $M_A = 0$ من أجل $x = 0$

و $M_B = 8$ من أجل $x = 4$

$$T_{AB} = 2$$

ب - القوى القاطعة :

وهي قيمة ثابتة .

المجال CB ♦

أ - العزوم

$$M_{CB} = 4x$$

ويكون $M_C = 0$ من أجل $x = 0$

و $M_B = 8$ من أجل $x = 2$

$$T_{CB} = -4$$

ب - القوى القاطعة :

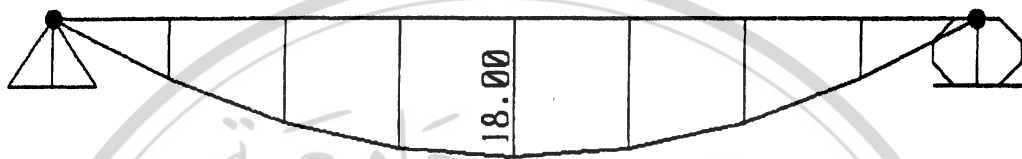
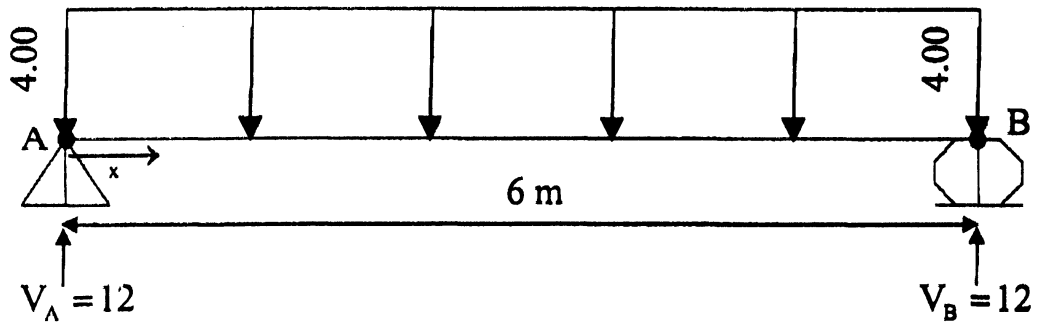
وهي قيمة ثابتة .

وبين الشكل (7) المخططات المعنية .

مثال (8) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (8) حيث A مسند ثابت و B مسند بسيط . يخضع

الجائز لحمولة موزعة بانتظام شدتها $4t/m$ والمطلوب: إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



مخطط عزم الانعطاف



مخطط القوى القاطعة

الشكل (8)

الحل :

1- ردود الأفعال

بالإسقاط على X نجد :

$$H_A = 0$$

بما أن الجائز بحكم المتناظر يكون :

$$V_A = V_B = \frac{(6)(4)}{2} = 12 \text{ t}$$

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

أ - العزوم

$$M_{AB} = 12x - 2x^2$$

• العزم عند بداية ونهاية المجال :

ويكون $M_A = 0$ من أجل $x = 0$ و $M_B = 0$ من أجل $x = 6$

• مواقع انعدام العزم

$$12x - 2x^2 = 0$$

ومنه ينعدم العزم عند كل من الموقعين $x = 0$ و $x = 6$

• القيمة العظمى :

$$M'_{AB} = 12 - 4x = 0$$

فتكون القيمة العظمى للعزم $M_{AB} = 18$ عند الموقع $x = 3$

• اتجاه التقعر :

$$M''_{AB} = -4$$

أي أن اتجاه تقعر مخطط العزم هو دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{AB} = 12 - 4x$$

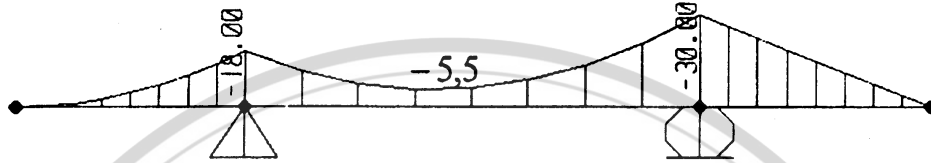
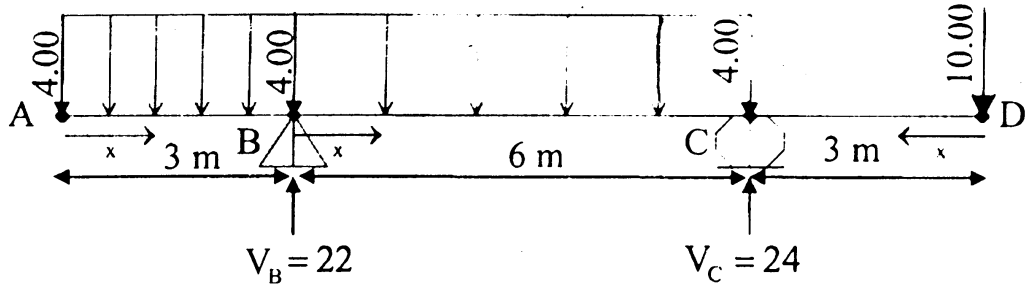
$$x = 0 \quad T_A = 12 \quad x = 6 \quad T_B = -12$$

وبين الشكل (8) المخططات المعنية .

مثال (9) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (9) حيث B مسند ثابت و C مسند بسيط . يخضع

الجائز لحمولة موزعة بانتظام شدتها $4t/m$ والمطلوب: إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



مخطط القوى القاطعة

الشكل (9)

الحل :

1- ردود الأفعال

$$H_B = 0$$

بالإسقاط على x نجد :

بأخذ العزوم حول C نجد :

$$-(36)(4,5) + 6V_B + (10)(3) = 0$$

$$V_B = 22 \text{ t}$$

ومنه :

وبالإسقاط على y نجد :

$$-36 + 22 + V_C - 10 = 0$$

$$V_C = 24 \text{ t}$$

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

المجال AB ❖

أ - العزوم $M_{AB} = -2x^2$

• القيم ببداية ونهاية المجال :

$x = 0$ $M_A = 0$ $x = 3$ $M_B = -18$

• مواقع انعدام العزم $-2x^2 = 0$

$x = 0$ ومنه :

• القيمة العظمى للعزم $M'_{AB} = -4x = 0$

ويكون : $x = 0$ $M_{AB} = 0$
 $_{max}$

• اتجاه التقعر : $M''_{AB} = -4$

أي أن اتجاه التقعر هو دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة : $T_{AB} = -4x$

ويكون $T_A = 0$ من أجل $x = 0$

و $T_B = -12$ من أجل $x = 3$

المجال BC ❖ :

أ - العزوم :

$$M_{BC} = -12(1,5 + x) + 22x - 2x^2$$

$$M_{BC} = -2x^2 + 10x - 18$$

• قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال

$x = 0$ $M_B = -18$ $x = 6$ $M_C = -30$

• مواقع انعدام العزم $-2x^2 + 10x - 18 = 0$



إن مميز هذه المعادلة سالب وبالتالي فلا يوجد لها جذور حقيقية، أي إنه لا توجد مواقع ينعدم فيها العزم.

• القيمة العظمى

$$M'_{BC} = -4x + 10 = 0$$

ومنه يأخذ العزم عند الموقع $x = 2,5$ قيمته العظمى وقدرها $M_{BC \max} = -5,5$

• اتجاه التقعر :

$$M''_{BC} = -4$$

أي أن اتجاه التقعر هو دوماً نحو الأعلى :

ب - القوى القاطعة :

$$T_{BC} = -4x + 10$$

$$x=0 \quad T_B = 10 \quad x=6 \quad T_C = -14$$

❖ المجال DC :

أ - العزوم

$$M_{DC} = -10x$$

$$x=0 \quad M_D = 0 \quad x=3 \quad M_C = -30$$

ب - القوى القاطعة : $T_{DC} = 10$.

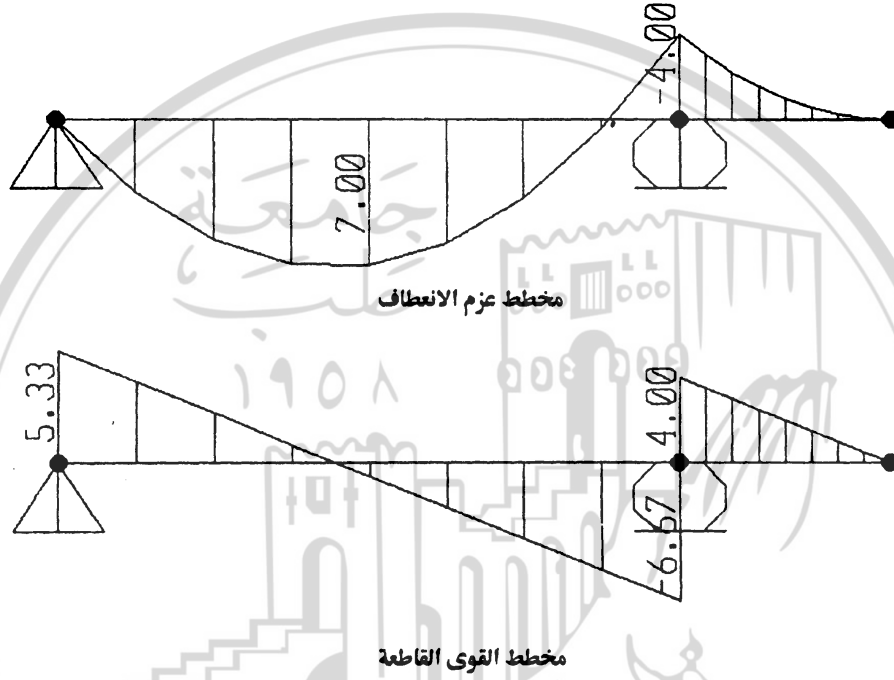
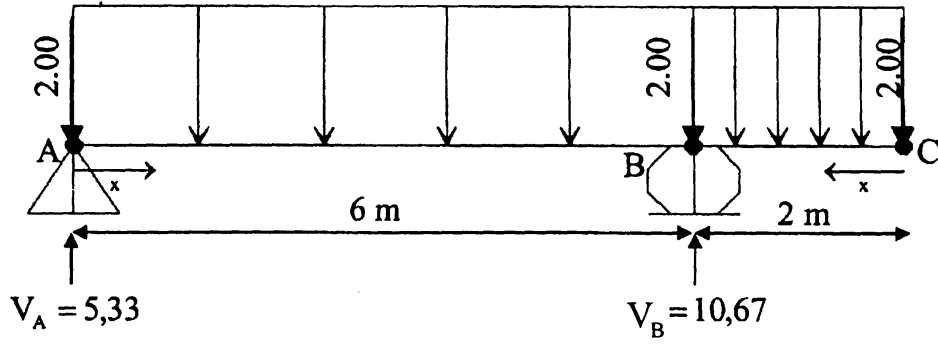
ويبين الشكل (9) المخططات المعنية .

مثال (10) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (10) حيث A مسند ثابت و B مسند بسيط . يخضع

الجائز لحمولة موزعة بانتظام شدتها $2t/m$ والمطلوب: إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم

الانعطاف والقوى القاطعة .



الشكل (10)

UNIVERSITY
OF
ALEPPO

الحل :

1- ردود الأفعال

بالإسقاط على X نجد :

$$H_A = 0$$

وبأخذ العزوم حول B نجد :

$$6V_A - (16)(2) = 0$$

$$V_A = 5.33 \text{ t}$$

ومنه :

بالإسقاط على Y نجد :

$$5.33 - 16 + V_B = 0$$

$$V_B = 10.67 \text{ t}$$

ومنه :

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

المجال AB ❖

$$M_{AB} = 5,33x - x^2 \quad \text{أ - العزوم :}$$

• قيم العزم عند بداية ونهاية المجال

$$x = 0 \quad M_A = 0 \quad x = 6 \quad M_B = -4$$

• مواقع انعدام العزم $5,33x - x^2 = 0$

ومنه ينعدم العزم في كل من الموقعين : $x = 5,33$ $x = 0$

• القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{AB} = 5,33 - 2x = 0$$

فتبلغ القيمة العظمى للعزم $M_{AB} = 7$ عند الموقع $x = 2,67$

• اتجاه التقعر : $M''_{AB} = -2$

أي أن اتجاه التقعر دائماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{AB} = 5,33 - 2x$$

$$x = 0 \quad T_A = 5,33 \quad x = 6 \quad T_B = -6,67$$

المجال CB ❖

$$M_{CB} = -x^2 \quad \text{أ - العزوم}$$

• قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad M_C = 0 \quad x = 2 \quad M_B = -4$$

• مواقع انعدام العزم : $-x^2 = 0$

ومنه $x = 0$

• القيمة العظمى : $M'_{CB} = -2x = 0$

ومنه : $M_{CB} = 0$ $x = 0$
max

● اتجاه التقعر : $M''_{CB} = -2$

أي أن اتجاه التقعر هو دوماً نحو الأعلى

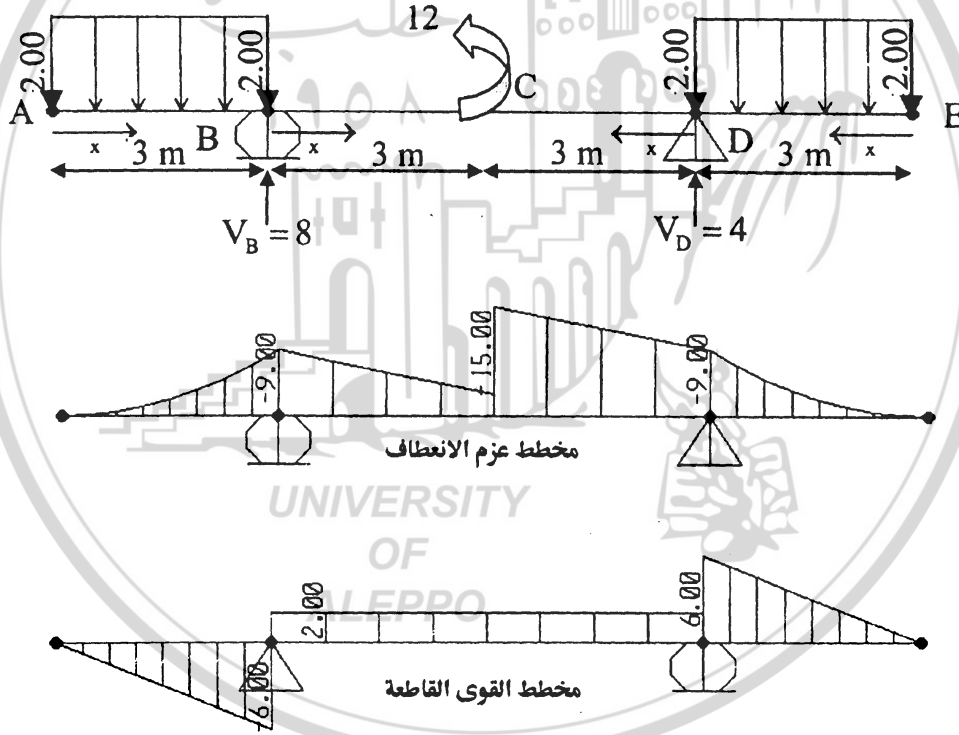
ب - القوى القاطعة : $T_{CB} = 2x$

$x = 0 \quad T_C = 0 \quad x = 2 \quad T_B = 4$

وبين الشكل (10) المخططات المعنية .

مثال (11) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (11) حيث B مسند بسيط و D مسند ثابت . يخضع الجائز لحمولة موزعة بانتظام شدتها $2t/m$ ولعزم $12t.m$ والمطلوب: إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



الشكل (11)

الحل :

1- ردود الأفعال

بالإسقاط على x نجد : $H_D = 0$

بأخذ العزوم حول D نجد :

$$-(6)(7,5) + 6V_B - 12 + (6)(1,5) = 0$$

$$V_B = 8t \quad \text{ومنه :}$$

$$-6 + 8 + V_D - 6 = 0 \quad \text{وبالإسقاط على y نجد :}$$

$$V_D = 4t \quad \text{ومنه :}$$

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

المجال AB ❖

أ - العزوم

$$M_{AB} = -x^2$$

• القيم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0$$

$$M_A = 0$$

$$x = 3$$

$$M_B = -9$$

• نقاط انعدام العزم :

$$x = 0$$

ومنه :

$$-x^2 = 0$$

$$M'_{AB} = -2x = 0$$

• القيمة العظمى للعزم

$$x = 0$$

$$M_{AB} = 0_{\max}$$

وبالتالي :

$$M''_{AB} = -2$$

• اتجاه التقعر :

فالتقعر دوماً نحو الأعلى .

$$T_{AB} = -2x$$

ب - القوى القاطعة :

$$x = 0$$

$$T_A = 0$$

$$x = 3$$

$$T_B = -6$$

المجال BC ❖ :

أ - العزوم :

$$M_{BC} = -6(1,5 + x) + 8x$$

$$M_{BC} = 2x - 9$$

$$x = 0$$

$$M_B = -9$$

$$x = 3$$

$$M_C = -3$$

$$T_{BC} = 2$$

ب - القوى القاطعة :

❖ المجال DC :

أ - العزوم :

$$M_{DC} = -6(1,5 + x) + 4x$$

$$M_{DC} = -2x - 9$$

وتكون قيمة العزم $M_C = -15$ عند الموقع $x = 3$ و $M_D = -9$ عند الموقع $x = 0$

$$T_{DC} = 2$$

ب - القوى القاطعة :

❖ المجال ED :

أ - العزوم

$$M_{ED} = -x^2$$

• العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad M_E = 0 \quad x = 3 \quad M_D = -9$$

• مواقع انعدام العزم

$$-x^2 = 0$$

$$x = 0$$

ومنه :

$$M'_{ED} = -2x = 0$$

$$x = 0 \quad M_{ED} = 0_{\max}$$

• القيمة العظمى للعزم

ومنه :

$$M''_{ED} = -2$$

• اتجاه التقعر :

فالتقعر دوماً نحو الأعلى .

$$T_{ED} = 2x$$

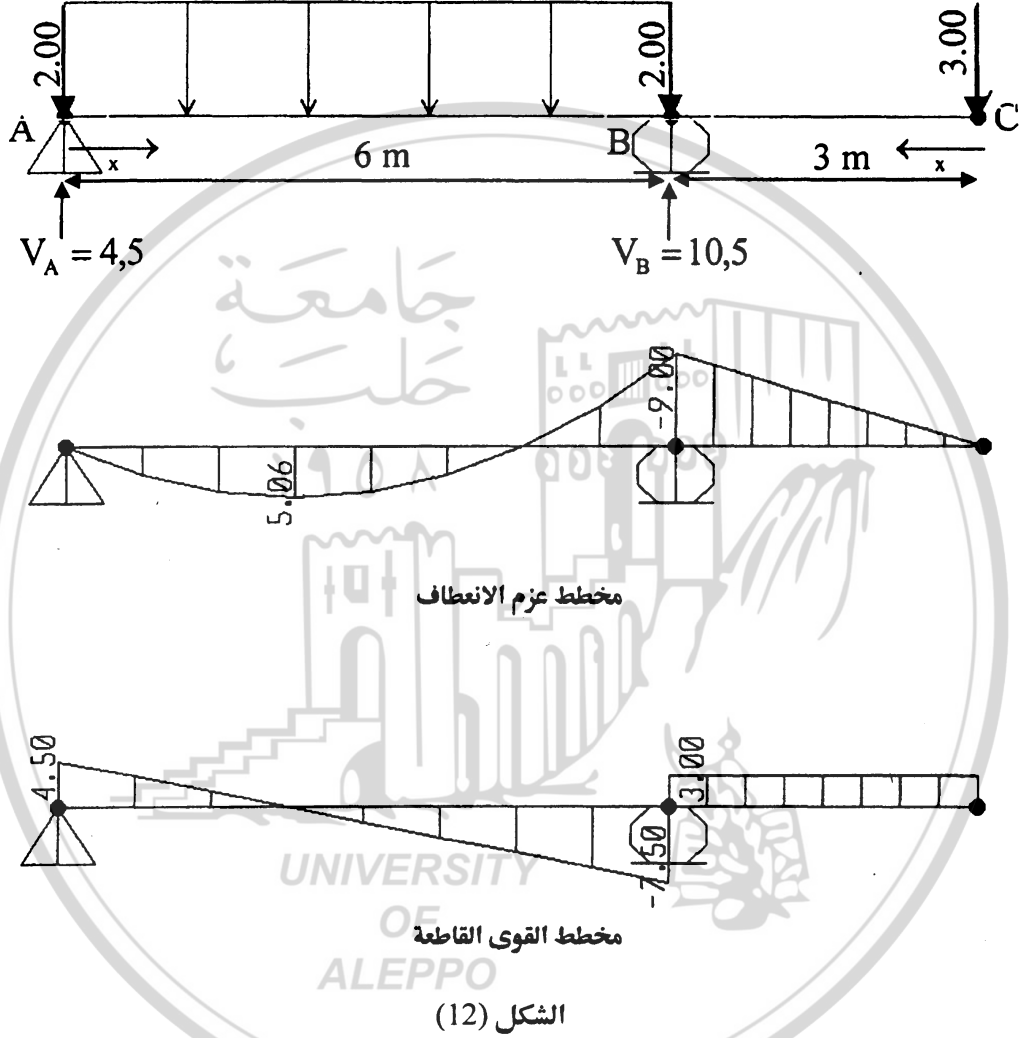
ب- القوى القاطعة :

$$x = 0 \quad T_E = 0 \quad x = 3 \quad T_D = 6$$

وبين الشكل (11) المخططات المعنية .

مثال (12) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (12) حيث A مسند ثابت و B مسند بسيط والحمولة الموزعة شدتها 2t/m والمركزة 3t والمطلوب : إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



الحل :

1- ردود الأفعال

$$H_A = 0$$

بالإسقاط على x

بأخذ العزوم حول B نجد :

$$6V_A - (12)(3) + (3)(3) = 0$$

ومنه :

$$V_A = 4,5t$$

وبالإسقاط على y نجد :

$$4,5 - 12 + V_B - 3 = 0$$

$$V_B = 10,5t$$

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

❖ المجال AB

أ - العزوم :

$$M_{AB} = 4,5x - x^2$$

• القيم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad M_A = 0 \quad x = 6 \quad M_B = -9$$

• مواقع انعدام العزوم :

$$4,5x - x^2 = 0$$

$$x = 0 \quad x = 4,5$$

ومنه :

$$M'_{AB} = 4,5 - 2x = 0$$

• القيمة العظمى :

$$x = 2,25$$

ومنه :

$$M_{AB} = 5,06t.m$$

وتصبح القيمة العظمى للعزم :

$$M''_{Ab} = -2$$

• اتجاه التقعر :

فاتجاه التقعر دوماً نحو الأعلى .

$$T_{AB} = 4,5 - 2x$$

ب - القوى القاطعة :

$$x = 0 \quad T_A = 4,5 \quad x = 6 \quad T_B = -7,5$$

❖ المجال CB

أ - العزوم :

$$M_{CB} = -3x$$

$$x = 0 \quad M_C = 0 \quad x = 3 \quad M_B = -9$$

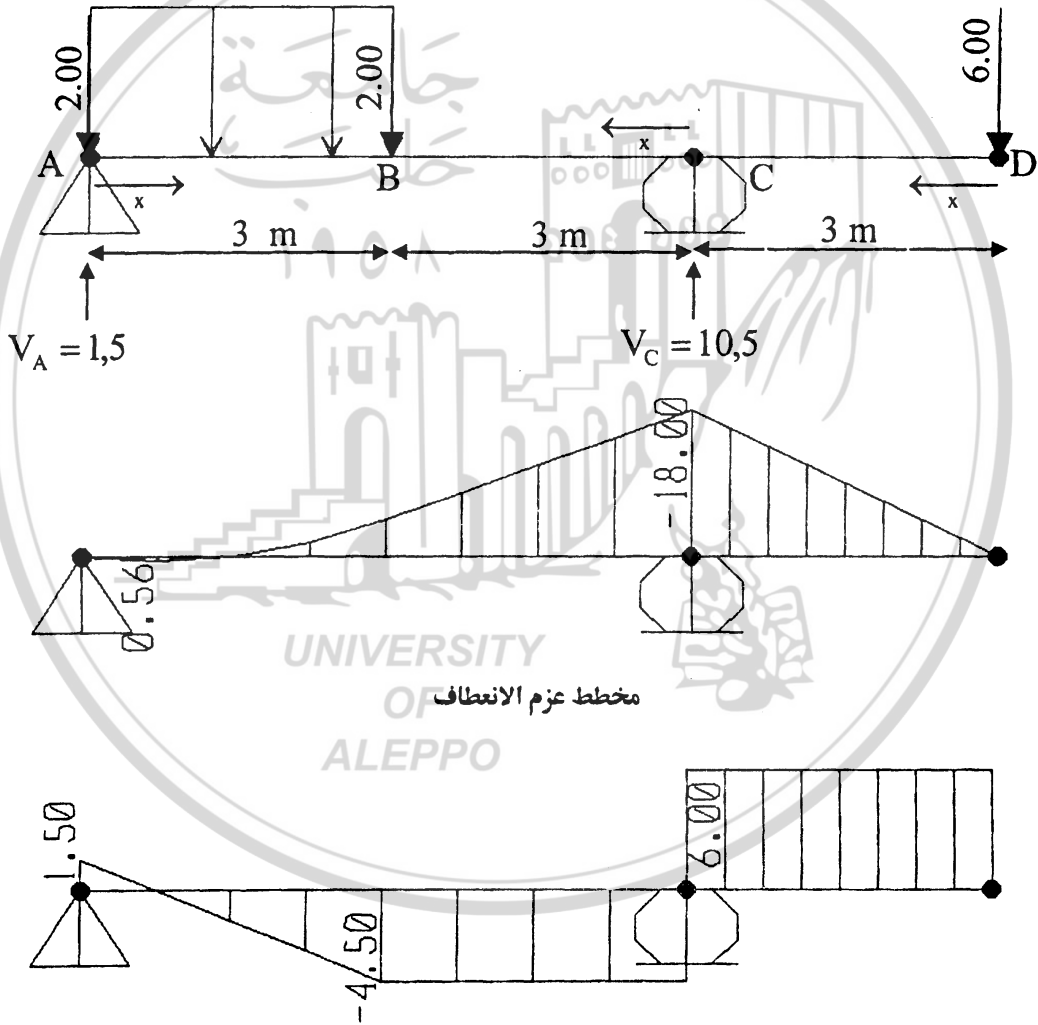
$$T_{CB} = 3$$

ب — القوى القاطعة :

وبين الشكل (12) المخططات المعنية .

مثال (13) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (13) حيث A مسند ثابت و C مسند بسيط والحمولة الموزعة بانتظام شدتها $2t/m$ والقوة المركزة $6t$ والمطلوب : إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



مخطط القوى القاطعة

الشكل (13)

الحل :

1- ردود الأفعال :

$$H_A = 0$$

بالإسقاط على x

بأخذ العزوم حول C نجد :

$$6V_A - (6)(4,5) + (6)(3) = 0$$

ومنه :

$$V_A = 1,5t$$

وبالإسقاط على y نجد :

$$1,5 - 6 + V_C - 6 = 0$$

$$V_C = 10,5t$$

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

المجال AB ❖

أ - العزوم

$$M_{AB} = 1,5x - x^2$$

● القيم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad M_A = 0 \quad x = 3 \quad M_B = -4,5$$

● مواقع انعدام العزم

$$1,5x - x^2 = 0$$

ومنه :

$$x = 0 \quad x = 1,5$$

● القيمة العظمى :

$$M'_{AB} = 1,5 - 2x = 0$$

$$x = 0,75$$

ومنه :

$$M_{AB} = 0,56$$

قيمتة العظمى وهي

$$M''_{AB} = -2$$

● اتجاه التقعر :

فالتقعر دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{AB} = 1,5 - 2x$$

$$x = 0 \quad T_A = 1,5 \quad x = 3 \quad T_B = -4,5$$

❖ المجال CB

أ - العزوم :

$$M_{CB} = -6(3 + x) + 10,5x$$

$$M_{CB} = 4,5x - 18$$

$$x = 0 \quad M_C = -18 \quad x = 3 \quad M_B = -4,5$$

$$T_{CB} = -4,5$$

ب - القوى القاطعة :

❖ المجال DC

أ - العزوم

$$M_{DC} = -6x$$

$$x = 0 \quad M_D = 0 \quad x = 3 \quad M_C = -18$$

$$T_{CB} = -4,5$$

ب - القوى القاطعة :

$$T_{DC} = 6$$

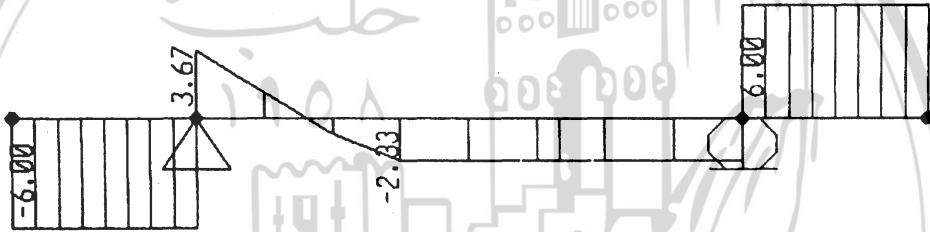
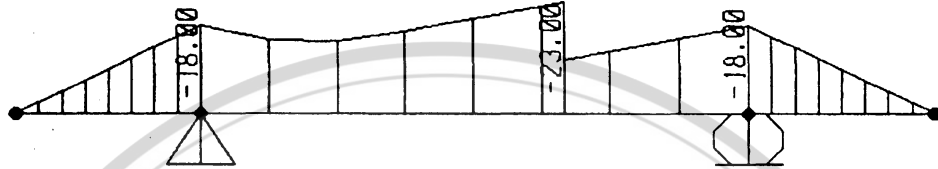
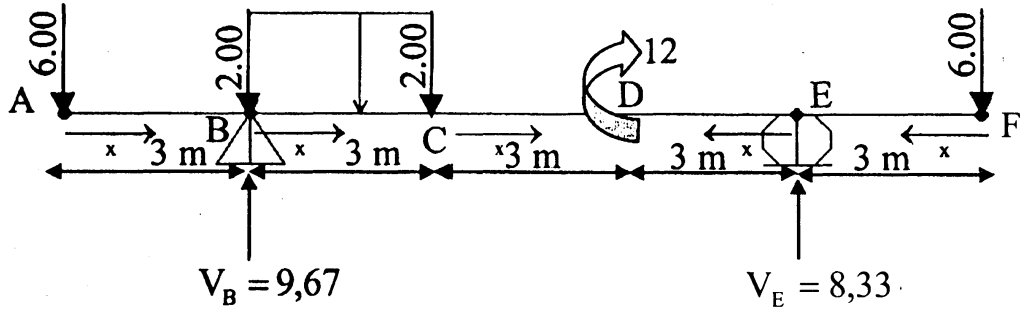
وبين الشكل (13) المخططات المعنية .

مثال (14) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (14) حيث B مسند ثابت و E مسند بسيط والحمولة

الموزعة بانتظام مقدارها $2t/m$ والعزم المطبق $12t.m$ والمطلوب : إيجاد ردود الأفعال

ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



الشكل (14)

الحل :

1- ردود الأفعال :

$$H_B = 0$$

بالإسقاط على x نجد :

بأخذ العزوم حول E نجد :

$$-(6)(12) + 9V_B - (6)(7,5) + 12 + (6)(3) = 0$$

$$V_B = 9,67 \text{ t}$$

وبالإسقاط على y

$$-6 + 9,67 - 6 + V_E - 6 = 0$$

$$V_E = 8,33 \text{ t}$$

فتجد :

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

❖ المجال AB :

أ - العزوم : $M_{AB} = -6x$

$x = 0 \quad M_A = 0 \quad x = 3 \quad M_B = -18$

ب - القوى القاطعة : $T_{AB} = -6$

❖ المجال BC :

أ - العزوم :

$$M_{BC} = -6(3+x) + 9,67x - x^2$$

$$M_{BC} = -x^2 + 3,67x - 18$$

• قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$x = 0 \quad M_B = -18 \quad x = 3 \quad M_C = -16$

• مواقع انعدام العزم

$$-x^2 + 3,67x - 18 = 0$$

إن مميز هذه المعادلة سالب وعليه فلا يوجد مواقع ينعدم فيها العزم ضمن المجال

. BC

• القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{BC} = -2x + 3,67 = 0$$

ومنه :

$$x = 1,83$$

$$M_{BC} = -14,63$$

max

• اتجاه التقعر : $M''_{BC} = -2$

وبالتالي فالتقعر يتجه دوماً نحو الأعلى .

$$T_{BC} = -2x + 3,67$$

ب - القوى القاطعة :

$$x = 0 \quad T_B = 3,67 \quad x = 3 \quad T_C = -2,33$$

❖ المجال CD

أ - العزوم :

$$M_{CD} = -6(6+x) + 9,67(3+x) - 6(1,5+x)$$

$$M_{CD} = -2,33x - 16$$

$$x = 0 \quad M_C = -16 \quad x = 3 \quad M_D = -23$$

$$T_{CD} = -2,33$$

ب - القوى القاطعة :

❖ المجال ED

أ - العزوم :

$$M_{ED} = -6(3+x) + 8,33x$$

$$M_{ED} = 2,33x - 18$$

$$x = 0 \quad M_E = -18 \quad x = 3 \quad M_D = -11$$

$$T_{ED} = -2,33$$

ب - القوى القاطعة :

❖ المجال FE

أ - العزوم :

$$M_{FE} = -6x$$

$$x = 0 \quad M_F = 0 \quad x = 3 \quad M_E = -18$$

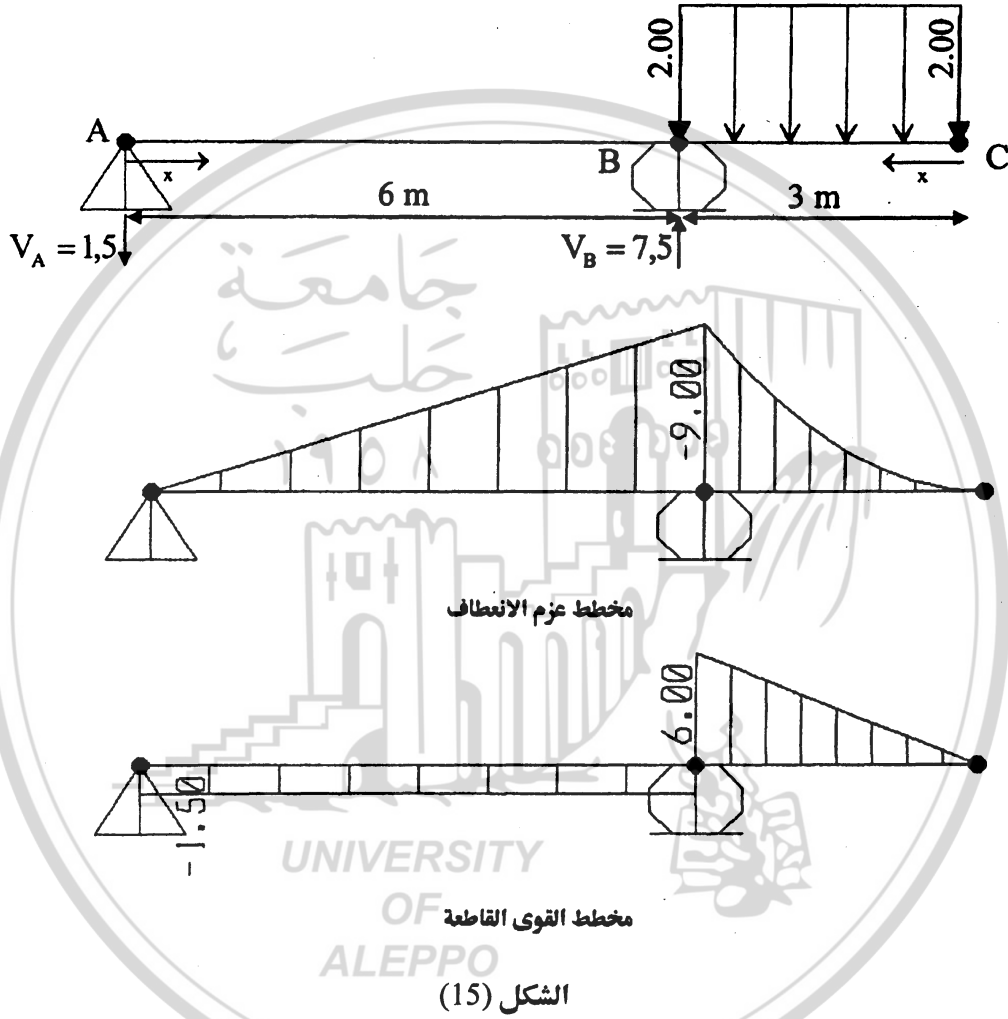
$$T_{EF} = 6$$

ب - القوى القاطعة :

وبين الشكل (14) المخططات المعنية .

مثال (15) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (15) حيث A مسند ثابت ، و B مسند بسيط والحمولة موزعة بانتظام شدتها $2t/m$ والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



الحل :

1- ردود الأفعال :

$$H_A = 0$$

بالإسقاط على x

$$-6V_A + (6)(1,5) = 0$$

بأخذ العزوم حول B نجد :

$$V_A = 1,5t$$

ومنه :

$$-1,5 - 6 + V_B = 0$$

وبالإسقاط على y

$$V_B = 7,5t$$

فنجد

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

المجال AB ❖

أ - العزوم

$$M_{AB} = -1,5x$$

$$x = 0$$

$$M_A = 0$$

$$x = 6$$

$$M_B = -9$$

$$T_{AB} = -1,5$$

ب - القوى القاطعة :

المجال CB ❖

أ - العزوم

$$M_{CB} = -x^2$$

• قيم العزم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0$$

$$M_C = 0$$

$$x = 3$$

$$M_B = -9$$

$$-x^2 = 0$$

• مواقع انعدام العزم :

$$x = 0$$

ومنه :

$$M'_{CB} = -2x = 0$$

• القيمة العظمى للعزم :

$$x = 0$$

ومنه :

$$M_{CB} = 0$$

$$M''_{CB} = -2$$

• اتجاه التقعر :

فالتقعر يتجه نحو الأعلى دوماً .

$$T_{CB} = 2x$$

ب - القوى القاطعة :

$$x = 0$$

$$T_C = 0$$

$$x = 3$$

$$T_B = 6$$

وبين الشكل (15) المخططات المعنية .

مثال (16):

لدينا الجائز المبين بالشكل (16) حيث A مسند ثابت ، و D مسند بسيط، والحمولة الموزعة بانتظام شدتها $2t/m$ والعزم المطبق $12t.m$ والمطلوب :

إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .

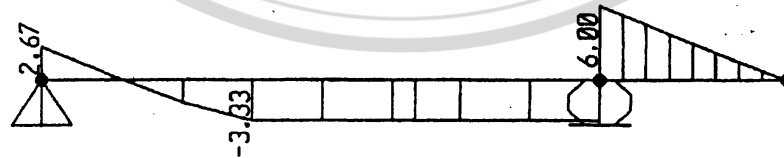
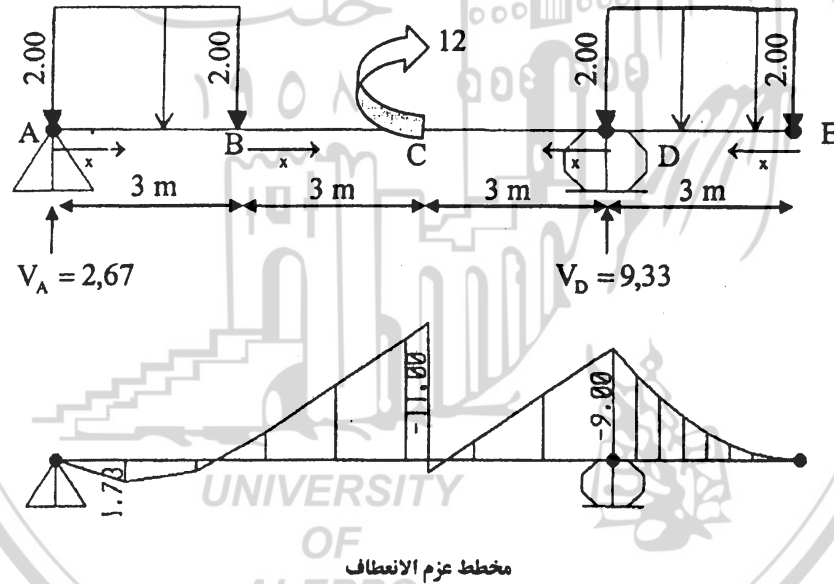
الحل :

1- ردود الأفعال :

$$H_A = 0$$

بالإسقاط على x

$$9V_A - (6)(7,5) + 12 + (6)(1,5) = 0 \text{ يكون } D$$



مخطط القوى القاطعة

الشكل (16)

$$V_A = 2,67 \text{ t} \quad \text{ومنه :}$$

وبالإسقاط على y نجد :

$$2,67 - 6 + V_D - 6 = 0$$

$$V_D = 9,33 \text{ t} \quad \text{فنجد :}$$

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

المجال AB

$$M_{AB} = 2,67x - x^2 \quad \text{أ - العزوم}$$

• قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad M_A = 0 \quad x = 3 \quad M_B = -1$$

• مواقع انعدام العزم :

$$2,67x - x^2 = 0$$

فالعزم معدوم عند كل من الموقعين

$$x = 0 \quad x = 2,67$$

• القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{AB} = 2,67 - 2x = 0$$

$$x = 1,33$$

فيبلغ العزم عند الموقع

$$M_{AB} = 1,78$$

قيمتها العظمى وقدرها

$$M''_{AB} = -2$$

• اتجاه التقعر

فاتجاه التقعر هو دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{AB} = 2,67 - 2x$$

$$x = 0 \quad T_A = 2,67 \quad x = 3 \quad T_B = -3,33$$

المجال BC ❖

أ - العزوم

$$M_{BC} = 2,67(x + 3) - 6(x + 1,5)$$

$$M_{BC} = -3,33x - 1$$

$$x = 0 \quad M_B = -1 \quad x = 3 \quad M_C = -11$$

$$T_{BC} = -3,33$$

ب - القوى القاطعة :

المجال DC ❖

أ - العزوم

$$M_{DC} = -6(x + 1,5) + 9,33x$$

$$M_{DC} = 3,33x - 9$$

$$x = 0 \quad M_D = -9 \quad x = 3 \quad M_C = 1$$

$$T_{DC} = -3,33$$

ب - القوى القاطعة :

المجال ED ❖

أ - العزوم

$$M_{ED} = -x^2$$

● القيم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad M_E = 0 \quad x = 3 \quad M_D = -9$$

$$-x^2 = 0$$

● مواقع انعدام العزم :

$$x = 0$$

ومنه :

● القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{ED} = -2x = 0$$

$$x = 0 \quad M_{ED} = 0$$

ومنه :

$$M''_{ED} = -2$$

● اتجاه التقعر :

أي أن اتجاه التقعر هو دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة

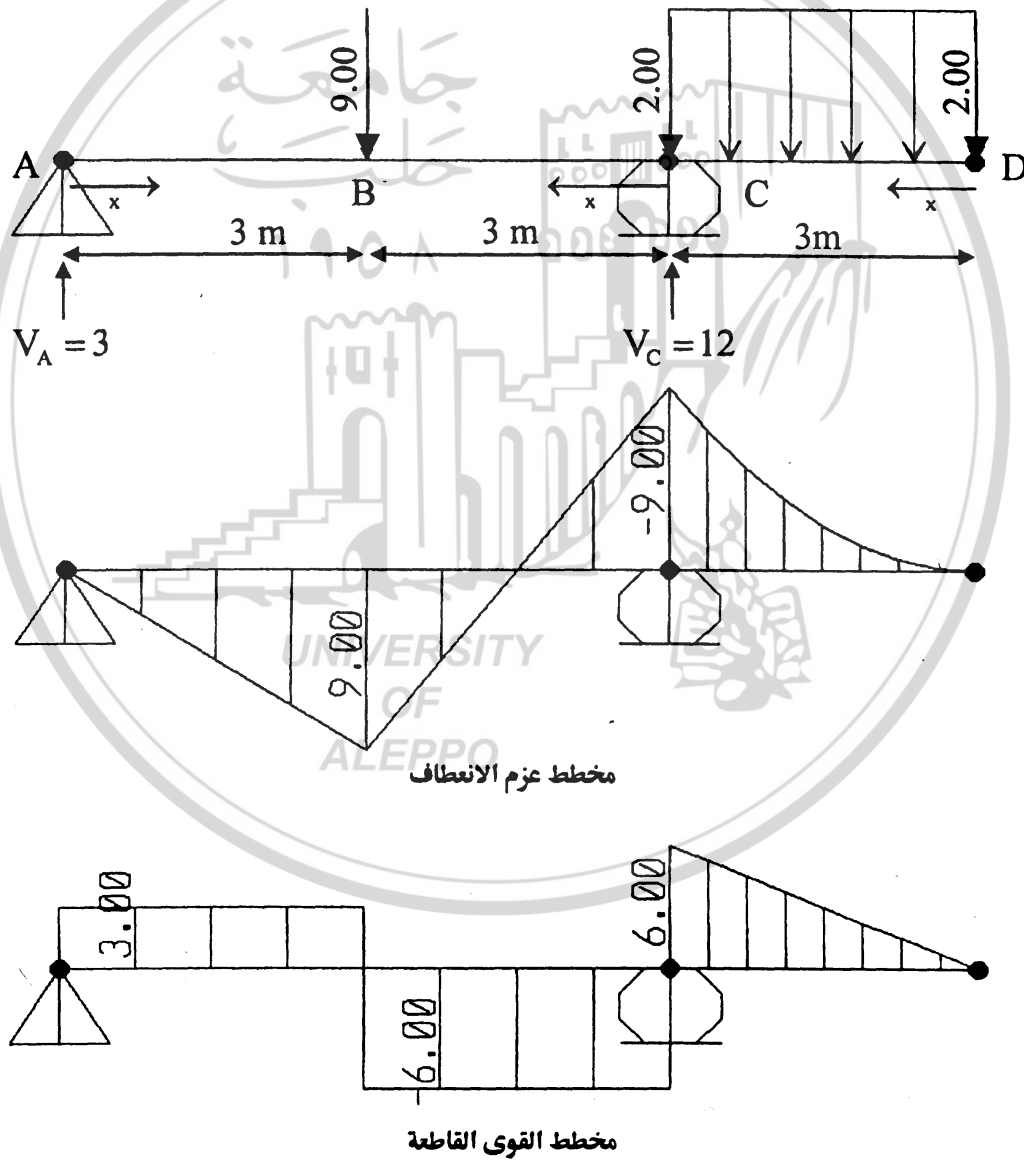
$$T_{ED} = 2x$$

$$x = 0 \quad T_E = 0 \quad x = 3 \quad T_D = 6$$

وبين الشكل (16) المخططات المعنية .

مثال (17) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (17) حيث A مسند ثابت ، C مسند بسيط والحمولة الموزعة بانتظام شدتها $2t/m$ والمطلوب : إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



الشكل (17)

الحل :

1- ردود الأفعال :

$$H_A = 0$$

بالإسقاط على x نجد :

وبأخذ العزوم حول C يكون :

$$6V_A - (9)(3) + (6)(1,5) = 0$$

$$V_A = 3t$$

ومنه :

بالإسقاط على y نجد :

$$3 - 9 + V_C - 6 = 0$$

$$V_C = 12t$$

ومنه نجد :

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

المجال AB

أ - العزوم

$$M_{AB} = 3x$$

$$x = 0$$

$$M_A = 0$$

$$x = 3$$

$$M_B = 9$$

$$T_{AB} = 3$$

ب - القوى القاطعة

المجال CB

أ - العزوم :

$$M_{CB} = -6(1,5 + x) + 12x$$

$$M_{CB} = 6x - 9$$

$$x = 0$$

$$M_C = -9$$

$$x = 3$$

$$M_B = 9$$

$$T_{CB} = -6$$

ب - القوى القاطعة

المجال DC

أ - العزوم :

$$M_{DC} = -x^2$$

• قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad M_D = 0 \quad x = 3 \quad M_C = -9$$

• مواقع انعدام العزم

$$-x^2 = 0$$

$$x = 0$$

ومنه :

• القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{DC} = -2x = 0$$

ومنه :

$$x = 0$$

$$M_{DC} = 0_{\max}$$

• اتجاه التقعر :

$$M''_{DC} = -2$$

فاتجاه التقعر دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{DC} = 2x$$

$$x = 0$$

$$T_D = 0$$

$$x = 3$$

$$T_C = 6$$

وبين الشكل (17) المخططات المعنية .

مثال (18) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (18) حيث توجد في A وثاقة والحمولة الموزعة بانتظام

شدتها $2t/m$ والمطلوب :

إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .

الحل :

1- ردود الأفعال :

$$H_A = 0$$

بالإسقاط على x

وبالإسقاط على y نجد :

$$V_A - 6 - 1 = 0$$

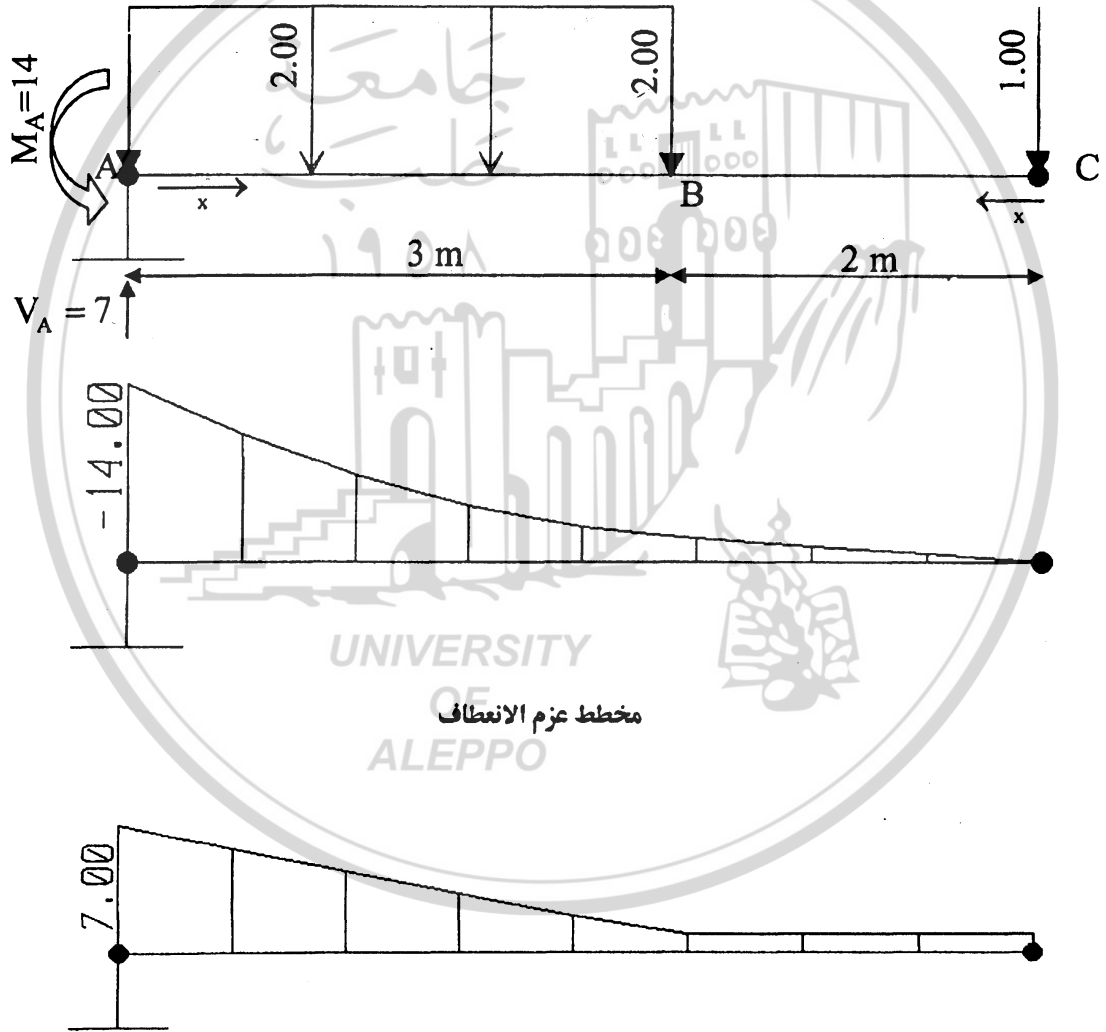
$$V_A = 7t$$

ومنه :

$$-M_A + (6)(1,5) + (1)(5) = 0 \text{ : بأخذ العزوم حول A نجد :}$$

$$M_A = 14t.m$$

ومنه نجد :



مخطط عزوم الانعطاف

مخطط القوى القاطعة

الشكل (18)

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

❖ المجال AB :

أ - العزوم :

$$M_{AB} = -x^2 + 7x - 14$$

● القيم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad M_A = -14 \quad x = 3 \quad M_B = -2$$

● مواقع انعدام العزم : $-x^2 + 7x - 14 = 0$

بحل هذه المعادلة نجد أن جذورها تمثل مواقع خارج المجال AB وعليه فلا يوجد ضمن هذا المجال مواقع ينعدم فيها العزم .

● القيمة العظمى للعزم : $M'_{AB} = -2x + 7 = 0$

$$x = 3,5 \quad \text{ومنه :}$$

وهذا يمثل موقعاً خارج المجال AB وعليه فالقيمة العظمى للعزم تقع خارج المجال المدرس .

● اتجاه التقعر : $M''_{AB} = -2$

أي أن اتجاه التقعر نحو الأعلى دوماً .

ب - القوى القاطعة : $T_{AB} = -2x + 7$

$$x = 0 \quad T_A = 7 \quad x = 3 \quad T_B = 1$$

❖ المجال BC

أ - العزوم :

$$M_{CB} = -x$$

$$x = 0 \quad M_C = 0 \quad x = 2 \quad M_B = -2$$

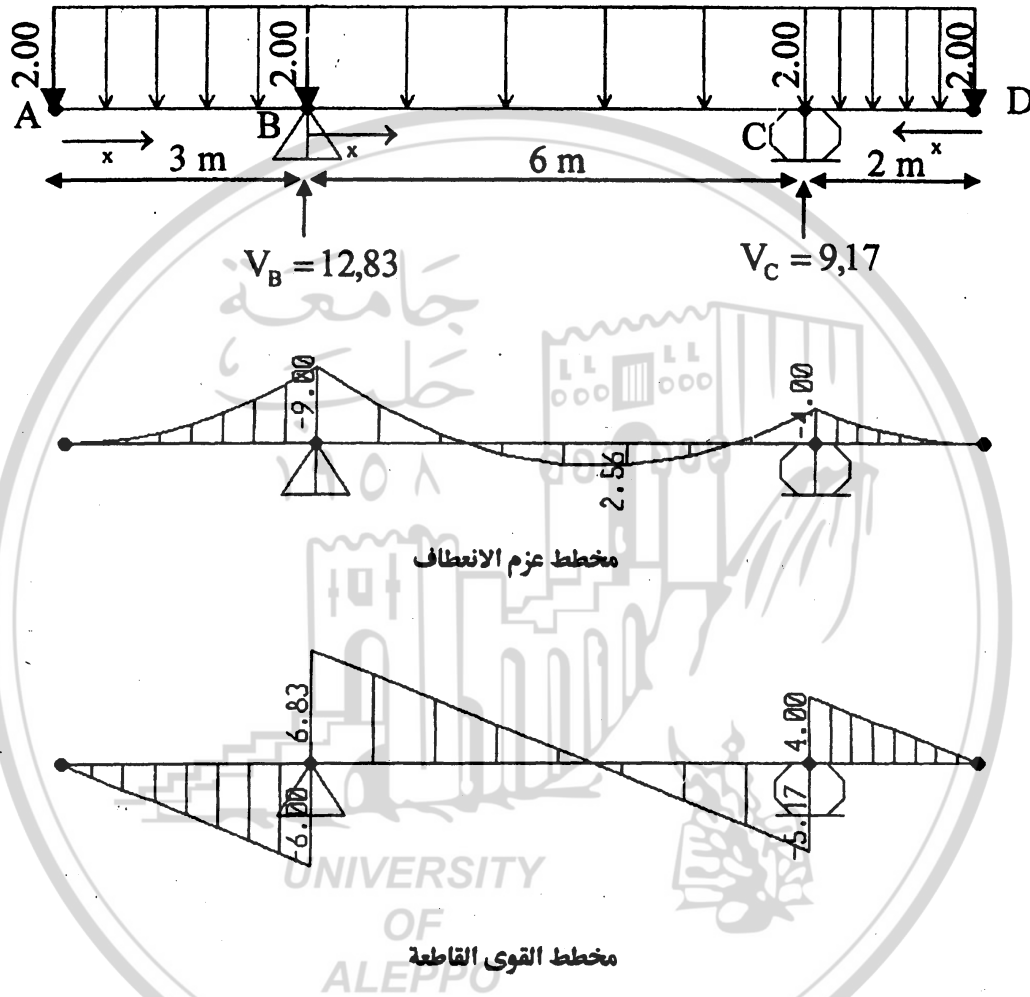
ب - القوى القاطعة : $T_{CB} = 1$

وبين الشكل (18) المخططات المعنية .

مثال (19) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (19) حيث B مسند ثابت و C مسند بسيط والحمولة الموزعة بانتظام $2t/m$ والمطلوب :

إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



الشكل (19)

الحل :

1- ردود الأفعال :

$$H_B = 0$$

بالإسقاط على x

بأخذ العزوم حول C نجد :

$$6V_B - (22)(3.5) = 0$$

ومنه نجد :

$$V_B = 12,83$$

بالإسقاط على y نجد :

$$12,83 - 22 + V_C = 0$$

$$V_C = 9,17$$

ومنه نجد :

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

المجال AB

أ - العزوم :

$$M_{AB} = -x^2$$

• قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad M_A = 0$$

$$x = 3 \quad M_B = -9$$

$$-x^2 = 0$$

• مواقع انعدام العزم :

$$x = 0$$

ومنه :

• القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{AB} = -2x = 0$$

$$x = 0 \quad M_{AB} = 0$$

ومنه :

$$M''_{AB} = -2$$

• اتجاه التقعر :

فالتقعر يتجه دوماً نحو الأعلى .

$$T_{AB} = -2x$$

ب - القوى القاطعة :

$$x = 0 \quad T_A = 0 \quad x = 3 \quad T_B = -6$$

المجال BC

أ - العزوم :

$$M_{BC} = -6(x + 1,5) + 12,83x - x^2$$

$$M_{BC} = -x^2 + 6,83x - 9$$

• قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad M_B = -9 \quad x = 6 \quad M_C = -4$$

• مواقع انعدام العزم : $-x^2 + 6,83x - 9 = 0$

$$x_1 = 1,78 \quad x_2 = 5,04 \quad \text{ومنه :}$$

• القيمة العظمى للعزم : $M'_{BC} = -2x + 6,83 = 0$

ومنه يأخذ العزم قيمته العظمى عند الموقع : $x = 3,42$

$$M_{BC} = 2,66 \quad \text{وقدرها :}$$

• اتجاه التقعر : $M''_{BC} = -2$

فالتقعر يتجه دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة : $T_{BC} = -2x + 6,83$

$$x = 0 \quad T_B = 6,83 \quad x = 6 \quad T_C = -5,17$$

❖ المجال DC

أ - العزوم : $M_{DC} = -x^2$

• قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال

$$x = 0 \quad M_D = 0 \quad x = 2 \quad M_C = -4$$

• مواقع انعدام العزم : $-x^2 = 0$

ومنه : $x = 0$

• القيمة العظمى للعزم : $M'_{DC} = -2x = 0$

$$x = 0 \quad M_{DC} = 0 \quad \text{ومنه :}$$

• اتجاه التقعر : $M''_{DC} = -2$

فالتقعر يتجه دوماً نحو الأعلى .

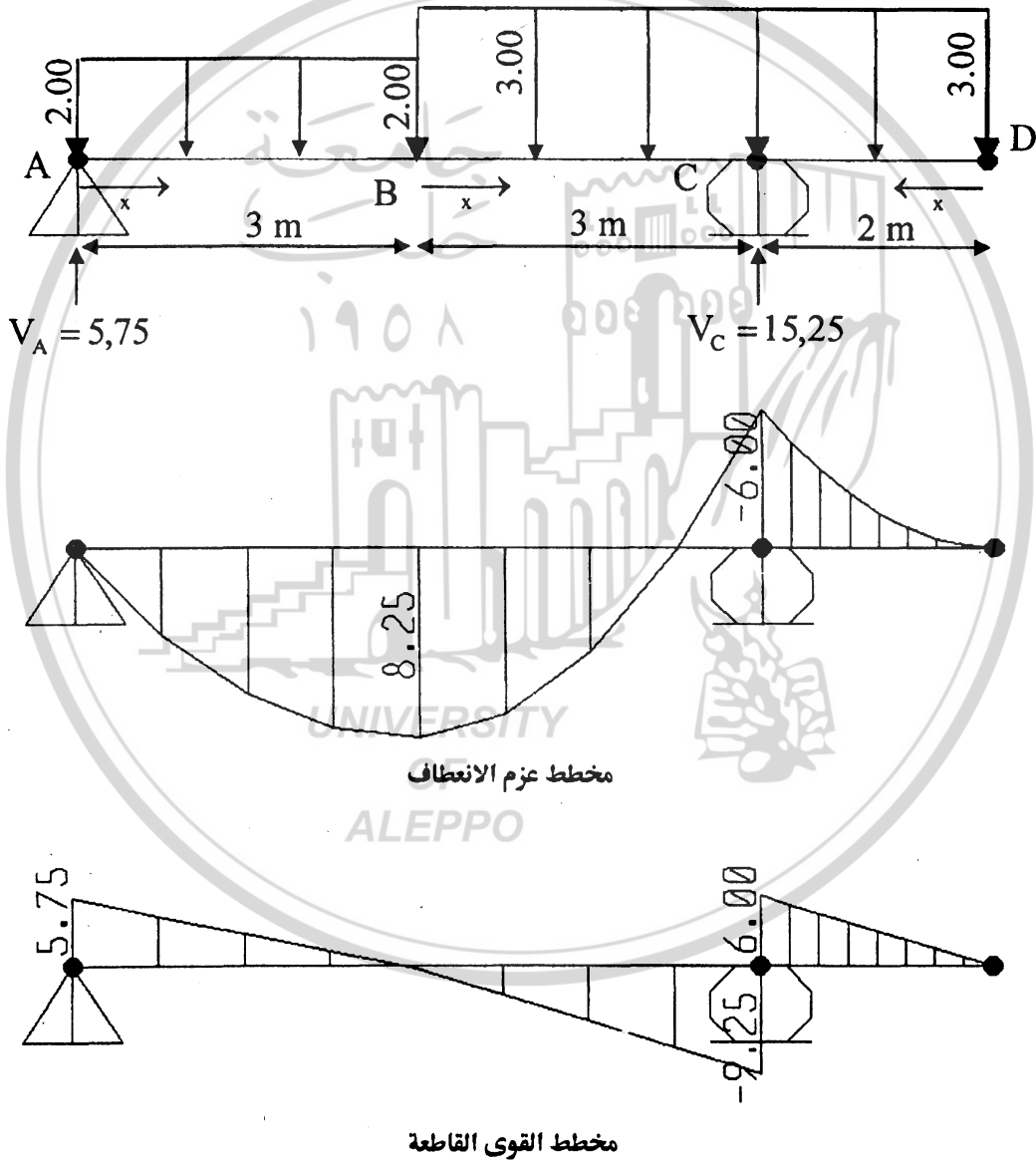
ب - القوى القاطعة : $T_{DC} = 2x$

$$x = 0 \quad T_D = 0 \quad x = 2 \quad T_D = 4$$

وبين الشكل (19) المخططات المعنية .

مثال (20) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (20) حيث A مسند ثابت و C مسند بسيط ويبلغ مقدار الحمولة الموزعة بانتظام على الجزء AB $2t/m$ وعلى الجزء BD $3t/m$ والمطلوب : إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



الشكل (20)

الحل :

1- ردود الأفعال :

$$H_A = 0$$

بالإسقاط على x

$$6V_A - (6)(4,5) - (15)(0,5) = 0$$

بأخذ العزوم حول C نجد :

$$V_A = 5,75t$$

ومنه :

$$5,75 - 6 - 15,4 + V_C = 0$$

وبالإسقاط على y نجد :

$$V_C = 15,25t$$

ومنه نجد :

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

المجال AB

$$M_{AB} = 5,75x - x^2$$

أ - العزوم

● قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0$$

$$M_A = 0$$

$$x = 3$$

$$M_B = 8,25$$

● مواقع انعدام العزم :

$$5,75x - x^2 = 0$$

وللمعادلة جذران هما :

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 5,75$$

أما الموقع الثاني فمرفوض لأنه يقع خارج المجال AB

● القيمة العظمى للعزم

$$M'_{AB} = 5,75 - 2x = 0$$

فيأخذ العزم قيمته العظمى عند الموقع $x = 2,88$

$$M_{AB} = 8,27$$

وقدرها :

$$M''_{AB} = -2$$

● اتجاه التقعر

فالتقعر متجه نحو الأعلى دوماً .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{AB} = 5,75 - 2x$$

$$x = 0 \quad T_A = 5,75 \quad x = 3 \quad T_B = -0,25$$

❖ المجال BC

أ - العزوم :

$$M_{BC} = 5,75(x + 3) - 6(1,5 + x) - 1,5x^2$$

$$M_{BC} = -1,5x^2 - 0,25x + 8,25$$

• قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad M_B = 8,25 \quad x = 3 \quad M_C = -6$$

• مواقع انعدام العزم :

$$-1,5x^2 - 0,25x + 8,25 = 0$$

وللمعادلة جذران يمثلان الموقعين :

$$x_1 = -2,43 \quad x_2 = 2,26$$

أما الموقع الأول فمرفوض لأنه يقع خارج المجال BC .

• القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{BC} = -3x - 0,25 = 0$$

$$x = -0,083 \quad \text{ومنه :}$$

وهذا يمثل موقعاً خارج المجال، وعليه فلا يوجد للعزم قيمة عظمى ضمن هذا

المجال.

• اتجاه التقعر :

$$M''_{BC} = -3$$

والتقعر يتجه نحو الأعلى دوماً .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{BC} = -3x - 0,25$$

$$x = 0 \quad T_B = -0,25 \quad x = 3 \quad T_C = -9,25$$

المجال DC

$$M_{DC} = -1,5x^2 \quad \text{أ - العزوم :}$$

• قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال

$$x = 0 \quad M_D = 0 \quad x = 2 \quad M_C = -6$$

• مواقع انعدام العزم :

$$-1,5x^2 = 0$$

$$x = 0$$

ومنه :

• القيمة العظمى للعزم

$$M'_{DC} = -3x = 0$$

$$x = 0$$

$$M_{DC} = 0$$

max

$$M''_{DC} = -3$$

• اتجاه التقعر :

فالتقعر يتجه دوماً نحو الأعلى .

$$T_{DC} = 3x$$

ب - القوى القاطعة

$$x = 0$$

$$T_D = 0$$

$$x = 2$$

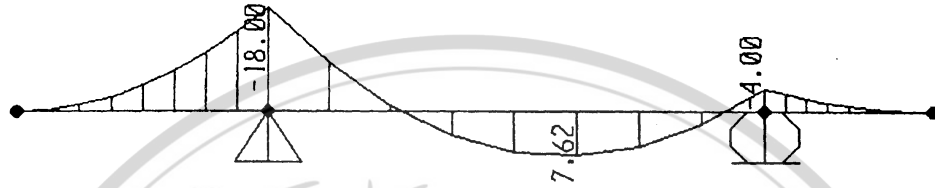
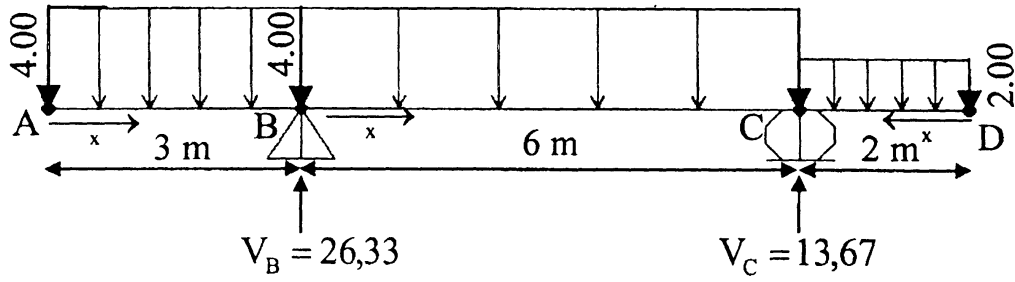
$$T_C = 6$$

وبين الشكل (20) المخططات المعنية .

مثال (21) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (21) حيث B مسند ثابت ، C مسند بسيط ويخضع الجزء AC لحمولة موزعة بانتظام شدتها 4 t/m وكذلك الجزء CD لحمولة موزعة بانتظام مقدارها 2 t/m والمطلوب :

إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



مخطط عزوم الانعطاف

مخطط القوى القاطعة

الشكل (21)

الحل :

1- ردود الأفعال :

بالإسقاط على X نجد

$$H_B = 0$$

بأخذ العزوم حول C نجد :

$$-(36)(4,5) + 6V_B + (4)(1) = 0$$

$$V_B = 26,33 \text{ t}$$

وبالإسقاط على Y نجد :

$$-36 + 26,33 + V_C - 4 = 0$$

$$V_C = 13,67 \text{ t}$$

فنجد :

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

المجال AB ❖

أ - العزوم : $M_{AB} = -2x^2$

• قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$x = 0 \quad M_A = 0 \quad x = 3 \quad M_B = -18$

• مواقع انعدام العزم : $-2x^2 = 0$

$x = 0$ ومنه :

• القيمة العظمى للعزم :

$M'_{AB} = -4x = 0$
 $x = 0 \quad M_{AB} = 0$
 M_{AB}^{max} ومنه :

• اتجاه التقعر : $M''_{AB} = -4$

فالتقعر يتجه نحو الأعلى دوماً .

ب - القوى القاطعة : $T_{AB} = -4x$

$x = 0 \quad T_A = 0 \quad x = 3 \quad T_B = -12$

المجال BC ❖

أ - العزوم :

$M_{BC} = -(12)(1,5 + x) + 26,33x - 2x^2$

$M_{BC} = -2x^2 + 14,33x - 18$

• قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$x = 0 \quad M_B = -18 \quad x = 6 \quad M_C = -4$

• مواقع انعدام العزم :

$-2x^2 + 14,33x - 18 = 0$

ومنه :

$$x_1 = 1,62 \quad x_2 = 5,54$$

وعليه فينعدم العزم عند كل من هذين الموقعين .

● القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{BC} = -4x + 14,33 = 0$$

فيبلغ العزم قيمته العظمى عند الموقع $x = 3,58$

وقدرها :

$$M_{BC} = 7,62$$

● اتجاه التقعر :

$$M''_{BC} = -4$$

فالتقعر يتجه دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{BC} = -4x + 14,33$$

$$x=0 \quad T_B = 14,33 \quad x=6 \quad T_C = -9,67$$

❖ المجال DC

أ - العزوم :

$$M_{DC} = -x^2$$

● قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال : $M_C = -4$ $x = 2$

$$x=0 \quad M_D = 0$$

● مواقع انعدام العزم :

$$-x^2 = 0$$

$$x = 0$$

ومنه :

● القيمة العظمى للعزم

$$M'_{DC} = -2x = 0$$

$$x = 0$$

$$M_{DC} = 0_{\max}$$

● اتجاه التقعر :

$$M''_{DC} = -2$$

فالتقعر يتجه دوماً نحو الأعلى .

$$T_{DC} = 2x$$

ب — القوى القاطعة :

$$x = 0$$

$$T_D = 0$$

$$x = 2$$

$$T_C = 4$$

وبين الشكل (21) المخططات المعنية .

مثال (22) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (22) حيث B مسند ثابت و D مسند بسيط . ويخضع

الجائز في المجال AB لحمولة موزعة بانتظام شدتها 2 t/m وفي C لمزدوجة مقدارها 12t.m والمطلوب :

إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .

الحل :

1- ردود الأفعال :

بالإسقاط على x

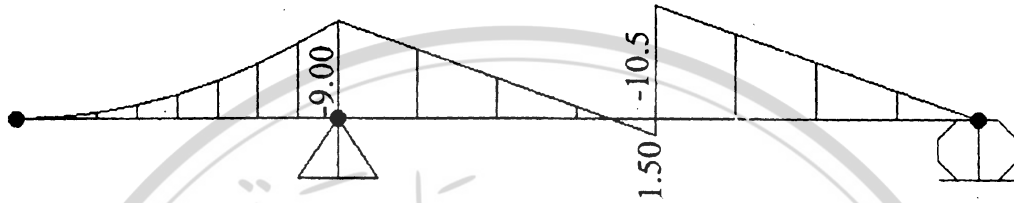
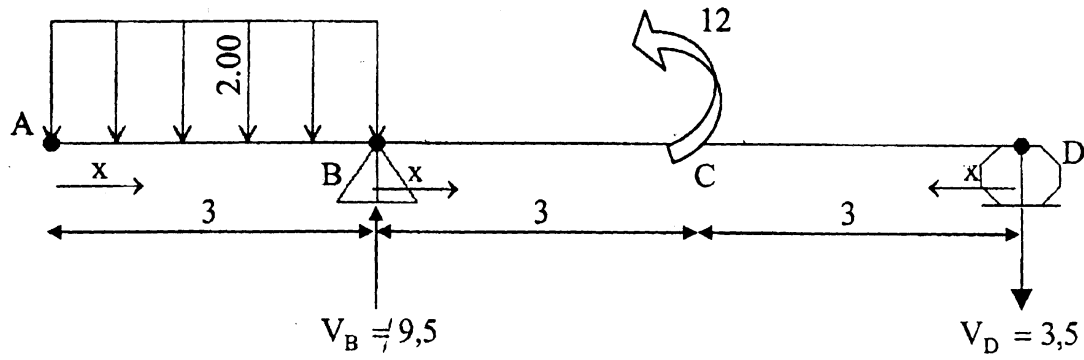
$$H_B = 0$$

بأخذ العزوم حول D يكون :

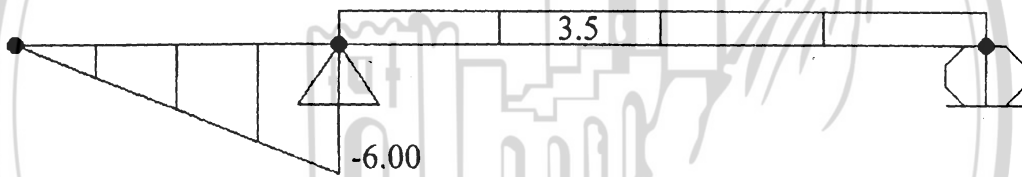
$$-(6)(7,5) + 6V_B - 12 = 0$$

ومنه :

$$V_B = 9,5t$$



مخطط عزوم الانعطاف



مخطط القوى القاطعة

الشكل (22)

وبالإسقاط على y نجد :

$$-6 + 9.5 - V_D = 0$$

ومنه نجد :

$$V_D = 3.5 \text{ t}$$

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

المجال AB ♦

$$M_{AB} = -x^2$$

أ - العزوم :

• قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad M_A = 0 \quad x = 3 \quad M_B = -9$$

• مواقع انعدام العزم : $-x^2 = 0$

$$x = 0 \quad \text{ومنه :}$$

• القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{AB} = -2x = 0$$

$$x = 0 \quad M_{AB} = 0 \quad \text{ومنه :}$$

• اتجاه التقعر :

$$M''_{AB} = -2$$

فالتقعر يتجه دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{AB} = -2x$$

$$x = 0 \quad T_A = 0 \quad x = 3 \quad T_B = -6$$

❖ المجال BC

أ - العزوم :

$$M_{BC} = -6(1,5 + x) + 9,5x$$

$$M_{BC} = 3,5x - 9$$

$$x = 0 \quad M_B = -9 \quad x = 3 \quad M_C = 1,5$$

$$T_{BC} = 3,5 \quad \text{ب - القوى القاطعة :}$$

❖ المجال DC

أ - العزوم :

$$M_{DC} = -3,5x$$

$$x = 0 \quad M_D = 0 \quad x = 3 \quad M_C = -10,5$$

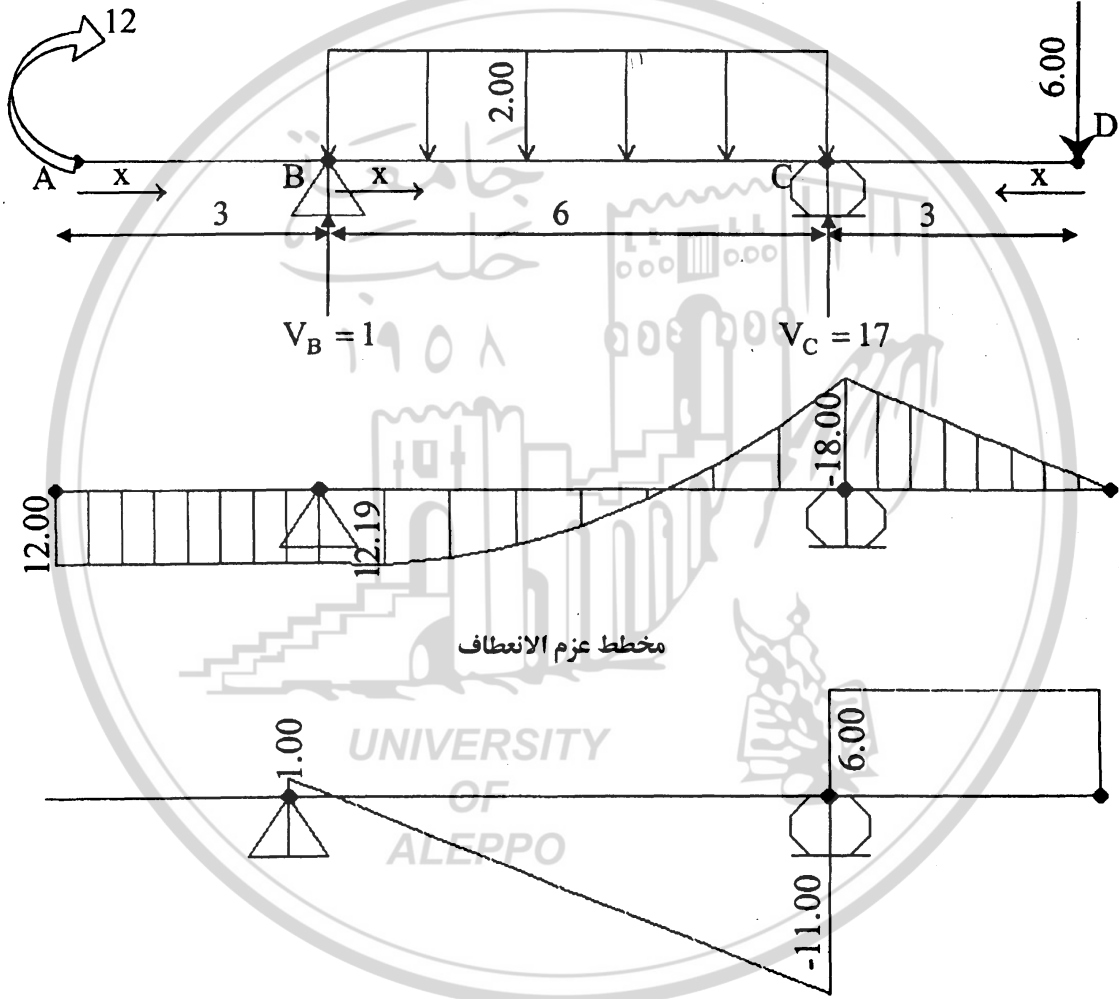
$$T_{DC} = 3,5 \quad \text{ب - القوى القاطعة :}$$

وبين الشكل (22) المخططات المعنية .

مثال (23) :

لدينا الجائز المبين (بالشكل 23) حيث B مسند ثابت و C مسند بسيط والحمولة الموزعة بانتظام شدتها $2t/m$ أما المزدوجة فشدها $12 t.m$ والقوة المركزة قيمتها $6 t$ والمطلوب :

إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



مخطط القوى القاطعة

الشكل (23)

الحل :

1- ردود الأفعال

$$H_B = 0$$

بالإسقاط على x

بأخذ العزوم حول C يكون :

$$12 + 6V_B - (12)(3) + (6)(3) = 0$$

$$V_B = 1t$$

وبالإسقاط على y نجد :

$$1 - 12 + V_C - 6 = 0$$

ومنه نجد :

$$V_C = 17t$$

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

❖ المجال AB

أ - العزوم :

$$M_{AB} = 12$$

ب - القوى القاطعة :

$$T_{AB} = 0$$

❖ المجال BC

أ - العزوم :

$$M_{BC} = 12 + x - x^2$$

● قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad M_B = 12 \quad x = 6 \quad M_C = -18$$

● مواقع انعدام العزم :

$$-x^2 + x + 12 = 0$$

ومنه :

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = -3$$

أما القيمة الثانية فمرفوضة لأنها تقع خارج المجال المدروس .

● القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{BC} = -2x + 1 = 0$$

ومنه يبلغ العزم قيمته العظمى عند الموقع:

$$x = 0,5$$

وقدرها :

$$M_{BC} = 12,2$$

max

$$M''_{BC} = -2$$

● اتجاه التقعر :

فاتجاه التقعر دوماً نحو الأعلى .

❖ المجال DC

أ - العزوم :

$$M_{DC} = -6x$$

$$x = 0$$

$$M_D = 0$$

$$x = 3$$

$$M_C = -18$$

$$T_{BC} = 6$$

ب - القوى القاطعة

وبين الشكل (23) المخططات المعنية .

مثال (24)

لدينا الجائز المبين بالشكل (24) حيث B مسند ثابت ، C مسند بسيط .

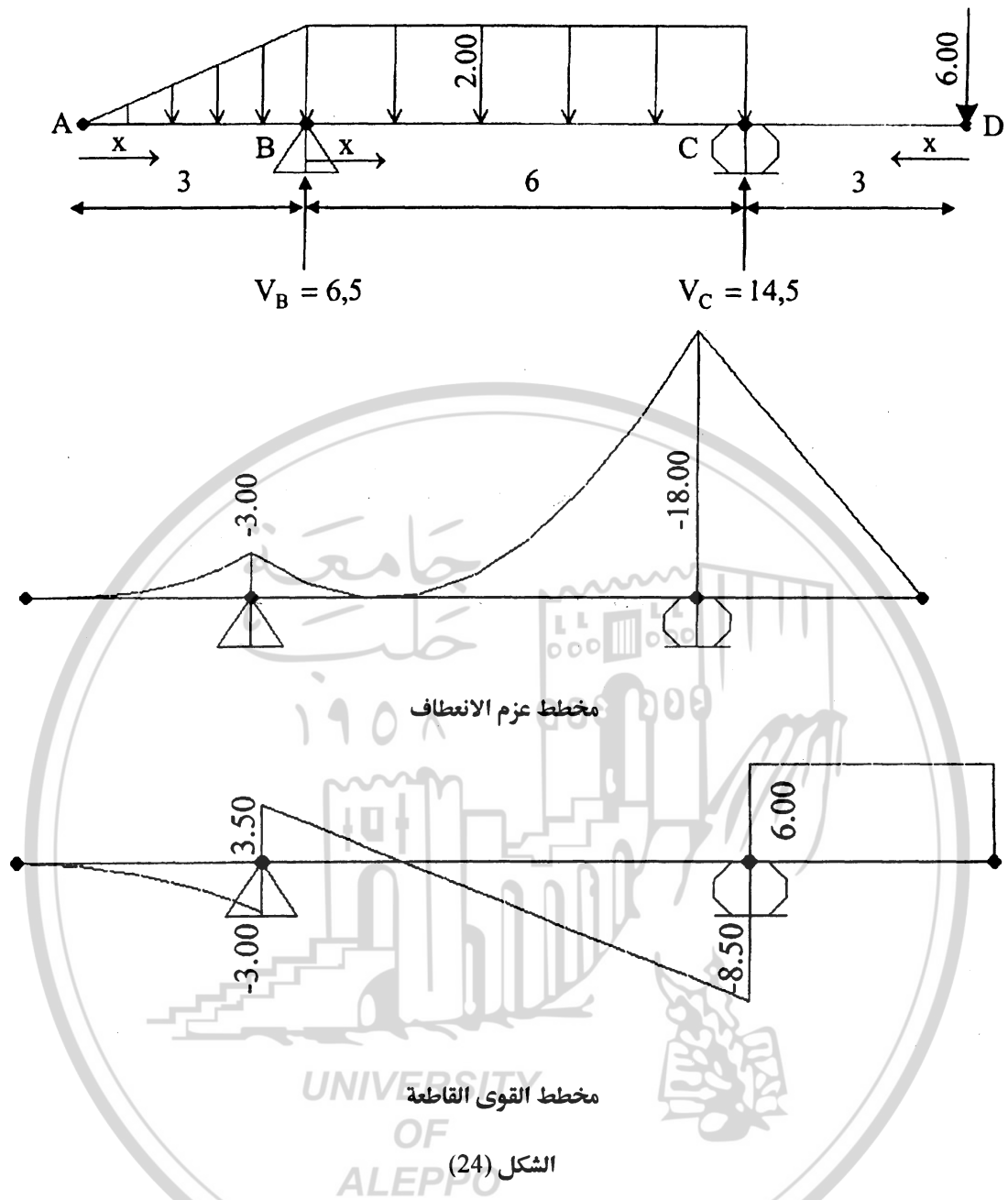
والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .

الحل :

1- ردود الأفعال :

بالإسقاط على X نجد :

$$H_B = 0$$



وبأخذ العزوم حول C يكون :

$$-(3)(7) - (12)(3) + (6)(3) + 6V_B = 0$$

ومنه :

$$V_B = 6,5t$$

ثم بالإسقاط على y نجد :

$$-3 + 6,5 - 12 + V_C - 6 = 0$$

ومنه :

$$V_C = 14,5t$$

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

◇ في المجال AB

أ - العزوم :

$$M_{AB} = -\frac{2}{3}x \frac{x}{2} \frac{x}{3} = -\frac{x^3}{9}$$

❖ قيمة العزم عند بداية ونهاية المجال :

$$x=0 \quad M_A = 0, \quad x=3 \quad M_B = -3$$

❖ مواقع انعدام العزم :

ينعدم العزم عندما :

$$M_{AB} = -\frac{x^3}{9} = 0$$

$$x = 0$$

ومنه :

أي في بداية المجال عند A .

❖ القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{AB} = -\frac{x^2}{3} = 0$$

$$x = 0$$

ومنه

ويكون :

$$M_{AB} = 0$$

❖ اتجاه التقعر :

$$M''_{AB} = -\frac{2x}{3}$$

وحيث إن قيم x في المجال AB المدروس هي دوماً موجبة فيكون المشتق الثاني سالباً دوماً ضمن هذا المجال وبالتالي فاتجاه التقعر دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{AB} = -\frac{x^2}{3}$$

❖ قيم القوى القاطعة عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad T_A = 0, \quad x = 3 \quad T_B = -3$$

❖ مواقع انعدام القوى القاطعة :

$$-\frac{x^2}{3} = 0$$

$$x = 0$$

ومنه :

❖ القيمة العظمى للقوى القاطعة :

$$T'_{AB} = -\frac{2}{3}x = 0$$

ومنه $x = 0$ ويكون

$$T_{AB} = 0$$

❖ اتجاه التقعر :

$$T''_{AB} = -\frac{2}{3}$$

واتجاه التقعر دوماً نحو الأسفل .

◇ المجال BC

أ - العزوم :

$$M_{BC} = -3(1+x) + 6,5x - x^2$$

$$M_{BC} = -x^2 + 3,5x - 3$$

❖ قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$x=0 \quad M_B = -3 \quad x=6 \quad M_C = -18$$

❖ مواقع انعدام العزم :

$$-x^2 + 3,5x - 3 = 0$$

$$x_1 = 1,5 \quad x_2 = 2 \quad \text{ومنه :}$$

❖ القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{BC} = -2x + 3,5 = 0$$

$$M_{BC} = 0,06 \quad \text{ويكون} \quad x = 1,75 \quad \text{ومنه :}$$

❖ اتجاه التقعر

$$M''_{BC} = -2$$

واتجاه التقعر دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{BC} = -2x + 3,5$$

$$x=0 \quad T_B = 3,5 \quad , \quad x=6 \quad T_C = -8,5$$

المجال DC ◇

أ - العزوم

$$M_{DC} = -6x$$

$$x=0 \quad M_D = 0 \quad , \quad x=3 \quad M_C = -18$$

$$T_{DC} = 6$$

ب - القوى القاطعة

وبين الشكل (24) المخططات المعنية .

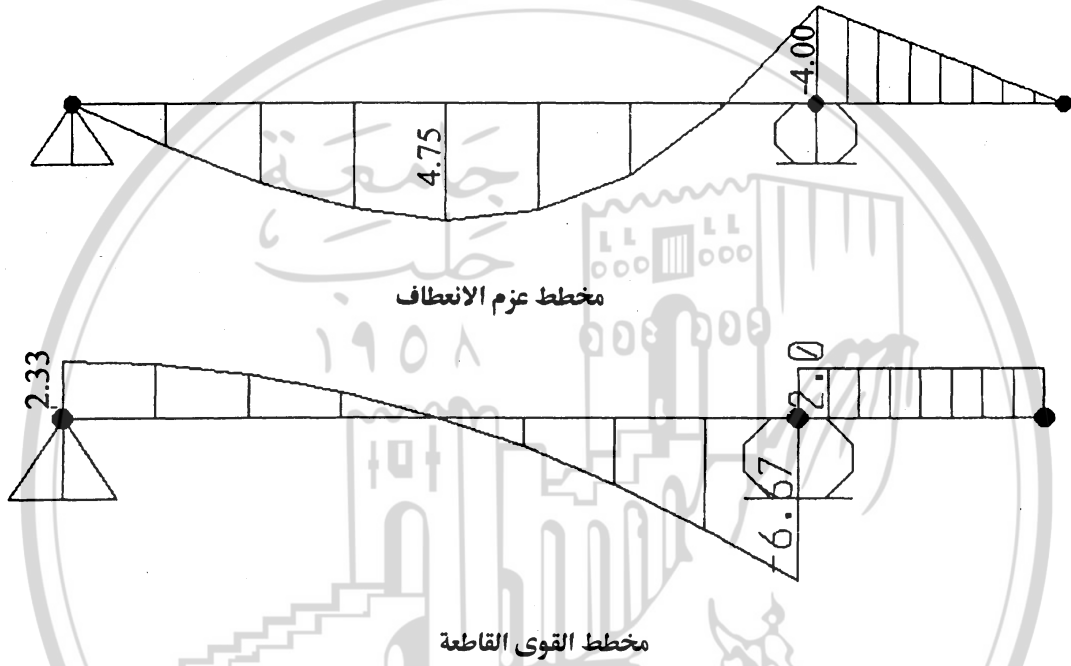
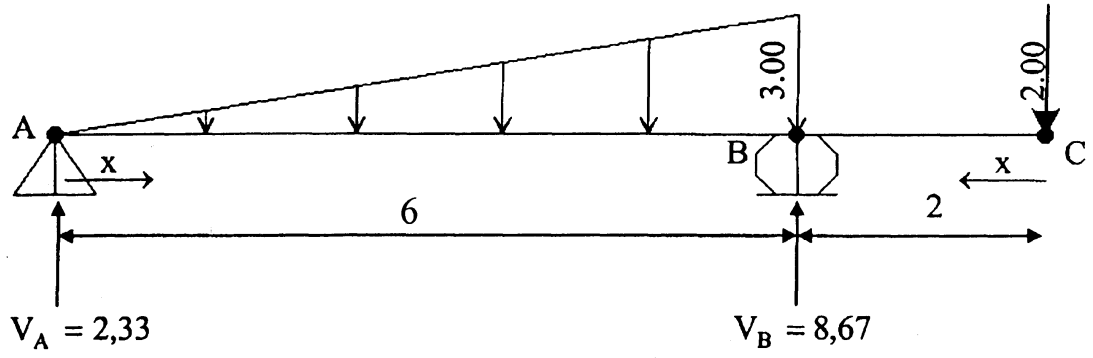
مثال (25) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (25) وهو يخضع لحمولة مثلثية شدتها العظمى 3t/m في

المجال AB ولقوة مركزة في C مقدارها 2t . والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .

الحل :

1- ردود الأفعال :



مخطط عزوم الانعطاف

مخطط القوى القاطعة

الشكل (25)

UNIVERSITY
OF
ALEPPO

بالإسقاط على x نجد :

$$H_A = 0$$

وبأخذ العزوم حول B نجد :

$$6V_A - (9)(2) + (2)(2) = 0$$

$$V_A = 2.33t$$

ومنه :

ثم بالإسقاط على y نجد :

$$2.33 - 9 + V_B - 2 = 0$$

$$V_B = 8.67t$$

ومنه :

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .

المجال AB

أ - العزوم :

$$M_{AB} = -\frac{x^3}{12} + 2,33x$$

العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$M_A = 0 \text{ عندما } x = 0, \quad M_B = -4 \text{ عندما } x = 6$$

مواقع انعدام العزم :

$$-\frac{x^3}{12} + 2,33x = 0$$

ومنه :

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 5,29 \quad x_3 = -5,29$$

أما القيمة الثالثة فمرفوضة لأنها تقع خارج المجال المدروس .

القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{AB} = -\frac{x^2}{4} + 2,33 = 0$$

$$x_1 = 3,05 \quad x_2 = -3,05$$

ومنه :

تُرفض القيمة السالبة لأنها تقع خارج المجال .

ويكون :

$$M_{AB} = 4,75$$

max

اتجاه التقعر :

$$M''_{AB} = -\frac{x}{2}$$

وحيث إن قيم x في المجال المدروس هي دوماً موجبة فيكون المشتق الثاني سالباً ويكون

اتجاه التقعر نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{AB} = -\frac{x^2}{4} + 2,33$$

❖ القوى القاطعة عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad T_A = 2,33 \quad , \quad x = 6 \quad T_B = -6,67$$

❖ مواقع انعدام القوى القاطعة :

$$-\frac{x^2}{4} + 2,33 = 0$$

ومنه :

$$x_1 = +3,05 \quad x_2 = -3,05$$

تُرفض القيمة السالبة لأنها تقع خارج المجال المدروس .

❖ القيمة العظمى للقوى القاطعة :

$$T'_{AB} = -\frac{x}{2} = 0$$

ومنه :

$$x = 0 \quad T_{AB} = 2,33$$

max

❖ اتجاه التقعر :

$$T''_{AB} = -\frac{1}{2}$$

فاتجاه التقعر دوماً نحو الأسفل .

◇ المجال CB

أ - العزوم :

$$M_{CB} = -2x$$

$$x = 0 \quad M_C = 0 \quad , \quad x = 2 \quad M_B = -4$$

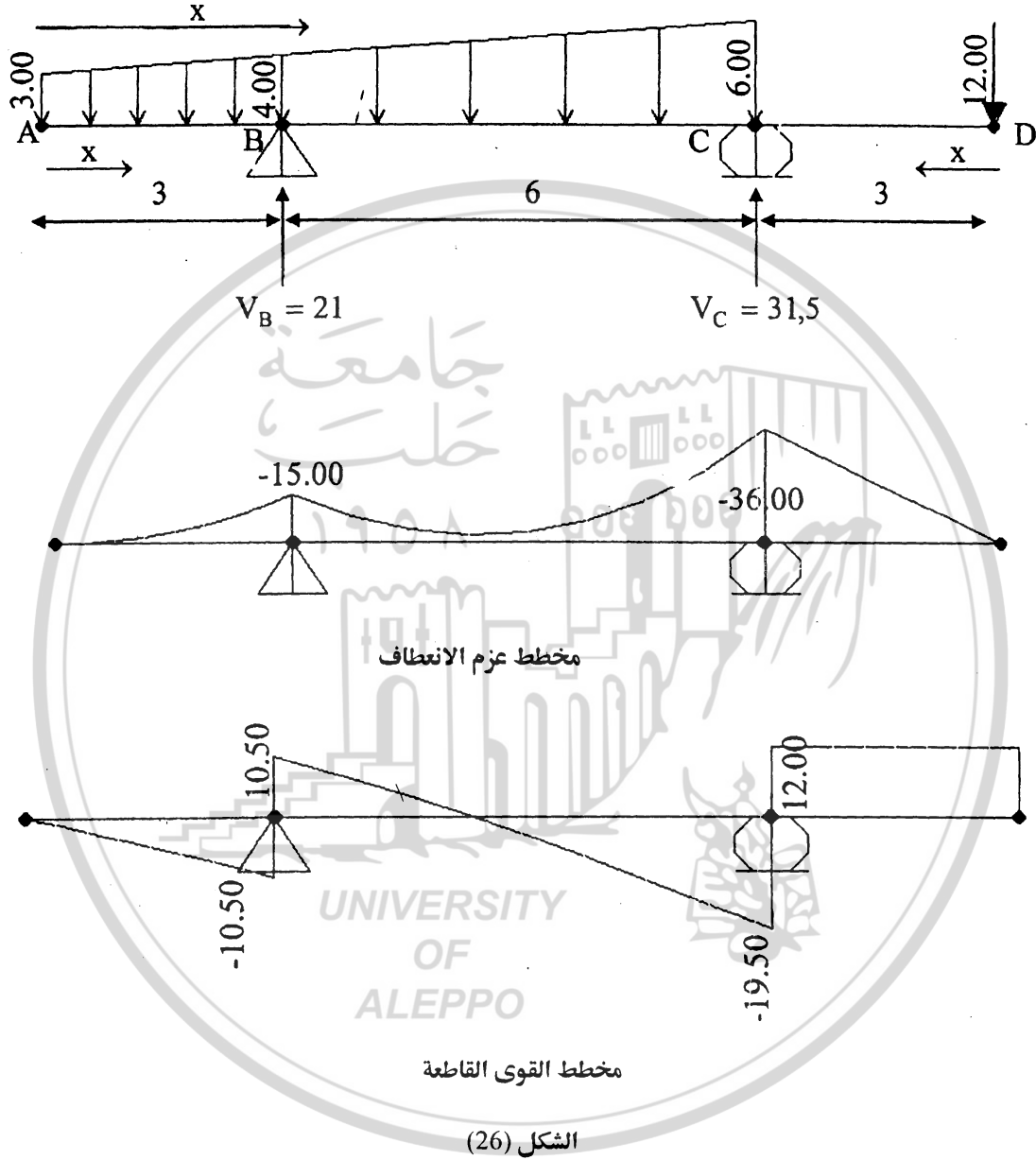
ب - القوى القاطعة :

$$T_{CB} = 2$$

وبين الشكل (25) المخططات المعنية .

مثال (26) :

لدينا الجائر المبين بالشكل (26) حيث B مسند ثابت ، C مسند بسيط .



والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ومخططات وعزوم الانعطاف والقوى القاطعة .

الحل :

1- ردود الأفعال :

بالإسقاط على X نجد :

$$H_B = 0$$

يتم تقسيم حمولة الشبه المنحرف إلى حمولة موزعة بانتظام شدتها $3t/m$ وحمولة
مثلثية شدتها العظمى $3t/m$.

بأخذ العزوم حول C نجد :

$$-(27)(4,5) - (13,5)(3) + 6V_B + (12)(3) = 0$$

ومنه :

$$V_B = 21t$$

ثم بالإسقاط على y نجد :

$$-27 - 13,5 + 21 + V_C - 12 = 0$$

$$V_C = 31,5t$$

ومنه :

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

المجال AB ◇

أ - العزوم :

بتقسيم حمولة شبه المنحرف إلى حمولة موزعة بانتظام وحمولة مثلثية نجد أن
علاقة العزم :

$$M_{AB} = -\frac{x^3}{18} - \frac{3}{2}x^2$$

❖ قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$M_B = -15 \text{ عند } x = 3 \text{ و } M_A = 0 \text{ عند } x = 0$$

❖ مواقع انعدام العزم :

$$-\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{18} = 0$$

ومنه نجد :

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = -27$$

أما القيمة الثالثة فمرفوضة لأنها تقع خارج المجال المدروس .

❖ القيمة العظمى :

$$M'_{AB} = -3x - \frac{x^2}{6} = 0$$

ف نجد أن القيمة العظمى تقع في هذا المجال عندما $x = 0$ ويكون :

$$M_{AB} = 0$$

max

❖ اتجاه التقعر :

$$M''_{AB} = -3 - \frac{x}{3}$$

وحيث إن قيمة x في المجال المدروس هي دوماً موجبة فإن المشتق الثاني ضمن هذا المجال يكون سالباً دوماً واتجاه التقعر دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{AB} = -3x - \frac{x^2}{6}$$

❖ القيم عند بداية ونهاية المجال :

$$T_A = 0 \text{ عند } x = 0, \quad T_B = -10,5 \text{ عند } x = 3$$

❖ نقاط الانعدام :

$$-3x - \frac{x^2}{6} = 0$$

ومنه :

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -18$$

وترفض القيمة الثانية لأنها تقع خارج المجال المدروس .

❖ القيمة العظمى :

$$T'_{AB} = -3 - \frac{x}{3} = 0$$

$$x = -9$$

ومنه :

وبالتالي فلا يوجد قيمة عظمى للقوى القاطعة ضمن هذا المجال .

❖ اتجاه التقعر :

$$T''_{AB} = -3$$

فاتجاه التقعر دوماً نحو الأسفل .

المجال BC ◇

أ - العزوم :

بفرض أن مبدأ الإحداثيات للمحور x في هذا المجال هو A يكون :

$$M_{BC} = -\frac{x^3}{18} - \frac{3}{2}x^2 + 21(x - 3)$$

$$M_{BC} = -\frac{x^3}{18} - \frac{3}{2}x^2 + 21x - 63$$

❖ قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$M_B = -15 \text{ عند } x = 3, \quad M_C = -36 \text{ عند } x = 9$$

❖ نقاط الانعدام :

$$-\frac{x^3}{18} - \frac{3}{2}x^2 + 21x - 63 = 0$$

بحل هذه المعادلة نجد أنه ليس هناك نقاط ينعدم فيها العزم ضمن هذا المجال

❖ القيمة العظمى :

$$M_{BC} = -\frac{x^2}{6} - 3x + 21 = 0$$

$$x_1 = 5,39 \quad x_2 = -23,39 \quad \text{ومنه :}$$

والقيمة الثانية مرفوضة لأنها تقع خارج المجال .

$$M_{BC} = -2,09$$

max

ويكون :

❖ اتجاه التقعر :

$$M''_{BC} = -\frac{x}{3} - 3$$

وحيث إن x تتحول بين $x = +3$ ، $x = +9$ فالمشتق الثاني ضمن هذا المجال يبقى سالباً دوماً وبالتالي فاتجاه التقعر نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{BC} = -\frac{x^2}{6} - 3x + 21$$

❖ القيم عند بداية ونهاية المجال :

$$T_B = 10,5 \text{ عند } x = 3 \quad , \quad T_C = -19,5 \text{ عند } x = 9$$

❖ نقاط الانعدام للقوى القاطعة :

$$-\frac{x^2}{6} - 3x + 21 = 0$$

$$x_1 = 5,39$$

$$x_2 = 23,35$$

ومنه :

والقيمة الثانية مرفوضة لوقوعها خارج المجال المدروس .

❖ القيمة العظمى للقوى القاطعة :

$$T'_{AB} = -\frac{x}{3} - 3 = 0$$

ومنه $x = -9$ وهي خارج المجال المدروس .

وعليه فلا يوجد قيمة عظمى ضمن هذا المجال .

❖ اتجاه التقعر :

$$T''_{AB} = -\frac{1}{3}$$

وهو سالب دوماً وبالتالي فاتجاه التقعر نحو الأسفل .

◇ المجال DC

أ - العزوم :

$$M_{DC} = -12x$$

ويكون :

$$x = 0 \quad M_D = 0, \quad x = 3 \quad M_C = -36$$

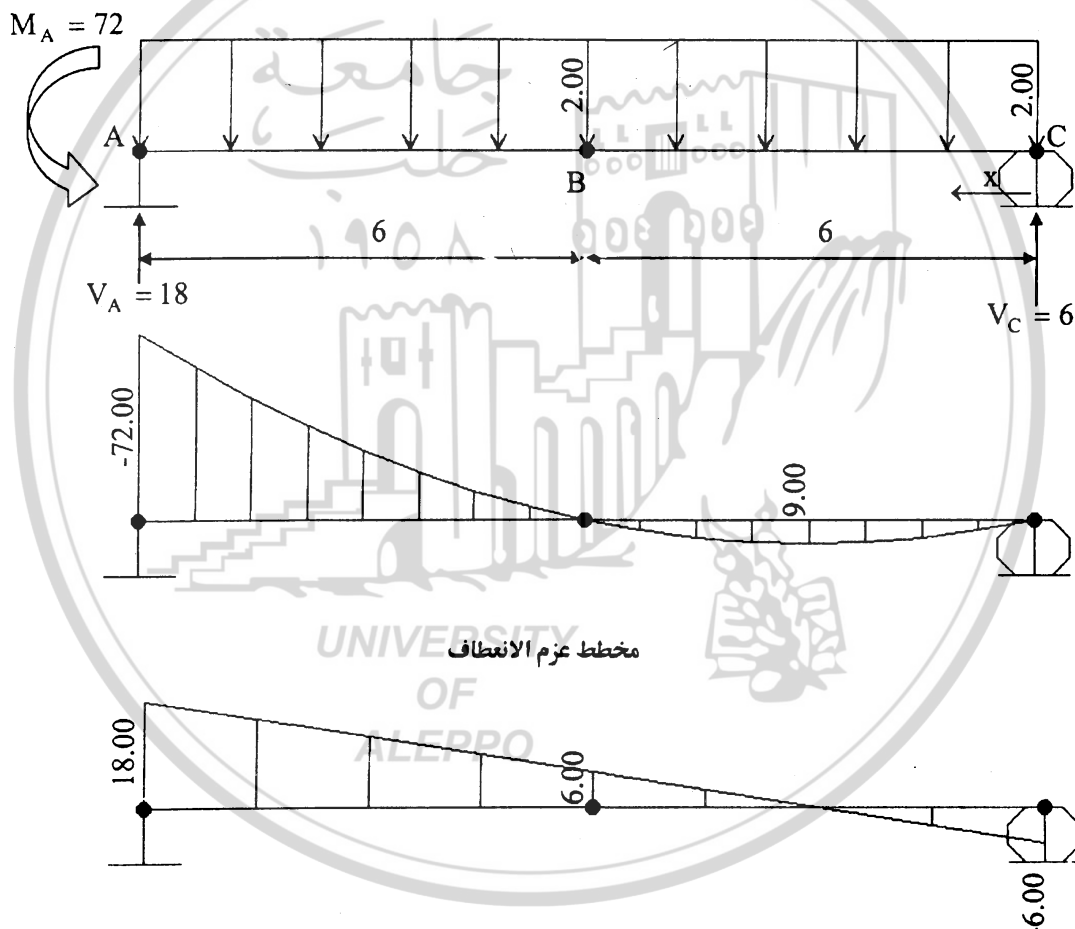
— القوى القاطعة :

$$T_{DC} = 12$$

وبين الشكل (26) المخططات المعنية .

مثال (27) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (27) ، حيث B مفصل داخلي، والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



مخطط القوى القاطعة

الشكل (27)

الحل :

1- ردود الأفعال :

بالإسقاط على x نجد : $H_A = 0$

بعزل الجزء BC وباعتباره بحكم المتناظر يكون :

$$V_C = \frac{(2)(6)}{2} = 6t$$

ثم بالإسقاط على y لكامل الجائز نجد :

$$V_A - 24 + 6 = 0$$

ومنه :

$$V_A = 18t$$

بأخذ العزوم حول A نجد :

$$-M_A + (24)(6) - (6)(12) = 0$$

$$M_A = 72t.m$$

ومنه :

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

أ - العزوم :

بأخذ العزوم للجزء الأيمن يكون :

$$M_{CA} = -x^2 + 6x$$

❖ قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$M_A = -72 \text{ عند } x = 12, \quad M_C = 0 \text{ عند } x = 0$$

❖ مواقع انعدام العزم :

$$-x^2 + 6x = 0$$

ومنه :

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 6$$

أي أن الموقع الثاني لانعدام العزم يقع في المفصل B .

❖ القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{CA} = -2x + 6 = 0$$

وبالتالي يكون :

$$x = 3 \text{ عندما } M_{CA} = 9_{\max}$$

❖ اتجاه التقعر :

$$M''_{CA} = -2$$

فاتجاه التقعر دوماً نحو الأعلى .

ب — القوى القاطعة :

$$T_{CA} = 2x - 6$$

ويكون :

$$x = 0 \quad T_C = -6, \quad x = 12 \quad T_A = 18$$

وبين الشكل (27) المخططات المعنية .

مثال (28) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (28) حيث A مسند ثابت ، تمثل كل من B , E مسنداً بسيطاً ، و C مفصل داخلي والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .

الحل :

1- ردود الأفعال :

$$H_A = 0 \quad \text{بالإسقاط على } x \text{ نجد :}$$

بأخذ العزوم على يمين المفصل C نجد :

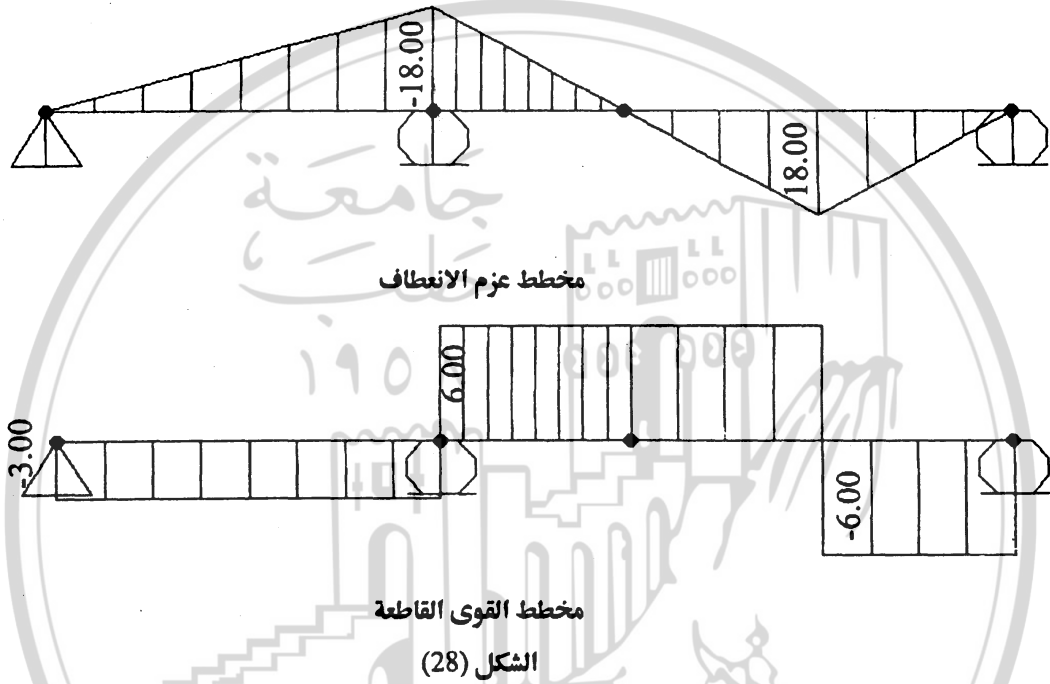
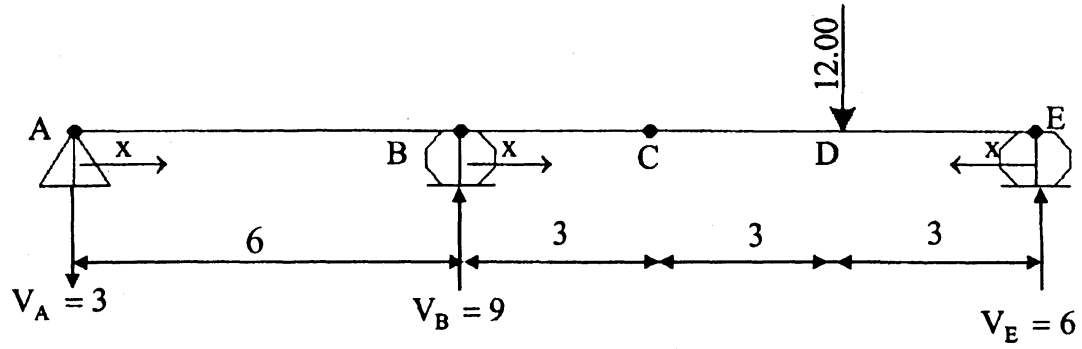
$$-6V_E + (12)(3) = 0$$

ومنه :

$$V_E = 6t$$

وقد كان بالإمكان الحصول على هذه النتيجة مباشرة بفصل الجزء CE واعتباره

بحكم المتناظر .



بأخذ العزوم لكامل الجائز حول A نجد :

$$\sum M_A = 0$$

$$-(6)(15) + (12)(12) - 6V_B = 0$$

$$V_B = 9t$$

ومنه :

ثم بالإسقاط على y نجد :

$$\sum F_y = 0$$

$$-V_A + 9 - 12 + 6 = 0$$

$$V_A = 3t$$

ومنه :

- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

المجال AB ◇

أ - العزوم :

$$M_{AB} = -3x$$

$$x = 0 \quad M_A = 0 \quad , \quad x = 6 \quad M_B = -18$$

ب - القوى القاطعة :

$$T_{AB} = -3$$

المجال BD ◇

أ - العزوم :

$$M_{BD} = -3(6+x) + 9x$$

$$M_{BD} = 6x - 18$$

$$x = 0 \quad , \quad M_B = -18 \quad , \quad x = 6 \quad M_D = +18$$

ب - القوى القاطعة :

$$T_{BD} = 6$$

المجال ED ◇

أ - العزوم :

$$M_{ED} = 6x$$

$$x = 0 \quad M_E = 0 \quad x = 3 \quad M_D = 18$$

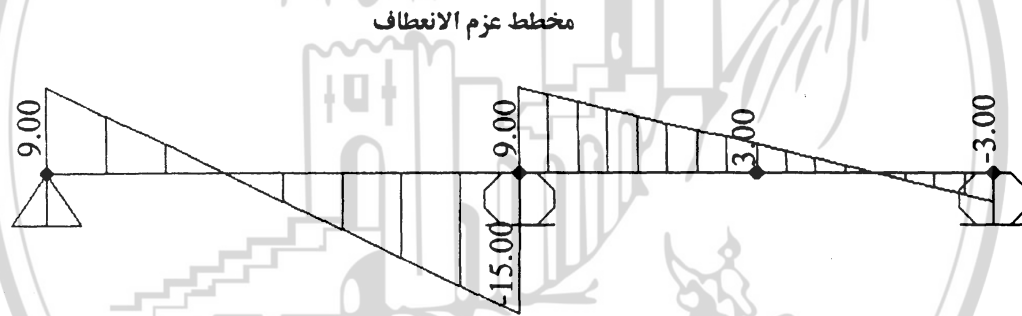
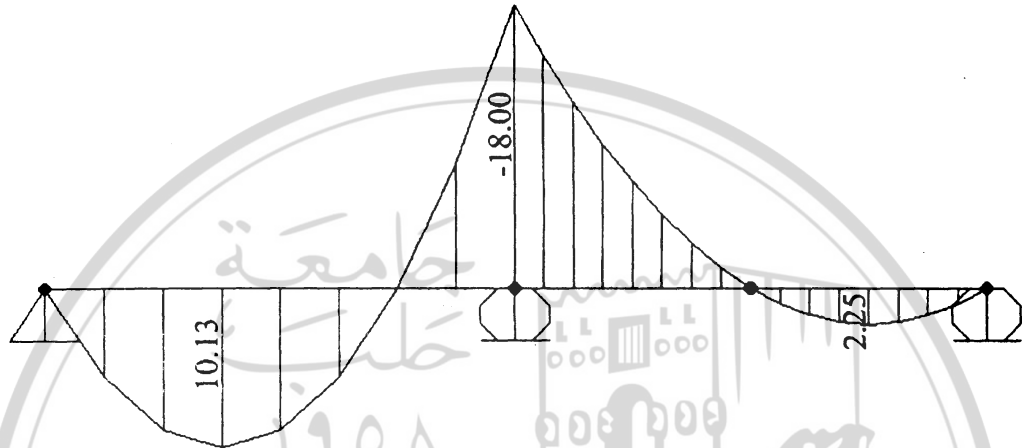
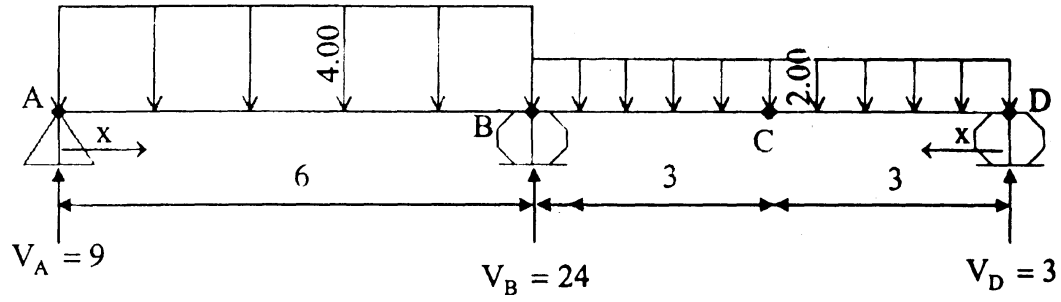
ب - القوى القاطعة :

$$T_{ED} = -6$$

ويبين الشكل (28) المخططات المعنية .

مثال (29) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (29) حيث A مسند ثابت ، وتمثل كل من B , D مسنداً بسيطاً و C مفصل داخلي . والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



مخطط عزم الانعطاف

مخطط القوى القاطعة

الشكل (29)

الحل :

1- ردود الأفعال :

بالإسقاط على x نجد : $H_A = 0$

بفصل الجزء CD وباعتباره بحكم المتناظر نجد :

$$V_D = \frac{(2)(3)}{2} = 3t$$

بأخذ العزوم حول A لكامل الجائز نجد :

$$\sum M_A = 0$$

$$-(3)(12) + (12)(9) - 6V_B + (24)(3) = 0$$

$$V_B = 24t \quad \text{ومنه :}$$

ثم بالإسقاط على y نجد :

$$V_A - 24 + 24 - 12 + 3 = 0$$

$$V_A = 9t \quad \text{ومنه :}$$

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

المجال AB $\diamond$

أ - العزوم :

$$M_{AB} = -2x^2 + 9x$$

❖ قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$M_A = 0 \text{ عند } x = 0, \quad M_B = -18 \text{ عند } x = 6$$

❖ مواقع انعدام العزم :

$$-2x^2 + 9x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 4,5 \quad \text{ومنه :}$$

❖ القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{AB} = -4x + 9 = 0$$

$$x = 2,25 \quad \text{ومنه :}$$

ويكون :

$$M_{AB} = 10,13$$

max

❖ اتجاه التقعر :

$$M''_{AB} = -4$$

فاتجاه التقعر دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{AB} = -4x + 9$$

$$x = 0 \quad T_A = 9, \quad x = 6 \quad T_B = -15$$

المجال DB ◇

أ - العزوم :

$$M_{DB} = -x^2 + 3x$$

❖ قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad M_D = 0, \quad x = 6 \quad M_B = -18$$

❖ مواقع انعدام العزم :

$$-x^2 + 3x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

ومنه :

❖ القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{DB} = -2x + 3 = 0$$

$$M_{DB} = 2,25_{\max}$$

ومنه $x = 1,5$ ويكون

❖ اتجاه التقعر :

$$M''_{DB} = -2$$

فاتجاه التقعر دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

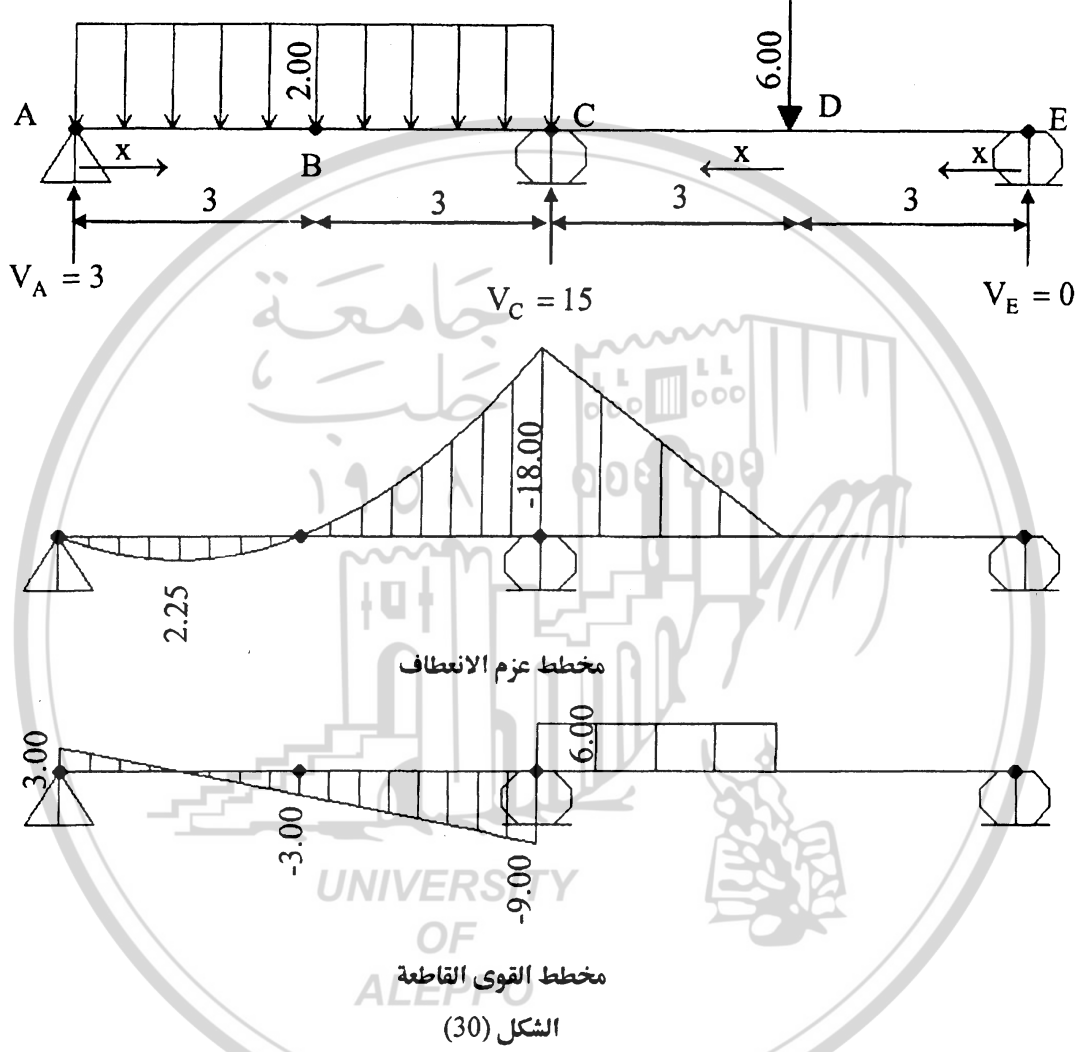
$$T_{DB} = 2x - 3$$

$$x = 0 \quad T_D = -3, \quad x = 6 \quad T_B = 9$$

وبين الشكل (29) المخططات المعنية .

مثال (30) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (30) حيث A مسند ثابت ويمثل كل من C , E مسنداً بسيطاً ، و B مفصل داخلي . والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



الحل :

1- ردود الأفعال :

بالإسقاط على x نجد : $H_A = 0$

بفصل الجزء AB وباعتباره بحكم المتناظر يكون :

$$V_A = \frac{(2)(3)}{2} = 3t$$

بأخذ العزوم حول E لكامل الجائز نجد :

$$\sum M_E = 0$$

$$(3)(12) - (12)(9) + 6V_C - (6)(3) = 0$$

$$V_C = 15t$$

ومنه :

ثم بالإسقاط على y نجد :

$$\sum F_y = 0$$

$$3 - 12 + 15 - 6 + V_E = 0$$

$$V_E = 0$$

ومنه :

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

المجال AC

أ - العزوم :

$$M_{AC} = -x^2 + 3x$$

❖ قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$M_A = 0 \text{ عند } x = 0, \quad M_C = -18 \text{ عند } x = 6$$

❖ مواقع انعدام العزم :

$$-x^2 + 3x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

ومنه :

❖ القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{AC} = -2x + 3 = 0$$

$$M_{AC} = 2,25_{\max}$$

ومنه $x = 1,5$ ويكون

❖ اتجاه التقعر :

$$M''_{AC} = -2$$

فاتجاه التقعر دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{AC} = -2x + 3$$

$$x = 0 \quad T_A = 3, \quad x = 6 \quad T_C = -9$$

المجال DC ◇

أ - العزوم :

$$M_{DC} = -6x$$

$$x = 0 \text{ عند } M_D = 0, \quad x = 3 \text{ عند } M_C = -18$$

ب - القوى القاطعة :

$$T_{DC} = 6$$

المجال ED ◇

أ - العزوم :

$$M_{ED} = 0$$

ب - القوى القاطعة :

$$T_{ED} = 0$$

وبين الشكل (30) المخططات المعنية .

مثال (31) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (31) ، حيث A مسند ثابت وتمثل كل من B , E مسنداً بسيطاً ، و D مفصل داخلي . والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .

الحل :

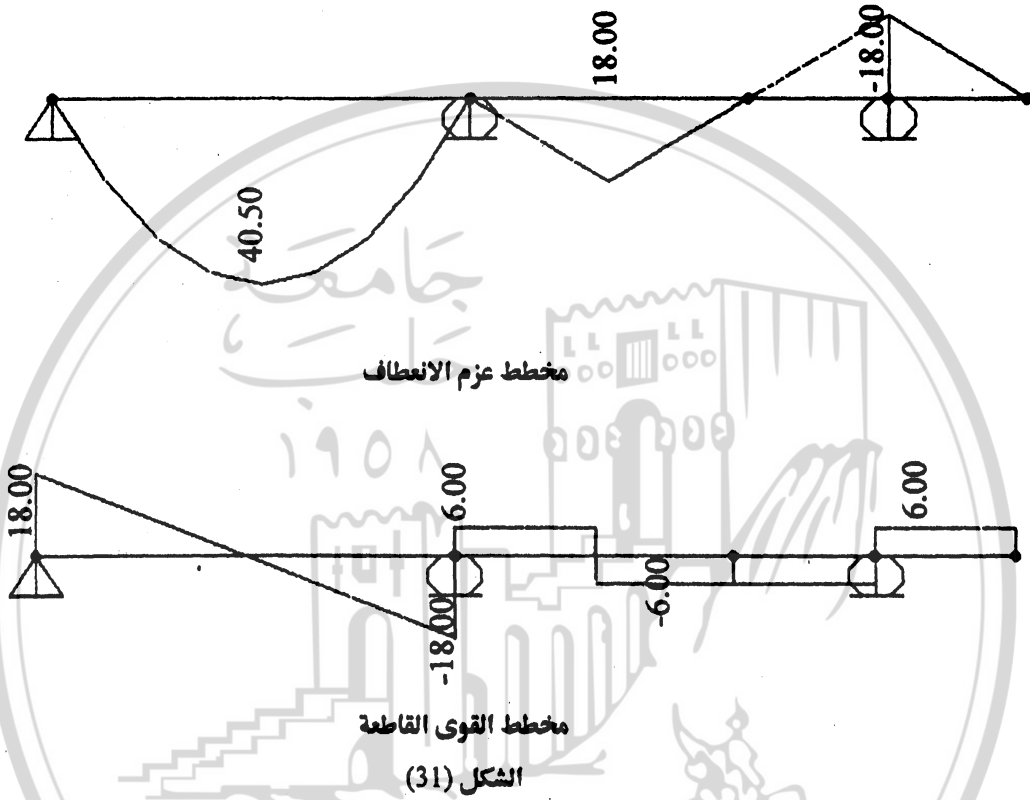
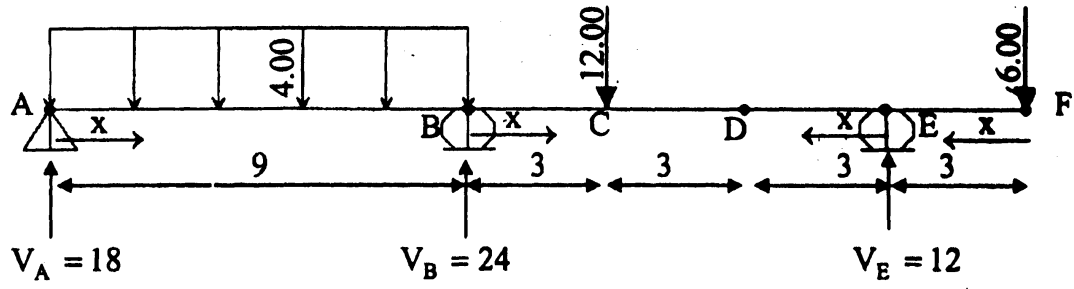
1- ردود الأفعال :

بالإسقاط على x نجد :

$$H_A = 0$$

بأخذ العزم على يمين المفصل D نجد :

$$(6) (6) - 3V_E = 0$$



$$V_E = 12t$$

ومنه :

بأخذ العزوم حول المسند A لكامل الجائز

$$\sum M_A = 0$$

$$(6)(21) - (12)(18) + (12)(12) - 9V_B + (36)(4,5) = 0$$

$$V_B = 24t$$

ومنه :

ثم بالإسقاط على y نجد :

$$\sum F_y = 0$$

$$V_A - 36 + 24 - 12 + 12 - 6 = 0$$

ومنه : $V_A = 18t$

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

◇ المجال AB

أ - العزوم :

$$M'_{AB} = -2x^2 + 18x$$

❖ قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$M_A = 0 \text{ عند } x = 0, \quad M_B = 0 \text{ عند } x = 9$$

❖ مواقع انعدام العزم :

$$-2x^2 + 18x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 9$$

❖ القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{AB} = -4x + 18 = 0$$

ومنه :

$$x = 4,5 \quad M_{AB \max} = 40,5$$

❖ اتجاه التقعر :

$$M''_{AB} = -4$$

فاتجاه التقعر دوماً نحو الأعلى :

ب - القوى القاطعة :

$$T_{AB} = -4x + 18$$

$$x = 0 \quad T_A = 18, \quad x = 9 \quad T_B = -18$$

◇ المجال BC

أ - العزوم :

$$M_{BC} = 18(9 + x) - 36(4,5 + x) + 24x$$

$$M_{BC} = 6x$$

ويكون :

$$x = 0 \quad M_B = 0 , \quad x = 3 \quad M_C = 18$$

ب - القوى القاطعة :

$$T_{BC} = 6$$

المجال EC ◇

أ - العزوم :

$$M_{EC} = -6(3 + x) + 12x$$

$$M_{EC} = 6x - 18$$

ويكون :

$$x = 0 \quad M_E = -18 \quad x = 6 \quad M_C = 18$$

ب - القوى القاطعة :

$$T_{EC} = -6$$

المجال FE ◇

أ - العزوم :

$$M_{FE} = -6x$$

ويكون من أجل :

$$x = 0 \quad M_F = 0 , \quad x = 3 \quad M_E = -18$$

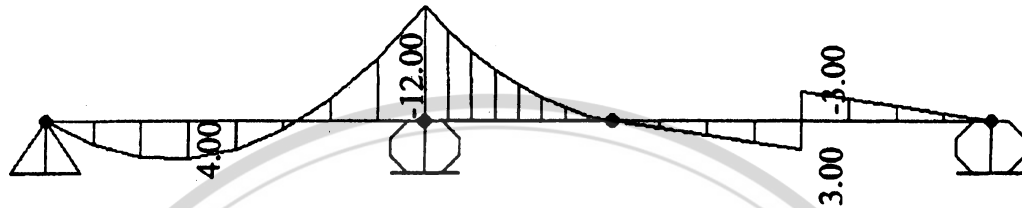
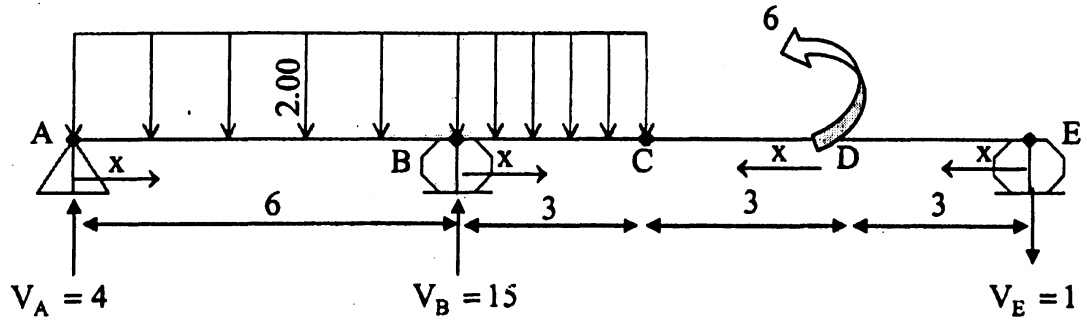
ب - القوى القاطعة :

$$T_{FE} = 6$$

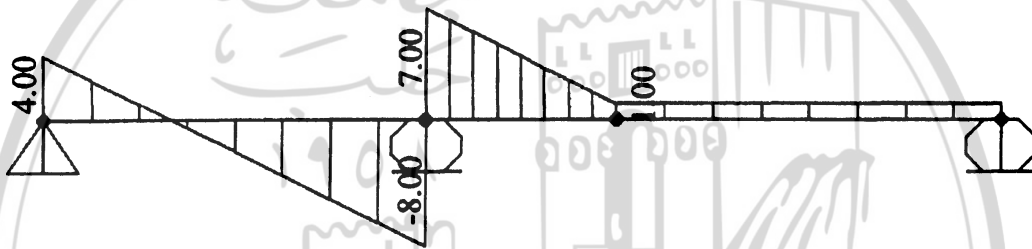
وبين الشكل (31) المخططات المعنية .

مثال (32) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (32) ، حيث A مسند ثابت وتمثل كل من B , E مسنداً بسيطاً ، و C مفصل داخلي. والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



مخطط عزم الانعطاف



مخطط القوى القاطعة

الشكل (32)

الحل :

1- ردود الأفعال :

$$H_A = 0$$

بالإسقاط على X نجد :

بأخذ العزوم على يمين المفصل C نجد :

$$+6V_E - 6 = 0$$

$$V_E = 1t$$

ومنه :

بأخذ العزوم لكامل الجائز حول المسند A نجد :

$$\sum M_A = 0$$

$$(1)(15) - 6 + (18)(4,5) - 6V_B = 0$$

ومنه :

$$V_B = 15t$$

ثم بالإسقاط على y نجد :

$$\sum F_y = 0$$

$$V_A - 18 + 15 - 1 = 0$$

ومنه :

$$V_A = 4t$$

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

◇ المجال AB

أ - العزوم :

$$M_{AB} = -x^2 + 4x$$

❖ قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$M_A = 0 \text{ عند } x = 0, \quad M_B = -12 \text{ عند } x = 6$$

❖ مواقع انعدام العزم :

$$-x^2 + 4x = 0$$

ومنه نجد أن العزم يتعدم في الموقعين :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 4$$

❖ القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{AB} = -2x + 4 = 0$$

ومنه :

$$x = 2 \text{ عندما } M_{AB} = 4_{\max}$$

❖ اتجاه التقعر :

$$M''_{AB} = -2$$

فاتجاه التقعر دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{AB} = -2x + 4$$

ويكون :

$$T_B = -8 \text{ من أجل } x = 6, \quad T_A = 4 \text{ من أجل } x = 0$$

◇ المجال BC

أ - العزوم :

$$M_{BC} = -x^2 + 15x - 12(3+x) + 4(6+x)$$

$$M_{BC} = -x^2 + 7x - 12$$

❖ قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال

$$x = 0 \quad M_B = -12, \quad x = 3 \quad M_C = 0$$

❖ مواقع انعدام العزم :

$$-x^2 + 7x - 12 = 0$$

ومنه نجد أن العزم ينعدم في الموقعين :

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 4$$

إلا أن القيمة x_2 مرفوضة لوقوعها خارج المجال المدروس .

❖ القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{BC} = -2x + 7 = 0$$

$$x = 3,5$$

ومنه :

وبما أن هذه القيمة تقع خارج المجال المدروس فلا يوجد إذاً قيمة عظمى للعزم

ضمن هذا المجال .

❖ اتجاه التقعر :

$$M''_{BC} = -2$$

فاتجاه التقعر دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{BC} = -2x + 7$$

ويكون من أجل :

$$x = 0 \quad T_B = 7 \quad , \quad x = 3 \quad T_C = 1$$

◇ المجال DC

أ - العزوم :

$$M_{DC} = -(x + 3) + 6$$

$$M_{DC} = -x + 3$$

ويكون :

$$M_D = 3 \text{ من أجل } x = 0 \quad M_C = 0 \text{ من أجل } x = 3$$

ب - القوى القاطعة :

$$T_{DC} = 1$$

◇ المجال ED

أ - العزوم :

$$M_{ED} = -x$$

ويكون :

$$M_D = -3 \text{ من أجل } x = 3 \quad , \quad M_E = 0 \text{ من أجل } x = 0$$

ب - القوى القاطعة :

$$T_{ED} = 1$$

وبين الشكل (32) المخططات المعنية .

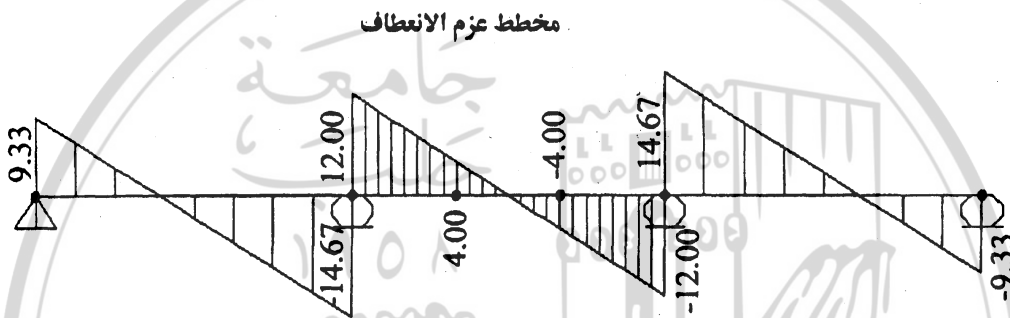
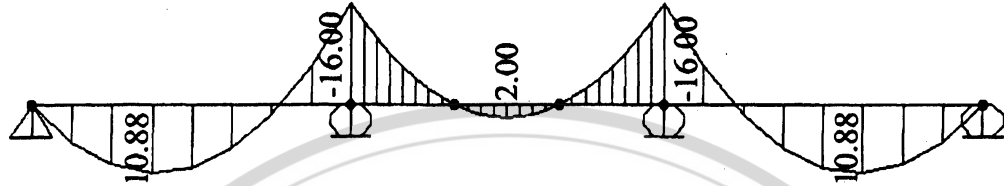
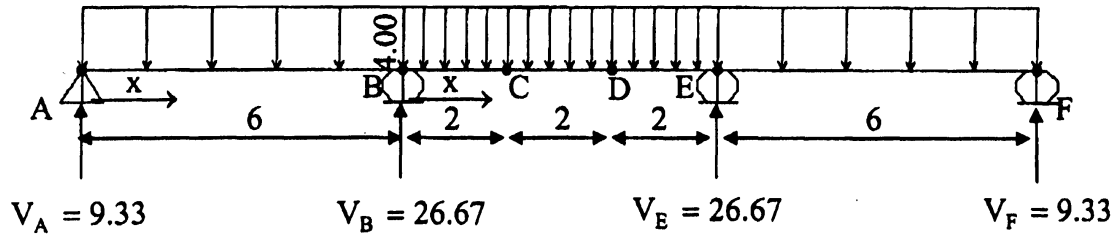
مثال (33) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (33) ، حيث A مسند ثابت ، و E , F , B يمثل كل منهما مسنداً بسيطاً ، D , C يمثل كل منهما مفصلاً داخلياً . والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .

الحل :

1- ردود الأفعال :

$$H_A = 0 \quad \text{بالإسقاط على } x \text{ نجد :}$$



الشكل (33)

بعضل الجزء CD واعتباره متناظراً تكون القوى المتبادلة الشاقولية في هذين المفصلين:

$$V_C = V_D = \frac{(2)(4)}{2} = 4t$$

وتكون هذه القوى متجهة نحو الأعلى في الجزء المفصول CD .

ثم بعضل الجزء AC وبالتعميـض عن الجزء الأيمن بتأثيره على الجزء الأيسر في المفصل C بالقوة 4 t المتجهة نحو الأسفل ، وبأخذ العزوم حول A نجد :

$$(4)(8) + (32)(4) - 6V_B = 0$$

ومنه نجد :

$$V_B = 26,67t$$

ثم بالإسقاط على y في هذا الجزء أي AC نجد :

$$V_A - 32 + 26,67 - 4 = 0$$

ومنه :

$$V_A = 9,33t$$

وبما أن الجائز بحكم المتناظر يكون :

$$V_B = V_E = 26,67t$$

$$V_A = V_F = 9,33t$$

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

◇ المجال AB

أ - العزوم :

$$M_{AB} = -2x^2 + 9,33x$$

❖ قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad M_A = 0, \quad x = 6 \quad M_B = -16$$

❖ مواقع انعدام العزم :

$$-2x^2 + 9,33x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 4,67$$

ومنه :

❖ القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{AB} = -4x + 9,33 = 0$$

ومنه يكون من أجل :

$$x = 2,33 \quad M_{AB} = 10,88$$

max

❖ اتجاه التقعر :

$$M''_{AB} = -4$$

فالتقعر دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{AB} = -4x + 9,33$$

ويكون :

$$x = 0 \text{ من أجل } T_A = 9,33 \text{ و } x = 6 \text{ من أجل } T_B = -14,67$$

◇ المجال BE

أ - العزوم :

$$M_{BE} = -2x^2 + 9,33(6 + x) - 24(3 + x) + 26,67x$$

$$M_{BE} = -2x^2 + 12x - 16$$

◇ قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad M_B = -16, \quad x = 6 \quad M_E = -16$$

◇ مواقع انعدام العزم :

$$-2x^2 + 12x - 16 = 0$$

ومنه :

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 4$$

◇ القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{BE} = -4x + 12 = 0$$

ومنه يكون من أجل :

$$x = 3 \quad M_{BE} = 2_{\max}$$

◇ اتجاه التقعر :

$$M''_{BE} = -4$$

فاتجاه التقعر دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{BE} = -4x + 12$$

ومنه :

$$x = 0 \quad T_B = 12 \quad , \quad x = 6 \quad T_E = -12$$

المجال EF ◇ .

بما أن الجائز بحكم المتناظر فيكون عزم الانعطاف في هذا المجال مناظر للعزم في المجال AB ، أما القوى القاطعة فيكون متناظرة عكسياً مع حالتها في المجال AB .
ويبين الشكل (33) المخططات المعنية .

مثال (34) :

لدينا الجائز المبين بالشكل (34) ، حيث A مسند ثابت ، C, E, G يمثل كل منهما مسنداً بسيطاً و B, F يمثل كل منهما مفصلاً داخلياً .
والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .

الحل :

1- ردود الأفعال :

بالإسقاط على x نجد :

$$H_A = 0$$

بمزل الجزء AB واعتباره بحكم المتناظر يكون :

$$V_A = \frac{(2)(3)}{2} = 3t$$

وبمزل الجزء FG واعتباره بحكم المتناظر يكون :

$$V_G = \frac{(4)(3)}{2} = 6t$$

بأخذ مجموع العزوم لكامل الجائز حول C نجد :

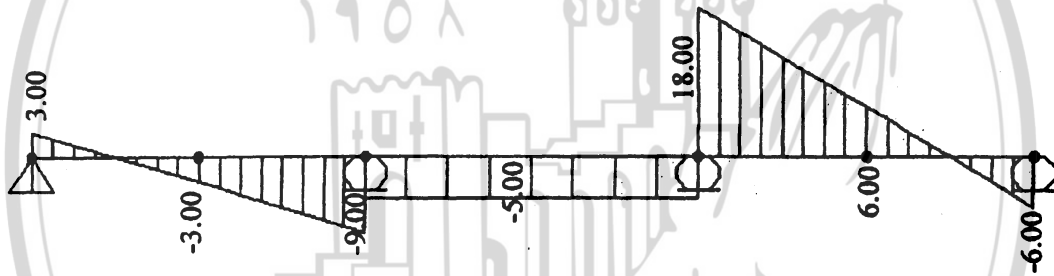
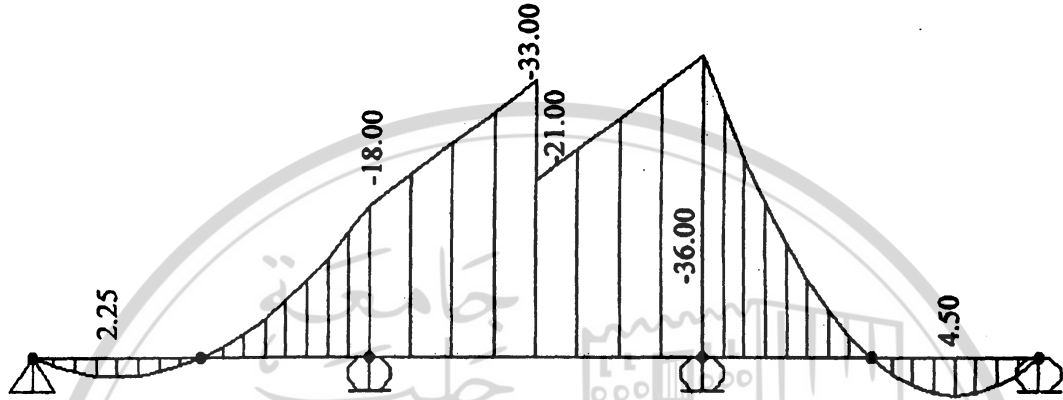
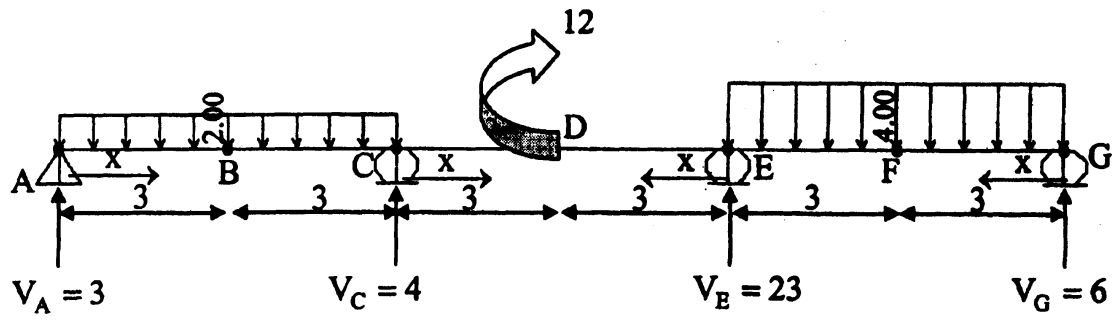
$$\sum M_C = 0$$

$$(3)(6) - (12)(3) + 12 - (V_E)(6) + (24)(9) - (6)(12) = 0$$

$$V_E = 23t$$

ومنه :

ثم بالإسقاط على y نجد :



الشكل (34)

$$3 - 12 + V_C + 23 - 24 + 6 = 0$$

$$V_C = 4t$$

ومنه :

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

المجال AC

أ - العزوم

$$M_{AC} = -x^2 + 3x$$

◆ قسم العزوم في بداية ونهاية المجال :

$$x=0 \quad M_A=0 \quad , \quad x=6 \quad M_C=-18$$

$$-x^2+3x=0 \quad \text{◆ مواقع انعدام العزم :}$$

$$x_1=0 \quad x_2=3 \quad \text{ومنه :}$$

◆ القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{AC}=-2x+3=0$$

ومنه يكون :

$$x=1,5 \quad \text{من أجل} \quad M_{AC} = 2,25_{\max}$$

$$M''_{AC}=-2 \quad \text{◆ اتجاه التقعر :}$$

فاتجاه التقعر دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{AC}=-2x+3$$

ومنه نجد :

$$x=0 \quad T_A=3 \quad , \quad x=6 \quad T_C=-9$$

◆ المجال CD

أ - العزوم :

$$M_{CD}=3(6+x)-12(3+x)+4x$$

$$M_{CD}=-5x-18$$

ويكون :

$$x=0 \quad M_C=-18 \quad , \quad x=3 \quad M_D=-33$$

ب - القوى القاطعة :

$$T_{CD}=-5$$

المجال ED

أ - العزوم :

$$M_{ED} = 6(6+x) - 24(3+x) + 23x$$

$$M_{ED} = 5x - 36$$

ويكون :

$$M_D = -21 \text{ من أجل } x = 3 \text{ و } M_E = -36 \text{ من أجل } x = 0$$

ب - القوى القاطعة :

$$T_{ED} = -5$$

المجال GE

أ - العزوم :

$$M_{GE} = -2x^2 + 6x$$

❖ قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad M_G = 0, \quad x = 6 \quad M_E = -36$$

❖ مواقع انعدام العزم :

$$-2x^2 + 6x = 0$$

ومنه :

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

❖ القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{GE} = -4x + 6 = 0$$

ومنه يكون :

$$x = 1,5 \quad M_{GE} = 4,5_{\max}$$

❖ اتجاه التقعر :

$$M''_{GE} = -4$$

فاتجاه التقعر دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{GE} = 4x - 6$$

ويكون من أجل

$$x = 0 \quad T_G = -6, \quad x = 6 \quad T_E = 18$$

وبيين الشكل (34) المخططات المعنية .

مثال (35)

لدينا الجائز المبين بالشكل (35) حيث A وثاقة ويمثل كل من C,E,G مسنداً بسيطاً ، ويمثل كل من B,D,F مفصلاً داخلياً ، والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .

الحل :

1- ردود الأفعال :

بالإسقاط على x نجد : $H_A = 0$

وبأخذ العزوم حول يمين المفصل F نجد :

$$(6)(6) - 3V_G + (12)(1,5) = 0$$

$$V_G = 18t$$

وبأخذ العزوم على يمين المفصل D نجد :

$$(6)(12) - (18)(9) + (24)(6) - 3V_E + (6)(1,5) = 0$$

ومنه :

$$V_E = 21t$$

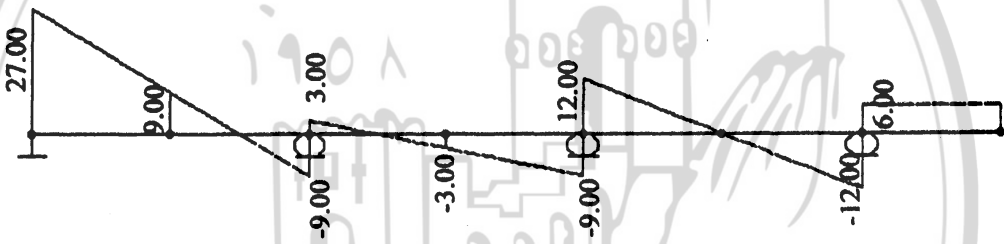
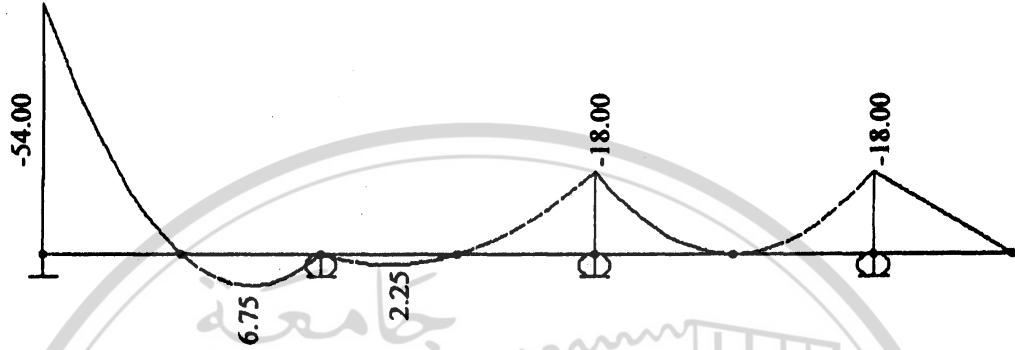
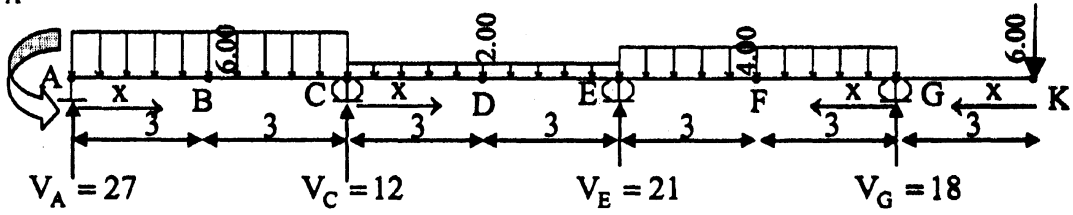
بعزل الجزء DK والإسقاط على y نجد :

$$F_D - 6 + 21 - 24 + 18 - 6 = 0$$

$$F_D = -3$$

ومنه :

$$M_A = 54$$



الشكل (35)
مخطط القوى القاطعة

ثم بعزل الجزء DB (حيث تتجه القوة الشاقولية في D نحو الأعلى) .
وبأخذ العزوم حول B نجد :

$$-(3)(6) + (6)(4.5) - 3V_C + (18)(1.5) = 0$$

$$V_C = 12 \text{ t}$$

ومنه :

وبالإسقاط على y بنفس الجزء نجد :

$$3 - 6 - 18 + 12 + F_B = 0$$

$$F_B = 9 \text{ t}$$

بعزل الجزء AB (حيث تتجه القوة الشاقولية في B نحو الأسفل) .

ثم بالإسقاط على y نجد :

$$-9-18+V_A=0$$

$$V_A=27t$$

ومنه :

وفي ذات الجزء AB وبأخذ العزوم حول A نجد :

$$(9)(3)+(18)(1,5)-M_A=0$$

ومنه نجد :

$$M_A=54t.m$$

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

المجال AC ◇

أ - العزوم

$$M_{AC}=-3x^2+27x-54$$

❖ قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$x=0 \quad M_A=-54, \quad x=6 \quad M_C=0$$

❖ مواقع انعدام العزم

$$-3x^2+27x-54=0$$

ومنه ، ينعدم العزم عند كل من الموقعين

$$x_1=3 \quad x_2=6$$

❖ القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{AC}=-6x+27=0$$

ومنه يكون :

$$x=4,5 \quad M_{AC} = 6,75_{\max}$$

❖ اتجاه التقعر :

$$M''_{AC}=-6$$

فاتجاه التقعر دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{AC} = -6x + 27$$

فيكون :

$$T_C = -9 \text{ من أجل } x = 6 : T_A = 27 \text{ من أجل } x = 0$$

المجال CE ◇

$$M_{CE} = -x^2 + 12x - 36(3+x) + 27(6+x) - 54$$

$$M_{CE} = -x^2 + 3x$$

❖ قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$x = 0 \quad M_C = 0, \quad x = 6 \quad M_E = -18$$

❖ مواقع انعدام العزم :

$$-x^2 + 3x = 0$$

ومنه ينعدم العزم عند كل من الموقعين :

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 3$$

❖ القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{CE} = -2x + 3 = 0$$

ومنه يكون :

$$x = 1,5$$

من أجل

$$M_{CE} = 2,25_{\max}$$

❖ اتجاه التقعر :

$$M''_{CE} = -2$$

فاتجاه التقعر دوماً نحو الأعلى .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{CE} = -2x + 3$$

ويكون من أجل :

$$x=0 \quad T_C=3, \quad x=6 \quad T_E=-9$$

◇ المجال GE

أ - العزوم :

$$M_{GE} = -2x^2 + 18x - 6(3+x)$$

$$M_{GE} = -2x^2 + 12x - 18$$

❖ قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$x=0 \quad M_G = -18 \quad x=6 \quad M_E = -18$$

❖ مواقع انعدام العزم

$$-2x^2 + 12x - 18 = 0$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 3$$

ومنه :

❖ القيمة الأعظمية للعزم :

$$M'_{GE} = -4x + 12 = 0$$

ومنه :

$$x = 3$$

$$M_{CE} = 0$$

❖ اتجاه التقعر :

$$M''_{GE} = -4$$

فاتجاه التقعر نحو الأعلى دوماً .

ب - القوى القاطعة :

$$T_{GE} = 4x - 12$$

ويكون من أجل :

$$x=0 \quad T_G = -12, \quad x=6 \quad T_E = 12$$

◇ المجال KG

أ - العزوم :

$$M_{KG} = -6x$$

فيكون :

$$M_G = -18 \text{ من أجل } x = 3 \text{ و } M_K = 0 \text{ من أجل } x = 0$$

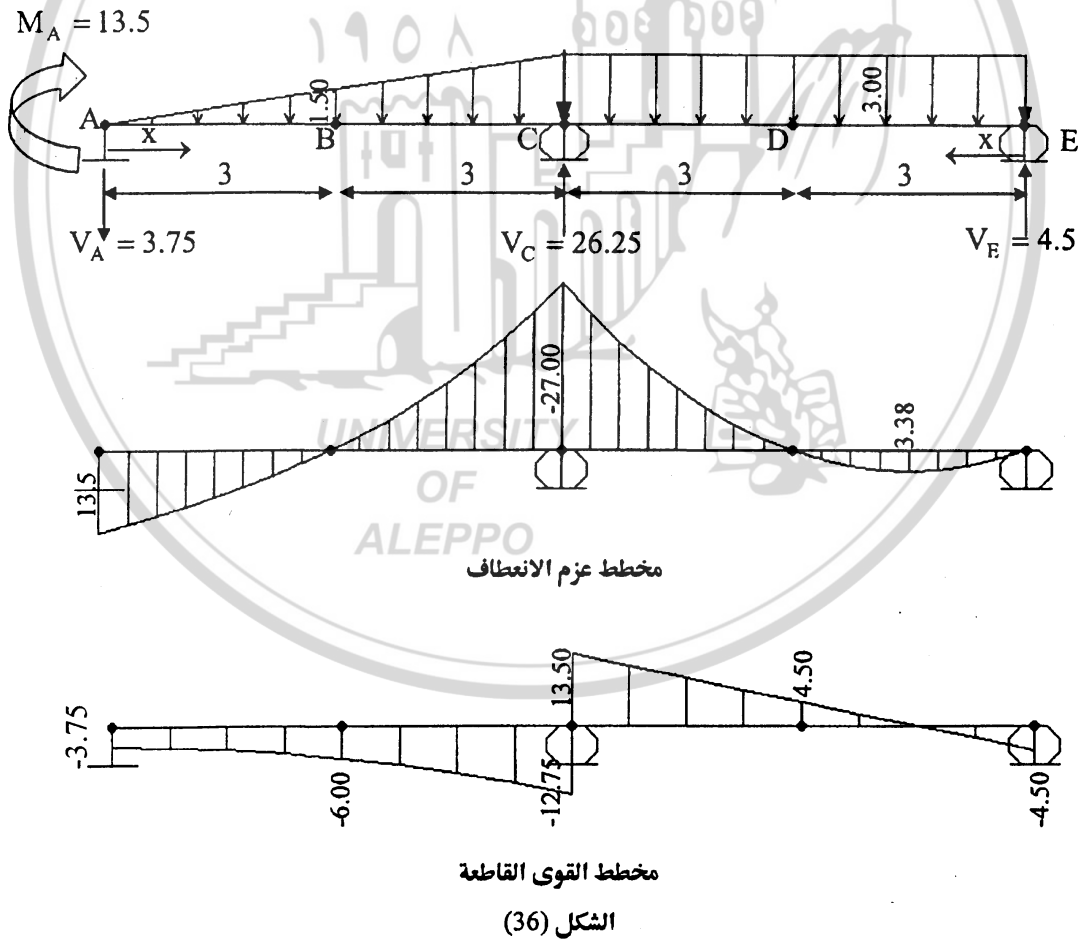
ب - القوى القاطعة :

$$T_{KG} = 6$$

وبين الشكل (35) المخططات المعنية .

مثال (36)

لدينا الجائز المبين بالشكل (36) حيث A وثاقة ويمثل كل من C , E مسنداً بسيطاً . وكل من B , D يمثل مفصلاً داخلياً . والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



الحل :

1- ردود الأفعال :

بالإسقاط على X نجد :

$$H_A = 0$$

بعزل الجزء DE وباعتباره بحكم المتناظر يكون :

$$V_E = \frac{(3)(3)}{2} = 4,5 \text{ t}$$

بأخذ العزوم على يمين المفصل B نجد :

$$-(4,5)(9) + (18)(6) - 3V_C + (1,5)(3)(1,5) + (3)(1,5) = 0$$

$$V_C = 26,25 \text{ t} \quad \text{ومنه :}$$

ثم بالإسقاط على y لكامل الجائز نجد :

$$-V_A - 9 + 26,25 - 18 + 4,5 = 0$$

$$V_A = 3,75 \text{ t} \quad \text{ومنه :}$$

لإيجاد العزم في الوثاقة A نأخذ العزوم حول A فنجد :

$$+M_A + (9)(4) - (26,25)(6) + (18)(9) - (4,5)(12) = 0$$

$$M_A = 13,5 \text{ t.m} \quad \text{ومنه :}$$

2- علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة :

المجال AC ◇

أ - العزوم :

$$M_{AC} = -\frac{x^3}{12} - 3,75x + 13,5$$

❖ القيم عند بداية ونهاية المجال :

$$M_C = -27 \text{ عند } x = 6, \quad M_A = 13,5 \text{ عند } x = 0$$

❖ مواقع انعدام العزم :

$$-\frac{x^3}{12} - 3,75x + 13,5 = 0$$

ومنه نجد أن الجذر الحقيقي لهذه المعادلة هو $x_1 = 3$

❖ القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{AC} = -\frac{x^2}{4} - 3,75 = 0$$

ليس لهذه المعادلة جذور حقيقية وعليه فلا توجد قيمة عظمى .

❖ اتجاه التقعر :

$$M''_{AC} = -\frac{x}{2}$$

وبما أن قيمة x في المجال المدروس هي دوماً موجبة فالمشتق الثاني سالب واتجاه التقعر يكون دوماً نحو الأعلى ضمن هذا المجال .
ب - القوى القاطعة :

$$T_{AC} = -\frac{x^2}{4} - 3,75$$

❖ القيم عند بداية ونهاية المجال :

$$T_C = -12,75 \text{ عند } x = 6, \quad T_A = -3,75 \text{ عند } x = 0$$

❖ مواقع انعدام القوى القاطعة :

$$-\frac{x^2}{4} - 3,75 = 0$$

ليس لهذه المعادلة جذور حقيقية ، وعليه فلا توجد ضمن هذا المجال مواقع تنعدم

فيها القوى القاطعة .

❖ القيمة العظمى :

$$-\frac{x}{2} = 0$$

$$x = 0 \quad \text{عند} \quad T_{AC \max} = -3,75 \quad \text{ومنه يكون :}$$

❖ اتجاه التقعر :

$$T''_{AC} = -\frac{1}{2}$$

فاتجاه التقعر دوماً نحو الأسفل .

◇ المجال EC

$$M_{EC} = -1,5x^2 + 4,5x \quad \text{أ - العزوم :}$$

❖ قيم العزوم عند بداية ونهاية المجال :

$$M_E = 0 \quad \text{عند } x = 0, \quad M_C = -27 \quad \text{عند } x = 6$$

$$-1,5x^2 + 4,5x = 0 \quad \text{❖ مواقع انعدام العزم :}$$

ومنه ينعدم العزم في كل من الموقعين :

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

❖ القيمة العظمى للعزم :

$$M'_{EC} = -3x + 4,5 = 0$$

ومنه يكون :

$$x = 1,5 \quad \text{من أجل} \quad M_{EC} = 3,38_{\max}$$

❖ اتجاه التقعر :

$$M''_{EC} = -3$$

فاتجاه التقعر دوماً نحو الأعلى .

$$T_{EC} = 3x - 4,5 \quad \text{ب - القوى القاطعة :}$$

ويكون :

$$T_E = -4,5 \quad \text{عند } x = 0, \quad T_C = 13,5 \quad \text{عند } x = 6$$

ويبين الشكل (36) المخططات المعنية .

7-4- مسائل غير محلولة على الفصل الرابع :

مسألة (1) :

ليكن الجائز الظفري المبين بالشكل (1) حيث:

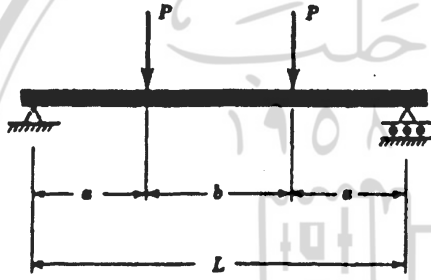
$$P = 2t \quad L = 6m \quad a = 2m$$

والمطلوب إيجاد علاقات القوى القاطعة وعزم الانعطاف ورسمها .

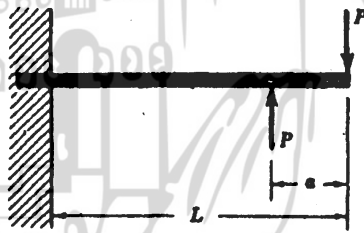
مسألة (2) :

ليكن الجائز المبين بالشكل (2) حيث : $P = 6t \quad a = 3m \quad b = 4m$

والمطلوب رسم مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



الشكل (2)

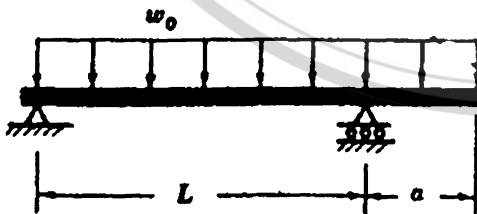


الشكل (1)

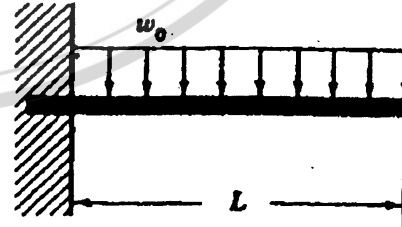
مسألة (3) :

المطلوب إيجاد مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة للجائز المبين بالشكل

(3) حيث $w_0 = 2t/m \quad L = 6m$.



الشكل (4)

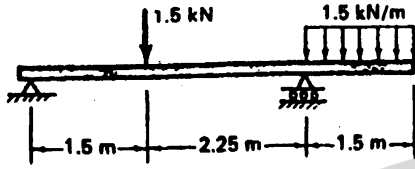


الشكل (3)

مسألة (4) :

المطلوب رسم مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة مع بيان القيم العظمى ومواقعها ومواقع انعدامها للجائز المبين بالشكل (4) حيث $W_0 = 3t/m$ $L = 6m$ $a = 2m$

مسألة (5) :



الشكل (5)

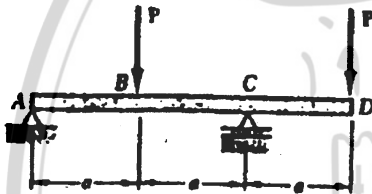
المطلوب إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم

الانعطاف والقوى القاطعة للجائز المبين بالشكل (5).

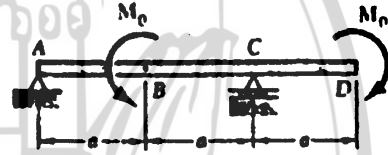
مسألة (6) :

المطلوب إيجاد مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة للجائزين المبينين

بالشكل (6) بفرض : $M_0 = 6t.m$ $a = 2m$ $P = 6t$



الشكل (6)



مسألة (7) :

ليكن الجائزان المبينان بالشكل (7) والمطلوب إيجاد مخططات عزوم الانعطاف

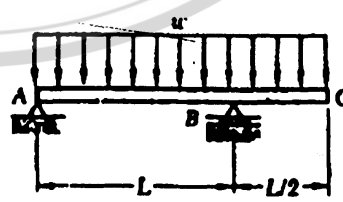
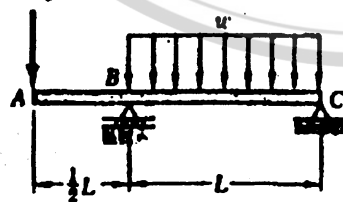
والقوى القاطعة مع بيان مواقع القيم العظمى ومواقع انعدامها، وذلك بفرض :

UNIVERSITY OF ALEPPO

$$W = 2t/m$$

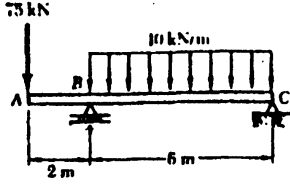
$$L = 6m$$

$$P = \frac{WL}{5}$$



الشكل (7)

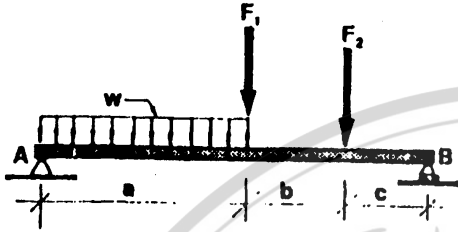
مسألة (8) :



الشكل (8)

المطلوب إيجاد ردود الأفعال ثم رسم مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة للجائز المبين بالشكل (8) .

مسألة (9) :



الشكل (9)

ليكن الجائز المبين بالشكل (9) حيث:

$$a = 4m \quad b = 3m \quad c = 2m$$

$$F_1 = 6t \quad F_2 = 8t \quad W = 2t/m$$

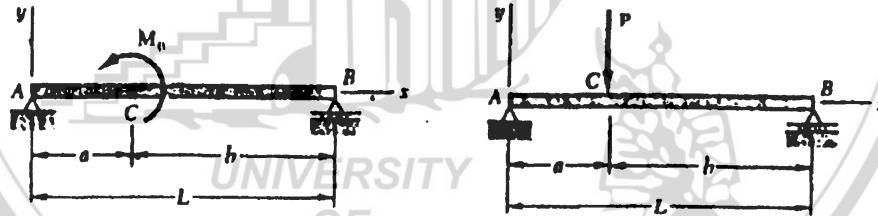
والمطلوب رسم مخططات عزوم

الانعطاف والقوى القاطعة .

مسألة (10) :

المطلوب رسم مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة للجائزين المبينين بالشكل

$$(10) \text{ حيث } a = 3m \quad b = 6m \quad P = 6t \quad M_0 = 9t.m$$



الشكل (10)

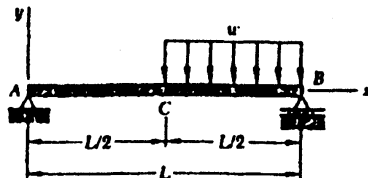
مسألة (11) :

أوجد علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة

للجائز المبين بالشكل (11) مع بيان نقاط الانعدام

ومواقع القيم العظمى بفرض أن

$$W = 2t/m \quad L = 6m$$

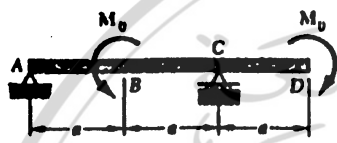


الشكل (11)

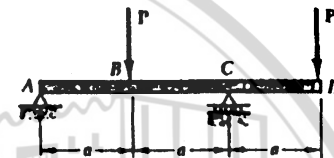
مسألة (12):

المطلوب رسم مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة للجوائز المبينة

بالشكل (12) حيث : $M_0 = 2t.m$ $a = 2m$ $P = 2t$.



الشكل (12)



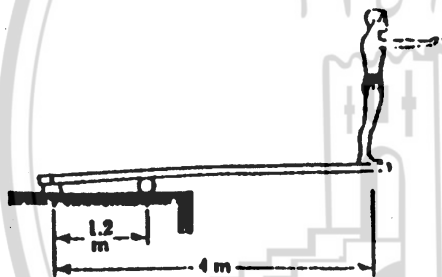
مسألة (13):

المطلوب رسم مخططات عزوم

الانعطاف والقوى القاطعة للوح قفز الفطاس

المبين بالشكل (13) على فرض أن وزن

الفطاس 80kg.

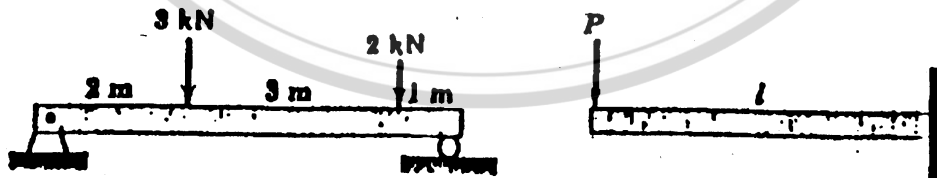


الشكل (13)

مسألة (14):

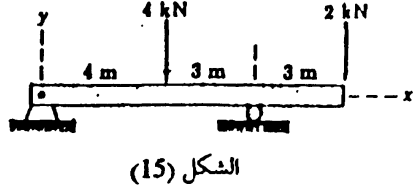
المطلوب إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة للجائزين

المبين بالشكل (14).



الشكل (14)

مسألة (15) :



ليكن الجائز المبين بالشكل (15) والمطلوب إيجاد مخططات عزوم الانعطاف والقوى

القاطعة مع بيان القيم العظمى ومواقعها ومواقع الانعدام .

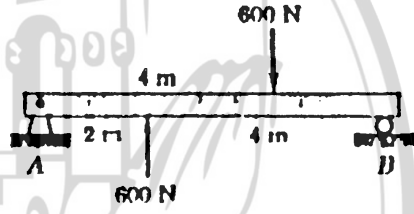
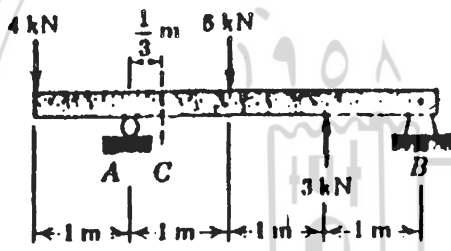
مسألة (16) :

المطلوب رسم مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة للجائز المبين بالشكل (16) .

مسألة (17) :

ليكن الجائز المبين بالشكل (17) والمطلوب رسم مخططات عزوم الانعطاف والقوى

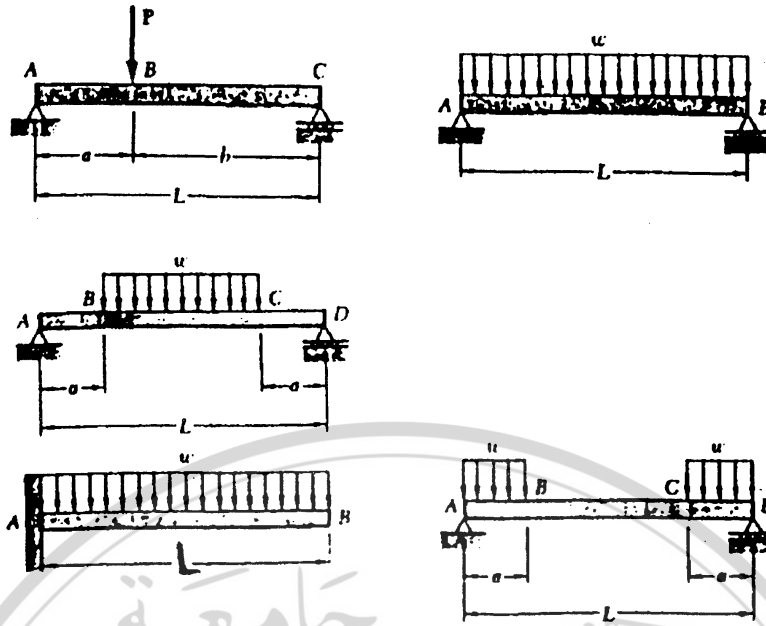
القاطعة ثم تحديد قيمة العزم عند المقطع C .



مسألة (18) :

ليكن الجوائز المبينة بالشكل (18) والمطلوب إيجاد مخططات عزوم الانعطاف

والقوى القاطعة فيها بفرض : $a = 2m$ $b = 6m$ $P = 6t$ $W = 2t/m$ $L = 8m$



الشكل (18)

مسألة (19):

المطلوب إيجاد مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة للجائزين المبينين

بالشكل (19)



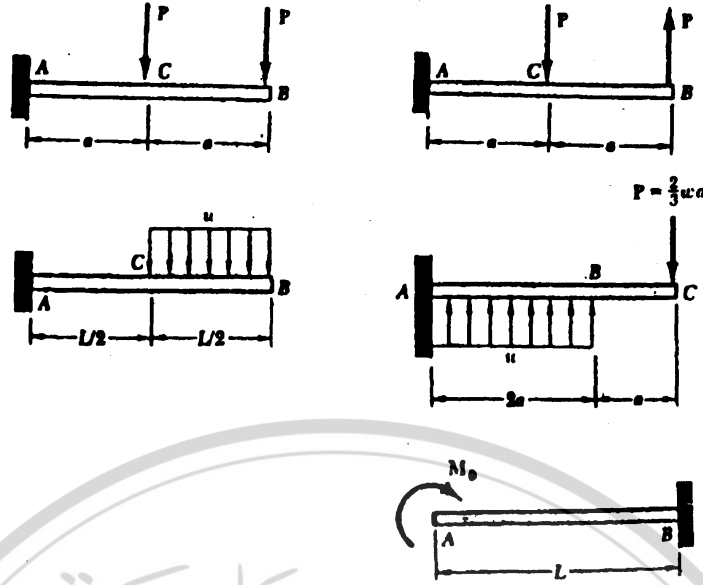
الشكل (19)

مسألة (20):

لتكن الجوائز المبينة بالشكل (20) والمطلوب إيجاد مخططات عزوم الانعطاف

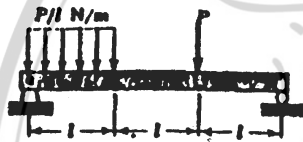
والقوى القاطعة فيها بفرض أن:

$$P = 6t \quad L = 6m \quad a = 3m \quad W = 2t/m \quad M_o = 9t.m$$



الشكل (20)

مسألة (21) :

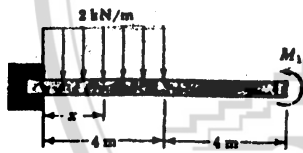


الشكل (21)

ليكن الجائز المبين بالشكل (21) والمطلوب

إيجاد مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .

مسألة (22) :



الشكل (22)

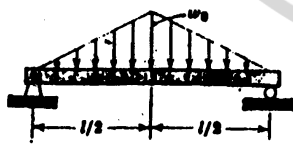
ليكن الجائز المبين بالشكل (22)، والمطلوب حساب

العزم M_1 حتى يكون العزم في الوثاقة معدوماً ثم رسم مخطط

عزم الانعطاف والقوى القاطعة .

الجواب : $M_1 = 12 \text{ KN.m}$

مسألة (23) :



الشكل (23)

ليكن الجائز المبين بالشكل (23) والمطلوب إيجاد

مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة مع بيان القيم

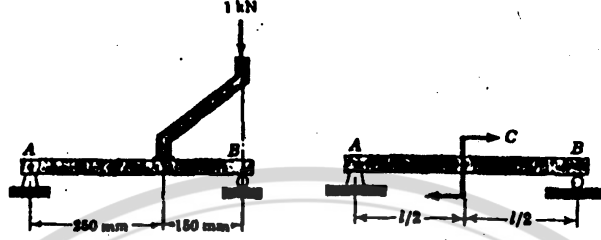
العظمى ومواقعها ومواقع الانعدام .

الجواب : العزم الأعظمي $M = \frac{W_0 l^2}{12}$

مسألة (24) :

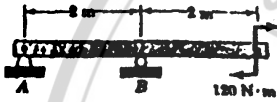
ارسم مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة للجائزين المبينين بالشكل (24)

بفرض: $\ell = 6m$ $C = 12KN.m$



الشكل (24)

مسألة (25) :

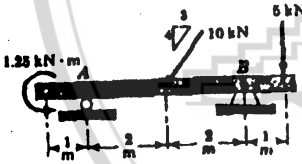


الشكل (25)

ليكن الجائز المبين بالشكل (25) والمطلوب إيجاد علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة ورسمها ثم إيجاد العزم عند مقطع يبعد مسافة 0.5m عن B وعلى يمينها.

الجواب : العزم عند المقطع المطلوب : $M = -120N.m$

مسألة (26) :



الشكل (26)

المطلوب رسم مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة والنظامية للجائز المبين بالشكل (26).

الجواب : العزم الأعظم بالقيمة المطلقة : $M = 5KN.m$

مسألة (27) :

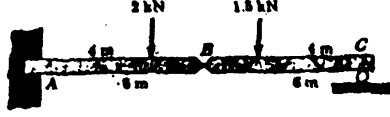
ليكن الجائز المبين بالشكل (27) والمطلوب إيجاد مخططات عزوم الانعطاف

والقوى القاطعة .

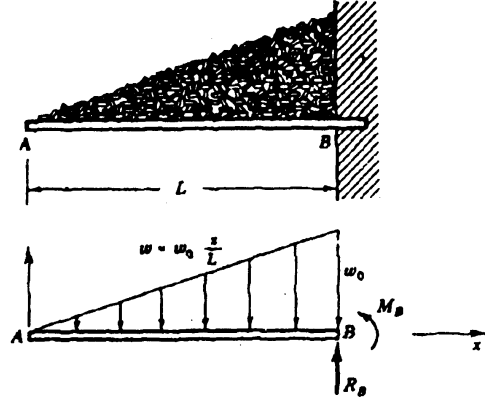
مسألة (28) :

ليكن الجائز المبين بالشكل (28) حيث B مفصل والمطلوب إيجاد ردود الأفعال

ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .

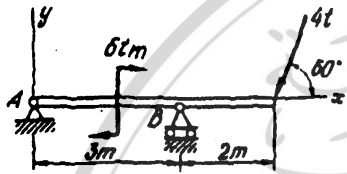


الشكل (28)



الشكل (27)

مسألة (29):



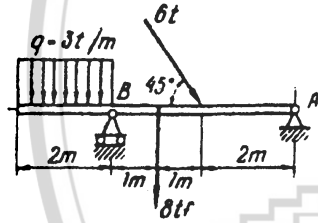
الشكل (29)

ليكن الجائز المبين بالشكل (29) والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .

الجواب : ردود الأفعال

$$H_A = 2t \quad V_A = -4,32t \quad V_B = 7,78t$$

مسألة (30):



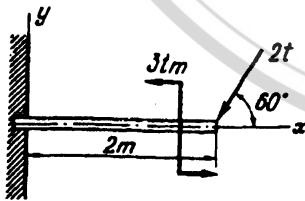
الشكل (30)

المطلوب رسم مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة والناظرية للجائز المبين بالشكل (30).

الجواب : ردود الأفعال :

$$H_A = 4,2t \quad V_A = 2,6t \quad V_B = 15,6t$$

مسألة (31):

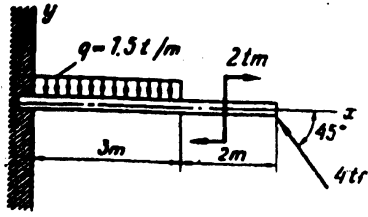


الشكل (31)

المطلوب إيجاد ردود الأفعال في الوثيقة ومخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة والناظرية للجائز المبين بالشكل (31) علماً أن نقطة تأثير العزم تقع قبل نهاية الجائز بمسافة 0.5m .

الجواب : ردود الأفعال :

$$H = 1t \quad V = 1,73t \quad M = 0,47t.m$$



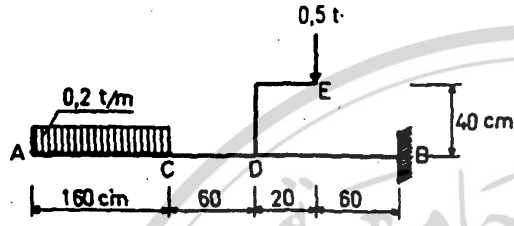
مسألة (32) :

ليكن الجائز المبين بالشكل (32) والخاضع لعزم تقع نقطة تأثيره قبل النهاية الحرة للجائز بمسافة 1m والمطلوب رسم مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة

الشكل (32)

الجواب : ردود الأفعال $H=2,8t$ $V=1,7t$ $M=-5,35t.m$

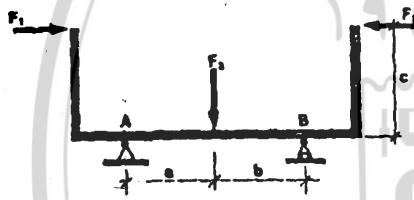
مسألة (33) :



المطلوب رسم مخطط عزم الانعطاف والقوى القاطعة للجائز المبين بالشكل (33)

الشكل (33)

مسألة (34) :



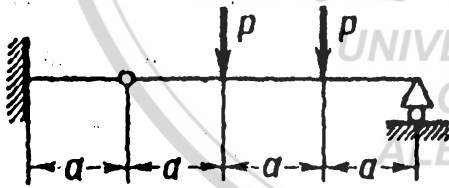
ليكن المنشأ المبين بالشكل (34)، حيث:

$$F_1 = 6t \quad F_2 = 3t \quad F_3 = 5t \quad a = b = 3m$$

C=3m وطول الجزء الأفقي $L=10m$ والمنشأ ذو هيكل متناظر، والمطلوب إيجاد مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة.

الشكل (34)

مسألة (35) :

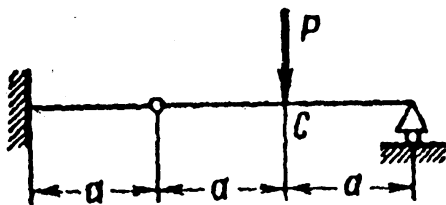


المطلوب إيجاد مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة للجائز المبين بالشكل (35)

الشكل (35)

بفرض أن $P=6t$ $a=2m$

مسألة (36) :



ليكن الجائز المبين بالشكل (36)

والمطلوب إيجاد ردود الأفعال والقوى المتبادلة في المفصل ثم رسم مخططات عزوم الانعطاف

الشكل (36)

والقوى القاطعة بفرض أن $a=3m$ $P=10t$.

مسألة (37) :

المطلوب رسم مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة للجائزين المبينين بالشكل

(37) ، بفرض $a=2m$ $P=6t$.

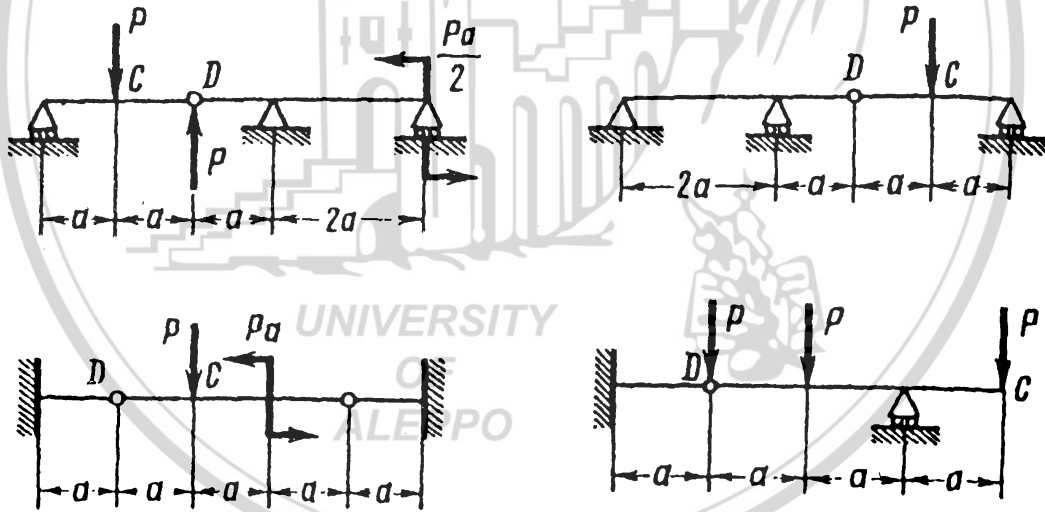


الشكل (37)

مسألة (38) :

لتكن الجوائز المبينة بالشكل (38) والمطلوب رسم مخططات عزوم الانعطاف

والقوى القاطعة بفرض أن $a=1m$ $P=4t$.

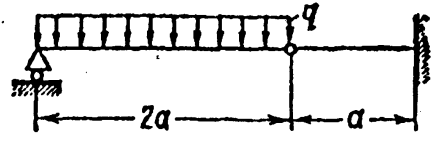
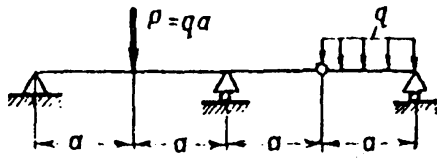


الشكل (38)

مسألة (39) :

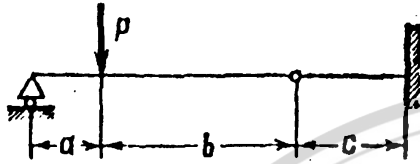
المطلوب رسم مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة للجائزين المبينين بالشكل

(39) بفرض أن $a=3m$ $q=2t/m$.



الشكل (39)

مسألة (40) :



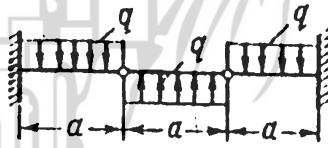
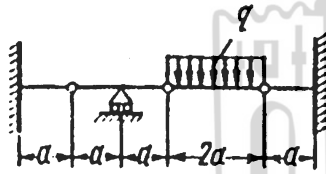
ليكن الجائز المبين بالشكل (40) حيث :

$$a = 2\text{m} \quad b = 6\text{m} \quad c = 3\text{m} \quad p = 9\text{t}$$

الشكل (40)

والمطلوب رسم مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .

مسألة (41) : المطلوب رسم مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة للجائزين المبينين بالشكل (41) وذلك بفرض : $a = 2\text{m}$ $q = 2\text{t/m}$.

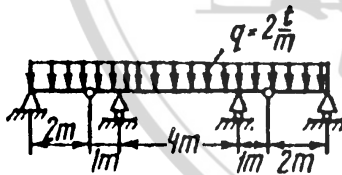


الشكل (41)

مسألة (42) : المطلوب إيجاد ردود الأفعال والقوى

المتبادلة في المفصلين للجائز المبين بالشكل (42) ثم

رسم مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة .



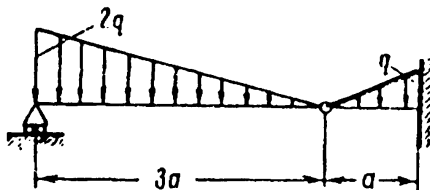
الشكل (42)

مسألة (43) :

ليكن الجائز المبين بالشكل (43) والمطلوب

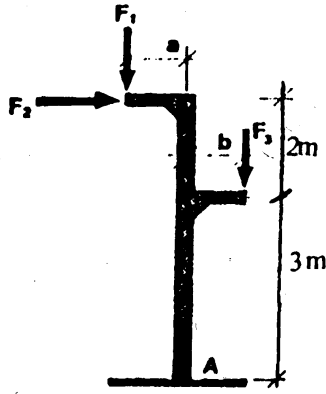
إيجاد علاقات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة

ورسمها وذلك بفرض أن $a = 3\text{m}$ $q = 1\text{t/m}$.



الشكل (43)

مسألة (44) :



الشكل (44)

المطلوب إيجاد مخططات عزوم الانعطاف والقوى

القاطعة والقوى الناعمية للمنشأ المبين بالشكل (44) حيث:

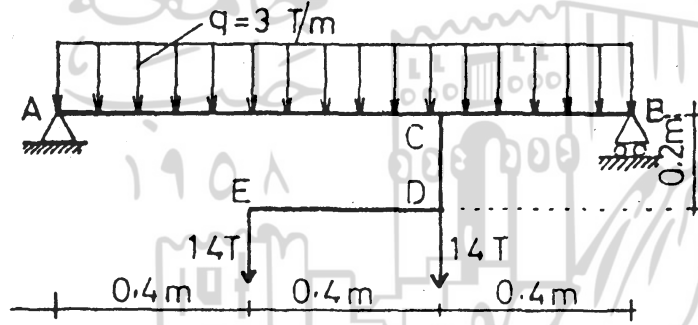
$$F_1 = 6t \quad F_2 = 2t \quad F_3 = 5t$$

$$a = 1m \quad b = 1m$$

مسألة (45) :

المطلوب إيجاد مخططات عزوم الانعطاف والقوى

القاطعة والناعمية للجائز المبين بالشكل (45) .

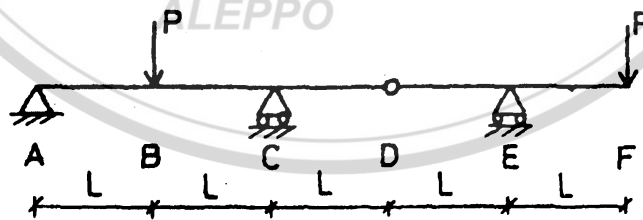


الشكل (45)

مسألة (46) :

ليكن الجائز المبين بالشكل (46) حيث D يمثل مفصلاً والمطلوب رسم مخططات

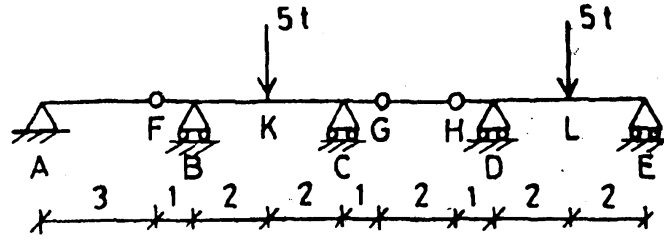
عزوم الانعطاف والقوى القاطعة وذلك بفرض أن $L=3m$ $P=6t$.



الشكل (46)

مسألة (47) : تحقق من استقرار الجائز المبين بالشكل (47) ثم ارسم مخططات عزوم

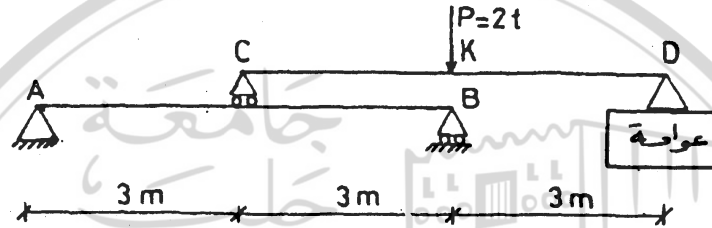
الانعطاف والقوى القاطعة ، علماً أن الأبعاد المبينة عليه هي بالأمتار (m) .



الشكل (47)

مسألة (48) :

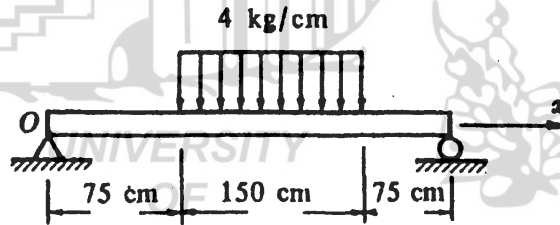
المطلوب رسم مخططات عزوم الانعطاف والقوى القاطعة للمنشأ المبين بالشكل (48).



الشكل (48)

مسألة (49) :

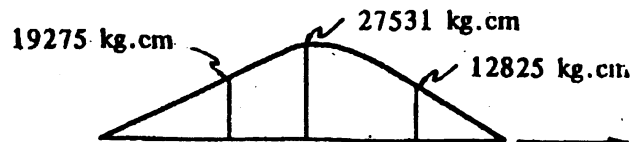
يبين الشكل (49) مخططات القوى القاطعة وعزوم الانعطاف للجوائز المبينة بالشكل والمطلوب التحقق من هذه النتائج .



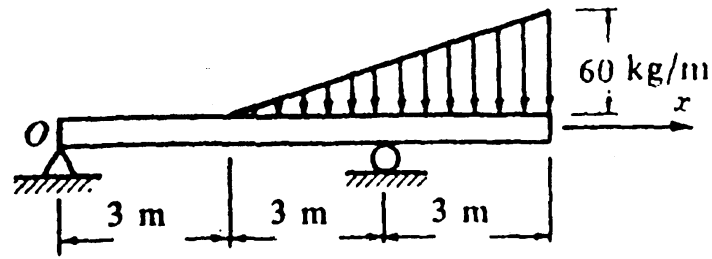
البيانات وشكل الحمولة



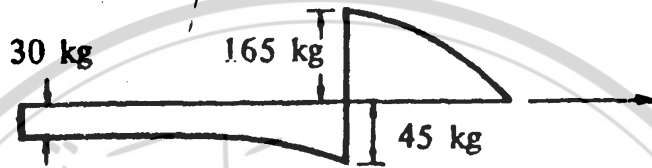
مخطط القوى القاطعة



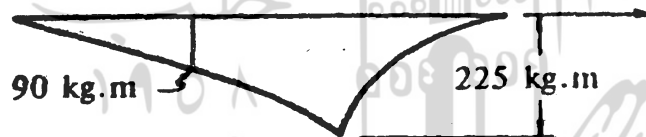
مخطط عزوم الانعطاف



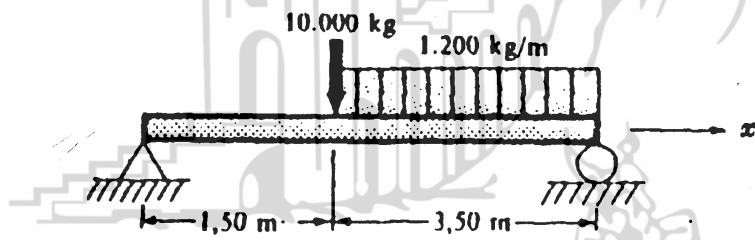
الجائز وشكل الحمولة



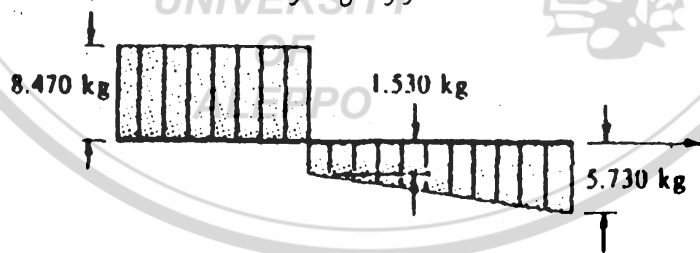
مخطط القوى القاطعة



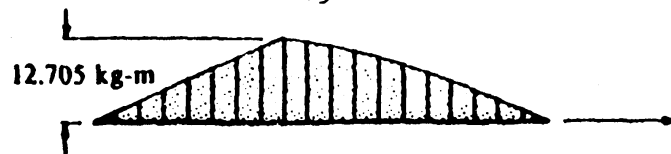
مخطط عزم الانعطاف



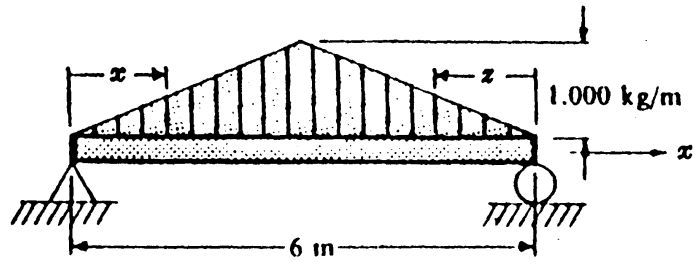
الجائز وشكل الحمولة



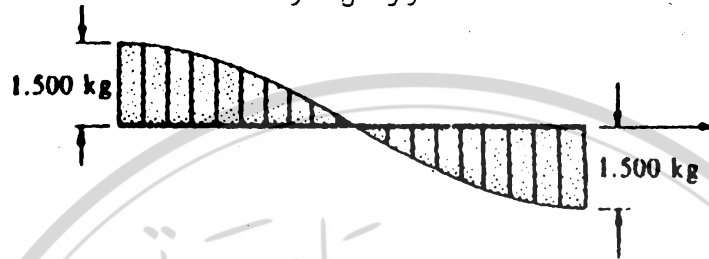
مخطط القوى القاطعة



مخطط عزم الانعطاف



الجانز وشكل الحمولة



مخطط القوى المقاطعة



مخطط عزوم الانعطاف

الشكل (49)

UNIVERSITY
OF
ALEPPO



المراجع العربية

- 1- موصلي، ضياء : ميكانيك الإنشاءات (1) — منشورات جامعة حلب ، كلية الهندسة المدنية (1995) .
- 2- موصلي، ضياء ؛ عباس ، عباس : الرياضيات (3) — منشورات جامعة حلب، كلية الهندسة المدنية (1995) .
- 3- موصلي، ضياء : الميكانيك الهندسي (3) — منشورات جامعة حلب ، كلية الهندسة المدنية (1997) .
- 4- موصلي، ضياء : مقاومة المواد — منشورات جامعة حلب — كلية الهندسة المعمارية (2000) .
- 5- موصلي، ضياء : الميكانيك الهندسي (2) — منشورات جامعة حلب ، كلية الهندسة المدنية (2000) .
- 6- موصلي، ضياء : الرياضيات التطبيقية — الجامعة الخاصة للعلوم والفنون (2004) .



المراجع الأجنبية

1. **M. Laboureur, M. Chossat, C. Cardot.** Cour de calcul mathématique modern. Dunod Paris(1968).
2. **A. Lichnerowicz.** Algèbre et analyse linéaire. Masson Paris (1960).
3. Cours Résumé et Exercices de Mathematiques (1973).
4. **J. L. TEYSSIER :** Mecanique DEVG Scientifique lere et 2eme anneex DUT (G.M.P) Armand Colin. Paris, 1988.
5. **P. DENEVE :** Mecanaique rappels de course, exercices et problemes poses aux concours d'entrée aux grandes ecoles scientifiques. Edition Marketing Paris, 1987.
6. **H. CABANNES :** Excercices de mecanique Dunod Universite, Paris, 1986.
7. **J. LTEYSSIER :** Mecanique Armand COLIN, Paris, 1985.
8. **J. BOUTIGNY :** Mecanique 1 Librairie VUIBERT, Paris, 1984.
9. **SHELLEY F. JOSEPH :** Engineering mechanics, 1980.



دليل المصطلحات العلمية

(قسم الرياضيات)



Absolute	مطلق
= convergence	تقارب مطلق
= value	قيمة مطلقة
Absolutely convergent series	سلسلة متقاربة مطلقا
Addition of vectors	جمع الأشعة
Analytic function	تابع تحليلي
Angle	زاوية
Arbitrary	كيفي - اختياري
Arc	قوس
Area	مساحة
Axis	محور
= of symmetry	محور تناظر
Boundary	حدود
Boundary confitions	شروط حدية
Boundary-value problems	مسائل القيم الحدية
Bounde	محدود
= function	تابع محدود

= sequence	متتالية محدودة
Branch	فرع
Change of variables	تغيير المتحولات
Closed	مغلق
= curve	منحني مغلق
= surface	سطح مغلق
Coefficients	أمثال
Compenents of a vector	مركبات شعاع
Constant	ثابت
Continuity	الاستمرار
Continuous	مستمر
= curve	منحني مستمر
= function	تابع مستمر
Contour	إطار - منحني محيطي بسيط
= integrals	تكاملات محيطية
Convergence	تقارب
Convergent	متقارب
= sequence	متتالية متقاربة
= series	سلسلة متقاربة
Coordinates	إحداثيات
Curves	منحنيات
Definite integral	تكامل محدد
Degree of a polynomia!	درجة كثيرة حدود

Derivative	مشتق
Derivation	اشتقاق
Defferentiability	قابلية الاشتقاق
Differential	تفاضل
Direction consines	جيوب تمام التوجيه أو التوجيهات الموجهة
Directional derivative	المشتق الموجه
Disk	قرص
Distance	مسافة
Divergent	متباعد
= sequence	متتالية متباعدة
= series	سلسلة متباعدة
Domaun	منطقة
Element	عنصر
Equation	معادلة
Even function	تابع زوجي
Expansion	نشر
Exponential function	تابع أسّي
Field	حقل
Force	قوة
Graphical representation	تمثيل بياني
Gravitation	الجاذبية الأرضية
Increment	تزايد
Indefinite integral	تكامل غير محدد

Infinite	لا نهائي
Infinity	اللا نهائية
Initial conditions	شروط ابتدائية
Initial point of a vector	نقطة البداية لشعاع
Integral	تكامل
Integration	مكاملة
Intersection	تقاطع
Interval	مجال
Inverse function	تابع عكسي
Length	طول
Limit	نهاية
Line	مستقيم
Magnitude	قياس أو طول
Many-valued function	تابع متعدد القيم
Mapping	تطبيق
Momnet	عزم
Multiplication	جداء
Natural logarithm	اللوغاريتم الطبيعي
Normal	ناظم
Numbers	أعداد
Odd function	تابع فردي
Order	رتبة
Orthogonal	متعامد

= coordinates	إحداثيات متعامدة
Parametric equations	معادلات وسيطية
Partial derivative	المشتق الجزئي
Period	دور
Periodic function	تابع دوري
Polar coordinates	الإحداثيات القطبية
Pole	قطب
Position vector	شعاع موضع
Product	جداء
Projection	إسقاط
Radius	نصف قطر
Real axis	المحور الحقيقي
Region	منطقة
Regular	نظامي
Root	جذر
Scalar	سلمي
= field	حقل سلمي
= product	الجداء السلمي
Sequence	متتالية
Simple	بسيط
Symmetric	تناظر
System	جملة
Tangent	مماس



Test	اختبار
Transformation	محول
Translation	انسحاب
Trigonometric	مثلثي
Unit vector	شعاع الواحدة
Value	قيمة
Variable	متحول
Vector	شعاع
Vector algebra	جبر الأشعة
Vector product	الجداء الشعاعي
Velocity	سرعة
Volume	حجم
Work	العمل



(قسم الميكانيك والتوازن)

Admissible loads	الحمولات المسموحة
Antisymmetric case	حالة التناظر العكسي
Applied force	قوى مطبقة
Assumption	فرضية
Axial force	قوة محورية
Ball support	مسند كروي
Bar	قضيب
Bar force	قوة مطبقة بالقضيب
Beam	جائز
Bending	انعطاف
Bending moment	عزم انعطاف
Boundary conditions	شروط حدية
Building live loads	حمولات حية للأبنية
Center - line	خط تناظر
Clamped support	مسند موثوق
Column	عمود
Compression	ضغط
Computer	حاسوب
Concentrated loads	حمولات مركزة
Concrete	بيتون
Condition equation	معادلات شرطية
Couple	مزدوجة

Dead loads	حمولات ميتة
Design	تصميم
Determinacy	تقرير
Determinante	مقرر
distributed loads	حمولات موزعة
Equations of static equilibrium	معادلات التوازن السكوني
Equilibrium	توازن
External equilibrium	توازن خارجي
External forces	قوى خارجية
Force	قوة
Frame	هيكل
Frame structures	منشآت هيكلية
Free-body diagram	مخطط الجسم الحر
Geometric stability	استقرار هندسي
Geometrically unstable	غير مستقر هندسياً
Girder	الجائز الأساسي
Hinge	مفصل
Hinged-support	مسند مفصلي
Horizontal forces	قوى أفقية
Imperfect fit	مسند مائل
Interior hinge	مفصل داخلي
Internal force	قوة داخلية
Internal member forces	قوى العناصر الداخلية
Internal work	عمل داخلي
Joint	عقدة

Limitations	تقييدات
Line loads	حمولات خطية
Loads	حمولات
Maximum	أعظم
Member	عنصر
Method of sections	طريقة المقاطع
Minimum	أصغر
Moment diagram	مخطط العزم
Pin-connected truss	جائز شبكي متصل مفصلياً
Planar structures	منشآت مستوية
Planar truss	جائز شبكي مستوي
Pressure	ضغط
Reaction	رد الفعل
Reaction forces	قوى ردود الأفعال
Restraint	تقييد
Roller bearing	مسند متأرجح
Roller support	مسند متدحرج
Rotation	دوران
Shear diagram	مخطط القص
Shear force	قوة القص
Sign conention	اصطلاح الإشارة
Slant-leg	عمود مائل
Span	بجاز
Spring	نابض
Stability	تصنيف سكوني

Statical determinancy	تقرير سكوني
Statically determinate externally	مقرر سكونياً خارجياً
Statically determinate structures	منشآت مقررة سكونياً
Statically determinate externally	غير مقرر سكونياً خارجياً
Statically indeterminate internally	غير مقرر سكونياً داخلياً
Statically indeterminate structures	منشآت غير مقررة سكونياً
Statically unstable externally	غير مستقر سكونياً خارجياً
Statically unstable internally	غير مستقر سكونياً داخلياً
Statics	علم السكون
Stiffness	صلابة
Stress	إجهاد
Structural analysis	تحليل إنشائي
Structural engineering	هندسة إنشائية
Structure	منشأ
Support conditions	شروط الاستناد
Support settlements	هبوطات مسندية
Symmetric case	حالة التناظر
Tension	شد
Truss	جائر شبكي
Uniform load	حمولة موزعة بانتظام
Unknown	مجهول
Vertical displacement	انتقال شاقولي

جَامِعَةُ
حَلَبَ
١٩٥٨



المدقق اللغوي
الدكتور مصطفى جطل

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة

لمديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

