بحوث العمليات

كلية الاقتصاد

السنة الثالثة

الفصل الأول

منشورات جامعة حلب
التعليم المفتوح
الإدارة والمحاسبة في المشروعات
الصغيرة والمتوسطة

بحوث العمليات

الدكتور ابراهيم نائب
أستاذ في قسم الإحصاء ونظم المعلومات

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

١٤٣٥ هـ - ٢٠١٤ م

بحوث العمليات

منشورات جامعة حلب
التعليم المفتوح
الإدارة والمحاسبة في المشروعات
الصغيرة والمتوسطة

بحوث العمليات

الدكتور ابراهيم نائب

أستاذ في قسم الإحصاء ونظم المعلومات

لطلاب السنة الثالثة

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

٢٠١٤ – ٢٠١٥

الفهرس

الموضوع **الصفحة**

****

الفهرس	٥
المقدمة	١٢
الوحدة الدراسية الاولى: نماذج البرمجة الخطية	١٧
الفصل الأول: مدخل إلى البرمجة الخطية	٢١
١,١. مقدمة	٢١
٢,١. بنية نماذج البرمجة الخطية	٢١
٣,١. الصيغة الرياضية لنموذج البرمجة الخطية	٢٤
١,٣,١. الصيغة الرياضية لنموذج البرمجة الخطية في حالة التعظيم	٢٤
٢,٣,١. الصيغة الرياضية لنموذج البرمجة الخطية في حالة التصغير	٢٥
٤,١. صياغة نموذج برمجة خطية	٢٧
١,٤,١. مسألة تخطيط الإنتاج	٢٨
٢,٤,١. مسألة تنظيم المزيج التسويقي الأمثل	٣٤
٣,٤,١. مسألة النقل وتوزيع المنتجات	٣٨
مسائل عامة	٤١
الفصل الثاني: الاسلوب البياني لحل النماذج الخطية	٤٥
١,٢. مقدمة	٤٥
١,٢. خطوات الأسلوب البياني لحل النماذج الخطية ذات المتغيرين	٤٥
٢,٢. الحالات الخاصة للحل البياني	٥٦
١,٢,٢. حالة استحالة الحل	٥٧

٢,٢,٢. حالة عدم امكانية تحديد قيمة عظمى لدالة الهدف	٥٨
٣,٢,٢. حالة تعدد الحلول المثلى	٥٩
مسائل عامة	٦١
الفصل الثالث: خوارزمية السمبلكس لحل نماذج البرمجة الخطية	٦٣
١,٣. مقدمة	٦٣
٢,٣. تشكيل جدول السمبلكس المختزل	٦٤
٣,٣. خوارزمية السمبلكس المطورة لحل نماذج البرمجة الخطية	٦٨
١,٣,٣. حل نماذج البرمجة الخطية في حالة التعظيم	٦٩
٢,٣,٣. حل نماذج البرمجة الخطية في حالة التصغير	٨٠
٤,٣. ملاحظات وحالات خاصة	٨٤
١,٤,٣. الشروط الخطية في البرنامج المرافق متناقضة	٨٥
٢,٤,٣. الشروط الخطية في البرنامج الأولي متناقضة	٨٦
٣,٤,٣. أحد عناصر عمود (سطر) الدوران يساوي الصفر	٨٧
٤,٤,٣. تعدد الحلول المثلى	٨٨
٥,٤,٣. أحد الشروط الخطية على شكل مساواة	٨٩
٦,٤,٣. أحد المتغيرات لا يشترط فيه عدم السلبية	٩٠
٧,٤,٣. أحد المتغيرات أو جميعها بقيم صحيحة	٩٢
مسائل عامة	١٠٣
الفصل الرابع: النماذج الخطية المترافقة	١٠٥
١,٤. مقدمة	١٠٥
٢,٤. البرامج الخطية المترافقة	١٠٥
٣,٤. تصنيف البرامج الخطية المترافقة	١٠٦
مسائل عامة	١٢١

الفصل الخامس: تحليل الحساسية	١٢٣
١,٥.مفهوم وضرورة تحليل الحساسية	١٢٣
٢,٥. تحليل الحساسية في حالة تعظيم الارباح	١٢٥
١,٢,٥.دراسة التغيرات في معاملات متغيرات دالة الهدف	١٢٦
٢,٢,٥. دراسة التغيرات في الكميات المتاحة	١٣٠
٣,٢,٥. اضافة قيد جديد (شرط خطي جديد)	١٣٨
٣,٥. تحليل الحساسية في حالة تخفيض التكاليف	١٤٠
١,٣,٥. دراسة التغيرات في معاملات متغيرات دالة الهدف	١٤٢
٢,٣,٥. دراسة التغيرات في الكميات المتاحة	١٤٣
٣,٣,٥. اضافة قيد جديد (شرط خطي جديد)	١٥١
٤,٥. استخدام مايكروسوفت اكسل/ تقنية الـ Solver لحل البرامج الخطية وتحليل الحساسية	١٥٣
١,٤,٥. تفعيل تقنية الـ Solver في برنامج الإكسل	١٥٣
٢,٤,٥. استخدام الإكسل/ تقنية الـ Solver في حل البرامج الخطية	١٥٧
مسائل عامة	١٦٥
الوحدة الدراسة الثانية: النماذج الخطية الخاصة	١٦٧
الفصل السادس: نموذج النقل	١٦٩
١,٦. مقدمة	١٦٩
٢,٦. الصيغة الرياضية لنموذج النقل	١٧٠
٣,٦. خوارزمية حل نموذج النقل	١٧٢
٤,٦. إيجاد حل أساس ابتدائي ممكن	١٧٣
١,٤,٦. طريقة الزاوية الشمالية الغربية	١٧٣
٢,٤,٦.طريقة التكلفة الأقل	١٧٦

٣,٤,٦. طريقة فوجل التقريبية	١٧٧
٥,٦. البحث عن الحل الأمثل	١٨٣
١,٥,٦. طريقة الحلقات المغلقة (طريقة المسار المتعرج)	١٨٤
٢,٥,٦. طريقة التوزيع المعدلة (طريقة المضاريب)	١٩٠
٦,٦. ملاحظات هامة حول نموذج النقل وخوارزميتها	١٩٧
١,٦,٦. حالة تنوع المنتجات في كل طلبية (إرسالية)	١٩٧
٢,٦,٦. حالة وجود فائض في العرض أو فائض في الطلب	١٩٧
٣,٦,٦. حالة C_{ij} تقيس ربح نقل الوحدة الواحدة	٢٠٣
مسائل عامة	٢٠٦
الفصل السابع: نموذج التعيين	٢٠٩
١,٧. مقدمة	٢٠٩
٢,٧. الصيغة الرياضية لنموذج التعيين	٢٠٩
٣,٧. الخوارزمية الهنغارية	٢١٠
٤,٧. حالات خاصة	٢١٤
١,٤,٧. حالة عدم تساوي عدد الاسطر مع عدد الاعمدة	٢١٤
٢,٤,٧. حالة مصفوفة ارباح عوضاً عن مصفوفة تكاليف	٢١٦
٣,٤,٧.حالة عدم تخصيص موظف محدد لأداء مهمة محددة	٢١٨
مسائل عامة	٢٢٠
الفصل الثامن: نموذج البائع المتجول	٢٢٣
١,٨. مقدمة	٢٢٣
٢,٨. خوارزمية أقرب جار	٢٢٤
مسائل عامة	٢٢٩

الفصل التاسع: نموذج التدفق الأعظمي	٢٣١
١,٩. مقدمة	٢٣١
٢,٩. الشكل العام لنموذج التدفق الأعظمي	٢٣١
٣,٩. الصيغة الرياضية لنموذج التدفق الأعظمي	٢٣٤
٤,٩. الأساليب الخاصة لحل نموذج التدفق الأعظمي	٢٣٦
١,٤,٩. خوارزمية فورد – فليكرسون	٢٣٦
٢,٤,٩. خوارزمية نائب وماغوط	٢٤١
٣,٤,٩. ملاحظات ومقارنات	٢٥٠
مسائل عامة	٢٦٠
الوحدة الدراسة الثالثة: التحليل الشبكي	٢٦١
الفصل العاشر: تخطيط وجدولة المشاريع	٢٦٣
١,١٠. مقدمة	٢٦٣
٢,١٠. تعاريف ومصطلحات أساسية	٢٦٥
٣,١٠. قواعد رسم الشبكة	٢٦٦
٤,١٠. تحديد المسار الحرج في الشبكات وحساب طوله	٢٧٢
١,٤,١٠. دراسة المسار الحرج في شبكات CPM	٢٧٣
٢,٤,١٠. دراسة المسار الحرج في شبكة PERT	٢٨٠
٣,٤,١٠. الخواص الاحتمالية الاخرى لشبكات PERT	٢٨١
٥,١٠. حساب الوقت الفائض في شبكات CPM و PERT	٢٨٣
٦,١٠. طريقة جديدة لحساب الازمنة المبكرة والمتأخرة والوقت الفائض	٢٨٤
مسائل عامة	٢٨٨
الوحدة الدراسة الرابعة: نظرية الالعاب	٢٩١
الفصل الحادي عشر: الالعاب الاستراتيجية الثنائية	٢٩٥

١,١١. تعاريف ومفاهيم أساسية	٢٩٥
٢,١١. لعبة ذات شخصين ومجموع صفري	٢٩٧
٣,١١. خوارزمية حل الألعاب ذات الشخصين ومجموع صفري	٢٩٩
١,٣,١١. المرحلة الأولى: إيجاد الاستراتيجيات البسيطة ونقاط الاستقرار إن أمكن.	٢٩٩
٢,٣,١١. المرحلة الثانية: مصفوفة اللعبة لا تحوي نقطة استقرار	٣٠٤
٣,٣,١١. المرحلة الثالثة: مصفوفة اللعبة من الشكل (٢ × ٢)	٣٠٤
٤,٣,١١. المرحلة الرابعة: مصفوفة اللعبة من الشكل (mxn)	٣٠٧
٥,٣,١١. المرحلة الخامسة: تحويل لعبة إلى نموذج برمجة خطية	٣١١
٤,١١. خوارزمية حل لعبة بأسلوب السمبلكس	٣١٧
مسائل عامة	٣٢٢
الفصل الثاني عشر: الالعاب الاستراتيجية متعددة الاطراف	٣٢٥
١,١٢. مقدمة	٣٢٥
٢,١٢. لعبة ذات n شخص ومجموع صفري	٣٢٥
١,٢,١٢. التحالفات	٣٢٦
٢,٢,١٢. التخصيصات	٣٣٣
٣,١٢. الألعاب الاستراتيجية بدون المجموع الصفري	٣٣٧
مسائل عامة	٣٤٠
المراجع العربية	٣٤١
المراجع الأجنبية	٣٤٤
المصطلحات العلمية	٣٤٧
ملحق (جدول التوزيع الطبيعي)	٣٥٢

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة الكتاب

تعود البدايات الأولى لبحوث العمليات إلى الحرب العالمية الثانية، عندما استدعت الإدارة العسكرية في بريطانيا فريقاً من العلماء من مختلف التخصصات لدراسة المسائل الاستراتيجية المتعلقة بالدفاع الأرضي و الجوي، بهدف الاستخدام الأمثل و الفعال للموارد الحربية المحدودة، واهتم الفريق أيضاً بدراسة الأسلوب الأمثل لاستخدام الرادارات الجديدة وكفاءه الأنواع المتاحة من قاذفات القنابل.

إن النتائج المشجعة التي توصل إليها فريق بحوث العمليات البريطاني، حثت الإدارة الحربية الأمريكية على القيام بأنشطة مماثلة، اشتملت على دراسة أنماط جديدة لنقل الجنود و إمداداتهم و تخطيط عمليات زرع الألغام في البحار، و دراسة الاستخدام الأمثل للتجهيزات الإلكترونية.

بعد انتهاء الحرب العالمية الثانية، ونتيجة للنجاح الكبير الذي حققته الإدارات العسكرية البريطانية والأمريكية، اتجهت أنظار الإدارات الاقتصادية والإدارية والهندسية المختلفة نحو **هذا الحقل الجديد من المعرفة حقل "بحوث العمليات"**، وبدأت تلك الإدارات في الدول المتقدمة بإنشاء مراكز بحوث متخصصة تضم اختصاصيين في مختلف المجالات العلمية من أجل إيجاد الحلول المثلى للمشكلات التي كانت تواجههم.

إن أهمية علم بحوث العمليات تأتي من مقدرته على نمذجة المشاكل والمواقف الحقيقية في المجالات المختلفة، واستخدامه لأساليب وخوارزميات علمية رياضية في تحليل ودراسة تلك النماذج واستخلاص الحلول المثلى التي تساهم بشكل فعال في عملية اتخاذ القرار المناسب، إلا أن هذا العلم ظل لفترة طويلة يعاني من عدم إمكانية نمذجة المواقف والمشاكل الكبيرة الحجم والمعقدة التركيب، وذلك إما بسبب هيكلية الأساليب

والخوارزميات المستخدمة التي يحتاج تطبيقها إلى وقت وجهد كبيرين، أو بسبب أن حجم البيانات الأولية اللازمة لتطبيق الأساليب والخوارزميات كبيراً ويستهلك وقتاً وجهداً ودقة كبيرة، بحيث أن الوقوع بالخطأ أثناء التطبيق مهما كان هذا بسيطاً، ينعكس سلباً على الفائدة المرجوة من الحلول المستخلصة.

وقد ساهم الحاسوب بإمكانياته الهائلة في تذليل أغلب الصعوبات، وإعطاء علم بحوث العمليات دفعاً جديداً وتقدماً مميزاً وأهمية على جميع المستويات فقد أصبحا معاً (الحاسوب بما يتملك من القدرة على حفظ وسرعة تداول ومعالجة البيانات مهما يكن حجمها وبدقة فائقة، وبحوث العمليات بما يتملك من أساليب وخوارزميات حل كثيرة) أداة فعالة وهامة لدى متخذي القرار في مختلف الميادين لمساعدتهم في اتخاذ قرارات سليمة ورشيدة ودقيقة وبالوقت المناسب.

أهم النماذج التي يعالجها علم بحوث العمليات:

أولاً: النماذج الرياضية (Mathematical Models): يتم معالجتها باستخدام طرق حسابية، نذكر من هذه النماذج: النماذج الخطية Linear Models، النماذج اللاخطية Nonlinear Models، نماذج الأعداد الصحيحة Integer Models، النماذج التربيعية Quadratic Models، النماذج الديناميكية Dynamic Models

ثانياً: النماذج الاحتمالية (Probability Models): وهي نماذج رياضية تخضع بعض أو كل متغيراتها إلى قوانين احتمالية، من هذه النماذج نذكر: نماذج صفوف الانتظار Queuing Models، نماذج الألعاب Game Models، نماذج التخزين Inventory Models، النماذج الشبكية Network Models (PERT)

ثالثاً: نماذج البحث والاستقصاء والمحاكاة (Simulation and Heuristic Models) والتي تهدف إلى تقليد النظام المدروس بنظام فرضي يحاكي النظام الحقيقي ومراقبة التغيرات التي تطرأ على النموذج المحاكى خلال فترة زمنية محددة.

يتضمن هذا الكتاب بعض مواضيع بحوث العمليات ذات الاستخدام الواسع في الحياة العملية موزعة على أربع وحدات رئيسية، كل منها مكونة من عدة فصول كما يلي:

الوحدة الدراسية الاولى تناولنا فيها بشكل مفصل البرمجة الخطية كأحد أهم نماذج بحوث العمليات وأكثرها شيوعاً ضمن عدة فصول:

حيث تناولنا في الفصل الاول مفهوم البرمجة الخطية وبنية نماذجها بالإضافة إلى آلية صياغة نماذجها، وفي القصل الثاني تناولنا الاسلوب البياني لحل نماذج البرمجة الخطية، وفي الفصل الثالث مفهوم الترافق وأهميته، وفي الفصل الرابع قدمنا أحدث خوارزمية توصل إليها العلم في حل البرامج الخطية مهما يكن حجمها ونوعها، أما الفصل الخامس فقد تناولنا تحليل الحساسية لدراسة اثر التغيرات التي تحدث في النموذج الأولي للمشكلة بالاعتماد على جدول الحل الأمثل وحساب اثر هذه التغيرات مباشرة دون اللجوء إلى حل المسألة مجدداً.

الوحدة الدراسية الثانية تضمنت بعض نماذج البرمجة الخطية التي تحل بطرق خاصة بالإضافة الى حلها باسلوب السمبلكس:

في الفصل السادس تناولنا ايجاد الحل الامثل لنماذج النقل، بحيث تلبي حاجة مراكز الاستيراد بأقل تكلفة ممكنة مع الأخذ بعين الاعتبار الكميات المتوفرة في كل مركز تصدير. وفي الفصل السابع تناولنا إيجاد الحل الامثل لنماذج التخصيص (التعيين) لتوزيع n وظيفة (مهمة) على n عامل أو (آلة) وينفذ كل وظيفة عامل واحد فقط، بحيث تكون تكلفة التخصيص (التعيين) الإجمالية أقل ما يمكن. وفي القصل الثامن تناولنا ايجاد الحل الامثل لنموذج البائع المتجول الذي ينطلق من مكان معين ويزور n-1 مكاناً آخر ثم يعود إلى مكان انطلاقه بشرط أن يزور كل مكان مرة واحدة، بحيث تكون تكلفة خط الرحلة أقل ما يمكن. أما في الفصل التاسع فقد تناولنا ايجاد الحل الامثل لنموذج التدفق الأعظمي لتمرير أكبر كمية ممكنة من مركز (منبع) إلى مركز آخر (مصب) من خلال

مراكز وسيطة تصل بينها شبكة من الطرق ذات سعات معينة، ويفترض أنه لا يخزن في أي مركز وسيط أية مادة.

الوحدة الدراسية الثالثة فقد تضمنت التحليل الشبكي:

حيث تناولنا في الفصل العاشر مفهوم شبكات الاعمال وآلية تحويل المشروع الى شبكة أعمال **واستخدام** كل من اسلوب المسار الحرج CPM وتقنية تقييم ومراجعة المشروع PERT أداة إدارية فعالة في تخطيط وجدولة تنفيذ المشروعات ومتابعة عمليات التنفيذ والرقابة عليها.

الوحدة الدراسية الرابعة خصصت لدراسة نظرية الألعاب:

حيث تناولنا في الفصل الحادي عشر مفهوم الالعاب واساليب ايجاد الحل الامثل لنماذج الالعاب بين شخصين ومجموع صفري، لتحديد استراتيجيات كل لاعب وقيمة اللعبة ولصالح من باستخدام: نقطة التوازن، الطريقة الجبرية، حذف التراكيب المحكومة، اسلوب السمبلكس. اما الفصل الثاني عشر فقد تناولنا اساليب ايجاد الحل الامثل لنماذج الالعاب بين عدة اشخاص ومجموع صفري، باعتماد اسلوب التحالفات أو التخصيصات بالإضافة إلى ايجاد الحل الامثل لنماذج الالعاب بين عدة اشخاص بدون المجموع الصفري.

نرجو من الله تعالى ان أكون قد وفقت في تحقيق الهدف الأساسي من هذا الكتاب، والذي يتجلى في تغطية مفردات مادة بحوث العمليات التي تدرس في الجامعات في أقسام العلوم الاقتصادية والإدارية والهندسية والحاسوبية، وتلبي رغبات المهتمين بتطبيقات بحوث العمليات، وتقدم للقارئ أياً كان موقعه، أساليب المعالجة السهلة والبسيطة لحل المشاكل المختلفة في الحياة العملية بالإضافة إلى لأمثلة التوضيحية التي تشرح المفاهيم الأساسية المختلفة، متجنبين البراهين الرياضية غير الضرورية للقارئ من أجل استيعاب مفردات هذا الكتاب وفهم جوانبه التطبيقية.

وإني إذ أضع هـذا الكتـاب بـين أيـدي طلابنـا وزملائنـا الأعـزاء، لا أدعـي أنـني وصلت إلى درجة الكمال، ولكن حاولت أن أساهم بجهد متواضع في بناء مكتبة عربية تزخر بالمؤلفات العلمية في هذا المضمار، كما أرجو من الزملاء الأعزاء أن لا يبخلوا علينا بأية ملاحظات يرونها ضرورية من أجل تطوير مادة هذا الكتاب لتكون على أحسن صورة وأتمها .

نسأل الله تعالى أن يجعله علماً نافعاً لأبناء أمتنا العربية وأن يمن علينا بتوفيقه ورضاه، والله ولي التوفيق

المؤلف

أ. د. ابراهيم نائب

الوحدة الدراسية الأولى
البرمجة الخطية
Linear Programming

تمهيد

أول محاولة في مجال البرمجة الخطية قام بها العالم جورج ستيغلر George Stiegler عام ١٩٤٥، فقد حاول آنذاك دراسة الحد الأدنى للنفقات اللازمة لإنسان ما، لتأمين الكميات الكافية لحياته والمكونة من (٩) مقومات غذائية أساسية (فيتامين، حديد، بروتين،....) يحصل عليها الإنسان من (٧٧) سبع وسبعين مادة غذائية كانت متوفرة في الأسواق حينئذ. وكان الهدف من هذه الدراسة مقارنة غلاء المعيشة قبل الحرب العالمية الثانية وبعدها في أوروبا. هذه الدراسة قادت هذا العالم إلى وضع أول نموذج رياضي سماه (البرنامج الخطي) (linear Program) وقد حاول حل هذا النموذج بالطرق الرياضية التي كانت معروفة مثل طريقة لاغرانج Lagrange Method، وكتب حينئذ: "يبدو أنه لا توجد أية طريقة مباشرة لإيجاد الحد الأدنى لدالة خطية تخضع متغيراتها لشروط خطية"، لذلك اضطر إلى استخدام طريقة المحاولة والتجريب للتقرب من حل المسألة.

وبعد سنتين أي عام ١٩٤٧، أوجد العالم جورج دانتزيغ G. Dantzing طريقة عملية وبسيطة أسماها طريقة السمبلكس Simplex Method ولم تنشر إلا في عام ١٩٥١ ، إلا أن هذه الطريقة طرأ عليها تعديلات كثيرة وتطورات حتى تلائم جميع الحالات الممكنة للنماذج الخطية التي رافقت التطورات الاقتصادية والصناعية في العالم.

تشكل البرمجة الخطية جزءاً هاماً من بحوث البرمجة الرياضية التي تشتمل على البرمجة الخطية والبرمجة اللاخطية، كما أن البرمجة الرياضية بدورها تشكل جزءاً من مواضيع اكثر عمومية منه وهي "بحوث العمليات".

وتعد البرمجة الخطية إحدى أهم الأساليب الكمية وأكثرها شيوعاً واستخداماً في تحليل المواقف الإدارية والتخطيط الإداري والهندسي للحصول على النتائج التي تجمع بين النشاطات الإنسانية المختلفة والموارد المتاحة، وتساهم في توفير المعلومات والحقائق للإدارة لتتمكن الأخيرة من اتخاذ قرارات علمية سليمة. وزادها الحاسوب أهمية عندما أعطاها السرعة في تنفيذ خطواتها وفي توفير الجهد البشري خاصة عندما يكون عدد المتغيرات كبيراً، ومن أهم المواقف التي تستخدم أسلوب البرمجة الخطية: تخطيط الإنتاج والاستغلال الأمثل للطاقة الإنتاجية، تحديد المزيج التسويقي للمواد الخام للحصول على مركب محدد، اختيار أفضل أسلوب لنقل المنتجات وتوزيعها.

أهداف الوحدة الدراسية الأولى

بعد دراسة هذه الوحدة سيكون الطالب قادراً على:

١. صياغة النموذج الرياضي للمواقف الاقتصادية والادارية من خلال دراسة البدائل والإمكانيات المتاحة وتحليلها ثم البحث عن أفضل تلك البدائل والإمكانيات والتي تحقق الأهداف المادية للإدارة مثل: الحصول على اكبر ربح ممكن أو تخفيض التكاليف إلى أقصى حد ممكن.

٢. ايجاد الحل الامثل للنماذج الخطية ذات المتغيرين باستخدام الاسلوب البياني من خلال تحديد منطقة في المستوي تمثل مجموعة الحلول الممكنة للبرنامج الخطي ومن ثم التفتيش ضمن تلك المنطقة عن النقطة المثلى التي تعطي لدالة الهدف افضل قيمة.

٣. استيعاب مفهوم البرامج الخطية المترافقة لما لها من أهمية كبيرة في عرض مفهوم خوارزمية السمبلكس المطورة وتسهيل الوصول الى الحل الامثل في بعض تطبيقات بحوث العمليات مثل نظرية الالعاب كما سنرى لاحقاً

٤. ايجاد الحل الامثل للنماذج الخطية مهما يكن عدد المتغيرات والقيود الخطية باستخدام خوارزمية السمبلكس المطورة والتي يمكنها حل جميع أشكال نماذج البرمجة الخطية بشكل فعال، وبحسابات بسيطة ومختصرة.

٥. استنتاج الحل الأمثل للبرامج الخطية المترافقة مباشرة من جدول السمبلكس الأخير الذي يعطي الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي.

٦. اجراء تحليل الحساسية لدراسة اثر التغيرات التي تحدث في النموذج الأولي للمشكلة وذلك بالاعتماد على جدول الحل الأخير الذي يعطي الحل الأمثل وحساب اثر هذه التغيرات مباشرة دون اللجوء إلى حل المسألة مجدداً.

الفصل الأول

مدخل إلى البرمجة الخطية

١,١. مقدمة

تعرف البرمجة الخطية بأنها الأسلوب الرياضي الذي يبحث عن أفضل الطرق لاستخدام الموارد المتاحة عن طريق تحويل المشكلة المدروسة إلى علاقات رياضية خطية. بكلام آخر تهدف البرمجة الخطية إلى دراسة البدائل والإمكانيات المتاحة وتحليلها ثم البحث عن أفضل تلك البدائل والإمكانيات والتي تحقق الأهداف المادية للإدارة مثل: الحصول على اكبر ربح ممكن أو تخفيض التكاليف إلى أقصى حد ممكن.

٢,١. بنية نماذج البرمجة الخطية

إن جميع المواقف الاقتصادية والإدارية التي تقود إلى نماذج رياضية خطية تتصف بالصفات التالية:

أولاً: وجود عدد من المتغيرات Variables (تدعى متغيرات القرار)، التي يجب تحديد قيمها للوصول إلى الهدف المنشود (اكبر ربح، أقل تكلفة).هذه المتغيرات تعبر عن أحد المفاهيم التالية:

١- كميات إنتاج لمنتجات معينة.

٢- ساعات عمل في أقسام معينة من مصنع أو شركة أو مؤسسة.

٣- مبالغ من المال المخصص لأنشطة أو فعاليات معينة.

٤- مقدار من القطع الأجنبي المخصص لاستيراد أصناف من السلع.

٥- كميات من مواد منقولة على طريق معينة أو بوسائل نقل معينة.

٦- كمية المواد الأولية اللازمة لتصنع منتج معين.

سنرمز لهذه المتغيرات بـ $x_1, x_2, x_3, \ldots. x_n$ ، حيث n عدد المتغيرات في المسألة المدروسة.

ثانياً: وجود هدف يراد الوصول إليه، يعبر عنه رياضياً بدالة خطية تدعى دالة الهدف Objective Function وتأخذ الشكل العام التالي:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

حيث c_j أعداد حقيقية تدعى بمعاملات مساهمة المتغيرات في دالة الهدف، وتصنف الأهداف التي تعالجها البرمجة الخطية إلى مجموعتين:

١- تعظيم دالة الهدف Maximize: كأن نسعى إلى تحقيق اكبر ربح ممكن أو توفير أعظمي للوقت والجهد أو زيادة الدخل القومي إلى أقصى حد ممكن، وسنرمز لدالة الهدف في هذه الحالة بحرف كبير Z ونضع بجانب الدالة من اليمين Max→ أي:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to Max$$

٢- تصغير دالة الهدف Minimize: كأن نسعى إلى تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن، أو تقليل الخسائر قدر الإمكان، وسنرمز لدالة الهدف بحرف صغير z ونضع بجانب الدالة من اليمين Min→ أي:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to Min$$

ثالثاً: وجود علاقة تأثير بين المتغيرات يعبر عنها رياضياً بمتراجحات (متباينات) تدعى الشروط الخطية Linear Conditions أو قيود المسألة Constraints وتأخذ أحد الشكلين التاليين حسب نوع دالة الهدف:

١. إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم أي Max فإن الشروط الخطية تأخذ الشكل:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad ; \ i=1, 2, \ldots, m$$

٢. إذا كانت دالة الهدف من نوع تصغير أي Min فإن الشروط الخطية تأخذ الشكل:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \qquad ; \ i=1, 2, \ldots, m$$

وفي كلا الشكلين فإن: n تعبر عن عدد المتغيرات في النموذج الخطي، و m تعبر عن عدد قيود المسألة (عدد الشروط الخطية)، و a_{ij} هي أعداد حقيقية تدعى معاملات مساهمة المتغيرات في قيود المسألة، و b_i أعداد حقيقية تعبر عن الموارد المتاحة أو المتطلبات اللازمة لكل قيد من قيود المشكلة.

رابعاً: يشترط على جميع المتغيرات أن تكون غير سالبة Non negativity restriction أي:

$$x_j \ge 0$$

لأن المتغيرات في جميع نماذج البرمجة الخطية تعبر عن كميات ، والكميات لا يمكن أن تكون سالبة، وإذا صدف أن أحد المتغيرات لا يشترط فيه عدم السلبية يجب التخلص منه كما سنرى فيما بعد.

خامساً: وجود شروط أخرى يجب أن تحققها المتغيرات بغض النظر عن مردودها من حيث الهدف الذي يجب أن تحققه مثلاً:

١- كأن لا تقل قيمة أحد المتغيرات عن كمية معينة بسبب التزامات معينة للإدارة صاحبة المشكلة.

مثال(١):إذا كانت الإدارة قد باعت الكمية 50 وحدة من x_1 مسبقاً، عندئذ يجب إنتاج على الأقل 50 وحدة من النوع x_1 ، وهذا يقتضي إضافة شرط إلى النموذج الرياضي الخطي وهو أن المتغير x_1 يجب أن يكون اكبر أو يساوي من 50 أي:

$$x_1 \ge 50$$

٢- كأن لا تزيد قيمة أحد المتغيرات عن كمية معينة بسبب حجم الطلب المتدني على المنتج الذي يمثله هذا المتغير .

مثال(٢): بسبب وجود منتج منافس في السوق للمنتج x_1، وحتى يبقى اسم المصنع ومنتجاته موجودة في الأسواق فإن ادارة المصنع قد تقرر إنتاج كمية محددة منه بحيث لا تزيد عن إمكانية استيعاب السوق وهي 10 وحدات، وهذا يقتضي إضافة شرط إلى النموذج الرياضي الخطي وهو أن المتغير x_1 يجب أن يكون اصغر أو يساوي من 10 أي:

$$x_1 \leq 10$$

٣- كأن يشترط على المتغيرات أو بعضها أن تكون بقيم صحيحة، وخاصة إذا كانت المتغيرات تعبر عن عدد عمال أو إنتاج منتج يقاس بالقطعة وليس بأجزائها، وهذا يقتضي إضافة شرط إلى النموذج الرياضي الخطي وهو أن المتغير أو المتغيرات يجب أن تكون قيماً صحيحة (تامة، ليست أعداداً عشرية)

٣,١. الصيغة الرياضية لنموذج البرمجة الخطية

١,٣,١. الصيغة الرياضية لنموذج البرمجة الخطية في حالة التعظيم

يمكن كتابة الصيغة الرياضية للبرنامج الخطي في حالة التعظيم بأحد الاشكال التالية:

- الصيغة المختصرة:

دالة الهدف $$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow Max$$

الشروط الخطية $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad , \quad i = 1,2,...,m$$

شروط عدم السلبية $$x_j \geq 0$$

- الصيغة المفصلة :

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots\dots\dots + c_n x_n \rightarrow Max$$

$$\begin{aligned}
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
& \vdots \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n \le b_m \\
& x_1 \ge 0 ,\ x_2 \ge 0 ,\ \dots,\ x_n \ge 0
\end{aligned}$$

- صيغة المصفوفات:

$$\begin{aligned}
& Z = CX \rightarrow Max \\
& AX \le B \\
& X \ge 0
\end{aligned}$$

حيث:

C شعاع سطر من R^n :

$$C = [c_1\ c_2\ \dots\dots\ c_n]$$

B شعاع عامود من R^m ،

X الشعاع المطلوب إيجاده من R^n ،

A مصفوفة من المرتبة (m,n) :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

٢,٣,١. الصيغة الرياضية لنموذج البرمجة الخطية في حالة التصغير

يمكن كتابة الصيغة الرياضية للبرنامج الخطي في حالة التصغير بأحد الأشكال التالية:

- الصيغة المختصرة:

دالة الهدف

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow Min$$

الشروط الخطية

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad ; \quad i = 1,2,....,m$$

شروط عدم السلبية

$$x_j \geq 0$$

- الصيغة المفصلة :

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots\dots\dots + c_n x_n \rightarrow Min$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_1 \geq 0 \; , \; x_2 \geq 0 \; , \; x_n \geq 0$$

- صيغة المصفوفات:

$$z = CX \rightarrow Min$$

$$AX \geq B$$

$$X \geq 0$$

حيث:

C شعاع سطر من R^n :

$$C = [c_1 \; c_2 \; \dots\dots \; c_n]$$

B شعاع عامود من R^m ،

X الشعاع المطلوب إيجاده من R^n ،

A مصفوفة من المرتبة (m,n) :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad , \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

٤,١ . صياغة نموذج برمجة خطية

تعتبر هذه المرحلة من أعقد المراحل في تحليل المشاكل الإدارية أو الاقتصادية أو الهندسية، لأنه بمجرد الانتهاء من صياغة المشكلة بشكل كمي تصبح بقية المراحل سهلة، حيث أن المراحل المتبقية تتضمن إيجاد حل البرنامج المصاغ بإحدى الخوارزميات المعروفة (البيانية – السمبلكس...)، وإذا استخدم الحاسوب في إيجاد الحل المناسب فنكون بذلك قد اختصرنا وقتاً وجهداً كبيرين.

ولصياغة النموذج الرياضي الخطي لمعظم المشاكل التي تؤول إلى برمجة خطية نتبع الخطوات التالية المتضمنة في مرحلتين أساسيتين:

المرحلة الأولى: التعبير عن المشكلة بصورة وصفية، وذلك من خلال تحديد ما يلي:

١- تحديد الهدف النهائي للمشكلة المدروسة، أي تحديد ما إذا كانت تتعلق بتعظيم الأرباح أو تخفيض التكاليف، أو تقليل كمية عناصر الإنتاج المستخدمة، أو الاستفادة القصوى من عنصر العمل البشري وغيرها من الأهداف.

٢- توضيح العلاقة الموجودة بين الهدف والمتغيرات التي يستطيع متخذ القرار السيطرة عليها.

٣- تعريف القيود المتعلقة بالمشكلة المدروسة.

المرحلة الثانية: تحويل الشكل الوصفي للمشكلة إلى نموذج رياضي وذلك باتباع الخطوات التالية:

١- تحديد المتغيرات x_j حيث $j=1,2,\ldots n$ المتعلقة بالمشكلة وتعريفها مع تعريف وحدات القياس المستعملة بالنسبة لكل متغير.

٢- تحديد معاملات مساهمة المتغيرات في تحقيق الهدف c_j مع تعريف الوحدات المستعملة لقياس تلك المساهمة.

٣- تحديد دالة الهدف مع التأكد من استخدام وحدة القياس نفسها.

٤- تحديد معاملات المتغيرات (معدلات الإحلال) a_{ij} مع الأخذ بعين الاعتبار وحدات القياس المناسبة لكل معامل.

٥- تحديد الموارد المتاحة أو المتطلبات اللازمة لحل المشكلة، أي الثابت إلى يمين الشروط الخطية b_i مع تحديد وحدات قياس الموارد المستخدمة.

٦- التعبير عن القيود المتعلقة بكل مورد من الموارد المتاحة بصورة رياضية والتأكد من انسجام وحدات القياس لكل من القيود.

٧- تحديد شروط عدم السلبية المتعلقة بالمتغيرات في المشكلة المطروحة، أو تحديد الشروط الأخرى إن وجدت.

ومن اجل إيضاح كيفية بناء وصياغة النموذج الخطي سنورد في الفقرات التالية بعض الأمثلة المعبرة عن المسائل الاقتصادية والإدارية.

١,٤,١. مسألة تخطيط الإنتاج

لنفرض أن مصنعاً ينتج الأنواع A_j من المنتجات $(j=1,2,\ldots n)$ وذلك باستخدام المواد الأولية B_i $(i = 1,2,\ldots m)$ والتي يتوفر منها في الدورة الإنتاجية الواحدة الكميات: b_i $(i=1,2,\ldots.m)$ فإذا كانت الوحدة الواحدة من المنتج A_j تستهلك من المادة الأولية B_i الكمية a_{ij} وإذا كان الربح الصافي للمصنع من إنتاج الوحدة الواحدة من المنتج A_j هو c_j والمطلوب تنظيم الإنتاج في هذا المصنع بحيث يكون الربح أعظمياً.

ويمكن عرض معطيات هذه المسألة من أجل السهولة في الجدول التالي:

المنتجات / المواد الأولية	A_1	A_2	…..	A_n	الكميات المتاحة من المواد الأولية
B_1	a_{11}	a_{12}	…..	a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	…..	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
B_m	a_{m1}	a_{m2}	…..	a_{mn}	b_m
الربح في الوحد الواجدة من A_j	c_1	c_2	…..	c_n	

باتباع خطوات صياغة نموذج البرمجة الخطية المذكورة آنفاً نجد:

أولاً: تحديد المشكلة بصورة وصفية:

تهتم هذه المشكلة بتخطيط الإنتاج خلال الدورة الإنتاجية من أجل الحصول على اكبر ربح ممكن مع الأخذ بعين الاعتبار الكميات b_i المتوفرة من المواد الأولية في الدورة الإنتاجية الواحدة.

ثانياً: صياغة المشكلة بصورة رياضية:

- **تحديد المتغيرات**: لنفرض أن x_1 , x_2 ,…. x_n الكميات التي يجب إنتاجها من المنتجات A_1 ,A_2 , …… A_n على الترتيب.
- **تحديد دالة الهدف**: إن دالة الهدف لهذا المصنع هي زيادة كمية الأرباح الممكن الحصول عليها إلى الحد الأقصى.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \text{Max}$$

حيث يعبر عن c_j $(j = 1,2,\ldots,n)$ بوحدات نقدية، وتمثل c_j مساهمة الوحدة الواحدة من المنتج في الربح.

- **تحديد القيود (الشروط الخطية)**: وحتى نستطيع صياغة الشروط لابد من تحديد معاملات المتغيرات x_j والموارد المتاحة للإنتاج مع ملاحظة ما يلي:

١- أن تكون وحدات القياس المستعملة على يمين المعادلة أو المتباينة مطابقة لوحدات القياس الموجودة على يسار المعادلة أو المتباينة.

٢- يمكن التعبير عن كل شرط من الشروط بوحدات القياس المناسبة، كأن يعبر عن الشرط الأول بالوحدات النقدية والشرط الثاني بساعات العمل والشرط الثالث بالأوزان أو الأمتار أو أية وحدات قياس مناسبة تتلاءم مع طبيعة المشكلة.

إن الشرط الأول في هذه المشكلة يمكن تحديده بالشكل التالي:

إن كمية المواد الأولية B_1 اللازمة لصنع كل المنتج A_1 هي $a_{11}x_1$ ، ولصنع كل المنتج A_2 هي $a_{12}x_2$ ، ....، ولصنع كل المنتج A_n هي $a_{1n}x_n$ ومجموع ما يلزم من المواد الأولية B_1 لصنع المنتجات يجب أن لا يتعدى الكمية المتوفرة من هذه المواد في الدورة الإنتاجية الواحدة وهي b_1 وهكذا يكتب الشرط الأول بالشكل التالي:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1$$

وبنفس الطريقة بالنسبة للشروط الأخرى.

أما الشروط الإضافية والمتعلقة بكميات المنتجات فهي شروط عدم السلبية أي:

$$x_j \ge 0$$

وبجمع الشروط السابقة مع شرط عدم السلبية ودالة الهدف يصبح النموذج الخطي بالشكل التالي:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \text{Max}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \ge 0 \quad ; \quad j = 1,2,\ldots n$$

في مثل هذه المسائل الاقتصادية أو الإدارية قد يكون ما أسميناه مواد أولية B_i هي ساعات عمل متوفرة في أقسام معينة من أقسام المصنع (أو في مرحلة معينة من مراحل التصنيع) وعندئذ تكون المعاملات a_{ij} هي ساعات العمل اللازمة لإنتاج الوحدة من المنتج A_j في القسم B_i.

وقد تكون المواد الأولية B_i هي كلفة مالية إضافية يتوفر منها المبلغ b_i وعندئذ تكون معاملات المتغيرات a_{ij} هي الكلفة المالية الإضافية التي يجب أن تنفقها لإنتاج الوحدة الواحدة من المنتج A_j.

أما إذا كانت المنتجات A_j منتجات زراعية أو مشتقات لمنتجات زراعية، عندئذ يكون ما أسميناه مواداً أولية هي أنواع من الأراضي تتوافر منها المساحة b_i وتكون المعاملات a_{ij} عندئذ معبرة عن المساحات من الأرض ذات النوع B_i اللازمة لإنتاج الوحدة الواحدة من المنتج A_j.

لذلك يمكن القول بأن هذا النوع من المسائل يضم مجموعة كبيرة من المواقف الاقتصادية والإدارية المختلفة التي تعود معالجتها إلى نماذج لبرامج خطية ويطلب في كل منها تنظيم توزيع الجهود المتوفرة على أنواع مختلفة من المنتجات بحيث يكون الربح أعظمياً.

مثال (٣): تنتج إحدى شركات الأدوات الكهربائية والمنزلية نوعين من الثلاجات ذات الحجم العادي والحجم الكبير. وتمر عملية التصنيع في ثلاث مراحل وهي مرحلة التجميع ومرحلة الطلاء ثم مرحلة مراقبة جودة الإنتاج، أما الوقت اللازم لإنهاء كل مرحلة من مراحل التصنيع الثلاث فقد تم تحديدها في الجدول التالي:

النوع	الوقت اللازم للتجميع	الوقت اللازم للطلاء	الوقت اللازم للرقابة على الجودة
ثلاجة حجم عادي	3.6	1.6	0.5
ثلاجة حجم كبير	4.8	1.8	0.6

فإذا كان الوقت المتاح أسبوعياً للقيام بكل مرحلة من مراحل التصنيع يبلغ (4800) ساعة لمرحلة التجميع و(1980) ساعة لمرحلة الطلاء و(900) ساعة لمرحلة الرقابة على جودة الإنتاج، وتتوقع الشركة أن تبيع أسبوعياً على الأقل ما يعادل (300)

ثلاجة ذات الحجم العادي و(180) ثلاجة ذات الحجم الكبير. وبناء على هذه المعلومات فان مدير الإنتاج يرغب في تحديد الكمية الواجب إنتاجها أسبوعياً من كل نوع من الثلاجات بحيث تحقق الشركة اكبر ربح ممكن مع العلم أن ربح الشركة من كل ثلاجة ذات الحجم العادي يعادل (50) دولاراً بينما ربح الشركة من كل ثلاجة ذات الحجم الكبير يعادل (75) دولاراً.

ولصياغة النموذج الرياضي لهذه المشكلة نتبع ما يلي:

أولاً: تحديد المشكلة بصورة وصفية:

تهتم هذه المشكلة بتخطيط الإنتاج بصورة أسبوعية من أجل الحصول على اكبر ربح ممكن مع الأخذ بعين الاعتبار أوقات العمل المتاحة لمراحل الإنتاج الثلاث والبالغة (4800) ساعة لمرحلة التجميع و(1980) ساعة لمرحلة الطلاء و(900) ساعة لمرحلة الرقابة على الجودة وكذلك كمية الطلب الأسبوعية التي لا تقل عن (300) ثلاجة من الحجم العادي و(180) ثلاجة من الحجم الكبير.

ثانياً: صياغة المشكلة رياضياً:

لنفرض أن: x_1 تشير إلى عدد الثلاجات الواجب إنتاجها أسبوعياً من الحجم العادي.

x_2 تشير إلى عدد الثلاجات الواجب إنتاجها أسبوعياً من الحجم الكبير.

وتأخذ دالة الهدف الشكل التالي:

$$Z = 50x_1 + 75x_2 \to \text{Max}$$

أما الشروط الخطية، فلدينا نوعان من الشروط: النوع الأول شروط الإنتاج والنوع الثاني شروط الطلب على الإنتاج.

إن شروط الإنتاج تتعلق بأوقات العمل المتاحة في كل مرحلة من مراحل التصنيع. بالنسبة للمرحلة الأولى فإن الحجم العادي من الثلاجات x_1 يحتاج إلى (3.6) ساعة من وقت التجميع بينما يحتاج الحجم الكبيرة x_2 إلى (4.8) ساعة ومجموع ما يلزم من ساعات

العمل في مرحلة التجميع يجب أن لا يتعدى الوقت المتاح أسبوعياً لمرحلة التجميع (4800) ساعة وبالتالي فان الشرط الأول يكتب:

$$3.6\ x_1 + 4.8\ x_2 \leq 4800$$

بنفس الطريقة نحصل على الشرط الثاني والثالث من شروط الإنتاج اللذين يكتبان بالشكل:

$$1.6\ x_1 + 1.8\ x_2 \leq 1980$$
$$0.5\ x_1 + 0.6\ x_2 \leq 900$$

أما شروط الطلب على الإنتاج فهي قيود تتعلق بالحد الأدنى المتوقع من المبيعات أسبوعياً وهي:

- عدد الثلاجات المنتجة من الحجم العادي x_1 يجب أن يكون اكبر أو يساوي الكمية المتوقع بيعها أسبوعياً أي أن:

$$x_1 \geq 300$$

- عدد الثلاجات المنتجة من الحجم الكبير x_2 يجب أن يكون اكبر أو يساوي الكمية المتوقع بيعها أسبوعياً أي أن:

$$x_2 \geq 180$$

بالإضافة إلى الشروط السابقة لدينا شروط عدم السلبية إذ أنه لا يمكن أن يكون عدد الثلاجات المنتجة سالباً أي أن:

$$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0$$

مما سبق نكتب النموذج الرياضي الخطي للمسألة المدروسة بالشكل:

$$\begin{aligned}
Z = \ & 50\ x_1 + 75\ x_2 \rightarrow \text{Max} \\
& 3.6\ x_1 + 4.8\ x_2 \leq 4800 \\
& 1.6\ x_1 + 1.8\ x_2 \leq 1980 \\
& 0.5\ x_1 + 0.6\ x_2 \leq 900 \\
& x_1 \geq 300 \\
& x_2 \geq 180 \\
& x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

والحل الأمثل لهذه المشكلة باتباع أحد أساليب الحل (سنتطرق لها لاحقاً) هو:

$x_1 = 300$ أي إنتاج 300 ثلاجة من الحجم العادي .

$x_2 = 775$ أي إنتاج 775 ثلاجة من الحجم الكبير.

$Z = 73125$ أي أن الربح الأعظم المتحقق من إنتاج 300 ثلاجة من الحجم العادي و 775 ثلاجة من الحجم الكبير هو 73125دولار.

٢,٤,١. مسألة تنظيم المزيج التسويقي الأمثل

نصادف هذا النوع من المسائل في المستشفيات أثناء تحضير وجبة الحمية للمرضى أو في الثكنات العسكرية لتحضير وجبة الغذاء للجنود أو في أماكن تربية الحيوانات لتحضير الوجبة العلفية للحيوانات أو في مصانع الأدوية لتركيب الأدوية، ويضم هذا النوع من المسائل المسألة التي تعرض لها جورج ستيغلر George Stiegler عام ١٩٤٥.

لنأخذ على سبيل المثال مسألة التنظيم الغذائي حيث يفترض معرفة b_i كمية ما يحتاج الجسم (جسم المريض، الجندي، الحيوان...) في اليوم من مقومات غذائية أساسية (حديد، فوسفور، فيتامين A ، فيتامين B ...) نرمز لها بـ B_i $(i = 1,2,\ldots m)$ ، وهناك عدد من أنواع الأغذية (أو الأعلاف) التي يعرف التركيب الكيميائي لكل منها، نرمز لهذه الأنواع بـ A_j $(j = 1,2, \ldots n)$ فإذا كانت الوحدة الواحدة من A_j تحوي على a_{ij} وحدة من المقومة الغذائية الأساسية B_i ، وإذا كان ثمن الوحدة الواحدة من A_j هو C_j عندئذ يكون المطلوب تعيين الوجبة الغذائية التي تفي بمتطلبات الجسم من المقومات الغذائية المتنوعة ويكون ثمنها أقل ما يمكن.

يمكن عرض معطيات هذه المسألة من أجل السهولة في الجدول التالي:

أنواع الأغذية / المقومات الأساسية اللازمة	A_1	A_2	…..	A_n	المتطلبات اليومية للجسم من المقومة الغذائية
B_1	a_{11}	a_{12}	…..	a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	…..	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
B_m	a_{m1}	a_{m2}	…..	a_{mn}	b_m
كلفة الوحدة الواحدة من المادة الغذائية	c_1	c_2	…..	c_n	

بإتباع خطوات صياغة نموذج برمجة خطية المذكورة آنفاً نجد:

أولاً: تحديد المشكلة بصورة وصفية:

تهتم هذه المسألة بتعيين الكميات من المواد الغذائية التي يجب على الجسم تناولها للحصول على المقومات الأساسية اللازمة له بأقل تكلفة ممكنة مع الأخذ بعين الاعتبار المتطلبات اليومية للجسم من المقومات الأساسية التي يجب أن لا تقل عن b_i.

ثانياً: صياغة المشكلة رياضياً:

- **تحديد المتغيرات** نفرض أن $x_1 , x_2 , ... x_n$ كمية المواد الغذائية $A_1, A_2, ... A_n$ على الترتيب التي تستهلك يومياً في الوجبة الغذائية.
- **تحديد دالة الهدف**: تهدف المسألة إلى تقليل تكلفة إعداد الوجبة الغذائية إلى الحد الأدنى، أي:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ...+ c_nx_n \rightarrow \text{Min}$$

حيث c_j تمثل تكلفة الوحدة الواحدة من المادة الغذائية x_j ، ويعبر عنها بوحدات نقدية.

- **تحديد الشروط الخطية**:

الشرط الأول يمكن تحديده بالشكل التالي:

إن الكمية اللازمة من المقومة الغذائية الأساسية B_1 التي تحويها المادة الغذائية A_1 هي $a_{11}x_1$ ، والتي تحويها المادة الغذائية A_2 هي $a_{12}x_2$ ، ...، والتي تحويها المادة الغذائية A_n هي $a_{1n}x_n$. ومجموع هذه الكميات يجب أن لا يقل عن الحد الأدنى الذي يتطلبه الجسم من تلك المقومة يومياً أي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1$$

وبنفس الطريقة بالنسبة للشروط الخطية الأخرى.

بالإضافة إلى ذلك فان الكميات x_j من المواد الغذائية لا يمكن أن تأخذ قيماً سالبة أي أن $x_j \geq 0$.

وبتجميع الشروط السابقة مع دالة الهدف يصبح النموذج الرياضي الخطي للمسألة بالشكل التالي:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow Min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad ; \quad i = 1,2,....,m$$

$$x_j \geq 0 \quad ; \quad (j = 1,2,....n)$$

أما بالنسبة لمسألة تركيب الأدوية فانه يفترض انه يراد تحضير دواء ذي تركيب معين بحيث يحتوي منه على الكميات $b_1, b_2, ..., b_m$ من العناصر B_i $(i=1,2,...m)$ كحد أدنى، ويمكن تحضير هذا الدواء من المواد A_j $(j=1,2,...n)$ وحيث أن الوحدة الواحدة من A_j تحتوي على الكمية a_{ij} من العنصر B_i وتكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من A_j يساوي إلى C_j ويراد تحضير هذا الدواء بأقل تكلفة ممكنة.

مثال (٤): يعمل متعهد طعام في إحدى الثكنات العسكرية على إعداد وجبات الطعام المتعلقة بالجنود وفق نظام طبي خاص مؤلف من نوعين من الطعام، يدخل في تركيب كل منها ثلاث مقومات غذائية أساسية C, B, A ويتوجب على الجندي أن يحصل على (1000) وحدة يومياً على الأقل من A و (2000) وحدة يومياً على الأقل من B و (1500) وحدة يومياً على الأقل من C . يحتوي كل كيلو غرام من النوع الأول من الطعام على (100) وحدة من A و (400) وحدة من B و(200) وحدة من C. أما كل كيلو غرام من النوع الثاني من الطعام فيحوي على (200) وحدة من A و(250) وحدة من B و(200) وحدة من C. ويسعى المتعهد إلى إيجاد طريقة يستطيع بواسطتها إعداد وجبة الطعام الطبية الخاصة ذات التكلفة الأقل والتي تناسب احتياجات الجندي اليومية مع العلم أن تكلفة الكيلو غرام الواحد من النوع الأول من الطعام تعادل (6) دولارات، أما تكلفة الكيلو غرام من النوع الثاني من الطعام تعادل (8) دولارات.

ولصياغة النموذج الرياضي لهذه المشكلة نتبع ما يلي:

أولاً: تحديد المشكلة بشكل وصفي:

يرغب متعهد الطعام في الثكنة في تحديد كمية الطعام من النوعين الأول والثاني التي تؤمن الاحتياجات اليومية للجنود من المقومات الأساسية A, B, C والتي تكون كلفتها أقل ما يمكن. مع العلم أن المتطلبات اليومية للجندي من المقومة A يجب أن لا تقل عن (1000) وحدة يومياً، ومن المقومة B يجب أن لا تقل عن (2000) وحدة يومياً، ومن المقومة C يجب أن لا تقل عن (1500) وحدة يومياً.

ثانياً: صياغة المشكلة رياضياً:

لنفرض أن x_1 تمثل كمية الطعام من النوع الأول الذي يستهلك يومياً في الوجبة الغذائية و x_2 تمثل كمية الطعام من النوع الثاني الذي يستهلك يومياً في الوجبة الغذائية.

وتكون دالة الهدف الآتي:

$$z = 6x_1 + 8x_2 \to \text{Min}$$

أما الشروط الخطية:

الشرط الأول المتعلق بالمقومة الغذائية A : إن النوع الأول من الطعام يحوي على 100 وحدة من A والنوع الثاني من الطعام يحوي على (200) وحدة من A ومجموع هذه الكميات يجب أن لا يقل عن الحد الأدنى الذي يتطلبه جسم الجندي يومياً من هذه الوحدة والذي يساوي (1000) وحدة. وبالتالي يكتب الشرط بالشكل التالي:

$$100x_1 + 200x_2 \geq 1000$$

وبنفس الطريقة نحصل على الشرطين المتعلقين بالمقومتين الغذائيتين B, C:

$$400x_1 + 250x_2 \geq 2000$$
$$200x_1 + 200x_2 \geq 1500$$

بالإضافة إلى شرط عدم السلبية إذ انه لا يمكن أن تكون كميات الطعام كميات سالبة.

مما سبق يكتب النموذج الرياضي الخطي للمسألة المدروسة بالشكل:

$$z = 6x_1 + 8x_2 \rightarrow Min$$
$$100x_1 + 200x_2 \geq 1000$$
$$400x_1 + 250x_2 \geq 2000$$
$$200x_1 + 200x_2 \geq 1500$$
$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$

والحل الأمثل لهذه المشكلة باتباع أحد أساليب الحل (سنتطرق لها لاحقاً) هو:

$x_1 = 2.73$ أي يجب إعداد 2.73 كيلو غرام من الطعام من النوع الأول الذي سيستهلك يومياً في الوجبة الغذائية.

$x_2 = 3.64$ أي يجب إعداد 3.64 كيلو غرام من الطعام من النوع الثاني الذي سيستهلك يومياً في الوجبة الغذائية.

$z = 45.45$ أي أن إعداد الوجبة الغذائية المكونة x_1 و x_2 تكلف المتعهد 45.45 دولار وهي أدنى تكلفة.

٣,٤,١. مسألة النقل وتوزيع المنتجات

يتلخص هذا النوع من المسائل ضمن الإطار العام التالي:

هناك الكميات s_i $(i=1,2,\dots,m)$ المتوفرة في مراكز التصدير $S_1, S_2, \dots S_m$ من مادة معينة (بترول، حبوب، أخشاب...) يراد نقل هذه الكميات إلى مراكز الاستيراد d_j $(j=1,2,\dots,n)$ بحيث يصل إلى المركز d_j الكمية D_j من هذه المادة، علماً بأن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من المادة المنقولة من كل مركز تصدير s_i إلى كل مركز استيراد d_j تساوي إلى c_{ij} كما هو مبين في الجدول التالي:

مراكز الاستيراد / مراكز التصدير	d_1	d_2	…	d_j	…	d_n	الكميـات المتـوفرة في مركز التصدير
s_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{ij}	…	c_{1n}	S_1
s_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{ij}	…	c_{2n}	S_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
s_i	c_{i1}	c_{i2}	…	c_{ij}	…	c_{in}	S_i
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
s_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mj}	…	c_{mn}	S_m
الكميات المطلوبة في مركز الاستيراد	D_1	D_2	…	D_j	…	D_n	

والمطلوب وضع خطة النقل بحيث تلبي حاجة مراكز الاستيراد بأقل تكلفة ممكنة.

أولاً: تحديد المشكلة بشكل وصفي:

المطلوب تحديد الكميات التي يجب أن تنقل من مراكز التصدير إلى مراكز الاستيراد بحيث تفي بمتطلبات مراكز الاستيراد بأقل تكلفة ممكنة، مع الأخذ بعين الاعتبار الكميات المتوفرة في كل مركز من مراكز التصدير s_i $(i=1,2,\ldots m)$ والكميات المطلوبة في كل مركز من مراكز الاستيراد d_j $(j=1,2,\ldots n)$.

ثانياً: صياغة المشكلة بشكل رياضي:

- **تحديد المتغيرات**: لنفرض أن x_{ij} هي كمية ما ينقل من المركز i إلى المركز j من المادة المفروضة حيث $(j=1,2,\ldots n), (i=1,2,\ldots.m)$.
- **تحديد دالة الهدف**: الهدف في هذه المسألة هو نقل الكميات المطلوبة في مراكز الاستيراد من مراكز التصدير بأقل تكلفة ممكنة أي أن:

$$z = c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12} + \ldots.+ c_{mn}x_{mn} \rightarrow \text{Min}$$

حيث c_{ij} تمثل كلفة نقل الوحدة الواحدة من المادة المنقولة.

- **تحديد الشروط الخطية**: وتتألف من جزأين: الأول يتعلق بمراكز الاستيراد والثاني بمراكز التصدير.

شروط مراكز التصدير:

$$x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1j} + \ldots + x_{1n} = S_1$$
$$x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2j} + \ldots + x_{2n} = S_2$$
$$\vdots$$
$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{ij} + \ldots + x_{in} = S_i$$
$$\vdots$$
$$x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mj} + \ldots + x_{mn} = S_m$$

شروط مراكز الاستيراد:

$$x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{i1} + \ldots + x_{m1} = D_1$$
$$x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{i2} + \ldots + x_{m2} = D_2$$
$$\vdots$$
$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{ij} + \ldots + x_{mj} = D_j$$
$$\vdots$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{in} + \ldots + x_{mn} = D_n$$

بالإضافة إلى أن الكميات المنقولة لا تأخذ قيماً سالبة أي:

$$x_{ij} \geq 0$$

إن أمثال المتغيرات في العلاقات السابقة يساوي الواحد مما يعطي لنموذج النقل طابعاً خاصاً.

وبالرغم من أن هذا النوع من النماذج قابل للحل باستخدام السمبلكس إلا أنه توجد طريقة خاصة وسهلة للحل، لذلك سنتناول نموذج النقل لاحقاً في فصل مستقل إن شاء الله.

مسائل عامـة

اكتب البرامج الخطية للمسائل التالية:

١- ليكن لدينا ثلاثة أنواع من الموارد الإنتاجية c_1 , c_2 , c_3 والمستخدمة في صنع نوعين من المنتجات A_1 , A_2 ولتكن استخدامات كل مورد والربح المتحقق من اجل كل وحدة من نوعي المنتجات ممثلاً بالجدول التالي:

المورد / المنتجات	كمية المورد c_1	كمية المورد c_2	كمية المورد c_3	الربح المتحقق من كل وحدة
A_1	3	4	5	20
A_2	6	2	1	25

فإذا كانت كميات الموارد الإنتاجية المتاحة هي 120 ، 70 ، 90 على الترتيب، والمطلوب إيجاد ما ينبغي صنعه من المنتج A_1 , A_2 بحيث يكون الربح في المنشأة اكبر ما يمكن.

٢- الشركة العامة للصناعات الكيماوية تنتج ثلاثة منتجات A_1 , A_2 , A_3 تمر كل منها بثلاث مراحل فإذا كان الوقت اللازم لإنتاج الوحدة الواحدة من كل منتج في كل مرحلة والطاقة الإنتاجية اليومية لكل مرحلة معطى بالجدول التالي:

المراحل	الوقت اللازم لإنتاج الوحدة الواحدة من كل منتج بالساعة			الطاقة اليومية لكل مرحلة
	A_1	A_2	A_3	ساعة/ يوم
1	3	4	2	43
2	6	0	4	40
3	2	8	0	38

فإذا كان الربح في الواحدة من المنتجات الثلاثة على الترتيب 4، 3، 2 دولاراً والمطلوب تحديد الكميات التي تنتج من المنتجات الثلاثة لتحقيق أقصى الأرباح على افتراض أن السوق قادرة على استيعاب أية كمية تعرض للبيع.

٣- ارض زراعية مساحتها 50 هكتاراً، يمكن زراعتها بثلاثة أنواع من المزروعات A_1 (فاصولياء) A_2 (بندورة) A_3 (خيار)، الربح الصافي للهكتار الواحد من كل نوع من هذه الأنواع هو 400 ، 800 ، 300 دولاراً للهكتار على الترتيب. فإذا علمت أن الهكتار الواحد المزروع من النوع الأول يكلف 25 ساعة عمل و 300 دولاراً، والهكتار الواحد المزروع من النوع الثاني يكلف 40 ساعة عمل و 400 دولاراً، أما الهكتار من النوع الثالث فيكلف 15 ساعة عمل و 200 دولاراً. وإذا علمت أيضاً أن عدد ساعات العمل الكلية المتوفرة هو 1000 ساعة عمل والمبلغ المتوفر لهذه المزرعة للقيام بإنتاجها هو 15000 دولاراً والمطلوب تنظيم الإنتاج في هذه المزرعة بإيجاد افضل استخدام لهذه الأرض.

٤- ينتج أحد المصانع نوعين A_1 ، A_2 من المنتجات، ربح الوحدة الواحدة من المنتج الأول 10 دولارات ومن المنتج الثاني 6 دولارات ويتم العمل في هذا المصنع في ثلاثة أقسام يعمل في الأول 60 عاملاً وفي الثاني 150 عاملاً وفي الثالث 40 عاملاً. فإذا علمت أن إنتاج الوحدة الواحدة من كل من المنتجين A_1 , A_2 يحتاج إلى ساعات عمل (عامل/ ساعة) في الأقسام كما هو مبين في الجدول التالي:

عدد ساعات العمل اللازمة في القسم الثالث	عدد ساعات العمل اللازمة في القسم الثاني	عدد ساعات العمل اللازمة في القسم الأول	المنتجات
0	7	10	A_1
8	10	5	A_2

واذا كانت ساعات العمل الاسبوعية للعامل الواحد هي 40 ساعة، والمطلوب تنظيم الانتاج في هذا المصنع بحيث يكون الربح اعظمياً.

٥- ينتج أحد المصانع ثلاثة أنواع A_1 , A_2 , A_3 من المنتجات وذلك باستخدام مادتين أوليتين B_1 , B_2 يتوفر من أولاهما الكمية (20) ومن الثانية الكمية 30. فإذا كان إنتاج الوحدة الواحدة من A_1 يتطلب استخدام الكمية 2 من B_1 والكمية 4 من B_2 . وإنتاج الوحدة الواحدة من A_2 يتطلب استخدام الكمية 2 من B_2 والكمية 1

من B_1 والكمية 2 من B_2. وإنتاج الوحدة الواحدة من A_3 يتطلب استخدام الكمية 2 من B_1 والكمية 3 من B_2 . والمطلوب تنظيم عملية الإنتاج هذه علماً بأن ربح الوحدة الواحدة من المنتجات A_1 , A_2 , A_3 على الترتيب 3، 1، 2 دولارات.

٦- تحتكر إحدى الشركات الأجنبية ثلاثة مستحضرات طبية سنرمز لها بـ A_1 , A_2 , A_3 وتبيع الوحدة الواحدة من A_1 بسعر 7 دولارات ومن A_2 بسعر 8 دولارات ومن A_3 بسعر 16 دولاراً. وبما أن هذه الشركة تحتفظ لنفسها بحق إنتاج هذه المستحضرات فان مؤسسة وطنية للأدوية تفكر في طرح مادتين أوليتين B_1 , B_2 في السوق مع العلم انه من حيث المردود الطبي:

الوحدة الواحدة من A_1 تكافئ وحدتين من B_1 ووحدة واحدة من B_2،

الواحدة من A_2 تكافئ وحدة واحدة من B_1 ووحدة واحدة من B_2،

الواحدة من A_3 تكافئ وحدة واحدة من B_1 وثلاث وحدات من B_2،

إن المواطن سيفضل بالطبع الإنتاج الوطني إذا كانت كلفته اقل من كلفة المستحضرات الأجنبية أو مساوية لها، فإذا علمنا أن حاجة السوق سنوياً هي ألف وحدة من A_1 وأربعة آلاف وحدة من A_2 و11 ألف وحدة من A_3. فما هو السعر الذي يجب أن تحدده المؤسسة لكل من المادتين B_1 و B_2 بحيث يكون ربحها السنوي اعظماً ؟ (يعتبر ثمن المبيع بكامله أي تهمل تكلفة الإنتاج).

٧- ليكن لدينا منتجين x_1، x_2 يتم إنتاجها على آلتين (1) و(2) ويتطلب المنتج x_1 ثلاث ساعات على الآلة (1) ونصف ساعة على الآلة (2) ويتطلب المنتج x_2 ساعتين على الآلة (1) وساعة واحدة على الآلة (2). إن الطاقة المتاحة للآلة (1) هي 6 ساعات، أما الطاقة المتاحة للآلة الثانية (2) فهي 4 ساعات، وينتج عن بيع الوحدة الواحدة x_1 ربحاً قدره 12 دولاراً ومن x_2 ربح قدره 4 دولارات والمطلوب تنظيم الإنتاج بحيث نحصل على اكبر ربح ممكن.

٨- نفترض أن إحدى الشركات تنتج إحدى السلع التي يجب أن تزن 150 كغم ويستخدم في صنعها مادتين أوليتين الأولى A وتكلفتها 2 دولاران للوحدة الواحدة منها، والثانية B وتكلفتها 8 دولارات للوحدة الواحدة منها. ولإنتاج وحدة واحدة من المنتج النهائي لابد من استخدام 14 وحدة من B على الأقل و20 وحدة من A على الأكثر، بالإضافة إلى ذلك كل وحدة من A تزن 5 كغم وكل وحدة من B تزن 10 كغم. والمطلوب ما هي الكمية الواجب استخدامها من كل المادتين الأوليتين لكل وحدة من المنتج النهائي إذا رغبنا في تخفيض التكلفة إلى أدنى حد.

الفصل الثاني

الاسلوب البياني لحل نماذج البرمجة الخطية

١,٢ . مقدمة

تناولنا في الفصل السابق آلية صياغة النموذج الرياضي الخطي لبعض النماذج التي تندرج ضمن إطار البرمجة الخطية، وسنتناول في هذا الفصل أحد أساليب حل تلك النماذج للوصول إلى الحل الأمثل وهو الاسلوب البياني

عادة يستخدم هذا الاسلوب عندما يكون عدد متغيرات البرنامج الخطي اثنين فقط، أو إذا استطعنا بطريقة ما، رد النموذج الخطي المعطى إلى نموذج خطي بمتغيرين.

١,٢ . خطوات الأسلوب البياني لحل النماذج الخطية ذات المتغيرين

وتتلخص هذه الطريقة بتحديد منطقة في المستو تمثل مجموعة الحلول الممكنة للبرنامج الخطي ومن ثم التفتيش ضمن تلك المنطقة عن النقطة المثلى التي تعطى لدالة الهدف افضل قيمة (اكبر قيمة عندما تكون دالة الهدف من نوع التعظيم Max، وأصغر قيمة عندما تكون دالة الهدف من نوع التصغير Min).

أما خطوات الأسلوب البياني لحل النماذج الخطية ذات المتغيرين سنتناولها من خلال المثال التالي.

مثال (1): ليكن لدينا النموذج الخطي التالي:

$$Z = 50x_1 + 40x_2 \rightarrow Max$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 20 \qquad (1)$$

$$8x_1 + 5x_2 \leq 40 \qquad (2)$$

$$5x_1 + 6x_2 \leq 30 \qquad (3)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad (4)$$

$$x_2 \geq 0 \qquad (5)$$

لإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرنامج الخطي السابق باستخدام الاسلوب البياني نتبع الخطوات التالية:

١- نرسم في مستوي محورين متعامدين المحور الأفقي يمثل المتغير x_1 والمحور العمودي يمثل المتغير x_2.

٢- نمثل المتباينة التي تمثل الشرط (1) من شروط النموذج الخطي بيانياً وذلك برسم المستقيم الذي يحددها ثم نحدد المنطقة المقبولة والمنطقة المرفوضة، ومن اجل ذلك نتبع الخطوات التالية:

- نكتب المتباينة (1) على شكل مساواة كما يلي:

$$2x_1 + 5x_2 = 20$$

- نحدد من خلال هذه المساواة نقطتين لرسم المستقيم وللسهولة:

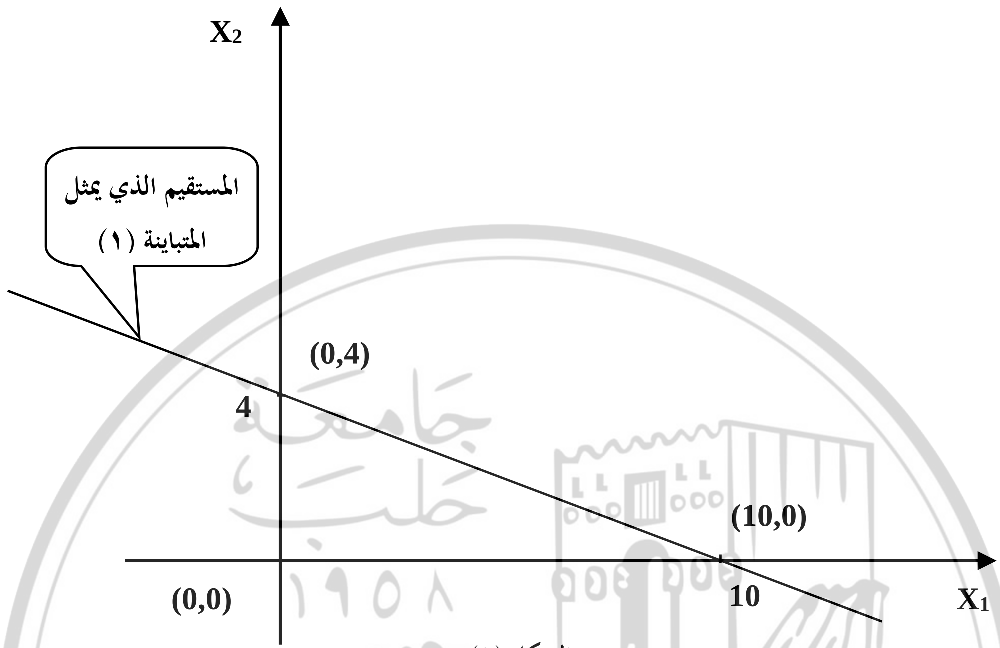
نعطى $x_1 = 0$ عندئذ $x_2 = 4$ ، أي أن إحداثيات النقطة الأولى $(0\ ,4)$

نعطي $x_2 = 0$ عندئذ $x_1 = 10$ ، أي أن إحداثيات النقطة الثانية $(10\ ,0)$

- نحدد النقطتين على المحاور الإحداثية ثم نصل بين النقطتين فنحصل على المستقيم المطلوب، انظر الشكل (١).

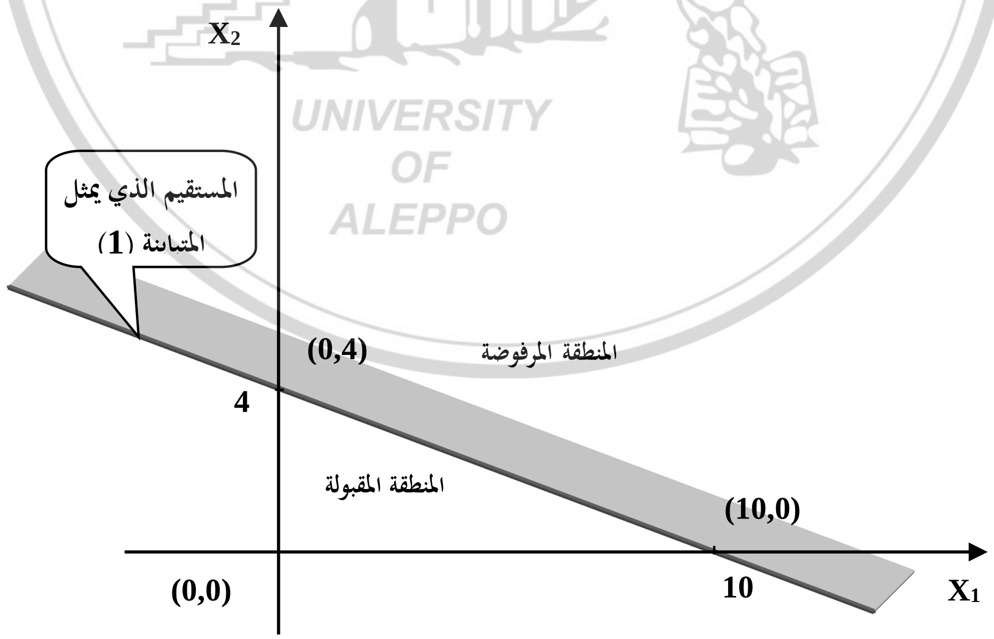
- المستقيم المرسوم يقسم المستوى إلى منطقتين إحداهما تحقق المتباينة (1) والأخرى لا تحققها، ولتحديد أي المنطقتين مقبولة نأخذ إحداثيات أية نقطة من إحدى المنطقتين شريطة أن لا تقع على المستقيم، وللسهولة نأخذ إحداثيات مبدأ الإحداثيات (0,0)

ونعوضها في المتباينة فإذا حققت هذه النقطة المتباينة عندئذ تكون المنطقة التي تحوي هذه النقطة منطقة مقبولة ونرفض المنطقة الأخرى.



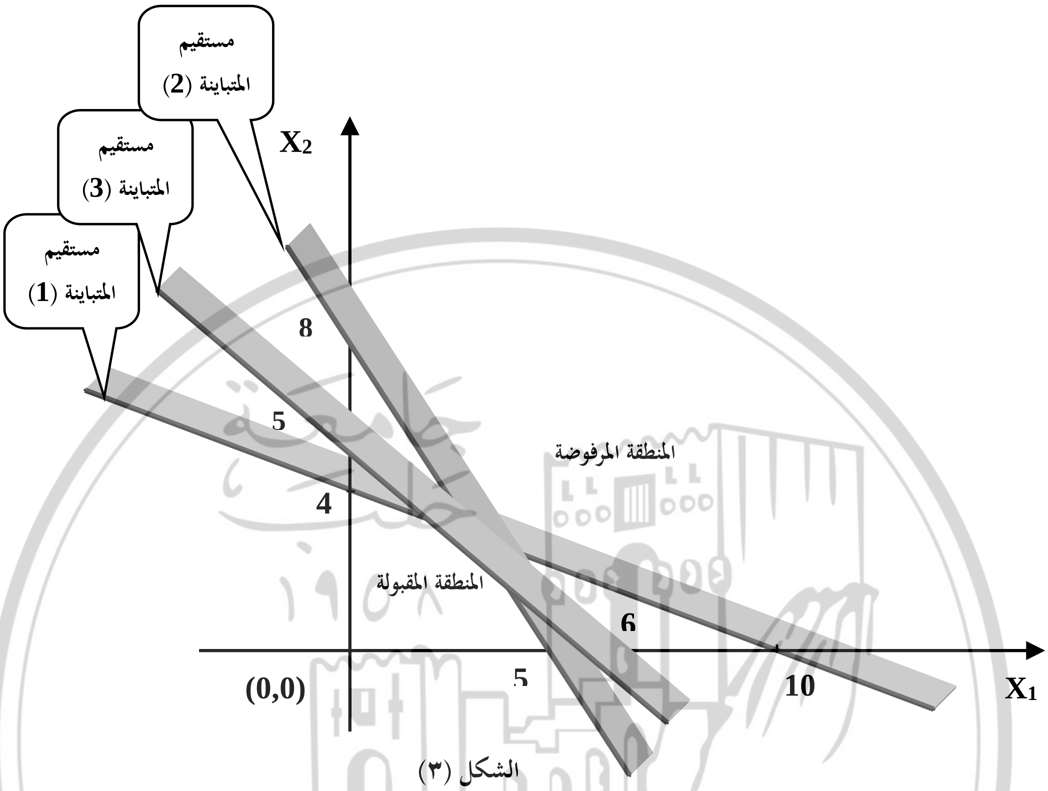
الشكل (١)

بما أن النقطة (0,0) تحقق المتباينة (1) عندئذ المنطقة المقبولة هي نقاط المستقيم والنقاط الواقعة ما دون المستقيم ونظلل المنطقة المرفوضة كما في الشكل (٢).



الشكل (٢)

٣- باتباع نفس الاسلوب السابق نمثل المتباينتين (2) و(3) بيانياً وذلك برسم المستقيم الذي يحدد كل منهما ثم نحدد المنطقة المقبولة والمنطقة المرفوضة كما في الشكل(٣):



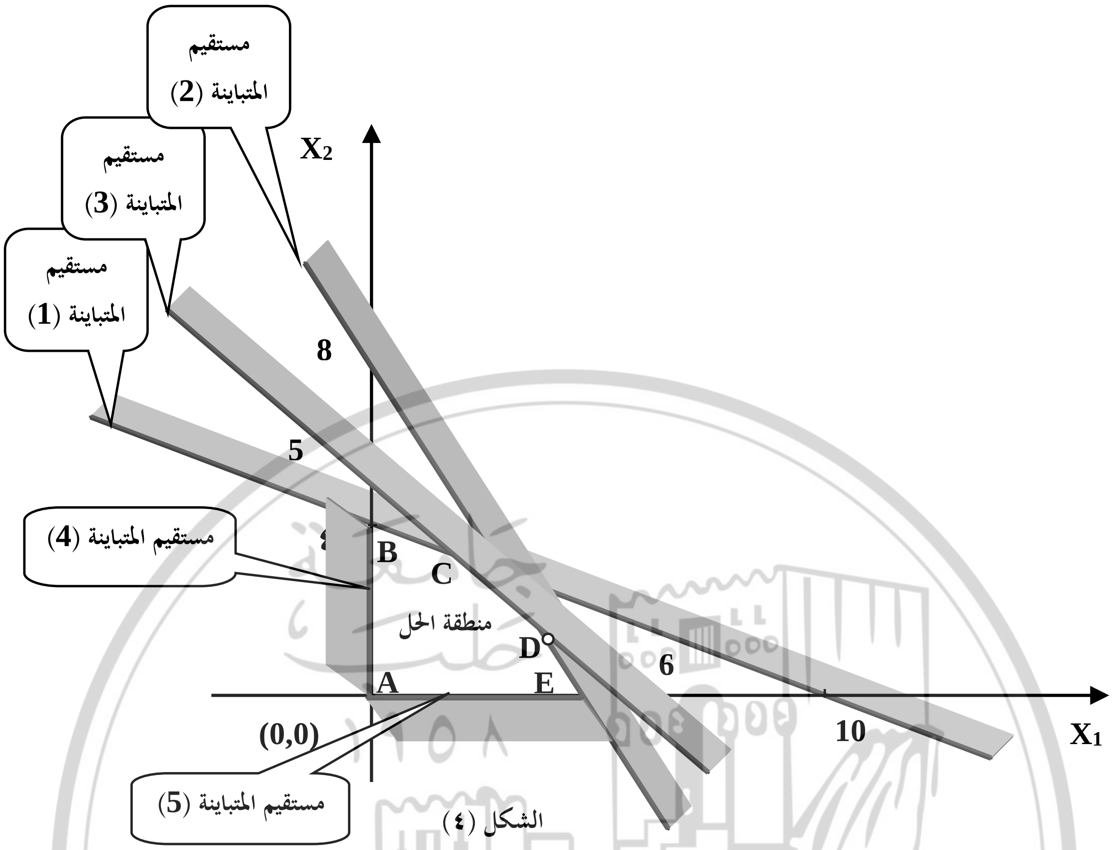
الشكل (٣)

٤-شروط عدم السلبية (4) و(5) يتحقق فقط في النقاط الموجبة أي في الربع الأول من منطقة المحاور الإحداثية أي أن النقاط ما دون المحور الأفقي مرفوضة والنقاط على يسار المحور العمودي مرفوضة، انظر الشكل (٤).

٥- تحديد منطقة الحل: من الشكل (٤) نلاحظ أن النقاط المحققة للبرنامج الخطي هي تلك النقاط الواقعة ضمن المضلع الذي رؤوسه (ABCDE) تدعى هذه المنطقة بمنطقة الحل Solution space وحسب نظريات البرمجة الخطية [1] فان الحل الأمثل يكون متوضعاً في احد رؤوس مضلع منطقة الحل (أي إحدى ذروات منطقة الحل إذ أن كل ذروة تمثل حلاً أولياً يحقق البرنامج الخطي المعطى)

---

[1] **لمزيد من المعلومات انظر المراجع العربية (٧) و(١٠) والمراجع الأجنبية (٤) (١١).**



الشكل (٤)

٦- تحديد الحل الأمثل للبرنامج الخطي: لتحديد الذروة التي تمثل الحل الأمثل يمكن استخدام إحدى الطريقتين:

أولاً: الطريقة المطولة:

وتتلخص بإيجاد إحداثيات كل ذروة من ذروات منطقة الحل ثم تعويضها في دالة الهدف، وعندها نختار الذروة التي تعطي لدالة الهدف أفضل قيمة، أي:

- إحداثيات الذروة (A) هي $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، بالتعويض في دالة الهدف نجد:

$$\mathbf{Z_A = 0}$$

- إحداثيات الذروة (B) هي $x_1 = 0$ ، $x_2 = 4$ ، بالتعويض في دالة الهدف نجد:

$$\mathbf{Z_B = 160}$$

- إحداثيات الذروة (C) هو نقطة تقاطع مستقيمي المتباينتين (1) و (3)، ولحساب إحداثيات نقطة التقاطع نحل معادلتي مستقيمي المتباينتين (1) مع (3) حلاً مشتركاً أي:

$$2x_1 + 5x_2 = 20$$
$$5x_1 + 6x_2 = 30$$

بالحل المشترك نحصل على $x_1 = 2.32$ ، $x_2 = 3.07$ ، بالتعويض في دالة الهدف نجد:

$$\mathbf{Z_C = 238.8}$$

- إحداثيات الذروة (D) هي نقطة تقاطع مستقيمي المتباينتين (2) و (3) ، ولحساب إحداثيات نقطة التقاطع نحل معادلتي مستقيمي المتباينتين (2) مع (3) حلاً مشتركاً أي:

$$8x_1 + 5x_2 = 40$$
$$5x_1 + 6x_2 = 30$$

بالحل المشترك نحصل على $x_1 = 3.91$ ، $x_2 = 1.74$ ، بالتعويض في دالة الهدف نجد:

$$\mathbf{Z_D = 265}$$

- إحداثيات الذروة (E) هي $x_1 = 5$ ، $x_2 = 0$ ، بالتعويض في دالة الهدف نجد:

$$\mathbf{Z_E = 250}$$

بالمقارنة بين قيم Z لجميع النقاط (الذروات) نجد أن قيمة Z في الذروة (D) هي اكبر القيم، أي أن إحداثيات الذروة (D) تمثل الحل الأمثل أي:

$$\mathbf{x_1 = 3.91}$$
$$\mathbf{x_2 = 1.74}$$
$$\mathbf{Z^* = 265}$$

وهذا هو الحل الأمثل للبرنامج الخطي المعطى والذي يحقق الشروط الخطية ويعطى لدالة الهدف أفضل قيمة.

ثانياً: الطريقة المختصرة

وتتلخص في تحديد اتجاه دالة الهدف، إذ أنه من أجل قيمة ثابتة لـ Z فإن معادلة دالة الهدف تمثل خطاً مستقيماً واقعاً في مستوى الإحداثيات الديكارتية، وأي نقطة منه تعطي لدالة الهدف القيمة ذاتها. كما أنه من أجل كل قيمة جديدة لـ Z نحصل على خط

مستقيم جديد، وأن جميع هذه الخطوط ستكون متوازية (وذلك لأن ميل أي خط مستقيم $Z=c_1x_1+c_2x_2$ هو $\frac{-c_1}{c_2}$ وهذه القيمة مستقلة عن قيمة Z وحسب مثالنا ميل دالة الهدف $\frac{-5}{4}$).

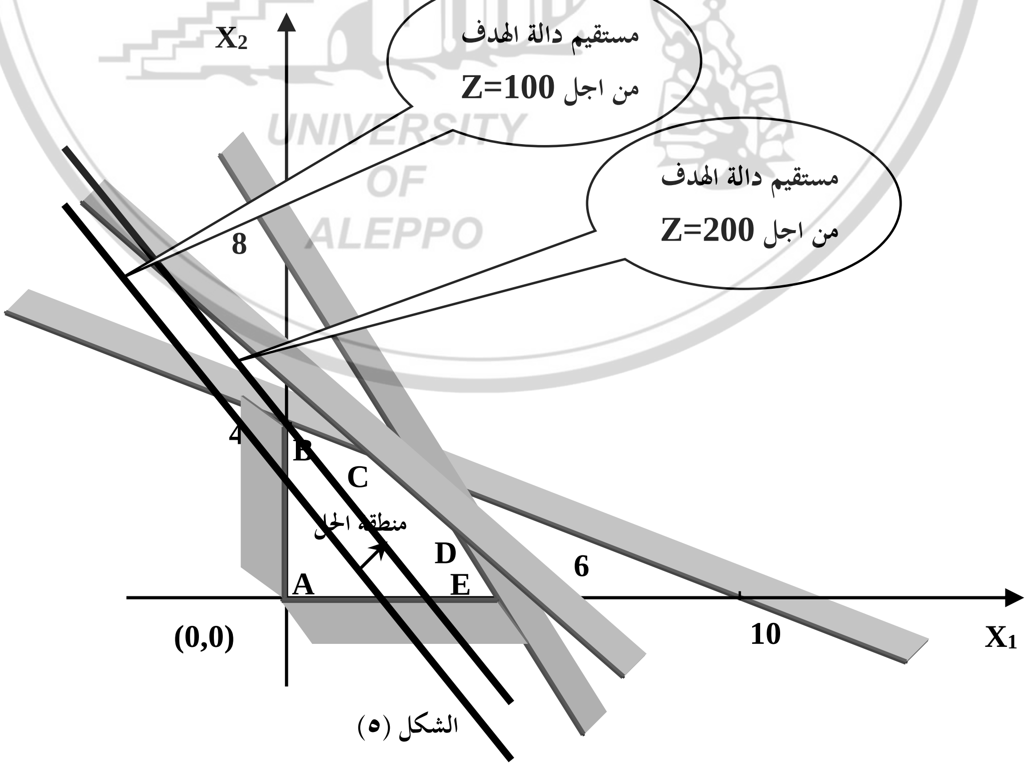
لذلك وبناء على ما سبق يجب إيجاد في مستوى الإحداثيات المستقيم الذي يعطي لدالة الهدف أفضل قيمة ممكنة وأن يشترك مع منطقة الحل بنقطة واحدة على الأقل.

وحسب مثالنا لنأخذ قيمتين لـ Z مثلاً $Z=100$ و $Z=200$ ونرسم المستقيمين الممثلين لدالة الهدف، انظر الشكل (٤)، أي:

- من اجل $Z=100$ عندئذ دالة الهدف:

$$100 = 50x_1 + 40x_2$$

نحدد من خلال هذه المساواة نقطتين لرسم المستقيم ولتكن: النقطة الأولى (0,2.5) والنقطة الثانية (2,0)، ثم نصل بين النقطتين فنحصل على المستقيم المطلوب، انظر الشكل (٥).



الشكل (٥)

من اجل $Z=200$ عندئذ دالة الهدف:

$$200 = 50x_1 + 40x_2$$

- نحدد من خلال هذه المساواة نقطتين لرسم المستقيم ولتكن: النقطة الأولى (0,5) والنقطة الثانية (4,0)، ثم نصل بين النقطتين فنحصل على المستقيم المطلوب، انظر الشكل (٥).

من هاتين القيمتين لـ Z نأخذ فكرة عن اتجاه دالة الهدف، ونلاحظ أنه كلما أعطينا قيمة اكبر لدالة الهدف كلما حصلنا على مستقيم آخر مواز للسابق، ونلاحظ أن آخر نقطة يشترك فيها مستقيم دالة الهدف مع منطقة الحل هي النقطة D وذلك لأن أي تزايد على قيمة Z سيخرج المستقيم خارج منطقة الحل (للسهولة يمكن رسم مستقيم واحد لدالة الهدف ثم وضع حافة المسطرة وإجراء عملية السحب بشكل متواز بالاتجاه المناسب حسب دالة الهدف، وعندئذ آخر نقطة تلامس حافة المسطرة منطقة الحل تكون هي الممثلة للحل الأمثل).

بعد تحديد النقطة التي تمثل الحل الأمثل نوجد قيمة x_1 و x_2 بالحل المشترك للمستقيمين المتقاطعين عند النقطة المحددة ومن ثم نعوض في دالة الهدف فنحصل على قيمة Z^* . وحسب مثالنا السابق النقطة D تمثل تقاطع المستقيمين الممثلين للمعادلتين (2) و (3) أي:

$$8x_1 + 5x_2 = 40$$
$$5x_1 + 6x_2 = 30$$

وبالحل المشترك نحصل على $\mathbf{x_1 = 3.91}$ ، $\mathbf{x_2 = 1.74}$ وعندئذ:

$$\mathbf{Z^*} = 50(3.91) + 40\,(1.74) = \mathbf{265}$$

مثال (٢): أوجد حل البرنامج الخطي التالي بيانياً:

$$z = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \text{Min}$$
$$2x_1 + x_2 \geq 3 \qquad (1)$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 2 \qquad (2)$$
$$x_1 \geq 0 \qquad (3)$$

$$x_2 \geq 0 \qquad (4)$$

باتباع الخطوات المذكورة في المثال السابق، نمثل المتباينات (1) و(2) و(3) و(4) بيانياً على المحاور الإحداثية وذلك برسم المستقيم الذي يحدد كل منهما ثم نحدد المنطقة المقبولة والمنطقة المرفوضة:

١ – لتمثيل المتباينة (1):

- نكتب المتباينة (1) على شكل مساواة كما يلي:

$$2x_1 + x_2 = 3$$

- نحدد من خلال هذه المساواة نقطتين لرسم المستقيم ولتكن: النقطة الأولى (0,3) والنقطة الثانية (1.5,0)، ثم نصل بين النقطتين فنحصل على المستقيم المطلوب (سنرقمه بالرقم 1) ، انظر الشكل (٦).
- بما أن مبدأ الإحداثيات النقطة (0,0) لا تحقق المتباينة (1) عندئذ المنطقة المقبولة هي نقاط المستقيم والنقاط الواقعة فوقه، ونظلل المنطقة المرفوضة كما في الشكل (٦).

٢ – لتمثيل المتباينة (2):

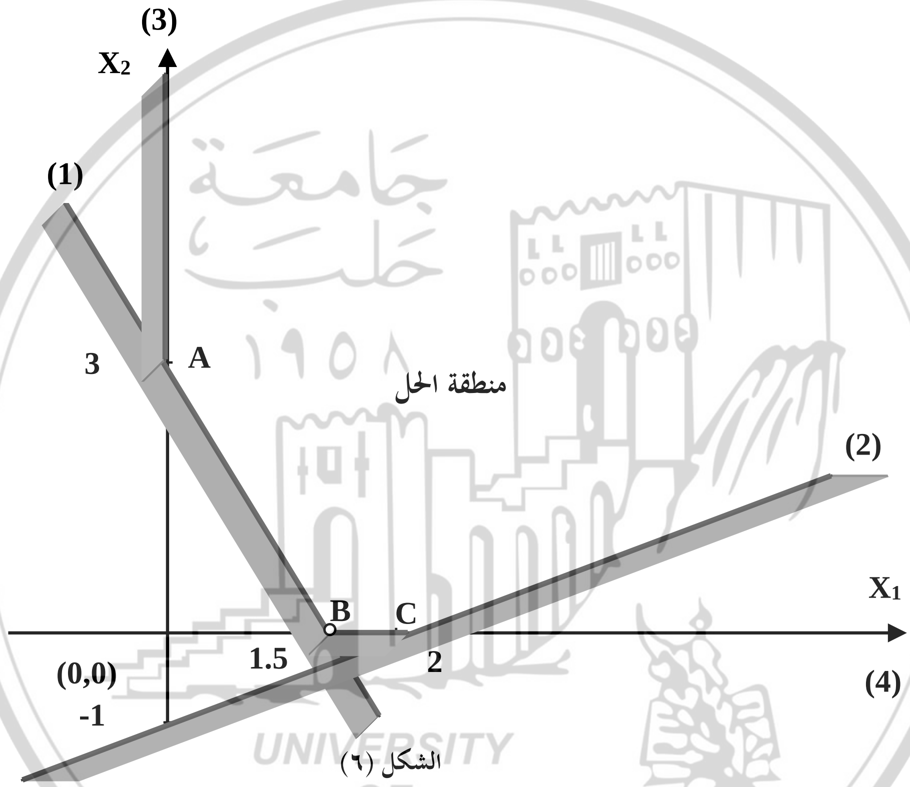
- نكتب المتباينة (2) على شكل مساواة كما يلي:

$$x_1 - 2x_2 = 2$$

- نحدد من خلال هذه المساواة نقطتين لرسم المستقيم ولتكن: النقطة الأولى (0,-1) والنقطة الثانية (2,0)، ثم نصل بين النقطتين فنحصل على المستقيم المطلوب (سنرقمه بالرقم 2)، انظر الشكل (٦).
- بما أن مبدأ الإحداثيات النقطة (0,0) لا تحقق المتباينة (2) عندئذ المنطقة المقبولة هي نقاط المستقيم والنقاط الواقعة فوقه، ونظلل المنطقة المرفوضة كما في الشكل (٦).

٣ – شروط عدم السلبية (3) و(٤) يتحقق فقط في النقاط الموجبة أي في الربع الأول من منطقة المحاور الإحداثية أي أن النقاط ما دون المحور الأفقي مرفوضة والنقاط على يسار المحور العمودي مرفوضة، انظر الشكل (٦).

٤ – تحديد منطقة الحل: من الشكل (٦) نلاحظ أن النقاط المحققة للبرنامج الخطي هي تلك النقاط الواقعة في المنطقة الواقعة ما بين C , B , A وما فوق أي ضمن مضلع مفتوح من الأعلى. وبما أن دالة الهدف تسعى للوصول إلى أدنى قيمة عندئذ فإن الحل حسب نظريات البرمجة الخطية متوضع في إحدى رؤوس مضلع منطقة الحل (أي إحدى ذروات منطقة الحل) والذي يعطي قيمة دالة الهدف اصغر ما يمكن.



الشكل (٦)

٥- تحديد الحل الأمثل للبرنامج الخطي:

أولاً: باستخدام الطريقة المطولة:

- إحداثيات الذروة (A) هي $x_1 = 0$ ، $x_2 = 3$ ، بالتعويض في دالة الهدف نجد:

$$\mathbf{z_A = 12}$$

- إحداثيات الذروة (B) هي $x_1 = 1.5$ ، $x_2 = 0$ ، بالتعويض في دالة الهدف نجد:

$$\mathbf{z_B = 9}$$

- إحداثيات الذروة (C) هي $x_1 = 2$ ، $x_2 = 0$ ، بالتعويض في دالة الهدف نجد:

$$z_C = 12$$

بالمقارنة بين قيم z لجميع النقاط (الذروات) نجد أن قيمة z في الذروة (B) هي اصغر القيم، أي أن إحداثيات الذروة (B) تمثل الحل الأمثل أي:

$$x_1 = 1.5$$
$$x_2 = 0$$
$$z^* = 9$$

وهذا هو الحل الأمثل للبرنامج الخطي المعطى والذي يحقق الشروط الخطية ويعطى لدالة الهدف أفضل قيمة.

ثانياً: الطريقة المختصرة

وتتلخص في تحديد اتجاه دالة الهدف، لنأخذ قيمتين لـ z مثلاً z=10 و z=8 ونرسم المستقيمين الممثلين لدالة الهدف، انظر الشكل (٨)، أي:

- من اجل z=10 عندئذ دالة الهدف:

$$10 = 6x_1 + 4x_2$$

نحدد من خلال هذه المساواة نقطتين لرسم المستقيم ولتكن: النقطة الأولى (0,2.5) والنقطة الثانية (1.67,0)، ثم نصل بين النقطتين فنحصل على المستقيم المطلوب، انظر الشكل (٧).

- من اجل z=12 عندئذ دالة الهدف:

$$12 = 6x_1 + 4x_2$$

نحدد من خلال هذه المساواة نقطتين لرسم المستقيم ولتكن: النقطة الأولى (0,3) والنقطة الثانية (2,0)، ثم نصل بين النقطتين فنحصل على المستقيم المطلوب، انظر الشكل (٧).

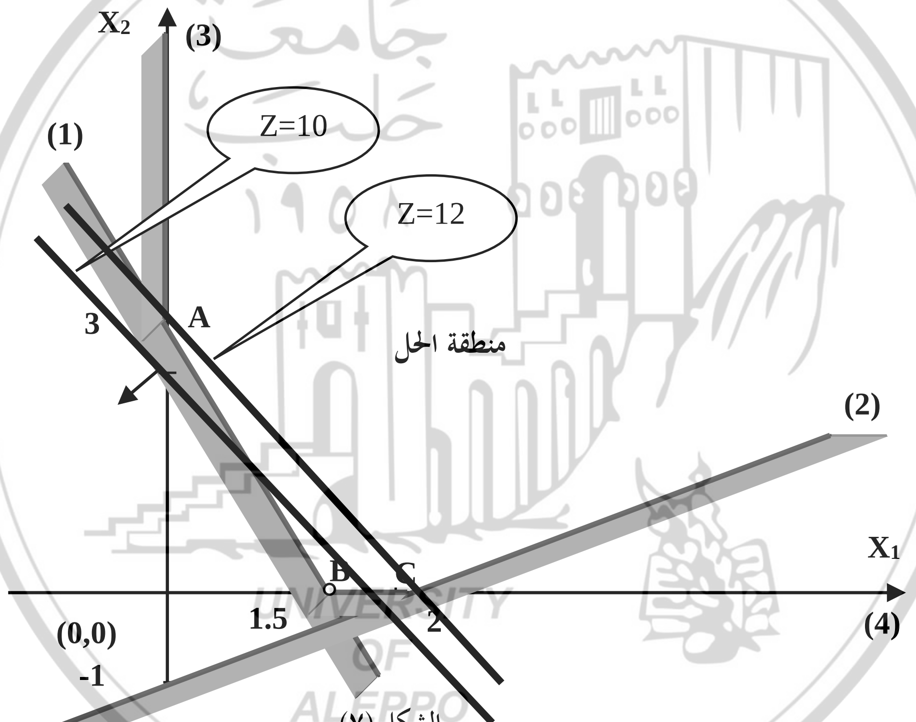
من هاتين القيمتين لـ z نأخذ فكرة عن اتجاه دالة الهدف، ونلاحظ أنه كلما أعطينا قيمة اصغر لدالة الهدف كلما حصلنا على مستقيم آخر مواز للسابق، ونلاحظ

أن آخر نقطة يشترك فيها مستقيم دالة الهدف مع منطقة الحل هي النقطة B وذلك لأن أي تناقص يطرأ على قيمة z سيخرج المستقيم خارج منطقة الحل.

إحداثيات النقطة B هي: $\mathbf{x_1 = 1.5}$ ، $\mathbf{x_2 = 0}$ وعندئذ

$$\mathbf{z^*} = 6(1.5) + 4\,(0) = \mathbf{9}$$

وللسهولة يمكن رسم مستقيم واحد لدالة الهدف ثم وضع حافة المسطرة وإجراء عملية السحب بشكل متواز باتجاه مركز الإحداثيات، وعندئذ آخر نقطة تلامس حافة المسطرة منطقة الحل ستكون نقطة B وعنده يكون الحل الأمثل.



الشكل (٧)

٢,٢. الحالات الخاصة للحل البياني

عند رسم النماذج الخطية بيانياً نجد بعض الحالات الخاصة التي تفرضها طبيعة قيود المسألة مما يؤدي إلى أن يكون الحل مستحيلاً أو عدم امكانية تحديد نهاية عظمى أو نهاية صغرى لدالة الهدف، أو تعدد الحلول المثلى.

١,٢,٢. حالة استحالة الحل

يكون ذلك عندما لا يمكن ايجاد منطقة حل، حيث لا يوجد مجالات متقاطعة، وبالتالي لا يوجد حل مشترك كما في المثال التالي:

مثال(٣): أوجد حل البرنامج الخطي التالي بيانياً:

$$Z = 20x_1 + 30x_2 \rightarrow Max$$

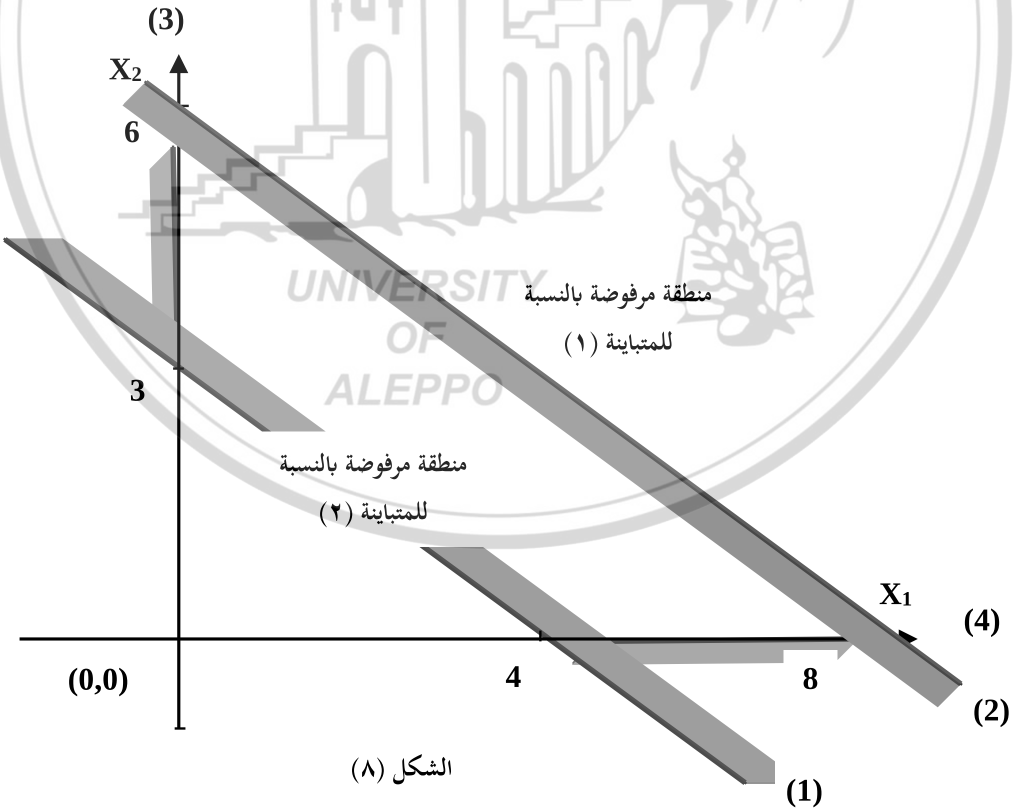
$$3x_1 + 4x_2 \leq 12 \quad (1)$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 24 \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (3)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (4)$$

باتباع الخطوات المذكورة في المثال السابق، نمثل المتباينات (1) و(2) و(3) و(4) بيانياً على المحاور الإحداثية وذلك برسم المستقيم الذي يحدد كل منها ثم نحدد المنطقة المقبولة والمنطقة المرفوضة، كما في الشكل (٨).



الشكل (٨)

نلاحظ من الشكل (٨) أنه لا توجد منطقة حل وبالتالي فالمسألة مستحيلة.

٢,٢,٢. حالة عدم امكانية تحديد قيمة عظمى لدالة الهدف

يكون ذلك عندما لا يمكن ايجاد نقاط متطرفة تشكل قيمة عظمى لدالة الهدف في منطقة الحل كما في المثال التالي:

مثال(٤): أوجد حل البرنامج الخطي التالي بيانياً:

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow Max$$

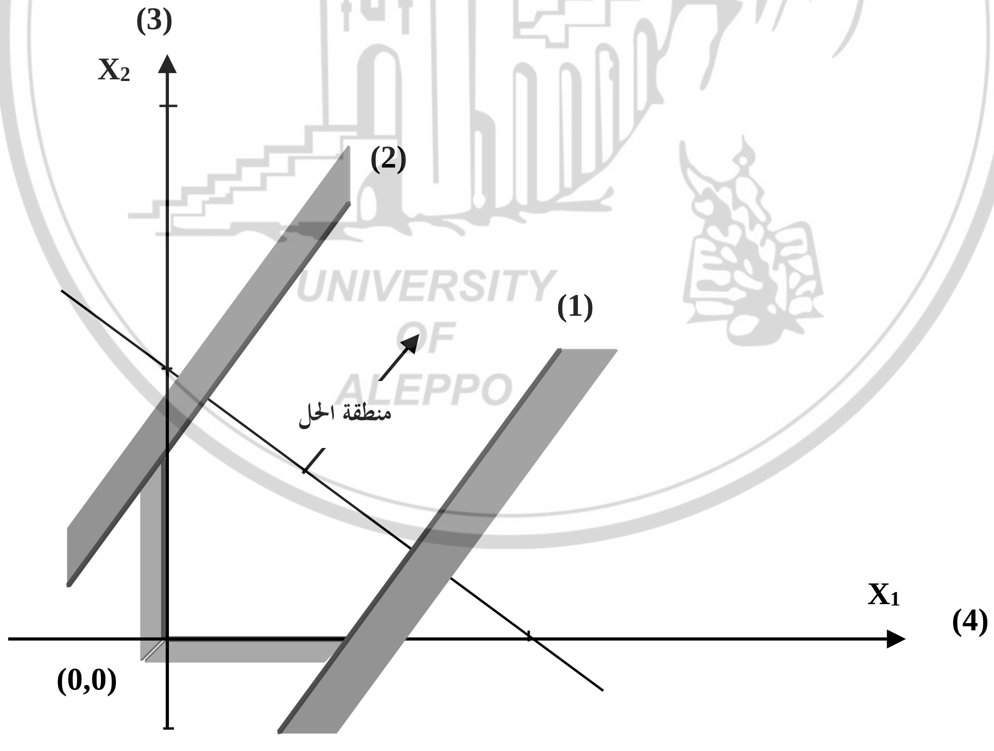
$$3x_1 - 3x_2 \leq 9 \quad (1)$$

$$-3x_1 + 3x_2 \leq 9 \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (3)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (4)$$

باتباع الخطوات المذكورة في المثال السابق، نمثل المتباينات (1) و(2) و(3) و(4) بيانياً على المحاور الإحداثية وذلك برسم المستقيم الذي يحدد كل منها ثم نحدد المنطقة المقبولة والمنطقة المرفوضة، كما في الشكل (٩).



الشكل (٩)

نلاحظ من الشكل (٩) أنه لا توجد قيمة عظمى لدالة الهدف في منطقة حل.

٣,٢,٢. حالة تعدد الحلول المثلى

تحدث هذه الحالة عندما يكون ميل مستقيم دالة الهدف موازياً لاحد اضلاع منطقة الحل وبالتالي فإن قيمة دالة الهدف العظمى (أو الصغرى) لن تكون في نقطة متطرفة فقط وإنما تشكل مجموعة كبيرة من النقاط، كما في المثال التالي:

مثال(٥): أوجد حل البرنامج الخطي التالي بيانياً:

$$Z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow Max$$

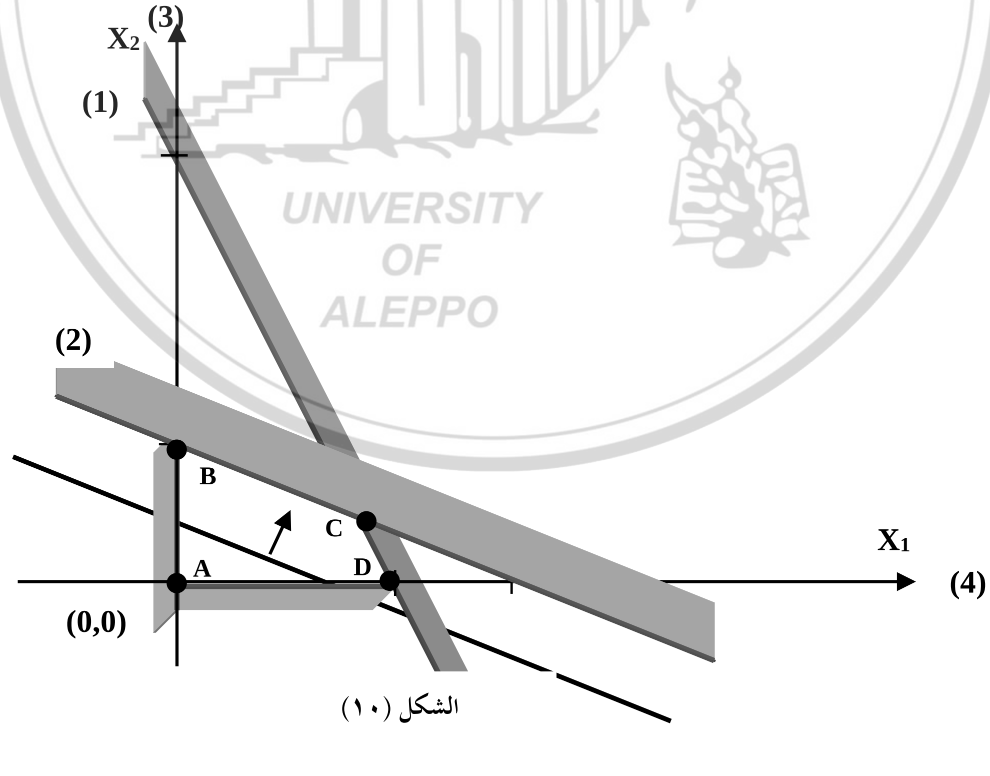
$$5x_1 + 2x_2 \leq 10 \quad (1)$$

$$4x_1 + 8x_2 \leq 12 \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (3)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (4)$$

باتباع الخطوات المذكورة في المثال السابق، نمثل المتباينات (1) و(2) و(3) و(4) بيانياً على المحاور الإحداثية وذلك برسم المستقيم الذي يحدد كل منها ثم نحدد المنطقة المقبولة والمنطقة المرفوضة، كما في الشكل (١٠).



الشكل (١٠)

نلاحظ من الشكل (١٠) أن منطقة الحل هي المضلع ABCD ، ونلاحظ انه بسحب مستقيم دالة الهدف باتجاه الأعلى أنه ينطبق على مستقيم المتباينة (2) وبالتالي لا توجد نقطة وحيدة تمثل الحل الامثل بل جميع نقاط القطعة المستقيمة BC بما فيها النقطتين A و B.

إحداثيات النقطة B هي : $x_1 = 0$ ، $x_2 = 1.5$ وعندئذ:

$$Z_B = 2(0) + 4\,(1.5) = 6$$

إحداثيات النقطة A هي : $x_1 = 1.75$ ، $x_2 = 0.625$ وعندئذ:

$$Z_A = 2(1.75) + 4\,(0.625) = 6$$

مسائل عامـة

١- حل بالطريقة البيانية البرامج الخطية التالية:

أ)

$$
\begin{aligned}
Z &= x_1 + 3x_2 \rightarrow Max\\
x_1 &\le 20\\
x_2 &\le 10\\
-2/3\, x_1 + x_2 &\le 1\\
x_1 + x_2 &\le 28\\
x_1 , x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

ب)

$$
\begin{aligned}
Z &= x_1 + 3x_2 \rightarrow Max\\
-x_1 + x_2 &\le 1\\
x_2 &\le 2\\
3x_1 + 6x_2 &\le 18\\
6x_1 + 4x_2 &\le 24\\
x_1 - x_2 &\le 3\\
x_1 , x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

ج)

$$
\begin{aligned}
z &= 6x_1 + 4x_2 \rightarrow Min\\
2x_1 + 4x_2 &\ge 3\\
x_1 - 2x_2 &\le 2\\
x_1 , x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

د)

$$
\begin{aligned}
z &= 2x_1 + 8x_2 \rightarrow Min\\
5x_1 + 10x_2 &= 150\\
x_2 &\ge 14\\
x_1 &\le 20\\
x_1 , x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

الفصل الثالث

أسلوب السمبلكس لحل نماذج البرمجة الخطية

١,٣ . مقدمة

يعتمد اسلوب السمبلكس على البداية بإحدى ذروات منطقة الحل والتي تعطي لدالة الهدف قيمة معينة Z^1 ثم ننتقل إلى ذروة أخرى تعطى لدالة الهدف قيمة أفضل ولتكن Z^2 وهكذا حتى نصل إلى الذروة التي تعطي لدالة الهدف القيمة المثلي Z^* . ونقصد بالقيمة المثلى لدالة الهدف إما القيمة الصغرى Min أو القيمة العظمى Max حسب نوع المسألة المدروسة.

استطاع دانتزيغ G.Dantzing وضع أسس هذه الطريقة عام ١٩٤٧ التي تتلخص بتحويل البرنامج الخطي إلى جدول (على شكل مصفوفة) يعالج باسلوب معين ضمن خطوات متسلسلة للوصول بعدد من التكرارات إلى الحل الأمثل مبتدئين بحل ابتدائي ممكن (إحدى ذروات منطقة الإمكانات)

إن الخوارزمية التي قدمها جورج دانتزيغ لحل البرامج الخطية اصطدمت بكثير من العقبات منها:

١. البدء بقاعدة (مجموعة من المتغيرات) تعطي حلاً ابتدائياً ممكناً (وهي الأكثر شيوعاً)، إذ إن ذلك يتطلب إجراء مجموعة من الحسابات معقدة نسبياً قبل البدء بجدول السمبلكس الأول.

٢. ظهور قيم سالبة في عمود الحل B أثناء الانتقال إلى جداول سمبلكس أخرى والتي تقف عندها خوارزمية الأولي للسمبلكس.

إلا إن هذه الخوارزمية سرعان ما طرأ عليها تعديلات وتطويرات عديدة [١] فظهرت خوارزمية السمبلكس للمرافق [٢] Dual Simplex Algorithm ثم خوارزمية السمبلكس للمرافق مع قيد مصطنع Dual simplex Algorithm with Artificial Constraint ثم خوارزمية المرافق الأولي Primal – Dual Algorithm وآخر هذه التعديلات هو تعديل ماغوط لخوارزمية الأولي ومرافقة للسمبلكس. [٣]

وسنعمل هنا على اختصار هذه الخوارزميات في خوارزمية واحدة تأخذ بعين الاعتبار تعديل ماغوط بالدرجة الأولى وتحقق الأهداف الأساسية التالية:

١- التصدي لجميع أشكال نماذج البرمجة الخطية بشكل فعال.

٢- تجنب الحسابات المعقدة واختصار العمليات الحسابية إلى أدنى حد ممكن.

٣- إمكانية برمجتها على الحاسوب مهما كان حجم البرنامج الخطي المدروس.

٤- إمكانية استنتاج الحل الأمثل للبرامج الخطية المترافقة مباشرة من جدول السمبلكس الأخير الذي يعطي الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي.

وتحقيقاً لما سبق سنتطرق أولاً إلى كيفية تشكيل جدول السمبلكس المختزل قبل عرض خوارزمية السمبلكس المطورة.

٢,٣. تشكيل جدول السمبلكس المختزل

بفرض أنه لدينا البرنامج الخطي التالي والذي يهدف إلى تعظيم الأرباح:

(١) لمزيد من المعلومات يمكن العودة إلى البرمجة الخطية. أ.د. خالد ماغوط، منشورات جامعة حلب ١٩٨٦.

(٢) **Lemke, C.E. The Dual Method of solving the linear programming problem, Nav Res Qu. 1, 1954.**

(٣) وضع هذه الخوارزمية المعدلة أ.د. خالد ماغوط في نهاية عام ١٩٨٣ وألقيت في الندوة العالمية العاشرة للرياضيات I.K.M في فايمار Veimar، ألمانيا- ١٩٨٥/٩/٥ ونشرت في المجلد السادس لأبحاث هذه الندوة عام ١٩٨٥.

$$\left.\begin{array}{l} Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to Max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad ; \quad i = 1,2,.....m \\ x_i \ge 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

لتشكيل جدول السمبلكس المختزل نتبع الخطوات التالية:

١- ننقل الحدود الموجودة في الطرف الأيمن من دالة الهدف إلى الطرف الأيسر أي:

$$Z - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = 0 \qquad (2)$$

٢- نحول المتباينات إلى مساويات بإضافة متغيرات مساعدة تدعى **متغيرات الفرق** **Slack variables**، وللمحافظة على شكل البرنامج الخطي سنرمز لهذه المتغيرات بـ x ونعطيهما أدلة ابتداءً من n+i (حيث i=1,2,…..m) بعدد الشروط الخطية أي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad ; \quad i = 1,2,......m \qquad (3)$$

٣- عندئذ جدول السمبلكس المختزل يأخذ الشكل التالي:

	x_1	…..	x_j	…..	x_n	**B**
Z	c_1	…..	c_j	…..	c_n	0
x_{n+1}	a_{11}	…..	a_{1j}	…..	a_{1n}	b_1
x_{n+2}	a_{21}	…..	a_{2j}	…..	a_{2n}	b_2
⋮	⋮					
x_{n+i}	a_{i1}	…..	a_{ij}	…..	a_{in}	b_i
⋮	⋮					
x_{n+m}	a_{m1}	……	a_{mj}	…..	a_{mn}	b_m

جدول (١)

حيث أن:

- عناصر سطر Z هي أمثال المتغيرات في دالة الهدف (٢) (مع الإشارات) .
- العناصر المقابلة لمتغيرات الفرق هي أمثال المتغيرات في الشروط الخطية (٣).
- عناصر العمود B هي الطرف الأيمن من دالة الهدف (٢) والشروط الخطية (٣).

- ونلاحظ في هذا الجدول أن متغيرات الفرق ستكون على يسار الجدول وتسمى **متغيرات القاعدة (متغيرات اساسية) Basic variables**
- متغيرات البرنامج المعطى ستكون في أعلى الجدول وتدعى **متغيرات خارج القاعدة (متغيرات غير اساسية) Non basic variables**

> **ملاحظة(١):** نشير هنا إلى أنه في جدول السمبلكس الأول فقط تكون متغيرات القاعدة هي نفسها متغيرات الفرق، أما في الجداول السمبلكس اللاحقة ليس بالضرورة.

مثال (١) لشكل جدول السمبلكس المختزل للبرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
Z = \; & 50x_1 + 40x_2 \rightarrow Max \\
& 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\
& 8x_1 + 5x_2 \leq 40 \\
& 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\
& x_1 , x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

البرنامج يكتب بعد اضافة متغيرات الفرق كما يلي:

$$
\begin{aligned}
Z - 50x_1 - 40x_2 & = 0 \\
2x_1 + 5x_2 + x_3 & = 20 \\
8x_1 + 5x_2 + x_4 & = 40 \\
5x_1 + 6x_2 + x_5 & = 30 \\
x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 & \geq 0
\end{aligned}
$$

وجدول السمبلكس يأخذ الشكل:

	x_1	x_2	B
Z	-50	-40	0
x_3	2	5	20
x_4	8	5	40
x_5	5	6	30

جدول (٢)

ويمثل هذا الجدول حل أولي ممكن، أي:

$Z = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 20 \quad x_4 = 40 \quad x_5 = 30$

يجب تطويره للوصول إلى الحل الامثل.

مثال (٢) لشكل جدول السمبلكس المختزل للبرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + x_2 \rightarrow Max \\ 3x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 5x_1 - x_2 &\geq 5 \\ x_2 \geq 0 \ , &\ \ x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

بضرب المتباينة الثالثة بـ (1-)

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + x_2 \rightarrow Max \\ 3x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ -5x_1 + x_2 &\leq -5 \\ x_2 \geq 0 \ , &\ \ x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

البرنامج يكتب بعد اضافة متغيرات الفرق كما يلي:

$$\begin{aligned} Z - x_1 - x_2 \qquad\qquad &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 3 \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_4 \quad &= 8 \\ -5x_1 + x_2 \qquad + x_5 &= -5 \\ x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

وجدول السمبلكس يأخذ الشكل:

	x_1	x_2	B
Z	-1	-1	0
x_3	3	1	3
x_4	1	2	8
x_5	-5	1	-5

جدول (٣)

ويمثل هذا الجدول حل أولي **غير ممكن**، أي:

$$Z = 0 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 3 \qquad x_4 = 8 \qquad x_5 = -5$$

يجب تطويره للوصول إلى الحل الامثل.

تنويه: **حل أولي غير ممكن** لوجود قيمة احد المتغيرات سالبة وهذا يتعارض مع مبدأ ان جميع المتغيرات متغيرات (القرار والفرق) يجب ان تكون أكبر أو تساوي الصفر.

تنويه:

١. **التفسير الاقتصادي لوجود اشارات سالبة في دالة الهدف** هو أنه يمكن أن تضطر الشركة بيع منتجاتها بخسارة مقابل حصولها على ربح أكبر من بيع منتج آخر، أو حتى لا تخسر موقعها في السوق.

٢. **وجود اشارات سالبة في بعض حدود القيود الخطية** يعود إلى أنه أثناء الدراسة التحليلية للمشكلة والاجراءات المتبعة في بناء النموذج الخطي قد تؤدي إلى ظهور قيم سالبة في حدود القيود الخطية. مثلاً قد تكون القيود الخطية هي عبارة عن تباينات أو تباينات مشتركة.

٣,٣. خوارزمية السمبلكس المطورة لحل نماذج البرمجة الخطية

كما ذكرنا سابقاً إن خوارزميات السمبلكس تعتمد على حل أولي ممكن ومن ثم تطوير هذا الحل إلى أن نحصل على الحل الأمثل، وحتى لا نقع في مشكلة التفتيش عن الحل الأولي الممكن (أي إيجاد قاعدة من المتغيرات تعطي حلاً أولياً ممكناً)، نشير هنا إلى أن جدول (٣) في المثال (٢) السابق لا يمكن البدء به كحل أولي ممكن لأن:

$$x_5=-5$$

لذلك فإننا في هذه الخوارزمية التي سنشرح خطواتها لاحقاً، يمكننا البدء بجدول السمبلكس المختزل الذي يكون فيه متغيرات الفرق هي متغيرات القاعدة وإن لم تكن هذه القاعدة تشكل حلاً ممكناً (أي حتى وان وجد في عمود B عناصر سالبة)

وتتألف هذه الخوارزمية من مرحلتين أساسيتين:

١. **تشكيل جدول السمبلكس المختزل**

٢. **تطوير الحل الأولي وذلك باختيار احد الاسلوبين:**

a. **معالجة عناصر سطر Z ثم معالجة عناصر عمود B إذا لزم الأمر.**

b. **معالجة عناصر عمود B ثم معالجة عناصر سطر Z إذا لزم الأمر.**

وسنقوم بالتركيز على حل نماذج البرمجة الخطية في حالة التعظيم (دالة الهدف Max) لتطبيق الخوارزمية ثم نعالج مشكلة التصغير.

١,٣,٣. حل نماذج البرمجة الخطية في حالة التعظيم (دالة الهدف Max)

المرحلة الأولى: تشكيل جدول السمبلكس المختزل

وتتضمن الخطوات التمهيدية التالية:

الخطوة (١): نجعل البرنامج الخطي بالصيغة النظامية أي دالة الهدف من نوع تعظيم Max والشروط الخطية من الشكل ≥ وجميع المتغيرات يشترط فيها عدم السلبية.

الخطوة (٢): نضيف متغيرات الفرق إلى الشروط الخطية فتصبح مساويات، وننقل الطرف الأيمن من دالة الهدف إلى الطرف الأيسر.

مثال (٣): لنفرض أنه لدينا البرنامج الخطي النظامي التالي:

$$\begin{aligned} Z = -6x_1 - 5x_2 + 2x_3 &\rightarrow Max \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\leq -2 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 &\leq -3 \\ x_1 , x_2 , x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

وحسب الخطوة (٢) نضيف x_4 , x_5 كمتغيرات فرق:

$$\begin{aligned} Z + 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= -2 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_5 &= -3 \end{aligned}$$

الخطوة (٣): نشكل جدول السمبلكس المختزل، كما مر معنا سابقاً، إذ أن متغيرات الفرق هي متغيرات القاعدة ومتغيرات القرار (متغيرات المسألة المفروضة) هي متغيرات خارج القاعدة ويعتبر هذا الجدول بمثابة حل أولي.

وحسب المثال جدول السمبلكس المختزل هو:

	x_1	x_2	x_3	B
Z	6	5	-2	0
x_4	-1	-1	1	-2
x_5	-1	-2	-3	-3

جدول (٤)

المرحلة الثانية: تطوير الحل

إن الحل الأمثل يتحقق إذا كانت العناصر المقابلة لمتغيرات خارج القاعدة في سطر Z جميعها موجبة والعناصر المقابلة لمتغيرات القاعدة في عمود B أيضاً موجبة وبالتالي حتى نتخلص من العناصر السالبة إن وجدت في سطر Z وعمود B لدينا خياران كلاهما يؤديان إلى الحل الأمثل للبرنامج الخطي:

١- إما أن نبدأ بمعالجة سطر Z أولاً للتخلص من العناصر السالبة ومن ثم الانتقال إلى عمود B **إذا لزم الأمر** (أي إذا وجد فيه عناصر سالبة)، ضمن خطوات المرحلة الثانية أولاً والمرحلة الثالثة ثانياً وهذا يدعى باستخدام **خوارزمية الأولي ومرافقة**[١] **Primal and dual Algorithm**.

٢- أو أن نبدأ بمعالجة عمود B أولاً للتخلص من العناصر السالبة ومن ثم الانتقال إلى معالجة سطر Z **إذا لزم الأمر** (أي إذا وجد فيه عناصر سالبة)، ضمن خطوات المرحلة الثالثة أولاً والثانية ثانياً. وهذا ما يدعى باستخدام **خوارزمية المرافق ثم الأولي dual and primal Algorithm**.

☒ **خطوات معالجة عناصر سطر Z:**

الخطوة (١): نحدد **عمود الدوران Pivot column** وذلك باختيار إحدى القيم السالبة في سطر Z المقابلة لمتغيرات خارج القاعدة، ولتكن $c_s<0$ عندئذ عمود الدوران هو عمود x_s وننتقل إلى الخطوة (٢).

ملاحظة(٢): إن لم نجد قيم سالبة في سطر Z والمقابلة لمتغيرات خارج القاعدة عندئذ ننتقل إلى معالجة عناصر عمود B.

حسب مثالنا عمود x_3 هو عمود الدوران: انظر الجدول (٤).

---

(١) سنتطرق إلى مفهوم الترافق في البرامج الخطية في الفصل الرابع بشكل مفصل إن شاء الله.

الخطوة (٢): نحدد **عنصر الدوران pivot element** وذلك باستخدام معيار ماغوط[1] للأولي التالي:

$$\text{عنصر الدوران عند معالجة عناصر سطر Z} = \underset{i \in J}{\text{Min}} \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \; ; \; a_{is} > 0 \right\} \quad \ldots\ldots(1)$$

حيث J أدلة متغيرات القاعدة.

b_i عناصر عمود B المقابلة لمتغيرات القاعدة.

a_{is} عناصر عمود الدوران المقابلة لمتغيرات القاعدة.

بعبارة أخرى: إذا وجد عنصر واحد في عمود الدوران اكبر من الصفر عندئذ هذا العنصر هو عنصر الدوران، وان وجد أكثر من عنصر واحد في عمود الدوران اكبر من الصفر عندئذ نقوم بتقسيم عناصر عمود الحل على عناصر عمود الدوران الأكبر من الصفر والنسبة الأصغر يكون عنصرها في عمود الدوران هو عنصر الدوران.

وحسب مثالنا عنصر الدوران هو العنصر(1) المحاط بإطار، انظر الجدول (٥).

الخطوة (٣):

نحدد **سطر الدوران Pivot line** وهو السطر الذي يتقاطع مع عمود الدوران عند عنصر الدوران. وحسب مثالنا السطر x_4 هو سطر الدوران، انظر الجدول (٥).

	x_1	x_2	↓ x_3	B
Z	6	5	-2	0
x_4 ←	-1	-1	$\boxed{1}$	-2
x_5	-1	-2	-3	-3

الجدول (٥)

الخطوة (٤): ننتقل إلى **جدول جديد** والذي يعتبر تطويراً للجدول السابق، بتطبيق الإجراءات التالية:

---

(١) ماغوط، خالد، البرمجة الخطية، منشورات جامعة حلب، ١٩٨٥.

١- نبدل متغير القاعدة في سطر الدوران بمتغير خارج القاعدة في عمود الدوران وبقية المتغيرات تبقى كما هي.

٢- نضع مكان عنصر الدوران في الجدول الجديد مقلوبه.

٣- نضع مكان العناصر الأخرى في سطر الدوران، في الجدول الجديد، قيمها في الجدول القديم مقسومة على عنصر الدوران.

٤- نضع مكان العناصر الأخرى في عمود الدوران، في الجدول الجديد، قيمها في الجدول القديم مقسومة على عنصر الدوران مع تغيير الإشارة.

٥- العناصر الأخرى في الجدول الجديد تحسب من الجدول القديم حسب قاعدة المستطيل التالية: {(**القطر الرئيسي – القطر الثانوي)/عنصر الدوران**}،مع الانتباه إلى أن القطر الرئيسي دوماً بدايته عنصر الدوران ونهايته العنصر المقابل للعنصر المراد حسابه).

ويمكن تلخيص هذه الخطوة كما يلي:

بفرض أن الجدول التالي يمثل الجدول القديم:

	x_r	……	x_s	B
Z	……	……	……	……
x_k	a_{kr}	……	$\boxed{a_{ks}}$	……
……	……	……	……	……
x_p	a_{pr}	……	a_{ps}	……
……	……	……	……	……

حيث a_{ks} عنصر الدوران، x_s عمود الدوران x_r سطر الدوران ولحساب قيمة a_{pr} في الجدول الجديد نطبق العلاقة التالية:

$$\text{New }(a_{pr}) = \frac{a_{pr}a_{ks} - a_{ps}a_{kr}}{a_{ks}}$$

حيث $P \neq k$ أدلة الأسطر و$r \neq s$ أدلة الأعمدة

حسب الاجراءات السابقة تصبح قيمة كل من **a_{ks}** وa_{kr} وa_{pr} و a_{ps} في الجدول الجديد كما في الجدول التالي:

	x_r	………	x_k	B
Z	………	………	⋮	……
x_s	$\frac{a_{kr}}{a_{ks}}$	………	$\frac{1}{a_{ks}}$	…….
…	………	………	………	……
x_p	$\frac{a_{pr}a_{ks} - a_{ps}a_{kr}}{a_{ks}}$	………	$\frac{a_{ps}}{a_{ks}}$	…….
…	………	………	………	……

بتطبيق الخطوة (٤) على الجدول (٥) نحصل على الجدول (٦).

	x_1	x_2	x_4	**B**
Z	4	3	2	-4
x_3	-1	-1	1	-2
x_5	-4	-5	3	-9

الجدول ٦)

الخطوة (٥): إذا وجد على الأقل عنصر واحد سالب في سطر Z والمقابلة لمتغيرات خارج القاعدة عندئذ نكرر الخطوات (١) و(٢) و(٣) و(٤) و(٥) السابقة، وفي الحالة المعاكسة ننتقل إلى الخطوة (٦).

الخطوة (٦): إذا كانت جميع العناصر في سطر Z والمقابلة لمتغيرات خارج القاعدة موجبة نكون وصلنا إلى حل ممكن للمرافق، وعندئذ نبحث في عمود الحل B، فإذا كانت جميع العناصر في عمود B والمقابلة لمتغيرات القاعدة موجبة عندئذ نكون قد وصلنا إلى حل أمثل للبرنامج الخطي المعطى، وإلا ننتقل إلى معالجة عناصر عمود B.

بناءً على ذلك فإن الجدول (٦) لا يمثل الحل الأمثل لوجود قيمة سالبة مقابلة لمتغيرات القاعدة في عمود الحل نتابع الحل بمعالجة عناصر عمود B.

☒ خطوات معالجة عناصر عمود B:

الخطوة (١): نحدد **سطر الدوران Pivot line** وذلك باختيار إحدى القيم السالبة في عمود B والمقابلة لمتغيرات القاعدة، ولتكن $b_k < 0$ عندئذ x_k هو سطر الدوران وننتقل إلى الخطوة (٢).

حسب مثالنا لنأخذ x_5 كسطر دوران انظر الجدول (٧).

الخطوة (٢): تحديد **عنصر الدوران Pivot element** وذلك باستخدام معيار ماغوط للأولي التالي:

$$\textbf{عنصر الدوران عند معالجة عناصر عمود B} = \underset{j\in J}{\text{Max}} \left\{\frac{c_i}{a_{kj}} ; a_{kj} < 0\right\} \ldots\ldots\textbf{(2)}$$

حيث: J أدلة متغيرات خارج القاعدة.

c_j عناصر سطر Z المقابلة لمتغيرات خارج القاعدة.

a_{kj} عناصر سطر الدوران المقابلة لمتغيرات خارج القاعدة.

بعبارة أخرى إذا وجد عنصر واحد سالب في سطر الدوران عندئذ هذا العنصر هو عنصر الدوران ونحيطه بدائرة، وإذا كان هناك أكثر من عنصر سالب عندئذ نقوم بتقسيم عناصر سطر Z على عناصر سطر الدوران السالبة والنسبة الأكبر يكون عنصرها في سطر الدوران هو عنصر الدوران.

وحسب مثالنا في الجدول (٧) نلاحظ انه في سطر الدوران x_5 عنصران سالبان لذلك بتطبيق المعيار السابق نجد أن

$$\text{عنصر الدوران} = \underset{J=1,2}{\text{Max}} \left\{\frac{4}{-4}, \frac{3}{-5}\right\} = -\frac{3}{5}$$

عندئذ العنصر (5-) هو عنصر الدوران.

الخطوة (٣): تحديد **عمود الدوران Pivot column** وهو العمود الذي يتقاطع مع سطر الدوران عند عنصر الدوران.

وحسب مثالنا عمود الدوران هو عمود x_2 انظر الجدول (٧).

	x_1	x_2	x_4	B
Z	4	3	2	-4
x_3	-1	-1	-1	-2
x_5	-4	$\boxed{-5}$	3	-9

الجدول (٧)

الخطوة (٤): **الانتقال إلى جدول جديد** والذي يعتبر تطويراً للجدول السابق، بتطبيق نفس الاجراءات المشروحة في الخطوة (٤) من خطوات معالجة عناصر سطر Z.

بتطبيق الخطوة (٤) على الجدول (٧) نحصل على الجدول (٨) التالي:

	x_1	x_5	x_4	B
Z	8/5	3/5	19/5	-47/5
x_3	-1/5	-1/5	2/5	-1/5
x_2	4/5	-1/5	-3/5	9/5

الجدول (٨)

الخطوة (٥): إذا وجد على الأقل عنصر سالب في عمود B والمقابل لمتغيرات القاعدة عندئذ نكرر الخطوات (١) و(٢) و(٣) و(٤) و(٥) من هذه المرحلة وفي الحالة المعاكسة ننتقل إلى الخطوة (٦).

وحسب مثالنا نلاحظ والجدول (٨) وجود عنصر سالب في عمود B وبالتالي سطر x_3 سطر الدوران، أما عنصر الدوران فهو حسب المعيار:

$$\text{عنصر الدوران} = \underset{J=1,5}{\text{Max}} \left\{ \frac{8/5}{-1/5}, \frac{3/5}{-1/5} \right\} = \text{Max}\ \{-8\ ,\ -3\} = -3$$

عندئذ العنصر $-\frac{1}{5}$ في عمود x_5 هو عنصر الدوران، وعمود x_5 هو عمود الدوران، انظر الجدول(٩).

	x_1	x_5	x_4	B
Z	8/5	3/5	19/5	-47/5
x_3	-1/5	$\boxed{-1/5}$	2/5	-1/5
x_2	4/5	-1/5	-3/5	9/5

الجدول (٩)

بتطبيق الخطوة (٤) على الجدول (٩) نحصل على الجدول (١٠) التالي:

	x_1	x_3	x_4	B
Z	1	3	5	-10
x_5	1	-5	-2	1
x_2	1	-1	-1	2

الجدول(١٠)

الخطوة (٦): إذا كانت جميع العناصر في عمود B والمقابلة لمتغيرات القاعدة موجبة، عندئذ نكون قد وصلنا إلى حل أمثل للبرنامج الخطي المعطى، لأن عناصر سطر Z والمقابلة لمتغيرات خارج القاعدة أصبحت موجبة لدى تطبيق المرحلة الثانية ولا يمكن أن تصبح سالبة مرة ثانية عند معالجة عناصر عمود B.

حسب مثالنا فإن الجدول (١٠) يمثل الحل الأمثل للبرنامج الخطي المعطى أي أن:

$$Z^* = -10 \qquad x_5 = 1 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = x_1 = x_4 = 0$$

ملاحظة هامة: عند البدء بمعالجة عمود B أولاً ثم سطر Z ثانياً (أي المرافق ثم الأولي) فإن **الخطوة** (٦) **من خطوات معالجة عناصر عمود B نأخذ الصيغة التالية:**

إذا كانت جميع العناصر في عمود B والمقابلة لمتغيرات القاعدة موجبة، نكون وصلنا إلى حل ممكن للأولي، وعندئذ نبحث في سطر Z فإذا كانت جميع العناصر في سطر Z المقابلة لمتغيرات خارج القاعدة موجبة عندئذ نكون قد وصلنا الى حل أمثل للبرنامج الخطي المعطى وإلا ننتقل إلى **خطوات معالجة عناصر سطر Z.**

والخطوة (٦) من خطوات معالجة عناصر سطر Z نأخذ الصيغة التالية:

إذا كانت جميع العناصر في سطر Z والمقابلة لمتغيرات القاعدة موجبة، عندئذ نكون قد وصلنا إلى حل أمثل للبرنامج الخطي المعطى، لان عناصر عمود B والمقابلة

لمتغيرات القاعدة أصبحت موجبة لدى تطبيق خطوات معالجة عناصر عمود B ، ولا يمكن أن تصبح سالبة مرة ثانية لدى تطبيق خطوات معالجة عناصر سطر Z.

مثال (٤): لنعِد حل المثال (٣) وذلك بمعالجة عمود B أولاً ثم سطر Z.

جدول السمبلكس الأول هو الجدول (٤) والذي سنعيد كتابته انظر الجدول (١١):

	x_1	x_2	x_3	B
Z	6	5	-2	0
x_4	-1	**-1**	1	-2
x_5	-1	-2	-3	-3

الجدول (١١)

أخذنا x_4 كسطر دوران وعنصر الدوران سيكون حسب المعيار (٢) هو:

$$\text{عنصر الدوران} = \text{Max}\left\{\frac{6}{-1},\frac{5}{-1}\right\} = -5$$

وبالتالي عمود الدوران هو x_2 والجدول (١٢) هو الجدول الجديد.

	x_1	x_4	x_3	B
Z	1	5	3	-10
x_2	1	-1	-1	2
x_5	1	-2	-5	1

الجدول (١٢)

نلاحظ أن الجدول (١٢) يمثل الحل الأمثل لأن عناصر عمود B المقابلة لمتغيرات القاعدة موجبة وعناصر سطر Z موجبة أيضاً ولا حاجة لمعالجة سطر Z.

مثال (٥): ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Z = 2x_1 + x_2 \to \text{Max}$$
$$x_1 - 2x_2 \le -1$$
$$x_2 \le 2$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$-2x_1 + 6x_2 \le 9$$
$$x_1 , x_2 \ge 0$$

١- جد الحل الأمثل باستخدام خوارزمية السمبلكس المطورة الأولي ثم المرافق.

٢- جد الحل الأمثل باستخدام خوارزمية السمبلكس المطورة المرافق ثم الأولي.

١– الحل الأمثل باستخدام خوارزمية السمبلكس الأولي ثم مرافقه:

أولاً نضيف متغيرات الفرق فيصبح البرنامج المعطى كما يلي:

$$
\begin{aligned}
Z - 2x_1 - x_2 &= 0 \\
x_1 - 2x_2 + x_3 &= -1 \\
x_2 + x_4 &= 2 \\
-x_1 + x_2 + x_5 &= 1 \\
-2x_1 + 6x_2 + x_6 &= 9 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}
$$

وجدول السمبلكس الابتدائي هو الجدول (١٣):

	x_1	x_2	B
Z	-2	-1	0
x_3	1	-2	-1
x_4	0	1	2
x_5	-1	1	1
x_6	-2	6	9

الجدول (١٣)

ونبدأ بمعالجة سطر Z:

- نقوم بتحديد عمود وعنصر وسطر الدوران كما في الجدول (١٤):

	x_1	x_2	B
Z	-2	-1	0
x_3	$\boxed{\mathbf{1}}$	-2	-1
x_4	0	1	2
x_5	-1	1	1
x_6	-2	6	9

الجدول (١٤)

- ننتقل إلى جدول جديد والذي يعتبر تطويراً للجدول السابق، الجدول (١٥):

	x_3	x_2	B
Z	2	-5	-2
x_1	1	-2	-1
x_4	0	$\boxed{\mathbf{1}}$	2
x_5	1	-1	0
x_6	2	2	7

الجدول (١٥)

- نتابع تطبق خوارزميتنا على سطر Z ونحدد عمود الدوران وعنصر الدوران وسطر الدوران في الجدول (١٥) وننتقل إلى الجدول (١٦).

	x_3	x_4	B
Z	2	5	8
x_1	1	2	3
x_2	0	1	2
x_5	1	1	2
x_6	2	-2	3

الجدول (١٦)

نلاحظ أن الجدول (١٦) يمثل الحل الأمثل لأن جميع عناصر سطر Z وجميع عناصر عمود B موجبة، والحل الأمثل هو: $Z^* = 8$

$x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = 2 \quad , \quad x_5 = 2 \quad , \quad x_6 = 3 \quad , \quad x_3 = x_4 = 0$

٢- الحل الأمثل باستخدام خوارزمية السمبلكس المرافق ثم الأولي:

جدول السمبلكس الابتدائي هو الجدول (١٣).

ونبدأ بمعالجة عمود B:

- نقوم بتحديد سطر وعنصر وعمود الدوران كما في الجدول (١٧):

	x_1	x_2	B
Z	-2	-1	0
x_3	1	$\boxed{-2}$	-1
x_4	0	1	2
x_5	-1	1	1
x_6	-2	6	9

الجدول (١٧)

- ننتقل إلى جدول جديد والذي يعتبر تطويراً للجدول السابق، الجدول (١٨).

	x_1	x_3	B
Z	-5/2	-1/2	1/2
x_2	-1/2	-1/2	1/2
x_4	$\boxed{1/2}$	1/2	3/2
x_5	-1/2	1/2	1/2
x_6	1	3	6

الجدول (١٨)

نلاحظ أن الجدول (١٨) لا يمثل حلاً أمثلياً وذلك لوجود عناصر سالبة في سطر Z لذلك ننتقل **لمعالجة سطر Z** ونختار x_1 عمود الدوران و x_4 سطر الدوران وننتقل إلى الجدول (١٩):

	x_4	x_3	B
Z	5	2	8
x_2	1	0	2
x_1	2	1	3
x_5	1	1	2
x_6	-2	2	3

الجدول (١٩)

الجدول (١٩) يمثل الحل الأمثل وذلك لأن جميع عناصر سطر Z وجميع عناصر عمود B موجبة، والحل الأمثل هو: $Z^* = 8$

$x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = 2 \quad , \quad x_5 = 2 \quad , \quad x_6 = 3 \quad , \quad x_3 = x_4 = 0$

٢,٣,٣. حل نماذج البرمجة الخطية في حالة التصغير (دالة الهدف Min)

إذا كان البرنامج الخطي من نوع ت صغير Min أي:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \text{Min}$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad ; \quad i = 1,2,.....n$$
$$x_j \ge 0$$

بنقل حدود الطرف الأيمن لدالة الهدف إلى الطرف الأيسر وتحويل المتباينات إلى مساويات بطرح متغيرات مساعدة (متغيرات الفرق) نجد:

$$z - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = 0$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i \quad ; \quad i = 1,2,.....m$$
$$x_j \, , x_{n+i} \ge 0$$

وفي هذه الحالة نتبع أحد الأساليب التالية لايجاد الحل الامثل:

الاسلوب الأول:

نحول المتباينات فقط إلى شكل $\leq$ وإضافة متغيرات الفرق ونقل الطرف الأيمن إلى الطرف الأيسر في دالة الهدف وكتابة جدول السمبلكس الأول ونحاول عندها معالجة سطر z بأن نتخلص من القيم الموجبة المقابلة لمتغيرات خارج القاعدة، بعبارة أخرى الحل الأمثل يكون بأن تصبح جميع عناصر سطر z المقابلة لمتغيرات خارج القاعدة سالبة، وجميع عناصر عمود B المقابلة لمتغيرات القاعدة موجبة وتبقى خطوات الخوارزمية التي عرضناها سابقاً صحيحة.

مثال (٦): ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
z &= x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \text{Min} \\
& 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 \qquad (1) \\
& 4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -2 \qquad (2) \\
& 3x_1 + x_3 \leq 5 \qquad (3) \\
& x_1 , x_2 , x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

بضرب المتباينة (٢) بـ (1-) يصبح البرنامج الخطي:

$$
\begin{aligned}
z &= x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \text{Min} \\
& 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 \\
& -4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\
& 3x_1 + x_3 \leq 5 \\
& x_1 , x_2 , x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

بنقل الطرف الأيمن إلى الطرف الأيسر في دالة الهدف، واضافة متغيرات الفرق إلى الشروط الخطية:

$$
\begin{aligned}
Z - x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\
2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\
-4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 2 \\
3x_1 + x_3 + x_6 &= 5 \\
x_j \geq ; \quad j=1,2,\ldots\ldots 6
\end{aligned}
$$

جدول السمبلكس الأول يأخذ الشكل:

	x_1	x_2	x_3	B
z	-1	1	3	0
x_4	2	-1	-1	1
x_5	-4	**2**	-1	2
x_6	3	0	1	5

الجدول (٢٠)

نطبق خطوت معالجة عناصر سطر Z مع تعديل فقط في الخطوة (١) والتي تصبح بالشكل التالي:

الخطوة (١): نحدد **عمود الدوران Pivot column** وذلك باختيار إحدى القيم الموجبة في سطر Z المقابلة لمتغيرات خارج القاعدة، ولتكن $c_s > 0$ عندئذ عمود الدوران هو عمود x_2 وننتقل إلى الخطوة (٢)

وجداول السمبلكس المتتالية هي الجداول (٢١) و(٢٢) و(٢٣) و(٢٤):

	x_1	x_2	x_3	B
z	-1	1	3	0
x_4	2	-1	-1	1
x_5	-4	**2**	-1	2
x_6	3	0	1	5

الجدول (٢١)

	x_1	x_2	x_3	B
z	1	-1/2	7/2	-1
x_4	0	+1/2	-3/2	2
x_2	-2	1/2	-1/2	1
x_6	**3**	0	1	5

الجدول (٢٢)

	x_6	x_5	x_3	B
z	-1/3	-1/2	19/6	-8/3
x_4	0	1/2	-3/2	2
x_2	2/3	1/2	1/6	13/3
x_1	1/3	0	**1/3**	5/3

الجدول (٢٣)

	x_6	x_5	x_1	B
z	-7/2	-1/2	-19/2	-111/6
x_4	2/3	1/2	3	19/2
x_2	1/3	1/2	-1/2	21/6
x_3	1	0	3	5

الجدول (٢٤)

والحل الأمثل من الجدول (٢٤) هو:

$$z^* = -111/6$$
$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 21/6 \qquad x_3 = 5$$
$$x_4 = 19/2 \qquad x_6 = x_5 = 0$$

الاسلوب الثاني: (وهذا ينصح به)

نحول البرنامج الخطي Min إلى Max وذلك بضرب دالة الهدف **ومعادلات** الشروط الخطية التي من الشكل $\geq$ بـ (1-)، ثم نطيق خوارزمية السمبلكس وعند الوصول الى جدول الحل الامثل نضرب فقط قيمة دالة الهدف المثلى التي ظهرت في جدول الحل الأمثل بـ (1-).

مثال (٧): ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$z = x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \text{Min}$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 \qquad (1)$$
$$4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -2 \qquad (2)$$
$$3x_1 + x_3 \leq 5 \qquad (3)$$
$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

الحل: نضرب دالة الهدف بـ (1-) والشرط الخطي (٢) بـ (1-):

$$-z = -x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \text{Max}$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 \leq 1$$
$$-4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2$$
$$3x_1 + x_3 \leq 5$$
$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

بوضع $Z = -z$ ونقل الطرف الأيمن إلى الطرف الأيسر في دالة الهدف وإضافة متغيرات الفرق نجد:

$$Z + x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$$

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \quad &= 1 \\
-4x_1 + 2x_2 - x_3 \quad + x_5 \quad &= 2 \\
3x_1 + \quad + x_3 \quad + x_6 \quad &= 5 \\
x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 \geq 0 &
\end{aligned}
$$

وجدول السمبلكس الأول هو الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	B
Z	1	-1	-3	0
x_4	2	-1	-1	1
x_5	-4	$\boxed{2}$	-1	2
x_6	3	0	1	5

الجدول (٢٥)

وباستخدام خوارزمية السمبلكس المطورة نحصل في النهاية على الجدول التالي الذي يمثل الحل الأمثل للبرنامج الخطي Max:

	x_6	x_5	x_1	B
Z	7/2	1/2	19/2	111/6
x_4	2/3	1/2	3	19/2
x_2	1/3	1/2	-1/2	21/6
x_3	1	0	3	5

الجدول (٢٦)

والحل الأمثل للبرنامج الخطي Min المعطى هو:

$$z^* = -Z = -111/6$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 21/6$$

$$x_3 = 5 \qquad , \qquad x_4 = 19/2 \qquad , \qquad x_5 = x_6 = 0$$

الاسلوب الثالث:

تحويل البرنامج Min إلى برنامج Max باستخدام مفهوم الترافق ثم حل البرنامج المرافق، وبعد ذلك حسب شروط الترافق نستنتج حل البرنامج المعطى(وسنتطرق لذلك في الفصل الرابع انشاء الله).

٤,٣ . ملاحظات وحالات خاصة

سنتطرق إلى بعض الحالات التي قد تظهر أثناء الحل وآلية التعامل معها.

١,٤,٣. الشروط الخطية في البرنامج الأولي متناقضة

إذا وصلنا أثناء الحل إلى جدول يكون فيه احد عناصر عمود B المقابلة لمتغيرات القاعدة سالباً، وإذا كانت جميع عناصر سطر هذا العنصر موجبة أو معدومة أي:

$b_k < 0 \quad ; \quad a_{ks} \quad \forall\, s \in J$

حيث J أدلة خارج القاعدة.

عندئذ تكون الشروط الخطية في البرنامج الأولي متناقضة ولا يكون هناك حلٌّ للبرنامج الخطي المعطى ولا لمرافقه، أما بيانياً فإنه **لا يوجد منطقة حل** وبالتالي المسالة مستحيلة.

مثال (٨): أوجد حل البرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{array}{lll}
z = & 20x_1 + 30x_2 \rightarrow Max & \\
& 3x_1 + 4x_2 \leq 12 & (1) \\
& 3x_1 + 4x_2 \geq 24 & (2) \\
& x_1 \geq 0 & (3) \\
& x_2 \geq 0 & (4)
\end{array}
$$

وجدول السمبلكس الابتدائي هو الجدول (٢٧):

	x_1	x_2	B
Z	-20	-30	0
x_3	3	4	12
x_4	-3	-4	24

الجدول (٢٧)

وباستخدام خوارزمية السمبلكس المطورة نحصل على الجداول التالية:

	x_3	x_2	B
Z	20/3	-10/3	-240/3
x_1	1/3	4/3	4
x_4	1	0	12

الجدول (٢٨)

	x_3	x_1	B
Z	30/4	10/4	-70
x_2	1/4	3/4	3
x_4	1	0	-12

الجدول (٢٩)

نلاحظ أن عناصر سطر x_4 احدهما موجب والأخر صفر إذاً لا يمكن إيجاد عنصر الدوران وفي هذه الحالة لا يمكن الاستمرار في الحل لوجود تناقض في الشروط الخطية للبرنامج المعطى، وبيانياً لا يوجد منطقة حل (انظر الشكل (٨) في الفصل السابق).

٢,٤,٣. الشروط الخطية في البرنامج المرافق متناقضة

إذا وصلنا أثناء الحل إلى جدول يكون فيه أحد عناصر سطر Z المقابلة لمتغيرات خارج القاعدة سالباً، وإذا كانت جميع عناصر عمود هذا العنصر سالبة أو معدومة أي:

$$c_s < 0 \ , \ a_{sk} \leq 0 \quad \forall\, k \in J$$

حيث J أدلة القاعدة.

عندئذ تكون الشروط الخطية في البرنامج المرافق متناقضة ولا يكون هناك حلٌ للبرنامج الخطي المعطى ولا لمرافقة، أما بيانياً فإن منطقة الحل مفتوحة **ولا يوجد قيمة قصوى لدالة الهدف** في منطقة الحل.

مثال (٩): أوجد حل البرنامج الخطي التالي بيانياً:

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow Max$$

$$3x_1 - 3x_2 \leq 9 \qquad (1)$$

$$-3x_1 + 3x_2 \leq 9 \qquad (2)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad (3)$$

$$x_2 \geq 0 \qquad (4)$$

وجدول السمبلكس الابتدائي هو الجدول (٣٠):

	x_1	x_2	B
Z	-1	-1	0
x_3	$\boxed{3}$	-3	9
x_4	-3	3	9

الجدول (٣٠)

وباستخدام خوارزمية السمبلكس المطورة نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	B
Z	1/3	-3	3
x_3	1/3	-1	3
x_4	1/3	0	18

الجدول (٣١)

نلاحظ أن جميع عناصر عمود x_2 سالبة ومعدومة عندئذ لا يمكن إيجاد عنصر الدوران وفي هذه الحالة لا يمكن الاستمرار في الحل لوجود تناقض في الشروط الخطية للبرنامج المرافق، أما بيانياً فإن منطقة الحل مفتوحة ولا يوجد قيمة عظمى لدالة الهدف في منطقة الحل (انظر الشكل (٩) في الفصل السابق).

٣,٤,٣. أحد عناصر عمود (سطر) الدوران يساوي الصفر

أولاً: إذا كان أحد عناصر عمود الدوران يساوي الصفر عندئذ للانتقال إلى الجدول التالي، فإن عناصر السطر الذي يحوي هذا العنصر الصفري لا تتغير وذلك لأنه:

الجدول القديم

a	....	b
....		....
0	....	c

$\Rightarrow$

الجدول الجديد

1/a	....	b/a
....		....
0	....	(a*c – 0*b)/a = c

ثانياً: إذا كان أحد عناصر سطر الدوران يساوي الصفر عندئذ للانتقال إلى الجدول التالي، فإن عناصر العمود الذي يحوي هذا العنصر الصفري لا تتغير وذلك لأنه:

الجدول القديم

a	....	0
....		....
b	....	c

$\Rightarrow$

الجدول الجديد

1/a	....	0
....		....
- b/a	....	(a*c – b*0)/a = c

ويمكن التأكد من ذلك بالرجوع إلى الجداول (٢١)، (٢٢)، (٢٣) في المثال(٦) السابق.

٤,٤,٣. تعدد الحلول المثلى

إذا وصلنا أثناء الحل إلى جدول يكون فيه أحد عناصر سطر Z المقابلة لمتغيرات خارج القاعدة صفراً والباقي موجبة، عندئذ فإن للبرنامج الخطي أكثر من حل.

والسبب في ذلك هو أنه اذا اعتبرنا الصفر سالباً عندها في جدول التطوير التالي ستتغير جميع العناصر ماعدا عناصر سطر Z حسب القاعدة في الفقرة السابقة.

مثال (١٠)

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow Max$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10 \qquad (1)$$

$$4x_1 + 8x_2 \leq 12 \qquad (2)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad (3)$$

$$x_2 \geq 0 \qquad (4)$$

وجدول السمبلكس الابتدائي هو الجدول (٣٢):

	x_1	x_2	B
Z	-2	-4	0
x_3	5	2	10
x_4	4	8	12

الجدول (٣٢)

وباستخدام خوارزمية السمبلكس المطورة نحصل على الجداول التالي:

	x_3	x_2	B
Z	2/5	-16/5	4
x_1	1/5	2/5	2
x_4	-4/5	32/5	4

الجدول (٣٣)

	x_3	x_4	B
Z	0	1/2	6
x_1	1/4	-1/16	7/4
x_2	-1/8	5/32	5/8

الجدول (٣٤)

اذا اعتبرنا الصفر قيمة موجبة فالحل الامثل هو:

$\mathbf{Z = 6} \quad , \quad x_1 = 7/4 \quad , \quad x_2 = 5/8 \quad , \quad x_3 = 0 \quad , \quad x_4 = 0$

اذا اعتبرنا الصفر قيمة سالبة عندئذ نتابع تطوير الحل باعتبار عمود $\mathbf{x_3}$ هو عمود الدوران وبالتالي سطر $\mathbf{x_1}$ هو سطر الدوران ونحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_4	B
Z	0	1/2	6
x_3	4	-1/4	7
x_2	1/2	1/8	3/2

الجدول (٣٥)

وهذا حل آخر يعطي لدالة الهدف نفس القيمة العظمى والحل هو:

$\mathbf{Z = 6} \quad , \quad x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 3/2 \quad , \quad x_3 = 7 \quad , \quad x_4 = 0$

اذا اعتبرنا الصفر قيمة سالبة عندئذ نتابع تطوير الحل باعتبار عمود $\mathbf{x_1}$ هو عمود الدوران وبالتالي سطر $\mathbf{x_1}$ هو سطر الدوران ونحصل على الجدول التالي:

	x_3	x_4	B
Z	0	1/2	6
x_1	1/4	-1/16	7/4
x_2	-1/8	5/32	5/8

الجدول (٣٦)

وهو نفس الجدول (٣٤) وبالتالي للبرنامج المعطى حلان يعطيان نفس القيمة لدالة الهدف.

٥,٤,٣. أحد الشروط الخطية على شكل مساواة

إذا كان أحد الشروط الخطية على شكل مساواة وجميع المتغيرات يشترط بها عدم السلبية عندئذ للوصول إلى الشكل النظامي للبرنامج الخطي (أي الشروط الخطية على شكل متباينات $\leq$) نكتب المساواة على شكل متباينتين مختلفتين بالاتجاه ونضرب إحداهما بـ (1-) لتصبح $\leq$ ونتابع الحل باسلوب السمبلكس المطور.

مثال (١١)

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
Z &= x_1 - 5x_2 \rightarrow Max \\
&-2x_1 + 2x_2 = 3 \qquad (1) \\
&2x_1 + x_2 \geq 5 \qquad (2) \\
&x_1 , x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

الشرط (١) يكتب:

$$-2x_1 + 2x_2 \geq 3 \qquad (3)$$

$$-2x_1 + 2x_2 \leq 3 \qquad (4)$$

وبضرب المتباينة (3) بـ (-1) لتغيير اتجاه المتباينة، ثم نضرب الشرط (٢) بـ (-1) لتغير اتجاه المتباينة ليتناسب مع Max ، عندئذ يأخذ البرنامج الخطي الشكل التالي:

$$
\begin{aligned}
Z &= x_1 - 5x_2 \rightarrow Max \\
&2x_1 - 2x_2 \leq -3 \\
&-2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
&-2x_1 - x_2 \leq -5 \\
&x_1 , x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

وهو برنامج نظامي، نتابع الحل حسب خطوات خوارزمية السمبلكس.

٦,٤,٣. أحد المتغيرات لا يشترط فيه عدم السلبية

إذا كان أحد المتغيرات لا يشترط فيه عدم السلبية، عندئذ يمكن تحويل البرنامج الخطي المعطى إلى الحالة النظامية (أي جميع المتغيرات أكبر أو تساوي الصفر) باتباع أساليب وطرق مختلفة، ومن هذه الطرق الطريقة التالية:

أ- نضيف متغيرات الفرق إلى الشروط الخطية.

ب- نحسب قيمة المتغير x_j (الذي لا يشترط فيه عدم السلبية) من إحدى المساويات التي تحويه بدلالة باقي المتغيرات.

جـ- نعوض قيمة المتغير x_j في باقي المساويات وفي دالة الهدف، نكون قد تخلصنا من وجود هذا المتغير في البرنامج الخطي.

د- نتابع الحل باسلوب السمبلكس وبعد الوصول إلى الحل الأمثل نعود لحساب المتغير x_j من معادلة x_j.

مثال (١٢)

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow Max$$
$$3x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$
$$-5x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_2 \geq 0, \quad x_1 \leq \; \geq 0$$

أي أن x_1 لا يشترط فيه عدم السلبية

بتحويل المتباينات إلى مساويات بإضافة متغيرات الفرق نجد

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow Max$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \qquad (1)$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \qquad (2)$$
$$-5x_1 + x_2 + x_5 = 5 \qquad (3)$$

نحسب x_1 الذي لا يشترط فيه عدم السلبية من إحدى المساويات ولتكن من المساواة (٢) أي:

$$x_1 = -2x_2 - x_4 + 8 \qquad (*)$$

نعوض x_1 في المساويات (١) و(٢) ودالة الهدف، فيصبح البرنامج الخطي كما يلي:

$$Z + x_2 + x_4 = 8$$
$$-5x_2 - 3x_4 + x_3 = -21$$
$$11x_2 + 5x_4 + x_5 = 45$$
$$x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

وجدول السمبلكس الأول هو:

	x_2	x_4	B
Z	1	1	8
x_3	$\boxed{-5}$	-3	-21
x_5	11	5	45

الجدول (٣٧)

وباستخدام خوارزمية السمبلكس نحصل على الجداول التالية:

	x_3	x_4	B
Z	1/5	2/5	19/5
x_2	-1/5	3/5	21/5
x_5	11/5	**-8/5**	-6/5

الجدول (٣٨)

	x_3	x_5	B
Z	6/8	2/8	140/40
x_2	5/8	3/8	30/8
x_4	-11/8	-5/8	6/8

الجدول (٣٩)

والحل الأمثل:

$$Z^* = \frac{140}{40}$$

$$x_2 = 30/8 \quad , \quad x_4 = 6/8 \quad , \quad x_3 = x_5 = 0$$

أما x_1 فنحسبها من العلاقة (*) أي

$$x_1 = -2\left(\frac{30}{8}\right) - \frac{6}{8} + 8 \quad = -\frac{1}{4}$$

٧,٤,٣. أحد المتغيرات أو جميعها بقيم صحيحة

إن بعض المشاكل الاقتصادية والإدارية التي تؤول إلى نماذج برمجة خطية تشترط على بعض أو كل متغيراتها أن تكون بقيم صحيحة غير سالبة، كأن تكون هذه المتغيرات تمثل عدد الآلات التي يتم شراؤها أو عدد العمال الواجب توظيفهم أو كميات إنتاج السيارات أو الطائرات وكل هذه الحالات لا تقبل أن تكون قيمها إلا أعداداً صحيحة، تدعى مثل هذه المسائل بنماذج البرامج الخطية بقيم صحيحة.

في الحقيقة طورت خوارزميات عديدة لمعالجة هذه المشكلة من تلك الخوارزميات خوارزميات القطع **Cutting Algorithm** والتي تعود للعالم غومري **Gomery** التي تتلخص

فكرتها في تعديل مضلع منطقة الحل بحيث تصبح إحداثيات نقطة الحل أعداداً صحيحة، ويجب أن نجري هذا التعديل دون أن نقطع أية شريحة من مضلع الحل[٢].

سنقدم في هذه الفقرة الطريقة العامة لحل النماذج الخطية بقيم صحيحة باستخدام إحدى خوارزميات القطع والتي تفترض بأن جميع متغيرات البرنامج الخطي يجب أن تكون بقيم صحيحة وغير سالبة، ومن السهل بعد ذلك معالجة البرامج التي يشترط على بعض متغيراتها تحقق هذين الشرطين. وقبل البدء بشرح الخوارزمية لابد من التعرض لبعض المفاهيم الأساسية.

أولاً: مفاهيم أساسية:

تعريف(١): إذا كان $\pi \in R$ فإننا نرمز بـ $[\pi]$ لأكبر عدد صحيح اصغر أو يساوي π

مثال (١٣)

إذا كان $\pi = 2$ فإن $[\pi] = 2$

إذا كان $\pi = 4/3 = 1.33$ فإن $[\pi] = 1$

إذا كان $\pi = -4/3 = -1.33$ فإن $[\pi] = -2$

تعريف (٢): يصطلح عادة على كتابة أي عدد حقيقي π بالشكل

$$\pi = [\pi] + f(\pi)$$

حيث $[\pi]$ اكبر عدد صحيح اصغر أو يساوي π ، و$f(\pi)$ هو الفرق $\pi-[\pi]$ ، سنسمي $f(\pi)$ الجزء الكسرى للعدد الحقيقي π ، بالإضافة إلى ذلك فان $0 \le f(\pi) < 1$

مثال (١٤): إذا كان $\pi = 15/4$ فإن:

$$[\pi] = [15/4] = 3$$
$$f(\pi) = f\,(15/4) = 3/4$$

ومنه :

---

[٢] المدخل إلى بحوث العمليات . أ.د. احمد رفيق قاسم ـ منشورات جامعة حلب ١٩٩٢ – صفحة ٢٠٦.

$15/4 = 3 + 3/4$

مثال (١٥): إذا كان $\pi = -15/4$ فإن:

$[- 15/4]= -4$
$f(-15/4)=1/4$

ومنه:

$-15/4= -4+1/4$

مثال (١٦): إذا كان $\pi = 3.14$ عندئذ يمكن أن نكتبه بالشكل:

$3.14 = 3 + 0.14$

مثال (١٧): إذا كان $\pi = -3.14$ عندئذ يمكن أن نكتبه بالشكل:

$-3.14 = -4 + 0.86$

ثانياً: خطوات خوارزمية حل البرامج الخطية بقيم صحيحة

لإيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي الذي يشترط على متغيراته أن تكون بقيم صحيحة نتبع الخطوات التالية:

الخطوة (١): نحل المسألة كمسألة برمجة خطية، دون الاهتمام بشرط القيم الصحيحة، بإحدى الخوارزميات فإذا كان الحل الأمثل هو قيم صحيحة، عندئذ يكون هو الحل الأمثل المطلوب لمسألة البرمجة بقيم صحيحة ولا حاجة لمتابعة الخطوات اللاحقة، وفي الحالات الأخرى نبحث عن شروط (قيود) ثانوية تهدف إلى توجيه الحل نحو حل بقيم صحيحة أي ننتقل إلى (الخطوة ٢).

الخطوة (٢): نحدد السطر المعالج وهو سطر متغير القاعدة المقابل لقيمة غير صحيحة في عمود B في الجدول الأخير الذي يمثل حلاً أمثلياً للبرنامج المعطى دون شرط القيم الصحيحة، وان وجد أكثر من متغير بقيم كسرية (غير صحيحة) عندئذ يفضل البداية بمعالجة سطر المتغير ذي الجزء الكسري $f(b_i)$ الأكبر ولنطبق هذه الخطوة مباشرة على المثال التالي:

مثال (١٨): ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Z = 2x_1 - 5x_2 \rightarrow Max$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$2x_1 + 7x_2 \geq 2$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 7$$
$$x_1 , x_2 \geq 0 \quad \text{وبقيم صحيحة}$$

نحل هذا البرنامج باستخدام خوارزمية السمبلكس المطورة مبتدئين بمتغيرات الفرق x_3 , x_4 , x_5 كمتغيرات للقاعدة، الجدول(٤٠):

	x_1	x_2	B
Z	-2	5	0
x_3	$\boxed{3}$	2	4
x_4	-2	-7	-2
x_5	2	5	7

الجدول (٤٠)

وجدول السمبلكس الجديد هو الجدول (٤١) التالي:

	x_3	x_2	B
Z	2/3	19/3	8/3
x_1	1/3	2/3	4/3
x_4	2/3	-17/3	2/3
x_5	-2/3	11/3	13/3

الجدول (٤١)

الجدول(٤١) يعطي الحل الأمثل للبرنامج المعطى ولكن بقيم حقيقية (كسرية) التالية:

$x_1 = 4/3$, $x_4 = 2/3$, $x_5 = 13/3$

وحسب الخطوة (٢) لتحديد السطر المعالج نوجد الجزء الكسري لقيم المتغيرات غير الصحيحة في عامود B بالشكل التالي:

$$f(4/3) = 0.33 = 1/3$$
$$f(2/3) = 0.66 = \mathbf{2/3} \rightarrow Max$$
$$f(13/3) = 0.33 = 1/3$$

نلاحظ أن الجزء الكسري لـ $x_4 = 2/3$ هو الأكبر عندئذ نعالج سطر x_4 كما في الخطوة (٣) التالية.

الخطوة (٣): **نضيف متغير فرق جديد إلى متغيرات القاعدة** والذي عناصر سطره عبارة عن الجزء الكسري لعناصر السطر المعالج مع تغيير الإشارة.

وحسب مثالنا نضيف المتغير الجديد x_6 إلى عناصر الجدول(٤١) أي:

	x_3	x_2	B
Z	2/3	19/3	8/3
x_1	1/3	2/3	4/3
x_4	**2/3**	**-17/3**	**2/3**
x_5	-2/3	11/3	13/3
x_6	**-2/3**	**-1/3**	**-2/3**

الجدول (٤٢)

حيث أن الجزء الكسري لعناصر السطر المعالج هي:

$$f(2/3) = 2/3 \quad , \quad f(-17/3) = 1/3 \quad , \quad f(2/3) = 2/3$$

الخطوة (٤): بما أن احد عناصر عمود B أصبحت سالبة أي $x_6 = -2/3 < 0$ عندئذ **نتابع الحل بالخوارزمية التي بدأنا بها في الخطوة (١)**.

إن سطر الدوران هو سطر x_6، نحدد عنصر الدوران وعمود الدوران كما هو في الجدول(٤٣) التالي:

	x_3	x_2	B
Z	2/3	19/3	8/3
x_1	1/3	2/3	4/3
x_4	2/3	-17/3	2/3
x_5	-2/3	11/3	13/3
x_6	$\boxed{\mathbf{-2/3}}$	-1/3	-2/3

الجدول (٤٣)

وجدول السمبلكس الجديد هو الجدول(٤٤) التالي:

	x_6	x_2	B
Z	1	6	2
x_1	1/2	1/2	1
x_4	1	-6	0
x_5	-1	4	5
x_3	-3/2	1/2	1

الجدول (٤٤)

نلاحظ أن الجدول الأخير الجدول (٤٤) يعطي الحل الأمثل بقيم صحيحة وغير سالبة التالية:

$Z^* = 2$ $x_1 = 1$ $x_2 = 0$ $x_3 = 1$
$x_4 = 0$ $x_5 = 5$ $x_6 = 0$

ملاحظات هامة

١– إذا لم تصبح عناصر عامود B جميعها بقيم صحيحة نعود ونكرر الخطوات (٢) و(٣) و(٤)، وإذا أصبحت جميعها بقيم صحيحة نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل وبقيم صحيحة.

٢–إذا وصلنا إلى الجدول(٣٨) وكانت عناصر عامود B سالبة، (حتى وان كانت جميع عناصر عامود B بقيم صحيحة، عندئذ نتابع الحل بالخوارزمية التي بدأنا بها في الخطوة (١) للتخلص من العنصر السالب.

٣– بعد التخلص من العنصر السالب في عامود B إذا وجدنا أحد عناصر عامود B بقيم غير صحيحة عندئذ نعود إلى تكرار الخطوات (٢) و(٣) و(٤).

مثال (١٩): اوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي:

$$Z = 7x_1 + 9x_2 \rightarrow Max$$
$$-x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$7x_1 + x_2 \leq 35$$
$x_1 , x_2 \geq 0$ وبقيم صحيحة

بتطبيق خوارزمية السمبلكس لحل البرنامج الخطي دون شرط القيم الصحيحة:

	x_1	x_2	B
Z	-7	-9	0
x_3	-1	3	6
x_4	**7**	1	35

الجدول (٤٥)

	x_4	x_2	B
Z	1	-8	35
x_3	1/7	**22/7**	11
x_1	1/7	1/7	5

الجدول (٤٦)

	x_4	x_3	B
Z	15/11	28/11	63
x_2	1/22	7/22	7/2
x_1	3/22	-1/22	9/2

الجدول (٤٧)

الجدول (٤٧) يعطي حلاً أمثلياً للبرنامج الخطي المعطى **بقيم غير صحيحة** والحل هو:

$$Z^* = 63 \quad , \quad x_1 = 9/2 \quad , \quad x_2 = 7/2$$

نطبق خوارزمية القيم الصحيحة على الجدول (٤٧) كما يلي:

١- لتحديد السطر المعالج نجد أن:

$$f(7/2) = 1/2 \qquad f(9/2) = 1/2$$

إذاً لا فرق بالاختيار، وسنختار السطر الأول (سطر x_2 هو السطر المعالج)

٢- بإضافة متغير فرق جديد x_5 عناصر سطره الجزء الكسري للعناصر المقابلة في السطر المعالج x_2 أي:

	x_4	x_3	B
Z	15/11	28/11	63
x_2	1/22	7/22	7/2
x_1	3/22	-1/22	9/2
x_5	-1/22	**-7/22**	-1/2

الجدول (٤٨)

حيث: $f(1/22) = 1/22 \quad , \quad f(7/22) = 7/22 \quad , \quad f(7/2) = 1/2$

وبتطبيق خوارزمية السمبلكس نحصل على الجدول التالي:

	x_4	x_5	B
Z	1	8	59
x_2	0	1	3
x_1	1/7	-1/7	32/7
x_3	1/7	-22/7	11/7

الجدول (٤٩)

نلاحظ من الجدول (٤٩) أننا لم نصل إلى الحل المناسب، نحدد مرة أخرى السطر المعالج وهو سطر x_1 لأن القسمين الكسريين متساويان ولا فرق بين x_1 , x_3 ونضيف متغير فرق جديد x_6 عناصره الجزء الكسري للعناصر المقابلة في السطر المعالج x_1، حيث أن:

$$f(1/7) = \frac{1}{7} \quad , \quad f(-1/7) = \frac{6}{7} \quad , \quad f(32/7) = \frac{4}{7}$$

والجدول (٤٩) يصبح على الشكل التالي:

	x_4	x_5	B
Z	1	8	59
x_2	0	1	3
x_1	1/7	-1/7	32/7
x_3	1/7	-22/7	11/7
x_6	**-1/7**	-6/7	-4/7

الجدول (٥٠)

وبتطبيق خوارزمية السمبلكس نحصل على الجدول التالي:

	x_6	x_5	B
Z	7	1	55
x_2	0	1	3
x_1	1	-1	4
x_3	1	-4	1
x_4	-7	6	4

الجدول (٥١)

الجدول (٥١) يعطي الحل الأمثل للبرنامج الخطي المعطى وبقيم صحيحة:

$Z^* = 55 \quad x_1 = 4 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 1$

$x_4 = 4 \quad x_6 = 0 \quad x_5 = 0$

مثال (٢٠): اوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي في المثال السابق وبقيم صحيحة فقط للمتغير x_1.

كما رأينا الجدول (٤٧) الذي يمثل الحل الأمثل للبرنامج الخطي بدون شرط القيم الصحيحة والذي نعيد كتابته هنا:

	x_4	x_3	B
Z	15/11	28/11	63
x_2	1/22	7/22	7/2
X_1	3/22	-1/22	9/2

الجدول (٥٢)

ولنطبق خوارزمية القيم الصحيحة عليه، على أن نأخذ سطر x_1 هو السطر المعالج ونضيف متغيراً جديداً x_5 عناصر سطره الجزء الكسري للعناصر المقابلة في السطر المعالج x_1 أي:

$$f(9/2) = 1/2 \quad , \quad f(-1/22) = 21/22 \quad , \quad f(3/22) = 3/22$$

والجدول(٥٢) يصبح بالشكل التالي:

	x_4	x_3	B
Z	15/11	28/11	63
x_2	1/22	7/22	7/2
x_1	3/22	-1/22	9/2
x_5	-3/22	**-21/22**	-1/2

الجدول (٥٣)

وبتطبيق خوارزمية السمبلكس نحصل على الجدول التالي:

	x_4	x_5	B
Z	0.98	2.68	61.67
x_2	0	0.36	73.32
x_1	0.15	-0.05	4.53
x_3	0.15	-1.05	0.53

الجدول (٥٤)

الجدول (٥٤)لم يؤد إلى جعل قيمة $\mathbf{x_1}$ بقيمة صحيحة، لذلك نكرر معالجة سطر $\mathbf{x_1}$، ونضيف متغيراً جديداً x_6 عناصر سطره الجزء الكسري للعناصر المقابلة في السطر المعالج x_1، أي:

	x_4	x_5	B
Z	0.98	2.68	61.67
x_2	0	0.36	73.32
x_1	0.15	-0.05	4.53
x_3	0.15	-1.05	0.53
x_6	0.15	**-.095**	-0.53

الجدول (٥٥)

وبتطبيق خوارزمية السمبلكس نحصل على الجدول التالي:

	x_4	x_6	B
Z	0.57	2.83	60.18
x_2	-0.06	-0.38	3.12
x_1	0.16	-0.06	4.56
x_3	0.31	-1.11	1.11
x_5	0.16	-1.06	0.56

الجدول (٥٦)

الجدول (٥٦)لم يؤد إلى جعل قيمة $\mathbf{x_1}$ بقيمة صحيحة، لذلك نكرر معالجة سطر $\mathbf{x_1}$، ونضيف متغيراً جديداً x_7 عناصر سطره الجزء الكسري للعناصر المقابلة في السطر المعالج x_1، أي:

	x_4	x_6	B
Z	0.57	2.83	60.18
x_2	-0.06	-0.38	3.12
x_1	0.16	-0.06	4.56
x_3	0.31	-1.11	1.11
x_5	0.16	-1.06	0.56
x_7	-0.16	**-0.94**	-0.50

الجدول (٥٧)

وبتطبيق خوارزمية السمبلكس نحصل على الجدول التالي:

	x_4	x_7	B
Z	0.10	3	58.6
x_2	0.12	0.40	2.90
x_1	0.16	-0.06	4.59
x_3	0.49	-1.18	1.76
x_5	0.33	-1.12	1.18
x_6	0.16	-1.06	0.59

الجدول (٥٨)

الجدول (٥٨)لم يؤد إلى جعل قيمة $\mathbf{x_1}$ بقيمة صحيحة، لذلك نكرر معالجة سطر $\mathbf{x_1}$، ونضيف متغيراً جديداً x_8 عناصر سطره الجزء الكسري للعناصر المقابلة في السطر المعالج x_1 ، أي:

	x_4	x_7	B
Z	0.10	3	58.6
x_2	0.12	0.40	2.90
x_1	0.16	-0.06	4.59
x_3	0.49	-1.18	1.76
x_5	0.33	-1.12	1.18
x_6	0.16	-1.06	0.59
x_8	**-0.16**	-0.94	-0.59

الجدول (٥٩)

وبتطبيق خوارزمية السمبلكس نحصل على الجدول التالي:

	x_8	x_7	B
Z	0.61	2.43	58.02
x_2	-0.72	1.07	3.32
x_1	1	-1	4
x_3	3	-4	0
x_5	2	-3	0
x_6	1	-2	0
x_4	-6.07	5.87	3.57

الجدول (٦٠)

والجدول (٦٠) الأخير يعطي الحل الأمثل للبرنامج الخطي المعطى وقيمة x_1 صحيحة:

$Z^* = 58.02$ $x_1 = 4$ $x_2 = 3.32$ $x_3 = 0$ $x_4 = 3.57$

$x_5 = 0$ $x_6 = 0$ $x_7 = 0$ $x_8 = 0$

مسائل عامـة

١- اوجد حل البرامج الخطية التالية باستخدام خوارزمية السمبلكس:

1. $Z = x_1 + 3x_2 \to Max$

$$\begin{aligned} x_1 &\le 20 \\ x_2 &\le 10 \\ -2/3\, x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1 + x_2 &\le 28 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

وبقيم صحيحة

2. $Z = x_1 + 3x_2 \to Max$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_2 &\le 2 \\ 3x_1 + 6x_2 &\le 18 \\ 6x_1 + 4x_2 &\le 24 \\ x_1 - x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

3. $z = 6x_1 + 4x_2 \to Min$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\ge 3 \\ x_1 - 2x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

وبقيم صحيحة

4. $z = 2x_1 + 8x_2 \to Min$

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 &= 150 \\ x_2 &\ge 14 \\ x_1 &\le 20 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

5. $z = x_1 - x_2 - 3x_3 \to Min$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &\le 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 &\ge -2 \\ 3x_1 + x_3 &\le 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

6. $z = 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 \to Min$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\ge 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\ge 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

و x_1 بقيمة صحيحة

7. $Z = 4x_1 - 7x_2 - 21x_3 \rightarrow Max$

$2x_1 - 3x_2 - 7x_3 \leq -2$

$4x_1 - 6x_2 - 13x_3 \leq -3$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

8. $z = -x_1 + 2x_2 \rightarrow Min$

$5x_1 - 2x_2 \leq 4$

$-x_1 - 2x_2 \geq -4$

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

9. $Z = -2x_1 + x_2 - 5x_3 \rightarrow Max$

$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 12$

$6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 15$

$3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 16$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

10. $Z = 12x_1 + 4x_2 \rightarrow Max$

$3x_1 + 2x_2 \leq 6$

$0.5x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

11. $Z = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow Max$

$x_1 + x_2 \leq 4$

$3x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 + 5x_2 \geq 4$

$x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$ وبقيم صحيحة

الفصل الرابع

البرامج الخطية المترافقة

٤,١ . مقدمة

سنتعرف في هذا الفصل على مفهوم البرامج الخطية المترافقة Duality Linear Programming لما لها من أهمية كبيرة في عرض مفهوم خوارزمية السمبلكس المطورة التي سنتطرق إليها في الفصل الرابع، من ناحية أخرى يساعد مفهوم الترافق في تسهيل الوصول إلى الحل الامثل في بعض تطبيقات بحوث العمليات مثل نظرية الالعاب كما سنرى لاحقاً.

٤,٢ . البرامج الخطية المترافقة

يرتبط كل برنامج خطي في المتغيرات $x_1 , x_2 , \ldots\ldots x_n$ ببرنامج آخر في المتغيرات $y_1 , y_2, \ldots . y_m$ (حيث m عدد الشروط الخطية في البرنامج الأصلي) يدعى بمرافق Dual البرنامج، والبرنامج الأصلي يدعى بالأولي Primal وحسب نظريات الترافق [(١)] والتعريف السابق يجب الأخذ بالحسبان القواعد التالية عند كتابة البرنامج المرافق:

١- إن مرافق المرافق هو البرنامج الأولي بالنسبة لأية مسألة خطية مدروسة.

(١) لمزيد من المعلومات عن الترافق يفضل الرجوع إلى مراجع بحوث العمليات والبرمجة الخطية، وخاصة المراجع العربية (١١)، (١٣) والمراجع الأجنبية (٤)، (١٠)، (١٣).

٢- يقابل كل متباينة في البرنامج الأولي متغير y_i حيث $(i = 1,2,...m)$ للبرنامج المرافق يخضع لشرط عدم السلبية وبالعكس.

٣- يقابل كل مساواة في البرنامج الأولي متغير y_i للبرنامج المرافق لا يشترط فيه عدم السلبية وبالعكس.

٤- إن مصفوفة أمثال المتغيرات للبرنامج المرافق هي منقول مصفوفة أمثال المتغيرات للبرنامج الأولي وبالعكس.

٥- الثوابت في الطرف الأيمن للشروط الخطية للبرنامج الأولي هي أمثال المتغيرات لدالة الهدف للبرنامج المرافق وبالعكس.

٣,٤. تصنيف البرامج الخطية المترافقة

لاستيعاب البرامج الخطية بجميع إشكالها سنصنف البرامج المترافقة في ثلاث مجموعات حسب الشكل العام للبرنامج الأولي.

أولاً: البرنامج الخطي المرافق للبرنامج الخطي التالي:

$$\left.\begin{array}{l} Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow Max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad ; \quad i = 1,2,....m \\ x_j \ge 0 \end{array}\right\} \quad (I)$$

هو البرنامج الخطي التالي:

$$\left.\begin{array}{l} z = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \rightarrow Min \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \ge c_j \quad ; \quad j = 1,2,....n \\ y_i \ge 0 \end{array}\right\} \quad (II)$$

نقول عن كل من البرنامجين الخطيين (I) و(II) أنه البرنامج الخطي المرافق للبرنامج الآخر.

إذا كتبنا المتباينات في البرنامج الخط (I) كمساويات بإضافة متغيرات الفرق نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} &Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \text{Max} \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad ; \quad i = 1,2,....m \\ &x_i \geq 0 \quad , \quad x_{n+i} \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad (I^*)$$

إذا كتبنا المتباينات في البرنامج الخطي(II) كمساويات بطرح متغيرات الفرق نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} &z = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \text{Min} \\ &\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i - y_{m+j} = c_j \quad , \quad j = 1,2,....n \\ &y_i \geq 0 \; y_{m+j} \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad (II^*)$$

وعندئذ الشرط اللازم والكافي للوصول الى حل هذين البرنامجين معاً هو أن نجد y_{m+j} , y_i , x_{n+i} , x_j حيث {i=1,2,….m , j=1,2,….n} والتي تحقق الشروط التالية:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_{m+j} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i x_{n+i} = 0 \qquad (2)$$

$$y_{m+j} , y_i , x_{n+i} , x_j \geq 0 \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad ; \quad i=1,2,\dots m \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i - y_{m+j} = c_j \quad ; \quad j=1,2,\dots n \qquad (5)$$

الشرط (١) و(٢) يشيران إلى أنه إذا كان x_j متغير القاعدة في البرنامج (I) عندئذ يكون متغير الفرق y_{m+j} خارج القاعدة ويساوي الصفر في البرنامج (II)، وإذا كان y_i متغير القاعدة في البرنامج (II) عندئذ يكون x_{n+i} متغير الفرق من خارج القاعدة ويساوي الصفر في البرنامج (I) والعكس بالعكس. بالإضافة إلى أن: $Z^* = z^*$

> **ملاحظة**: إن عدد المتغيرات الكلية (القرار والفروق) في كلا البرنامجين $(I^*)(II^*)$ هو $(m+n)$ عندئذ إذا كان الحل الأساسي في (I) يحتوي على m متغير قاعدة عندئذ عدد متغيرات القاعدة في البرنامج (II) حسب الشرط (١) و(٢) يساوي إلى n: أي $(m+n) - m = n$.

مثال (١): اكتب البرنامج الخطي المرافق للبرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} Z = \quad & 2x_2 + x_3 \to Max \\ x_1 + \; & x_2 + x_3 \le 84 \\ -7x_1 + 6x_2 - \; & x_3 \le 0 \\ & x_1 , x_2 , x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

لنكتب البرنامج المعطى بالشكل التالي:

$$\begin{array}{ll} Z = \quad 2x_2 + x_3 \to Max & \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 84 & y_1 \\ -7x_1 + 6x_2 - x_3 \le 0 & y_2 \\ x_1 , x_2 , x_3 \ge 0 & \end{array}$$

عندئذ البرنامج المرافق له هو:

$$\begin{array}{ll} z = \quad 84y_1 \quad \to Min & \\ y_1 - 7y_2 \ge 0 & x_1 \\ y_1 + 6y_2 \ge 2 & x_2 \\ y_1 - y_2 \ge 1 & x_3 \\ y_1 \ge 0 \; , y_2 \ge 0 & \end{array}$$

مثال (٢): استنتج حل البرنامج المرافق في المثال(١)، إذا كان حل البرنامج الأولي المعطى هو:

$Z^* = 96$

$x_2 = 12$ و $x_3 = 72$ (متغيرات قرار من القاعدة)

$x_1 = 0$ (متغير قرار خارج القاعدة)

$x_4 = 0$ و $x_5 = 0$ (متغيرا فرق خارج القاعدة)

الحل: حسب الشرطين (١) و(٢)

بما أن x_2 , x_3 متغير القاعدة في البرنامج الأولي، عندئذ متغيرا الفرق المقابلة في البرنامج المرافق y_6 , y_5 هما متغيران من خارج القاعدة ويساويان الصفر عندئذ يكون الحل ناتجاً عن حل المعادلات التالية:

$$y_1 - 7y_2 - y_3 = 0$$
$$y_1 + 6y_2 = 2$$
$$y_1 - y_2 = 1$$

بالحل المشترك نجد:

$$y_1 = 8/7 \qquad y_2 = 1/7 \qquad y_3 = 1/7$$

وقيمة دالة الهدف في كلا البرنامجين:

$$Z^* = 2(12) + (72) = 96$$
$$z^* = 84(8/7) = 96$$

بالإضافة إلى أن كلا الحلين يحققان الشروط (١) و(٢) و(٣) و(٤) و(٥).

ثانياً: البرنامجان الخطيان التاليان:

$$\left.\begin{array}{l} Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow Max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad ; \quad i = 1,2,....m \\ x_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1,2,....n \end{array}\right\} \quad (I)$$

$$\left.\begin{array}{l} z = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \rightarrow Min \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \geq c_j \quad ; \quad j = 1,2,....n \\ \\ \end{array}\right\} \quad (II)$$

$y_i \leq \geq 0 \quad ; \quad i= 1,2,\ldots m$

- نقول عن كل من البرنامجين الخطيين (I) و (II) أنه البرنامج الخطي المرافق للبرنامج الآخر .
- تتلخص خواص هذين البرنامجين بأنه:

١. إذا وجدنا الحل الأمثل للبرنامج الخطي (I) فإننا نحصل على الحل الأمثل للبرنامج (II) بكتابة m من متبايناته كمساويات وهي تلك المتباينات التي تقابل متغيرات القاعدة (متغيرات الحل الاساسية) في البرنامج الخطي (I) وتتحقق بقية متباينات البرنامج الخطي (II) كشرط لازم وكاف لكون الحل للبرنامج (I) هو الحل الأمثل ويكون لأجل الحلين الأمثلين للبرنامجين (I) و(II): $Z^* = z^*$

٢. والعكس صحيح أي أننا إذا وجدنا الحل الأمثل للبرنامج الخطي (II) فإننا نحصل على الحل الأمثل للبرنامج الخطي (I) بأخذ قاعدة مكونة من المتغيرات التي تقابل m متباينة تتحقق كمساويات في البرنامج الخطي (II).

- إذا كتبنا متباينات البرنامج (II) كمساويات بطرح متغيرات الفرق أي أن البرنامج (II) يكتب بالشكل.

$$\left.\begin{aligned} & Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \text{Max} \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad ; \quad i=1,2,\ldots m \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad (I^*)$$

$$\left.\begin{aligned} & z=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \rightarrow \text{Min} \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i - y_{m+j} = c_j \quad ; \quad j=1,2,\ldots n \\ & y_{m+j} \geq 0 \quad , \quad y_i \leq \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad (II^*)$$

وعندئذ يكون الشرط اللازم والكافي للوصول إلى حل هذين البرنامجين معاً هو أن نجد x_j , y_i , y_{m+j} $(i=1,2,\ldots m \,,\, j=1,2,\ldots n)$ والتي تحقق ما يلي:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_{m+j} = 0 \qquad (1)$$
$$y_{m+j} \geq 0 \qquad (2)$$
$$x_j \geq 0 \qquad (3)$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i - y_{m+j} = c_j \quad ; \quad j=1,2,\ldots n \qquad (4)$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad ; \quad i=1,2,\ldots.m \qquad (5)$$

إن الشرط الأول (١) هو الذي يعبر عن كون متغير الفرق y_{m+j} في البرنامج (*II) معدوماً إذا كان x_j في البرنامج (*I) من متغيرات القاعدة والعكس صحيح.

بطريقة مماثلة نجد أن البرنامجين التاليين مترافقان:

$$\left.\begin{aligned} & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to Min \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad ; \quad i = 1,2,\ldots.m \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

$$\left.\begin{aligned} & Z = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to Max \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \leq c_j \quad ; \quad j = 1,2,\ldots.n \\ & y_i \leq \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad (II)$$

ونستنتج حل أحد هذين البرنامجين من حل البرنامج الآخر بنفس الطريقة السابقة.

مثال (٣): ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Z = 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to Max$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 2$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$$
$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

والمطلوب: اكتب البرنامج الخطي المرافق، واستنتج حله إذا علمت أن حل البرنامج الأولي هو:

$Z^* = 5$

$x_2 = 3 \quad x_3 = 1$ (متغيرات القاعدة)

$x_1 = 0$ متغير خارج القاعدة

الحل : لنكتب البرنامج الخطي المعطى بالشكل:

$$\left.\begin{array}{lll} Z = 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to Max & & \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 & y_1 & (1) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 & y_2 & (2) \\ x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 & & \end{array}\right\} \quad (I)$$

عندئذ البرنامج المرافق له هو:

$$\left.\begin{array}{lll} z = 2y_1 + 7y_2 \to Min & & \\ 2y_1 + y_2 \geq 5 & x_1 & (1) \\ y_1 + 2y_2 \geq 3 & x_2 & (2) \\ - y_1 + y_2 \geq -4 & x_3 & (3) \end{array}\right\} \quad (II)$$

حيث y_1 و y_2 لا يشترط بهما عدم السلبية.

إن المتغيرين x_2 , x_3 يقابلان المتباينتين الثانية والثالثة من (II) وبالتالي متغير الفرق في هاتين المتباينتين y_4 ، y_5 يساويان الصفر إذاً:

$$y_1 + 2y_2 = 3$$
$$-y_1 + y_2 = -4$$

بالحل المشترك نجد أن:

$$y_1 = 11/3 \quad , \quad y_2 = -1/3$$

وهذا الحل يحقق المتباينة الأولى.

ونجد أيضا أن قيمة دالة الهدف في كلا البرنامجين:

$$Z^* = 5(0) + 3(3) - 4(1) = 5$$
$$z^* = 2(11/3)+ 7(-1/3)= 5$$

مثال (٤):استنتج حل البرنامج الأولي إذا كان حل البرنامج المرافق في المثال(٣) هو:

$y_2 = -1/3 \qquad y_1 = 11/3$

إن متغير القاعدة الذي يقابل المتباينات التي تتحقق كمساويات في البرنامج المرافق هـي المتغـيرات المقابلـة للمتباينـة الثانيـة والثالثـة، أي أن متغـيرات القاعـدة هـي (x_2,x_3)

وبالتالي فإن قيمة x_1 متغير من خارج القاعدة يساوي الصفر وأصبح لدينا معادلتان بمتغيرين:

$$x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_2 + x_3 = 7$$

بالحل المشترك نجد قيمة كلٍّ من x_2 , x_3:

$$x_2 = 3 \qquad\qquad x_3 = 1$$

مثال (٥): اكتب البرنامج الخطي المرافق للبرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned}
z &= 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 \to \text{Min}\\
&3x_1 + x_2 - 5x_3 = 1\\
&x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\\
&x_1 , x_2 , x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

الحل: لنكتب البرنامج الخطي المعطى بالشكل:

$$\begin{array}{lll}
z = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 \to \text{Min} & & \\
\quad 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 1 & y_1 & (1)\\
\quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 & y_2 & (2)\\
\quad x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

عندئذ البرنامج الخطي المرافق هو:

$$\begin{array}{lll}
Z = y_1 + y_2 \to \text{Max} & & \\
\quad 3y_1 + y_2 \leq 3 & x_1 & (1)\\
\quad y_1 + 2y_2 \leq 8 & x_2 & (2)\\
\quad -5y_1 + y_2 \leq 5 & x_3 & (3)\\
\quad y_1 , y_2 \ \leq \ \geq \ 0 & &
\end{array}$$

والمتغيرات لا يشترط فيها عدم السلبية.

مثال (٦):إذا كان حل البرنامج المرافق في المثال (٣) بالطريقة البيانية هو تقاطع المتباينتين الأولى والثالثة:

$$y_2 = \frac{15}{4} \qquad\qquad y_1 = -\frac{1}{4}$$

فاستنتج حل البرنامج الأولي.

هنا متغيرات الفرق في كلا المتباينتين الأولى والثالثة تساوي الصفر أي: $y_3 = 0$، $y_5=0$ (خارج القاعدة) وهذا يقابل في البرنامج (I) المتغيرين x_1 و x_3 اللذين يعتبران من القاعدة حسب الشرط (١) وهذا يؤدي إلى أن x_2 من خارج القاعدة وبالتالي يساوي الصفر أي $x_2 =0$ ، بالحل المشترك لجملة المعادلتين (١) و(٢):

$$3x_1 - 5x_3 = 1$$
$$x_1 + x_3 = 1$$

نجد:

$x_1 = 3/4$, $x_3= 1/4$ متغيرات القاعدة

$x_2 =0$ متغير خارج القاعدة

ونجد أيضا أن:

$$Z^* = -1/4+15/4 = 14/4 = 7/2$$
$$z^* = 3(3/4) +8 (0)+5(1/4) = 14 /4 = 7/2$$

ثالثاً: بطريقة مشابهة لما سبق نجد أن البرنامج المرافق للبرنامج الخطي التالي:

$$\left.\begin{array}{l} Z = \sum_{j=1}^{K} c_j x_j + \sum_{j=k+1}^{n} c_j x_j \rightarrow \text{Max} \\ \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j + \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad ; \quad i = 1,2,....L \\ \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_i + \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad ; \quad i = L+1, L = 2,....m \\ x_j \geq 0 \quad , \ j=1,2,\ldots k \\ x_j \leq \ \geq 0 \quad , \ j = k+1,\ldots\ldots n \end{array}\right\} \quad (I)$$

هو البرنامج الخطي التالي:

$$
\left.\begin{array}{l}
z = \sum_{i=1}^{L} b_i y_i + \sum_{i=L+1}^{m} b_i y_i \to Min \\
\sum_{i=1}^{L} a_{ji} y_i + \sum_{i=L+1}^{m} a_{ji} y_i \geq c_j \quad ; \quad j = 1,2,....k \\
\sum_{i=1}^{L} a_{ji} y_i + \sum_{i=L+1}^{m} a_{ji} y_i = c_i \quad ; \quad j = k+1, k+2,....n \\
y_i \geq 0 \quad , \quad i=1,2,3,\dots L \\
y_i \leq \geq 0 \quad , \quad i = L+1,\dots\dots m
\end{array}\right\} \quad (II)
$$

وهو الشكل العام للترافق، وإن حل أحد هذين البرنامجين يؤدي إلى حل البرنامج الآخر كما ذكرنا في أولاً وثانياً.

عندما نكتب شروط البرنامج المرافق فإننا نأخذ بالحسبان ما يلي:

- نكتب الشرط j على شكل مساواة إذا كان هذا الشرط يقابل المتغير الذي لا يشترط فيه عدم السلبية في البرنامج الأولي.
- نكتب الشرط j على شكل متباينة إذا كان هذا الشرط يقابل المتغير الذي يشترط فيه عدم السلبية في البرنامج الأولي.
- لا يشترط عدم السلبية على المتغير في البرنامج المرافق إذا كان يقابل شرط مساواة في البرنامج الأولي.
- يشترط عدم السلبية على المتغير الذي يقابل شرط متباينة.
- اتجاه المتباينة تكون ($\leq$) في حالة Max وتكون ($\geq$) في حالة Min عند الانتقال من برنامج خطي إلى مرافقة.

مثال (٧): اكتب البرنامج الخطي المرافق للبرنامج الخطي التالي:

$$z = 2x_1 - 4x_2 + 11x_3 \to Min$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 7$$

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$
$$x_1 , x_3 \geq 0 \quad , \quad x_2 \leq \geq 0$$

نكتب البرنامج المعطى بالشكل:

$$z = 2x_1 - 4x_2 + 11x_3 \rightarrow Min$$
$$\begin{array}{lll} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 & y_1 & (1) \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 7 & y_2 & (2) \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 & y_3 & (3) \\ x_1 , x_3 \geq 0 \ , x_2 \leq \geq 0 & & \end{array}$$

عندئذ البرنامج الخطي المرافق هو:

$$Z = y_1 + 7y_2 + y_3 \rightarrow Max$$
$$\begin{array}{lll} 2y_1 + y_2 - y_3 \leq 2 & x_1 & (1) \\ y_1 - y_2 - y_3 = -4 & x_2 & (2) \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 11 & x_3 & (3) \\ y_1 , y_2 \geq 0 \ , y_3 \leq \geq 0 & & \end{array}$$

وهنا y_3 لا يشترط فيها عدم السلبية لأنه يقابل في البرنامج الأولي مساواة وكتبنا الشرط الثاني على شكل مساواة لأنه يقابل متغير x_2 في الأولي لا يشترط فيه عدم السلبية.

مثال (٨): استنتج حل البرنامج الأولي في المثال(٧)، إذا كان حل البرنامج المرافق هو:

$y_2 = 3 \ , y_3 = 1$ (متغيرات قرار من القاعدة)

$y_5 = 6$ (متغير فرق من القاعدة)

حسب شرط الترافق فان:

$y_2 = 3$ متغير قرار في البرنامج المرافق يقابل في البرنامج الأولي متغير الفرق $x_5 = 0$

$y_5 = 6$ متغير الفرق في البرنامج المرافق وهذا يعني أن متغير القرار المقابل في الأولي $x_3=0$

$y_3 = 1$ متغير قرار في البرنامج المرافق يقابله مساواة لا تحوي متغير فرق.

نعوض $x_3 = 0 , x_5 = 0$ في البرنامج الأولي نحصل على:

$$2x_1 + x_2 - x_4 = 1$$
$$x_1 - x_2 = 7$$

$$-x_1 - x_2 = 1$$

وبحل هذه المعادلات نجد أن:

$$x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = -4 \quad x_4 = 1$$

وتكون قيمة دالة الهدف في كلا البرنامجين هي:

$$z^* = 2(3) - 4(-4) + 11(0) = 22$$
$$Z^* = 0 + 7(3) + (1) = 22$$

مثال (٩):لنوجد حل البرنامج الخطي التالي باستخدام مفهوم الترافق:

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 \to Min \\ &3x_1 + x_2 - 5x_3 \geq 1 \\ &x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

البرنامج المرافق:

$$\begin{aligned} Z &= y_1 + y_2 \to Max \\ &3y_1 + y_2 \leq 3 \\ &y_1 + 2y_2 \leq 8 \\ &-5y_1 + y_2 \leq -5 \\ &y_2 \geq 0 \ , \ y_1 \geq 0 \end{aligned}$$

بتحويل المتباينات إلى مساويات:

$$\begin{array}{lr} z - 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0 & \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 1 & y_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 1 & y_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & \end{array}$$

البرنامج المرافق:

$$\begin{array}{lr} Z - y_1 - y_2 = 0 & \\ 3y_1 + y_2 + y_3 = 3 & x_1 \\ y_1 + 2y_2 + y_4 = 8 & x_2 \\ -5y_1 + y_2 + y_5 = -5 & x_3 \\ y_2, y_1, y_3, y_4, y_5 \geq 0 & \end{array}$$

نقوم بحل البرنامج الخطي المرافق، بكتابة جدول السمبلكس ومتابعة الحل نحصل على جدول الحل الأمثل التالي:

	y_3	y_1	B
z	1	2	3
y_2	1	3	3
y_4	-2	-5	2
y_5	-1	-8	2

شروط الترافق

$x_4\, y_1=0$

$x_5\, y_2=0 \quad \Rightarrow \quad x_5=0$

$y_3\, x_1=0$

$y_4\, x_2=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=0$

$y_5\, x_3=0 \quad \Rightarrow \quad x_3=0$

بالتعويض بمساويات البرنامج الاولي:

$$3x_1 - x_4 = 1$$
$$x_1 = 1$$

بالحل المشترك نجد: $x_1= 1,\ x_4 =2$

وقيمة دالة الهدف: $Z = 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 3$

اذاً الحل الأمثل للبرنامج المعطى هو:

$$\mathbf{z^* = 3 \quad , \quad x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = 0}$$

مثال (١٠): ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Z = 2x_1 + x_2 \rightarrow Max$$
$$x_1 - 2x_2 \leq -1$$
$$x_2 \leq 2$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$-2x_1 + 6x_2 \leq 9$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

اكتب البرنامج الخطي المرافق واستنتج حله باستخدام شروط الترافق، اذا علمت أن حل البرنامج الأولي المعطى هو:

	x_3	x_4	B
Z	2	5	8
x_1	1	2	3
x_2	0	1	2
x_5	1	1	2
x_6	2	-2	3

كتابة البرنامج المرافق

لنعِد كتابه البرنامج الخطي المعطى:

$$\begin{aligned}
Z = \quad & 2x_1 + x_2 \rightarrow Max \\
& x_1 - 2x_2 \le -1 && y_1 \\
& x_2 \le 2 && y_2 \\
& -x_1 + x_2 \le 1 && y_3 \\
& -2x_1 + 6x_2 \le 9 && y_4 \\
& x_1 , x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

بأخذ متغيرات البرنامج المرافق y_4 , y_3 , y_2 , y_1 المقابلة لترتيب الشروط الخطية للبرنامج الأولي نجد أن البرنامج المرافق يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{aligned}
z = \quad & -y_1 + 2y_2 + y_3 + 9y_4 \rightarrow Min \\
& y_1 - y_3 - 2y_4 \ge 2 \\
& -2y_1 + y_2 + y_3 + 6y_4 \ge 1 \\
& y_1 , y_2 , y_3 , y_4 \ge 0
\end{aligned}$$

استنتاج حل البرنامج الخطي المرافق باستخدام شروط الترافق

لاستنتاج الحل باستخدام شروط الترافق فإننا نكتب كلا البرنامجين على شكل مساويات بإضافة متغيرات الفرق.

البرنامج الأولي يأخذ الشكل:

$$\begin{aligned}
Z = 2x_1 + x_2 & \rightarrow Max \\
x_1 - 2x_2 + x_3 &= -1 && y_1 \\
x_2 + x_4 &= 2 && y_2 \\
-x_1 + x_2 + x_5 &= 1 && y_3 \\
-2x_1 + 6x_2 + x_6 &= 9 && y_4 \\
x_j \ge 0 \quad ; \quad & j=1,2,\ldots\ldots 6
\end{aligned}$$

البرنامج المرافق يأخذ الشكل:

$$\begin{aligned}
z = \quad & -y_1 + 2y_2 + y_3 + 9y_4 \rightarrow Min \\
& y_1 - y_3 - 2y_4 + y_5 = 2 && x_1 \\
& -2y_1 + y_2 + y_3 + 6y_4 + y_6 = 1 && x_2 \\
& y_j \ge 0 \quad ; \quad j=1,2,\ldots\ldots 6
\end{aligned}$$

وشروط الترافق هي:

$$y_1 x_3 = 0 \qquad (1)$$

$$y_2 x_4 = 0 \qquad (2)$$
$$y_3 x_5 = 0 \qquad (3)$$
$$y_4 x_6 = 0 \qquad (4)$$
$$x_1 y_5 = 0 \qquad (5)$$
$$x_2 y_6 = 0 \qquad (6)$$

ومن الجدول (١٩) نجد أن x_6 , x_5 , x_2 , x_1 متغيرات القاعدة عندئذ العلاقات من (٣) و(٤) و(٥) و(٦) نجد أن:

$$y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$$

بالتعويض في الشروط الخطية للبرنامج المرافق التي شروطه على شكل مساويات نجد:

$$y_1 = 2$$
$$-2 y_1 + y_2 = 1$$

بالحل المشترك نجد:

$$y_1 = 2 \qquad y_2 = 5$$

وبالتعويض في دالة الهدف نجد:

$$z^* = 8$$

إذاً الحل الأمثل للبرنامج المرافق هو:

$$Z^* = 8$$
$$y_1 = 2 \quad , \quad y_2 = 5 \quad , \quad y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$$

مسائل عامـة

١- اكتب البرنامج الخطي المرافق للبرنامج الخطي التالي:

$$Z = -6x_1 - 5x_2 + 2x_3 \rightarrow Max$$
$$-x_1 - x_2 + x_3 \leq -2$$
$$-x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq -3$$
$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

ثم استنتج حل البرنامج المرافق حسب شروط الترافق إذا علمت أن حل البرنامج المعطى هو:

$x_5 = 1 , x_2 = 2$ متغيرات القاعدة

$x_1 = 0 , x_3 = 0 , x_4 = 0$ متغيرات خارج القاعدة

٢- اكتب البرنامج الخطي المرافق للبرنامج الخطي التالي:

$$z = x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow Min$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 \leq 1$$
$$4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -2$$
$$3x_1 + x_3 \leq 5$$
$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

ثم استنتج حل البرنامج المرافق حسب شروط الترافق إذا علمت أن حل البرنامج المعطى هو:

$z^* = -111/6$

$x_2 = 21/6 , x_4 = 19/2 , x_3 = 5$ متغيرات القاعدة

$x_1 = x_5 = x_6 = 0$ متغيرات خارج القاعدة

٣- اكتب البرنامج الخطي المرافق للبرنامج الخطي التالي:

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow Max$$
$$3x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$
$$-5x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_2 \geq 0 , x_1 \leq \geq 0$$

ثم استنتج حل البرنامج المرافق حسب شروط الترافق إذا علمت أن الجدول التالي يمثل جدول الحل الأمثل للبرنامج المعطى:

	x_3	x_5	B
Z	6/8	2/8	140/40
x_2	5/8	3/8	30/8
x_4	-11/8	-5/8	6/8

٤- اكتب البرنامج الخطي المرافق للبرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
Z = \quad & 2x_1 + x_2 \to Max \\
& x_1 - 2x_2 \le -1 \\
& x_2 \le 2 \\
& -x_1 + x_2 \le 1 \\
& -2x_1 + 6x_2 \le 9 \\
& x_1 , x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

ثم استنتج حل البرنامج المرافق حسب شروط الترافق إذا علمت أن الجدول التالي يمثل جدول الحل الأمثل للبرنامج المعطى:

	x_4	x_3	B
Z	5	2	8
x_2	1	0	2
x_1	2	1	3
x_5	1	1	2
x_6	-2	2	3

٥- اكتب البرنامج الخطي المرافق للبرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
Z = \; & x_1 + x_2 \to Max \\
& 3x_1 + x_2 \le 3 \\
& x_1 + 2x_2 \le 8 \\
& -5x_1 + x_2 \le -5 \\
& x_2 \ge 0 \; , \; x_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

ثم استنتج حل البرنامج المرافق حسب شروط الترافق إذا علمت أن الجدول التالي يمثل جدول الحل الأمثل للبرنامج المعطى:

	x_3	x_1	B
z	1	2	3
x_2	1	3	3
x_4	-2	-5	2
x_5	-1	-8	2

الفصل الخامس

تحليل الحساسية

١,٥ .مفهوم وضرورة تحليل الحساسية

في الفصول السابقة تطرقنا إلى حل نماذج البرمجة الخطية باستخدام إحدى الخوارزميات للوصول إلى الحل الأمثل، من خلال معرفتنا لمكونات النموذج وهي:

١ . **الهدف (تعظيم الأرباح أو تخفيض الخسائر).**

٢ . **عدد متغيرات النموذج .**

٣ . **عدد القيود الخطية للنموذج.**

٤ . **الموارد المتاحة b_i.**

٥ . **مساهمة معاملات المتغيرات في دالة الهدف c_j (الربح المتحقق من بيع الوحدة الواحدة أو تكلفة الوحدة الواحدة).**

٦ . **مساهمة معاملات المتغيرات في قيود النموذج a_{ij} .**

إلا انه في الحياة العملية نتيجة تغير في الظروف المحيطة لمعظم المشاريع التجارية والصناعية والزراعية و..، لا يمكن أن تبقي جميع فروض النموذج ثابتة دوماً بل قد يطرأ عليها تعديل أو تغيير لبعضها أو جميعها، وبالتالي السؤال الذي يطرح نفسه ما هو تأثير ذلك على الحل الأمثل وهل يجب إعادة حل النموذج بالمكونات الجديدة أم أن هناك أساليب أخرى يمكن الاستعانة بها لاتخاذ القرار الصحيح بشكل اسرع؟؟؟

في مثل تلك الحالات يتم اللجوء إلى تحليل الحساسية Sensitivity analysis أو تحليل ما بعد المثلوية (الأمثلية) Post optimality analysis والذي يدرس اثر التغيرات التي تحدث في النموذج الأولي للمشكلة وذلك بالاعتماد على **جدول الحل الأخير** الذي يعطي الحل الأمثل وحساب اثر هذه التغيرات مباشرة دون اللجوء إلى حل المسألة مجدداً، أي أن تحليل الحساسية هو تحليل كمي يقيس درجة حساسية أمثلية الحل.

يمكن تصنيف التغيرات التي قد تطرأ على النموذج الخطي المعطى كما يلي:

١. التغيرات في قيم معاملات متغيرات دالة الهدف c_j، أي حساب مدى مساهمة معاملات متغيرات دالة الهدف في الحل الأمثل **ويدعى مجال الأمثلية (المثلوية) Range of Optimality**.

٢. التغيرات في الإمكانيات المتاحة b_i، أي حساب مدى الموارد المتاحة **ويدعى مجال الإمكانيات Range of Feasibility**، (ومجال الامكانية هو المجال المسموح لتغير الطرف الايمن للشروط الخطية بدون ان تتغير قيمة سعر الظل)

٣. إضافة شرط خطي جديد.

وبناءً على نتائج دراسة تحليل الحساسية يمكن أن نتخذ أحد القرارات التالية:

١. أن يبقى الحل الأمثل بأكمله كما هو دون تغيير.

٢. أن يتغير الحل الأمثل بأكمله.

٣. أن تبقى قيمة دالة الهدف دون تغيير وتتغير قيم متغيرات الحل الأمثل كلها أو بعضها.

٤. أن تبقى قيم متغيرات الحل الأمثل كلها أو بعضها دون تغيير وتتغير قيمة دالة الهدف.

سوف ندرس تحليل الحساسية بصورة تفصيلية في حالة تعظيم الأرباح وفي حالة تخفيض التكاليف كل على حدى.

٢,٥. تحليل الحساسية في حالة تعظيم الارباح

سنوضح إجراءات تحليل الحساسية في حالة تعظيم الارباح على المثال التالي:

مثال (١):ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow Max$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 80 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &\leq 70 \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 &\leq 96 \end{aligned}$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

بإضافة متغيرات الفرق يصبح البرنامج السابق كما يلي:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow Max$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 80 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 70 \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \qquad\qquad + x_6 &= 96 \end{aligned}$$

$$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 , \geq 0$$

بحل هذا النموذج بأسلوب السمبلكس حصلنا على جدول الحل الأمثل الآتي:

	x_3	x_5	x_6	B
Z	2.52	0.38	0.52	76.95
x_4	0.38	0.1	-0.62	27.24
x_2	-0.05	0.24	-0.05	12.1
x_1	1.24	-0.19	0.24	9.52

جدول (١) جدول الحل الامثل

من الجدول السابق الحل الأمثل هو:

قيمة دالة الهدف $Z^* = 76.95$

متغيرات القرار $x_2 = 12.1$ $x_1 = 9.52$

متغير الفرق $x_4 = 27.24$

بينما x_3 متغير قرار ولكنه لم يشارك في الحل، و x_5 و x_6 متغيرا فرق لم يشاركا في الحل.

والمطلوب:

١. حساب مدى مساهمة معاملات متغيرات دالة الهدف في الحل الأمثل.

٢. حساب مدى الموارد المتاحة في الحل الأمثل.

١,٢,٥. دراسة التغيرات في معاملات متغيرات دالة الهدف في حالة تعظيم الارباح

كثيراً ما تحصل تغيرات في الأرباح بالزيادة أو النقصان **والسؤال ما هو تأثير ذلك في الحل الأمثل؟ هل نحتاج إلى إعادة حل النموذج عند كل تغير أم لا ؟**

للإجابة على تلك الأسئلة نقوم بدراسة تغيرات معاملات متغيرات دالة الهدف، وهنا يمكن التمييز بين نوعين من متغيرات دالة الهدف: متغيرات تظهر ضمن متغيرات الحل الاساسي (متغيرات القاعدة)، ومتغيرات لا تظهر ضمن متغيرات الحل الاساسي (متغيرات خارج القاعدة)، ولكل منهما إجراءات تحليل سنراها فيما يأتي.

أولاً: خطوات دراسة التغيرات في معاملات متغيرات دالة الهدف المشاركة في الحل الأمثل:

إن مشاركة احد متغيرات القرار للبرنامج الخطي في الحل الأمثل يعني أنه سيتم الإنتاج من هذا المنتج، وبالتالي سيساهم في الربح بمقدار الكمية المنتجة منه مضروباً بمعامله (الربح في الوحدة الواحدة) في دالة الهدف، **والسؤال الذي يطرح نفسه إلى أي مدى يمكن زيادة معامله (الربح في الوحدة الواحدة) مع المحافظة على قيمة الحل الأمثل.** والجواب على ذلك نطبق الخطوات التالية:

١. نحدد متغير القرار المشارك في الحل الذي نقوم بإجراء تحليل الحساسية لمعامله.

٢. نقسم عناصر سطر دالة الهدف على عناصر سطر متغير القرار المحدد في الخطوة السابقة.

٣. **نحسب الحد الأدنى** لمدى تغير معامل هذا المتغير كما يلي: نحدد أصغر قيمة موجبة من ناتج التقسيم في الخطوة (٢) ونطرحها من معامل المتغير في دالة الهدف في البرنامج الخطي المعطى.

٤. **نحسب الحد الأعلى** لمدى تغير معامل هذا المتغير كما يلي: نحدد أكبر قيمة سالبة من ناتج التقسيم في الخطوة (٢) ونطرحها من معامل المتغير في دالة الهدف في البرنامج الخطي المعطى.

> **ملاحظة هامة**:إذا لم نحصل على قيم موجبة نتيجة التقسيم في الخطوة (٢) عندئذ يكون الحد الأدنى لمدى التغير غير محدد. وإذا لم نحصل على قيم سالبة نتيجة التقسيم في الخطوة (٢) عندئذ يكون الحد الأعلى لمدى التغير غير محدد.

مثال (١–١): لدراسة مدى التغير في معامل متغير القرار x_1

اعتماداً على الجدول (١) الذي يمثل الحل الأمثل:

- نقوم بقسمة العناصر في سطر **Z** على القيم المقابلة في سطر المتغير x_1 كما يلي:

Z	2.52	0.38	0.52
$\mathbf{x_1}$	1.24	-0.19	0.24
ناتج القسمة	**2.04**	**-2**	2.2

- أصغر قيمة موجبة من ناتج التقسيم هي **2.04** وبالتالي فإن الحد الأدنى لمدى تغير معامل المتغير x_1 يحسب:

$$3-2.04=0.96$$

- أكبر قيمة سالبة من ناتج التقسيم هي **2-** وبالتالي الحد الأعلى لمدى تغير معامل المتغير x_1 يحسب:

$$3-(-2)=5$$

أي أن: $0.96 < x_1$ **معامل** < 5

وهذا يعني أن الحل يبقى أمثلياً إذا بقي معامل x_1 ضمن هذين الحدين (نحافظ على قيم متغيرات القرار اما قيمة دالة الهدف فتتغير) أما إذا أصبح أكبر أو يساوي الحد الأعلى أو أقل أو يساوي الحد الأدنى فإن الحل سوف يتغير ولابد من إعادة الحل من جديد (مسألة جديدة).

وبناءً على ذلك فإن قيمة دالة الهدف ستكون ضمن المجال:

$$57.5 < Z < 95.9$$

مثال (١–٢) لدراسة مدى التغير في معامل المتغير x_2

اعتماداً على الجدول (١) الذي يمثل الحل الأمثل:

- نقوم بقسمة العناصر في سطر **Z** على القيم المقابلة في سطر المتغير x_2 كما يلي:

Z	2.52	0.38	0.52
$\mathbf{x_2}$	-0.05	0.24	-0.05
ناتج القسمة	-50.4	**1.6**	**-11**

- أصغر قيمة موجبة من ناتج التقسيم هي **1.6** وبالتالي فإن الحد الأدنى لمدى تغير معامل المتغير x_2 يحسب:

$$4-1.6=2.4$$

- أكبر قيمة سالبة من ناتج التقسيم هي **11-** وبالتالي الحد الأعلى لمدى تغير معامل المتغير x_2 يحسب:

$$4-(-11)=15$$

أي أن: $2.4 <$ معامل $x_2 < 15$

وهذا يعني أن الحل يبقى أمثلياً إذا بقي معامل x_2 ضمن هذين الحدين أما إذا أصبح أكبر أو يساوي الحد الأعلى أو أقل أو يساوي الحد الأدنى فإن الحل سوف يتغير ولابد من إعادة الحل من جديد.

وبناءً على ذلك فإن قيمة دالة الهدف ستكون ضمن المجال:

$$57.6 < Z < 210$$

ثانياً: خطوات دراسة التغيرات في معاملات متغيرات دالة الهدف غير المشاركة في الحل الأمثل:

إن عدم مشاركة احد متغيرات القرار للبرنامج الخطي في الحل يعني أن الإنتاج من هذا المنتج معدومٌ، **والسؤال الذي يطرح نفسه متى يمكن أن يشارك هذا المتغير في الحل؟**

الجواب على هذا السؤال هو انه يمكن أن يشارك في الحل عندما تصبح قيمة معامله في دالة الهدف **أكبر** من قيمته في سطر Z مضافاً إليها قيمة معامله في البرنامج الخطي المعطى.

مثال (١–٣) متى يمكن أن يشارك المتغير x_3 في الحل:

إن قيمة معامل x_3 في البرنامج المعطى يساوي **(1)**، وبما أن قيمة معامل x_3 في جدول الحل الأمثل (في سطر Z) يساوي **2.52** هذا المقدار من الربح لايؤهله للمشاركة في الحل، ويمكن أن يشارك في الحل عندما يصبح الربح المتحقق من الوحدة الواحدة من x_3 (معامل x_3) **أكبر من مجموع قيمتي** معامل x_3 في البرنامج المعطى ومعامل x_3 في جدول الحل الأمثل، أي:

$$2.52 + 1 = 3.52$$

أي أن المتغير x_3 يمكن أن يشارك في الحل إذا كان معامل $x_3 > 3.52$

نستنتج مما سبق أن الحل الأمثل للبرنامج الخطي المعطى لا يتغير طالما معامل المتغير x_3 في دالة الهدف اصغر أو يساوي القيمة 3.52، أما إذا أصبح معامل المتغير x_3 في دالة الهدف اكبر من القيمة 3.52 فإنه سيشارك في الحل وبالتالي يجب إعادة حل النموذج الخطي المعطى من جديد.

٢,٢,٥. دراسة التغيرات في الكميات المتاحة في حالة تعظيم الارباح

إن وجود **متغير قرار ضمن متغيرات القاعدة (الحل)** في جدول الحل الأمثل يعني أن الكمية المتاحة لذلك القيد قد استغلت بالكامل في العملية الإنتاجية، وبالرجوع إلى المثال (١) وجدول حله الأمثل الجدول (١) التالي نلاحظ:

	x_3	x_5	x_6	**B**
Z	2.52	0.38	0.52	76.95
x_4	0.38	0.1	-0.62	27.24
x_2	-0.05	0.24	-0.05	12.1
x_1	1.24	-0.19	0.24	9.52

جدول (١) جدول الحل الامثل

بما أن x_2 متغير قرار ضمن متغيرات القاعدة فإن الكمية المتاحة للقيد الثاني قد استغلت بالكامل، وكذلك بما أن x_1 متغير قرار ضمن متغيرات القاعدة فإن الكمية المتاحة للقيد الثالث قد استغلت بالكامل.

أحياناً تحصل تغييرات في الكميات المتاحة بالزيادة أو النقصان نتيجة لظروف معينة **والسؤال** هل هذا التغير سيؤدي إلى استغلال الكمية المتاحة بالكامل في العملية الإنتاجية؟ ما هو تأثير ذلك في الحل الأمثل؟ وما هو مقدار الربح الإضافي في قيمة دالة الهدف عند زيادة الكمية المتاحة لأحد القيود بمقدار وحدة واحدة (الذي يدعى سعر الظل)؟

من جهة أخرى فإن وجود **متغير فرق ضمن متغيرات القاعدة (الحل)** في جدول الحل الأمثل يعني أن الكمية المتاحة لذلك القيد لم تستغل بالكامل في العملية الإنتاجية، وبالرجوع إلى المثال (١) وجدول حله الأمثل الجدول (١) نلاحظ:

أن x_4 متغير فرق ضمن متغيرات القاعدة وبالتالي فإن الكمية المتاحة للقيد الأول لم تستغل بالكامل. **والسؤال** ما هي الكمية الفائضة في الكمية المتاحة لهذا القيد وما هي الكمية المستغلة في الإنتاج؟ ما هو تأثير ذلك في الحل الأمثل ؟

ملاحظة هامة: نشير هنا إلى أن دراسة تحليل حساسية الحل الأمثل للتغيرات في الكميات المتاحة يُظهر فقط مدى التغير في الكميات المتاحة التي تستغل استغلالاً كاملاً وبالتالي يمكن حساب قيمة دالة الهدف عند كل تغير في الكمية المتاحة، أما للحصول على قيم متغيرات الحل الجديدة عند التغير في الكمية المتاحة فيجب إعادة حل البرنامج الخطي من جديد.

أولاً: دراسة التغيرات في الكميات المتاحة التي استغلت استغلالاً كاملاً:

تتضمن دراسة التغيرات في الكميات المتاحة التي استغلت استغلالاً كاملاً ما يلي:

١. حساب مدى التغير في الكميات المتاحة في احد قيود النموذج الخطي الذي يضمن المحافظة على استغلالها بالكامل في العملية الإنتاجية.

٢. حساب مقدار الزيادة أو النقصان في قيمة دالة الهدف عند زيادة أو نقصان الكمية المتاحة لأحد القيود بمقدار وحدة واحدة (والذي يدعى سعر الظل).

☜ **لحساب مدى التغير في الكميات المتاحة (التي** استغلت استغلالاً كاملاً) في احد قيود النموذج الخطي مع المحافظة على استغلالها بالكامل نتبع الخطوات التالية:

١. نحدد في جدول الحل الأمثل العمود المتعلق بمتغير الفرق للقيد المطلوب.

٢. نقوم بتقسيم عناصر عمود الحل على عناصر العمود المحدد في الخطوة السابقة.

٣. **نحسب الحد الأدنى لمدى تغير الكمية المتاحة للقيد:** نحدد أصغر قيمة موجبة من ناتج التقسيم في الخطوة (٢) السابقة ونطرحها من الكمية المتاحة (قيمة الثابت في الجهة اليمنى) للقيد في البرنامج المعطى.

٤. **نحسب الحد الأعلى لمدى تغير الكمية المتاحة للقيد:** نحدد أكبر قيمة سالبة من ناتج التقسيم في الخطوة (٢) السابقة ونطرحها من الكمية المتاحة (قيمة الثابت في الجهة اليمنى) للقيد في البرنامج المعطى.

ملاحظة هامة: إذا لم نحصل على قيم موجبة نتيجة التقسيم في الخطوة (٢) عندئذ يكون الحد الأدنى لمدى التغير غير محدد. وإذا لم نحصل على قيم سالبة نتيجة التقسيم في الخطوة (٢) عندئذ يكون الحد الأعلى لمدى التغير غير محدد.

مثال (١–٤) لدراسة مدى التغيرات في الكمية المتاحة للقيد الثاني

اعتماداً على الجدول (١) للمثال (١) الذي يمثل الحل الأمثل نقوم الآن بتطبيق الخطوات السابقة:

- إن متغير الفرق للقيد الثاني هو x_5.
- نقوم بقسمة العناصر في عمود الحل على العناصر المقابلة في عمود متغير الفرق للقيد الثاني (عمود x_5) كما يلي:

ناتج القسمة	x_5	B
286	0.1	27.24
50.8	0.24	12.1
-50	-0.19	9.52

- أصغر قيمة موجبة من ناتج التقسيم هي **50.8** وبالتالي فإن الحد الأدنى لمدى تغير الكمية المتاحة للقيد الثاني:

$$70 - 50.8 = 19.2$$

- أكبر قيمة سالبة من ناتج التقسيم هي(**50–**) وبالتالي الحد الأعلى لمدى تغير الكمية المتاحة للقيد الثاني:

$$70 - (-50) = 120$$

وبالتالي لضمان استغلال الكمية المتاحة بالكامل في الإنتاج للقيد الثاني يجب أن تتراوح قيمتها ضمن المجال[19.2 ,120].

بعبارة أخرى إذا زادت الكمية المتاحة عن الحد الأعلى أو نقصت عن الحد الأدنى عندها سيكون هناك فائض في الكمية المتاحة لن تستخدم في الإنتاج.

☜ **لحساب مقدار الزيادة (الربح الإضافي) أو النقصان في قيمة دالة الهدف عند زيادة الكمية المتاحة أو نقصانها لأحد القيود بمقدار وحدة واحدة (الذي يدعى سعر الظل Shadow Price أو سعر المرافق)؟**

يمكن الحصول على سعر الظل مباشرة من جدول الحل الأمثل، وهي القيم الموجودة في سطر دالة الهدف والمقابلة لمتغيرات الفرق للقيود التي حُسِبَ لها مدى تغير الإمكانيات المتاحة. وسنوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال (١–٥) لتحديد سعر الظل للقيد الثاني

بما أن متغير الفرق للقيد الثاني هو x_5، عندئذ القيمة 0.38 الموجودة في سطر **Z** والمقابلة لمتغير الفرق x_5 تعبر عن مقدار الزيادة أو النقصان في قيمة دالة الهدف عند زيادة أو نقصان الإمكانيات المتاحة لهذا القيد بمقدار وحدة واحدة ضمن مدى تغيره [120, 19.2] .

الكمية المتاحة في القيد الثاني هي 70 وقيمة دالة الهدف حسب الجدول(١) هي 76.95 .

عندئذٍ لو أصبحت الكمية المتاحة في القيد الثاني 71 أي زادت الكمية المتاحة بمقدار وحدة واحدة فإن قيمة دالة الهدف تصبح (76.95+0.38) وتساوي 77.33

ولو أصبحت الكمية المتاحة في القيد الثاني 72 أي زادت الكمية المتاحة بمقدار وحدتين فإن قيمة دالة الهدف تصبح (76.95+2*0.38) وتساوي 77.71.

ولو أصبحت الكمية المتاحة في القيد الثاني 69 أي نقصت الكمية المتاحة بمقدار وحدة واحدة فإن قيمة دالة الهدف تصبح (76.95-0.38) وتساوي 76.57

ملاحظـة : يمكـن للطالـب التأكـد مـن صـحة النتـائج بإعـادة حـل الـبرنامج الخطـي للمثال (١) بعد تعديل الكمية المتاحة للقيد الثاني من 70 إلى 71 .

مثال (١-٦) دراسة التغيرات في الكمية المتاحة للقيد الثالث

اعتماداً على الجدول (١) للمثال (١) الذي يمثل الحل الأمثل نقوم الآن بتطبيق الخطوات السابقة:

- إن متغير الفرق للقيد الثاني هو x_6 .
- نقوم بقسمة العناصر في عمود الحل على العناصر المقابلة في عمود متغير الفرق للقيد الثالث (عمود x_6) كما يلي:

ناتج القسمة	x_6	**B**
-44	-0.62	27.24
-254	-0.05	12.1
40	0.24	9.52

أصغر قيمة موجبة من ناتج التقسيم هي **40** وبالتالي فإن الحد الأدنى لمدى تغير الكمية المتاحة للقيد الثالث:

$$96 - 40 = 56$$

أصغر قيمة سالبة من ناتج التقسيم هي 44- وبالتالي الحد الأعلى لمدى تغير الكمية المتاحة للقيد الثالث:

$$96 - (-44) = 140$$

وبالتالي لضمان استغلال الكمية المتاحة بالكامل في الإنتاج للقيد الثالث يجب أن تتراوح قيمتها ضمن المجال [56,140] .

بعبارة أخرى إذا زادت الكمية المتاحة عن الحد الأعلى أو نقصت عن الحد الأدنى عندها سيكون هناك فائض في الكمية المتاحة لن تستخدم في الإنتاج.

أما سعر الظل للقيد الثالث الذي متغير الفرق له هو x_6، عندئذ القيمة 0.52 الموجودة في سطر **Z** والمقابلة لمتغير الفرق x_6 تعبر عن مقدار الزيادة أو النقصان في قيمة دالة الهدف عند زيادة أو نقصان الإمكانيات المتاحة لهذا القيد بمقدار وحدة واحدة ضمن مدى تغيره [56, 140].

ثانياً: دراسة التغيرات في الكميات المتاحة التي لم تستغل استغلالاً كاملاً:

إن وجود متغير فرق ضمن متغيرات الحل (قاعدة) يشير إلى عدم استغلال الكمية المتاحة للقيد، وقيمة هذا المتغير هو الفائض في الإمكانيات المتاحة، أما الكمية المستغلة من الكمية المتاحة فتحسب من حاصل طرح قيمة متغير الفرق في جدول الحل الأمثل من قيمة الكمية المتاحة لهذا القيد في البرنامج الخطي المعطى.

مثال (**١–٧**) لتحليل حساسية الكمية المتاحة للقيد الأول:

الفائض في الإمكانيات المتاحة للقيد الأول تساوي $x_4 = 27.24$ وهذه الكمية لا تؤثر على زيادة الإنتاج ولا تؤثر على الحل الأمثل.

أما الكمية المستغلة من الإمكانيات المتاحة لهذا القيد فهي:

$$80 - 27.24 = 52,76$$

مثال (**٢**): ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$\begin{aligned} Z = \ & 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{Max} \\ & 3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ & 5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ & x_1 , x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

والمطلوب:

١. حساب مدى مساهمة معاملات متغيرات دالة الهدف في الحل الأمثل.

٢. حساب مدى الموارد المتاحة في الحل الأمثل.

الحل:

- **بإضافة متغيرات الفرق يصبح البرنامج السابق كما يلي:**

$$
\begin{aligned}
&Z = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow Max \\
&3x_1 + 5x_2 + x_3 \quad = 15 \\
&5x_1 + 2x_2 \quad + x_4 = 10 \\
&x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

بحل النموذج السابق نحصل على جدول الحل الأمثل الآتي:

	x_3	x_4	B
Z	0.26	0.84	12.37
x_1	-0.11	0.26	1.05
x_2	0.26	-0.16	2.37

جدول (٢) الحل الامثل

من الجدول السابق نلاحظ أن الحل الأمثل هو:

قيمة دالة الهدف $Z^* = 12.37$

متغيرات القرار $x_2 = 2.37$ $x_1 = 1.05$

- **لحساب مدى مساهمة معاملات متغيرات دالة الهدف في الحل الأمثل:**

١. ندرس مدى التغير في معامل المتغير x_1

نقوم بقسمة العناصر في سطر **Z** على القيم المقابلة في سطر المتغير x_1 كما يلي:

Z	0.26	0.84
x_1	-0.11	0.26
ناتج القسمة	**-2.50**	**3.20**

القيمة الموجبة من ناتج التقسيم هي **3.20** وبالتالي فإن الحد الأدنى لمدى تغير معامل المتغير x_1 يحسب:

$$5- 3.20=1.8$$

القيمة السالبة من ناتج التقسيم هي **2.50-** وبالتالي الحد الأعلى لمدى تغير معامل المتغير x_1 يحسب:

$$5 -(-2.50)=7.5$$

أي أن: $1.8 <$ معامل $x_1 < 7.5$

أي أنه يبقى الحل أمثلياً إذا بقي معامل x_1 ضمن هذين الحدين أما إذا أصبح أكبر أو يساوي الحد الأعلى أو أقل أو يساوي الحد الأدنى فإن الحل سوف يتغير ولابد من إعادة الحل من جديد.

وبناءً على ذلك فإن قيمة دالة الهدف ستكون ضمن المجال: $9 < Z < 15$

٢. ندرس مدى التغير في معامل المتغير x_2 بالطريقة نفسها نجد أن:

$2 <$ معامل $x_2 < 8.33$

- **حساب مدى الموارد المتاحة.**

١. ندرس مدى الكمية المتاحة للقيد الأول:

إن متغير الفرق للقيد الأول هو x_3، لذلك نقوم بقسمة العناصر في عمود الحل على العناصر المقابلة في عمود متغير الفرق للقيد الأول (عمود x_3) كما يلي:

ناتج القسمة	x_3	B
-9.55	-0.11	1.05
9.12	0.26	2.37

القيمة الموجبة من ناتج التقسيم هي **9.12** وبالتالي فإن الحد الأدنى لمدى تغير الكمية المتاحة للقيد الأول:

$$15 – 9.12= 5.88$$

القيمة السالبة من ناتج التقسيم هي**(9.55-)** وبالتالي الحد الأعلى لمدى تغير الكمية المتاحة للقيد الأول:

$$15 - (-9.55) = 24.45$$

وبالتالي لضمان استغلال الكمية المتاحة بالكامل في الإنتاج للقيد الأول يجب أن تتراوح قيمتها ضمن المجال[5.88 ,24.45] .

٢. ندرس مدى الكمية المتاحة للقيد الثاني:

بالطريقة نفسها نجد أنه لضمان استغلال الكمية المتاحة بالكامل في الإنتاج للقيد الثاني يجب أن تتراوح قيمتها ضمن المجال[24.81, 5.96] .

٣. نحسب سعر الظل للقيد الأول:

إن مدى التغير في الإمكانيات المتاحة للقيد الأول الذي متغيره الفرق هو x_3 ، عندئذ القيمة 0.26 الموجودة في سطر Z والمقابلة لمتغير الفرق x_3 تعبر عن مقدار الزيادة أو النقصان في قيمة دالة الهدف عند زيادة أو نقصان الإمكانيات المتاحة لهذا القيد بمقدار وحدة واحدة ضمن مدى تغيره [24.45, 5.88] .

٤. نحسب سعر الظل للقيد الثاني:

إن مدى التغير في الإمكانيات المتاحة للقيد الثاني الذي متغيره الفرق هو x_4 ، عندئذ القيمة 0.84 الموجودة في سطر Z والمقابلة لمتغير الفرق x_4 تعبر عن مقدار الزيادة أو النقصان في قيمة دالة الهدف عند زيادة أو نقصان الإمكانيات المتاحة لهذا القيد بمقدار وحدة واحدة ضمن مدى تغيره [24.81, 5.96] .

٣,٢,٥. اضافة قيد جديد (شرط خطي جديد) في حالة تعظيم الارباح

إن القيد الجديد المضاف إلى البرنامج الخطي (الذي أوجدنا الحل الأمثل له) يمكن أن لا يؤثر على الحل الأمثل الذي توصلنا إليه وفي هذه الحالة يكون هذا القيد مبتذلاً أو عديم الأهمية، أما إذا أثر على الحل الأمثل فانه يجب إعادة حل البرنامج الخطي مع القيد المضاف من جديد باستخدام السمبلكس.

ولمعرفة فيما إذاكان القيد الجديد المضاف له أهمية أم لا، نتبع الخطوات التالية:

١. نحسب قيمة الطرف الأيسر للقيد الجديد باستخدام الحل الأمثل للبرنامج الخطي.

٢. إذا كانت قيمة الطرف الأيسر المحسوبة للقيد الجديد اصغر من قيمة الكمية المتاحة له، عندئذ فإنه يعتبر عديم الأهمية ولا يؤثر على الحل الأمثل. وفيما عدا ذلك فانه يجب إعادة حل البرنامج الخطي من جديد مع القيد المضاف باستخدام السمبلكس.

مثال (٣) لناخذ نموذج البرمجة الخطية المعطى في المثال (٢) الآتي:

$$\begin{aligned} Z &= 5x_1 + 3x_2 \to Max \\ & 3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ & 5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ & x_1 , x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

بإضافة **متغيرات الفرق يصبح البرنامج السابق كما يلي:**

$$\begin{aligned} Z &= 5x_1 + 3x_2 \to Max \\ & 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ & 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ & x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

وجدول الحل الأمثل له الآتي:

	x_3	x_4	B
Z	0.26	0.84	12.37
x_1	-0.11	0.26	1.05
x_2	0.26	-0.16	2.37

جدول (٢) الحل الامثل

☜ لو أضفنا القيد الجديد الآتي:

$$4x_1 + 2x_2 \le 12$$

بحساب قيمة الطرف الأيسر للقيد الجديد باستخدام الحل في الجدول (٢) :

$$4\ (1.05) + 2\ (2.37) = 8.94$$

وبما أن قيمة الطرف الأيسر (8.94) اصغر من الكمية المتاحة للقيد الجديد (12) عندئذ فإن الحل الأمثل للبرنامج الخطي مع القيد الجديد هو نفس الحل الأمثل للبرنامج الخطي بدون القيد الجديد وبالتالي القيد المضاف هو قيد عديم الأهمية.

☜ لو أضفنا القيد الجديد الآتي:

$$4x_1 + 5x_2 \le 12$$

بحساب قيمة الطرف الأيسر للقيد الجديد باستخدام الحل في الجدول (٢) :

$$4\,(1.05) + 5\,(2.37) = 16.05$$

وبما أن قيمة الطرف الأيسر (16.05) اكبر من الكمية المتاحة للقيد الجديد (12) عندئذ فانه يجب إعادة حل البرنامج الخطي من جديد مع القيد المضاف.

٣,٥. تحليل الحساسية في حالة تخفيض التكاليف

سنوضح إجراءات تحليل الحساسية في حالة تخفيض التكاليف (المنفعة) على المثال التالي:

مثال (٤): ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$\begin{aligned}
z = 5x_1 + 2x_2 &\to Min \\
x_1 + 2x_2 &\ge 5 \\
2x_1 + x_2 &\ge 10 \\
x_1 + 3x_2 &\ge 7 \\
x_1\ , x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

والمطلوب:

١. حل البرنامج الخطي السابق.

٢. حساب مدى مساهمة معاملات متغيرات دالة الهدف في الحل الأمثل.

٣. حساب مدى الموارد المتاحة في الحل الأمثل.

الحل:

- **بضرب قيود البرنامج الخطي بـ (1-) وإضافة متغيرات الفرق يصبح البرنامج السابق كما يلي:**

$$
\begin{aligned}
z - 5x_1 - 2x_2 \quad\quad\quad\quad &= 0\\
-x_1 - 2x_2 + x_3 \quad\quad &= -5\\
-2x_1 - x_2 \quad + x_4 \quad &= -10\\
-x_1 - 3x_2 \quad\quad + x_5 &= -7\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

بحل النموذج السابق نحصل على جداول الحل التالية:

	↓ x_1	x_2	B
z	**-5**	**-2**	0
← x_3	-1	-2	-5
x_4	-2	-1	**-10**
x_5	-1	-3	**-7**

جدول (٣) الحل الاولي

	↓ x_3	x_2	B
z	**-5**	**8**	25
x_1	-1	2	**5**
x_4	-2	3	**0**
← x_5	-1	-1	**-2**

جدول (٤)

	x_5	↓ x_2	B
z	**-5**	**13**	35
x_1	-1	3	**7**
← x_4	-2	5	**4**
x_3	-1	1	**2**

جدول (٥)

	↓ x_5	x_4	B
z	**0.2**	**-2.6**	24.6
← x_1	0.2	-0.6	**4.6**
x_2	-0.4	0.2	**0.8**
x_3	-0.6	-0.2	**1.2**

جدول (٦)

	x_1	x_4	B
z	**-1**	**-2**	20
x_5	5	-3	**23**
x_2	2	-1	**10**
x_3	3	-2	**15**

جدول (٧) الحل الامثل

من الجدول (٧) نلاحظ أن الحل الأمثل هو:

قيمة دالة الهدف $z^* = 20$

متغيرات القرار $x_1 = 0$ $\quad$ $x_2 = 10$

متغيرات فرق $x_5 = 23$ $x_3 = 15$

١,٣,٥. دراسة التغيرات في معاملات متغيرات دالة الهدف في حالة تخفيض التكاليف

في حالة تخفيض التكاليف إن إجراءات دراسة التغيرات في معاملات متغيرات دالة الهدف التي تظهر ضمن متغيرات الحل (القاعدة) لا تختلف عن إجراءات دراسة التغيرات في معاملات متغيرات دالة الهدف في حالة تعظيم الأرباح، أما دراسة التغيرات في معاملات متغيرات دالة الهدف التي لا تظهر ضمن متغيرات الحل (القاعدة) فتختلف.

وسنوضح ذلك من خلال التطبيق المباشر على المثال السابق، المثال (٤).

مثال (٤-١) لدراسة مدى التغير في معامل المتغير x_2

إن x_2 متغير دالة الهدف وهو مشارك في الحل الامثل لذلك نقوم بما يلي:

١. نقوم بقسمة العناصر في سطر **Z** على القيم المقابلة في سطر المتغير x_2 كما يلي:

z	**-1**	**-2**
$\mathbf{x_2}$	2	-1
ناتج القسمة	-0.5	2

٢. **نحسب الحد الأدنى** لمدى تغير معامل هذا المتغير كما يلي: نحدد أصغر قيمة موجبة من ناتج التقسيم وهي **2** وبالتالي فإن الحد الأدنى يحسب:

$$2 - 2 = 0$$

٣. **نحسب الحد الأعلى** لمدى تغير معامل هذا المتغير كما يلي: نحدد أكبر قيمة سالبة من ناتج التقسيم وهي **0.5-** وبالتالي فإن الحد الأعلى يحسب:

$$2 - (-0.5) = 2.5$$

أي أن: $0 <$ **معامل** $x_2 < 2.5$

أي أنه يبقى الحل أمثلياً إذا بقي معامل x_2 ضمن هذين الحدين أما إذا أصبح أكبر أو يساوي الحد الأعلى أو أقل أو يساوي الحد الأدنى فإن الحل سوف يتغير ولابد من إعادة الحل من جديد.

وبناءً على ذلك فإن قيمة دالة الهدف ستكون ضمن المجال: $0 < z < 25$

مثال (٤–٢) لدراسة مدى التغير في **معامل المتغير** x_1

إن x_1 متغير دالة الهدف لا يشارك في الحل، لذلك سندرس متى يمكن أن يشارك هذا المتغير في الحل.

بما أن قيمة معامل x_1 في جدول الحل الأمثل (في سطر Z) يساوي (1-) هذا المقدار من الربح لا يؤهله للمشاركة في الحل، ويمكن أن يشارك في الحل عندما تصبح تكلفة الوحدة الواحدة من x_1 (معاملx_1) <u>**أصغر**</u> **أو تساوي مجموع قيمتي** معامل x_1 في البرنامج المعطى ومعامل x_1 في جدول الحل الأمثل، أي: 5-1=4

أي أن المتغير x_1 يمكن أن يشارك في الحل إذا كان معامل$x_1 \leq 4$

نستنتج مما سبق أن الحل الأمثل للبرنامج الخطي المعطى لا يتغير طالما **معامل** المتغير x_1 في دالة الهدف اكبر من القيمة 4، أما إذا أصبح معامل المتغير x_1 في دالة الهدف اصغر أو يساوي القيمة 4 فإن x_1 سيشارك في الحل وبالتالي يجب إعادة حل النموذج الخطي المعطى من جديد للحصول على الحل الأمثل الموافق للتغير.

تنويه: نلفت انتباه الطالب إلى التعابير التي استخدمت هنا في حالة تخفيض التكلفة مقارنة مع حالة تعظيم الهدف.

٢,٣,٥. دراسة التغيرات في الكميات المتاحة في حالة تخفيض التكاليف

إن وجود **متغير قرار ضمن متغيرات القاعدة (الحل)** في جدول الحل الأمثل في حالة تخفيض التكاليف يعني أن الكمية المتاحة لذلك القيد قد استغلت بالكامل في العملية الإنتاجية، وبالرجوع إلى المثال (٤) وجدول حله الأمثل الجدول (٧) التالي نلاحظ:

	x_1	x_4	B
z	**-1**	**-2**	20

$\mathbf{x}_5$	5	-3	**23**
$\mathbf{x}_2$	2	-1	**10**
$\mathbf{x}_3$	3	-2	**15**

جدول (٧) الحل الامثل

بما أن x_2 متغير قرار ضمن متغيرات القاعدة فإن الكمية المتاحة للقيد الثاني قد استغلت بالكامل (أي كافية لتحقيقه)، لذلك سندرس مدى التغير للكمية المتاحة لهذا القيد وتأثير ذلك في الحل الأمثل؟ وما هو مقدار الربح الإضافي في قيمة دالة الهدف عند تغير الكمية المتاحة بمقدار وحدة واحدة (الذي يدعى سعر الظل)؟

من جهة أخرى فإن x_5 و x_3 متغيرا فرق ضمن متغيرات القاعدة، هذا يعني أن الكمية المتاحة للقيدين الأول والثالث لم تكفِ للعملية الإنتاجية بل احتاجت إلى كمية اكبر. لذلك هنا نحسب الكمية الإضافية التي أضيفت إلى الكمية المتاحة لهذا القيد ونحسب الكمية المستغلة في الإنتاج، وما هو تأثير ذلك في الحل الأمثل ؟

أولاً: دراسة التغيرات في الكميات المتاحة التي استغلت استغلالاً كاملاً:

☜ **حساب مدى التغير في الكميات المتاحة** (التي استغلت استغلالاً كاملاً) في احد قيود النموذج الخطي مع المحافظة على استغلالها بالكامل نتبع الخطوات التالية:

١. نحدد في جدول الحل الأمثل العمود المتعلق بمتغير الفرق للقيد المطلوب.

٢. نقوم بتقسيم عناصر عمود الحل على عناصر العمود المحدد في الخطوة السابقة.

٣. **نحسب الحد الأعلى لمدى تغير الكمية المتاحة للقيد:** نحدد أصغر قيمة موجبة من ناتج التقسيم في الخطوة (٢) السابقة ونضيفها إلى الكمية المتاحة (قيمة الثابت في الجهة اليمنى) للقيد في البرنامج المعطى.

٤. **نحسب الحد الأدنى لمدى تغير الكمية المتاحة للقيد:** نحدد أكبر قيمة سالبة من ناتج التقسيم في الخطوة (٢) السابقة ونضيفها إلى الكمية المتاحة (قيمة الثابت في الجهة اليمنى) للقيد في البرنامج المعطى.

> **ملاحظة هامة**: إذا لم نحصل على قيم موجبة نتيجة التقسيم في الخطوة (٢) عندئذ يكون الحد الأعلى لمدى التغير غير محدد. وإذا لم نحصل على قيم سالبة نتيجة التقسيم في الخطوة (٢) عندئذ يكون الحد الأدنى لمدى التغير غير محدد.

مثال (٤–٣) لدراسة مدى التغيرات في الكمية المتاحة للقيد الثاني

بما أن x_2 متغير قرار ضمن متغيرات القاعدة فإن الكمية المتاحة للقيد الثاني قد استغلت بالكامل.

إن متغير الفرق للقيد الثاني هو x_4، لذلك نقوم بقسمة العناصر في عمود الحل على العناصر المقابلة في عمود متغير الفرق للقيد الثاني (عمود x_4) كما يلي:

B	x_3	ناتج القسمة
23	-3	-7.67
10	-1	-10
15	-2	**-7.5**

لا يوجد قيمة موجبة من ناتج التقسيم وبالتالي فإن الحد الأعلى لمدى تغير الكمية المتاحة للقيد الثاني غير محدود.

أكبر قيمة سالبة من ناتج التقسيم هي(**-7.5**) وبالتالي الحد الأدنى لمدى تغير الكمية المتاحة للقيد الثاني:

$$10 + (-7.5) = 2.5$$

وبالتالي لضمان استغلال الكمية المتاحة بالكامل في الإنتاج للقيد الثاني يجب أن تتراوح قيمتها ضمن المجال $[2.5, \infty[$.

☜ **لحساب مقدار الزيادة أو النقصان في قيمة دالة الهدف عند زيادة الكمية المتاحة أو نقصانها لأحد القيود بمقدار وحدة واحدة (الذي يدعى سعر الظل Shadow Price)؟**

يمكن الحصول على سعر الظل مباشرة من جدول الحل الأمثل، وهي القيم الموجودة في سطر دالة الهدف والمقابلة لمتغيرات الفرق للقيود التي حُسِبَ لها مدى تغير الإمكانيات المتاحة. وسنوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال (٤–٤) لتحديد سعر الظل للقيد الثاني

بما أن متغير الفرق للقيد الثاني هو x_4، عندئذ القيمة (2-) الموجودة في سطر Z والمقابلة لمتغير الفرق x_4 **بالقيمة المطلقة** تعبر عن مقدار الزيادة أو النقصان في قيمة دالة الهدف عند زيادة الإمكانيات المتاحة لهذا القيد بمقدار وحدة واحدة ضمن مدى تغيره $[2.5, \infty]$.

ثانياً: دراسة التغيرات في الكميات المتاحة التي لم تكف لتحقيق العملية الإنتاجية:

إن وجود متغير فرق ضمن متغيرات الحل (قاعدة) يشير إلى عدم كفاية الكمية المتاحة للقيد، وقيمة هذا المتغير هي الكمية المضافة إلى الإمكانيات المتاحة، أما الكمية المتاحة التي تحقق العملية الإنتاجية فتحسب من حاصل مجموع قيمة متغير الفرق في جدول الحل الأمثل مع قيمة الكمية المتاحة لهذا القيد في البرنامج الخطي المعطى.

مثال (٤–٥) لدراسة مدى التغيرات في الكمية المتاحة للقيد الأول:

بما أن x_3 متغير فرق القيد الأول ضمن متغيرات القاعدة فإن الكمية المتاحة للقيد الأول غير كافية لتحقيقه.

وقيمة هذا المتغير $x_3 = 15$ هي الكمية المضافة إلى الإمكانيات المتاحة، أما الكمية المتاحة التي حققت العملية الإنتاجية فتحسب من **حاصل مجموع** قيمة متغير الفرق في جدول الحل الأمثل مع قيمة الكمية المتاحة لهذا القيد في البرنامج الخطي المعطى أي: $5 + 15 = 20$

مثال (٤–٦) لدراسة مدى التغيرات في الكمية المتاحة للقيد الثالث:

بما أن x_5 متغير فرق ضمن متغيرات القاعدة فإن الكمية المتاحة للقيد الثالث غير كافية لتحقيقه.

وقيمة هذا المتغير $x_5 = 23$ هي الكمية المضافة إلى الإمكانيات المتاحة، أما الكمية المتاحة التي حققت العملية الإنتاجية فهي:

$$7 + 23 = 30$$

مثال (٥): ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$
\begin{aligned}
&Z = 19x_1 + 13x_2 + 15x_3 + 18x_4 \rightarrow \text{Min} \\
&2x_1 + 2x_2 + 3x_4 \geq 7 \\
&3x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 5 \\
&x_1\ , x_2\ , x_3\ , x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

والمطلوب:

١. حساب مدى مساهمة معاملات متغيرات دالة الهدف في الحل الأمثل.

٢. حساب مدى الموارد المتاحة في الحل الأمثل.

٣. بفرض أن الإمكانات المتاحة في القيد الأول أصبحت 15 هل يتغير الحل الأمثل

الحل:

١. بضرب قيود البرنامج الخطي بـ (-1) وإضافة متغيرات الفرق يصبح البرنامج السابق كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&Z - 19x_1 - 13x_2 - 15x_3 - 18x_4 = 0 \\
&-2x_1 - 2x_2 - 3x_4 + x_5 = -7 \\
&-3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_6 = -5 \\
&x_1\ , x_2\ , x_3\ , x_4 , x_5 , x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

بحل هذا النموذج السابق نحصل على جدول الحل الأمثل الآتي:

	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	B
z	-6	-3	-5	-3	50
$\mathbf{x_1}$	1.5	-0.75	0.25	-0.5	0.75
$\mathbf{x_2}$	-1.5	2.25	-0.75	0.5	2.75

جدول (٨) الحل الامثل

٢. حساب مدى مساهمة معاملات متغيرات دالة الهدف في الحل الأمثل.

- **بالنسبة إلى x_1 المشارك في الحل:**

نقوم بقسمة سطر z على سطر x_1:

z	-6	-3	-5	-3
$\mathbf{x_1}$	1.5	-0.75	0.25	-0.5
ناتج القسمة	-4	4	-20	6

نحسب الحد الأعلى لمدى تغير معامل x_1: نأخذ أصغر قيمة سالبة من ناتج التقسيم (4-) ونطرحها من معامل المتغير x_1 في دالة الهدف(19) أي:

$$19-(-4)=19+4=23$$

نحسب الحد الأدنى لمدى تغير معامل x_1: نأخذ أكبر قيمة موجبة من ناتج التقسيم (4) ونطرحها من معامل المتغير x_1 في دالة الهدف(19) أي: $19-4=15$

أي أن: $15 <$ معامل $x_1 < 23$

أي أنه يبقى الحل أمثلياً إذا بقي معامل x_1 ضمن هذين الحدين أما إذا أصبح أكبر أو يساوي الحد الأعلى أو أقل أو يساوي الحد الأدنى فإن الحل سوف يتغير ولابد من إعادة الحل من جديد.

وبناءً على ذلك فإن قيمة دالة الهدف ستكون ضمن المجال: $47 < z < 53$

- **بالنسبة لـ x_2 المشارك في الحل:**

نقوم بقسمة سطر z على سطر x_1:

z	-6	-3	-5	-3
$\mathbf{x_2}$	-1.5	2.25	-0.75	0.5
ناتج القسمة	4	-1.33	6.67	-6

نحسب الحد الأعلى لمدى تغير معامل x_2: نأخذ أصغر قيمة سالبة من ناتج التقسيم (1.33-) ونطرحها من معامل المتغير x_2 في دالة الهدف (13) أي:

$$13-(-1.33)=13+1.33=14.33$$

نحسب الحد الأدنى لمدى تغير معامل x_2: نأخذ أكبر قيمة موجبة من ناتج التقسيم (4) ونطرحها من معامل المتغير x_2 في دالة الهدف(19) أي: $13-4=9$

أي أن: $9 <$ **معامل** $x_2 < 14.33$

أي أنه يبقى الحل أمثلياً إذا بقي معامل $\mathbf{x_2}$ ضمن هذين الحدين أما إذا أصبح أكبر أو يساوي الحد الأعلى أو أقل أو يساوي الحد الأدنى فإن الحل سوف يتغير ولابد من إعادة الحل من جديد.

وبناءً على ذلك فإن قيمة دالة الهدف ستكون ضمن المجال:

$$47 < z < 53.66$$

- **بالنسبة لـ** x_3 **غير المشارك في الحل**:

بما أن قيمة معامل x_3 في جدول الحل الأمثل (في سطر Z) يساوي (6-) هذا المقدار من الربح لا يؤهله للمشاركة في الحل، ويمكن أن يشارك في الحل عندما يصبح الربح المتحقق من الوحدة الواحدة من x_3 (معامل x_3) **<u>أصغر</u> أو يساوي مجموع قيمتي معامل** x_3 في البرنامج المعطى ومعامل x_3 في جدول الحل الأمثل، أي: 15-6=9

أي أن المتغير x_3 يمكن أن يشارك في الحل إذا كان **معامل** $x_3 \leq 9$

- **بالنسبة لـ** x_4 **غير المشارك في الحل**:

بما أن قيمة معامل x_4 في جدول الحل الأمثل (في سطر Z) يساوي (3-) هذا المقدار من الربح لا يؤهله للمشاركة في الحل، ويمكن أن يشارك في الحل عندما يصبح الربح المتحقق من الوحدة الواحدة من x_4 (معامل x_4) **<u>أصغر</u> أو يساوي مجموع قيمتي معامل** x_4 في البرنامج المعطى ومعامل $\mathbf{x_4}$ في جدول الحل الأمثل، أي: 18-3=15

أي أن المتغير x_4 يمكن أن يشارك في الحل إذا كان **معامل** $x_4 \leq 15$

٣. دراسة التغيرات في الكميات المتاحة

- **بالنسبة للقيد الأول:**

بما أن x_1 متغير قرار ضمن متغيرات القاعدة فإن الكمية المتاحة للقيد الأول قد استغلت بالكامل.

إن متغير الفرق للقيد الأول هو x_5، لذلك نقوم بقسمة العناصر في عمود الحل على العناصر المقابلة في عمود متغير الفرق للقيد الثاني (عمود x_5) كما يلي:

ناتج القسمة	x_3	B
3	0.25	0.75
-3.67	-0.75	2.75

القيمة الموجبة من ناتج التقسيم هي**(3)** وبالتالي الحد الأعلى لمدى تغير الكمية المتاحة للقيد الثاني: $7 + (3) = 10$

القيمة السالبة من ناتج التقسيم هي**(3.67-)** وبالتالي الحد الأدنى لمدى تغير الكمية المتاحة للقيد الثاني: $7 + (-3.67) = 3.33$

وبالتالي لضمان استغلال الكمية المتاحة بالكامل في الإنتاج للقيد الأول يجب أن تتراوح قيمتها ضمن المجال [3.33 ,10].

- **بالنسبة للقيد الثاني:**

بما أن x_2 متغير قرار ضمن متغيرات القاعدة فإن الكمية المتاحة للقيد الثاني قد استغلت بالكامل.

بالخطوات السابقة نفسها نجد أن مدى التغير للقيد الثاني هو: [3.5 ,10.5]

٤. الطلب الثالث:

في حال أصبحت الإمكانات في القيد الأول 15 بدلاً من 7 نلاحظ أن (15) لا تقع ضمن مدى التغير للكمية المتاحة لهذا القيد [3.33 ,10] ومنه فإن هذا التغير سوف يؤدي إلى تغير الحل الأمثل.

٣,٣,٥. اضافة قيد جديد (شرط خطي جديد) في حالة تخفيض التكاليف

إن القيد الجديد المضاف إلى البرنامج الخطي (الذي أوجدنا الحل الأمثل له) يمكن أن لا يؤثر على الحل الأمثل الذي توصلنا إليه وفي هذه الحالة يكون هذا القيد مبتذلاً أو عديم الأهمية، أما إذا أثر على الحل الأمثل فانه يجب إعادة حل البرنامج الخطي مع القيد المضاف من جديد باستخدام السمبلكس.

ولمعرفة فيما إذا كان القيد الجديد المضاف له أهمية أم لا، نتبع الخطوات التالية:

٣. نحسب قيمة الطرف الأيسر للقيد الجديد باستخدام الحل الأمثل للبرنامج الخطي.

٤. إذا كانت قيمة الطرف الأيسر المحسوبة للقيد الجديد أكبر من قيمة الكمية المتاحة له، عندئذ فإنه يعتبر عديم الأهمية ولا يؤثر على الحل الأمثل. وفيما عدا ذلك فانه يجب إعادة حل البرنامج الخطي من جديد مع القيد المضاف باستخدام السمبلكس

مثال (٦) لناخذ نموذج البرمجة الخطية المعطى في المثال (٤) الآتي:

$$\begin{aligned} z = 5x_1 + 2x_2 &\rightarrow \text{Min} \\ x_1 + 2x_2 &\geq 5 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 10 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

الذي حله الأمثل معطى في الجدول التالي:

	x_1	x_4	B
z	**-1**	**-2**	20
x_5	5	-3	**23**
x_2	2	-1	**10**
x_3	3	-2	**15**

جدول (٩) الحل الامثل

☜ لو أضفنا القيد الجديد الآتي:

$$4x_1 + 2x_2 \geq 12$$

بحساب قيمة الطرف الأيسر للقيد الجديد باستخدام الحل في الجدول (٢) :

$$4\ (0) + 2\ (10) = 20$$

وبما أن قيمة الطرف الأيسر (20) أكبر من الكمية المتاحة للقيد الجديد (12) عندئذ فإن الحل الأمثل للبرنامج الخطي مع القيد الجديد هو نفس الحل الأمثل للبرنامج الخطي بدون القيد الجديد وبالتالي القيد المضاف هو قيد عديم الأهمية.

☜ لو أضفنا القيد الجديد الآتي:

$$4x_1 + 5x_2 \geq 12$$

بحساب قيمة الطرف الأيسر للقيد الجديد باستخدام الحل في الجدول (٢) :

$$4\ (0) +1\ (10) = 10$$

وبما أن قيمة الطرف الأيسر (10) اصغر من الكمية المتاحة للقيد الجديد (12) عندئذ فانه يجب إعادة حل البرنامج الخطي من جديد مع القيد المضاف.

٤,٥ . استخدام مايكروسوفت اكسل/ تقنية الـ Solver لحل البرامج الخطية وتحليل الحساسية

درسنا في الفصول السابقة إجراءات حل البرامج الخطية بالطريقة البيانية وباسلوب السمبلكس، ودرسنا في هذا الفصل تحليل الحساسية، وسنتطرق في هذه الفقرة إلى استخدام الحاسوب في حل مثل تلك البرامج وتحليل الحساسية، مذكرين الطالب بفضله في تسريع إيجاد الحل ودقة نتائجه.

نشير في هذا السياق أنه يوجد برامج كثيرة تساعدنا في حل نماذج البرمجة الخطية، ولعل أكثر هذه البرامج شيوعاً هو برنامج الإكسل Microsoft Excel من خلال تقنية السولفر Solver.

١,٤,٥. تفعيل تقنية الـ Solver في برنامج الإكسل

بداية على الطالب التأكد أولاً من وجود تقنية السولفر Solver ضمن أوامر قائمة "البيانات Data"، فإذا كانت هذه التقنية غير موجودة نتبع الخطوات التالية لتفعيلها:

أولاً: اذا كنت تتعامل مع برنامج مايكروسوفت اكسل ٢٠٠٧:

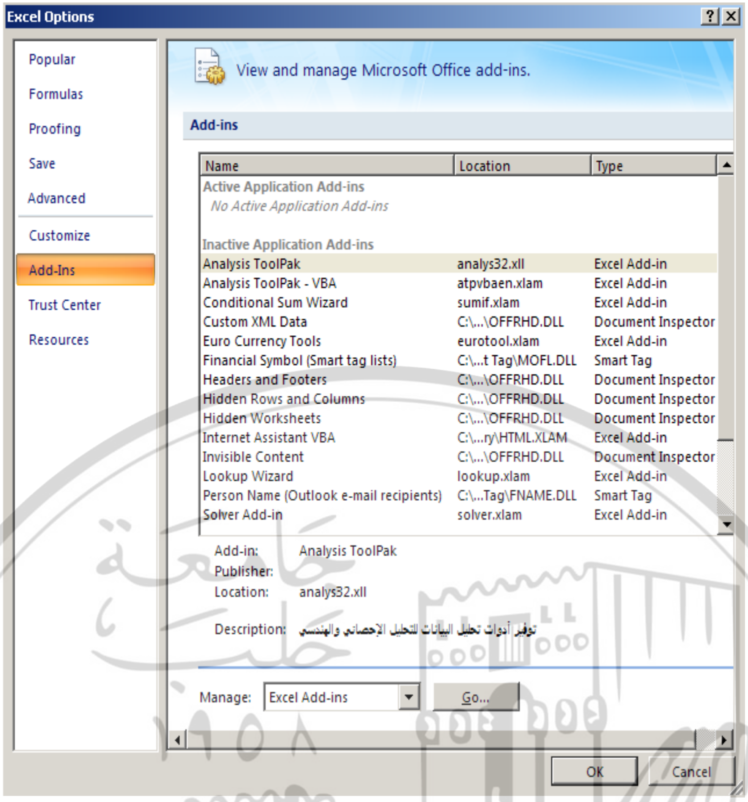
١. افتح قائمة "زر مهام Office Button"، تظهر قائمة المهام كما في الشكل (١):

الشكل (١) قائمة المهام

٢. انقر بزر الفأرة الأيسر على زر "خيارات الإكسل Excel Options"، يظهر صندوق حوار كما في الشكل التالي(٢):

٣. من تبويب "إضافة إدراج ..Add-Ins"، انقر على زر "اذهب Go" يظهر صندوق حوار باسم "إضافة إدراج ..Add-Ins" كما في الشكل (٣).

٤. انقر بزر الفأرة الأيسر على المربع بجانب "Solver Add In " لتفعيله، عندئذ تظهر أيقونة السولفر في قائمة "البيانات Data"



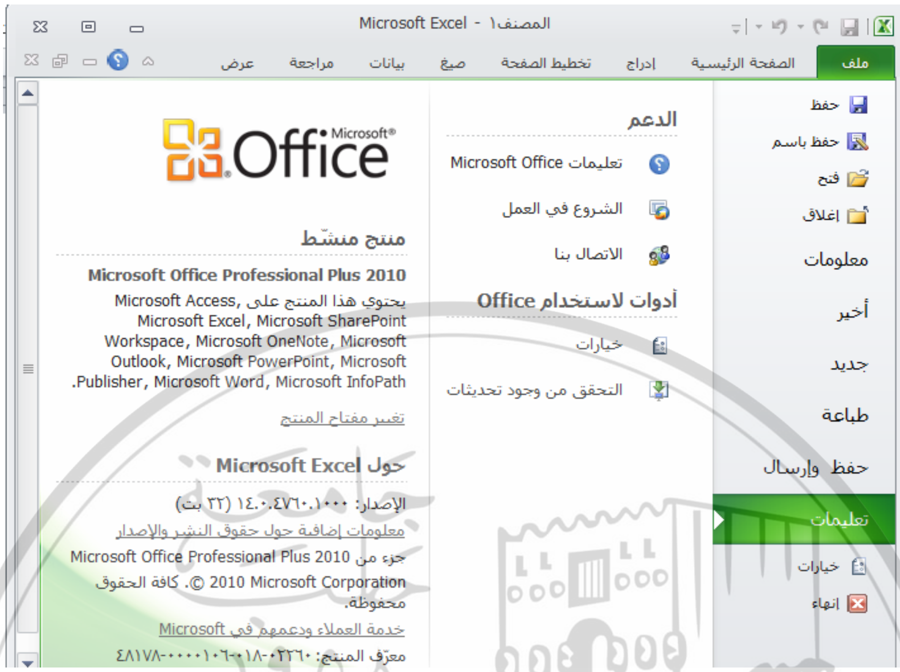
الشكل (٢) صندوق حوار خيارات الإكسل ٢٠٠٧

الشكل (٣) صندوق حوار إضافة إدراج

ثانياً: اما اذا كنت تتعامل مع برنامج مايكروسوفت اكسل ٢٠١٠:

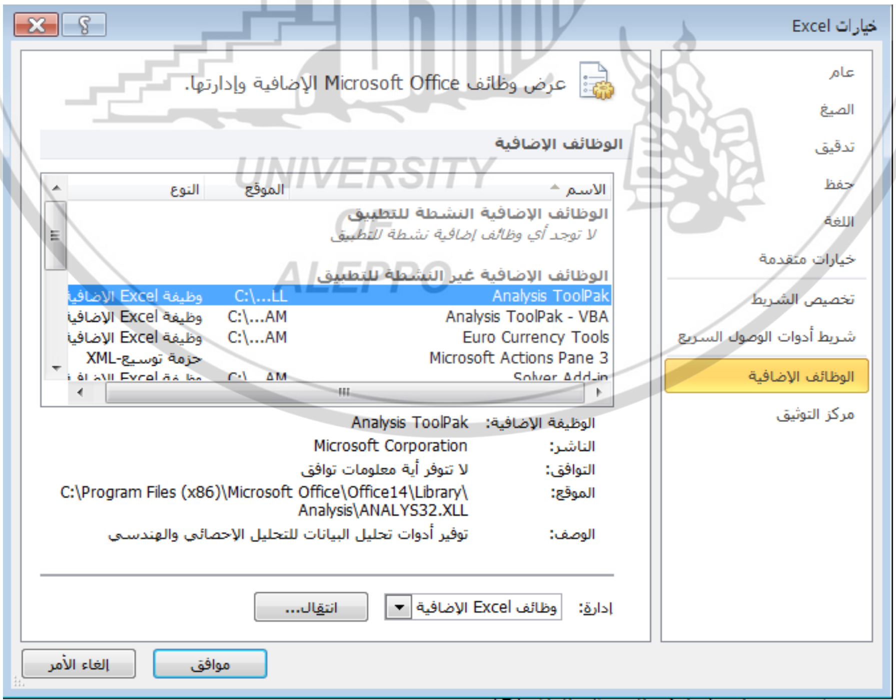
١. افتح قائمة "ملف File" ، ثم اختر الامر "خيارات Options" كما في الشكل (٤)

يظهر صندوق حوار



الشكل (٤) صندوق حوار خيارات الإكسل ٢٠١٠

٢. انقر بزر الفأرة الأيسر على قائمة "خيارات الإكسل "Excel Options"، يظهر صندوق حوار كما في الشكل التالي(٥):



الشكل (٥) صندوق حوار الوظائف الاضافية

٣. من تبويب "الوظائف الاضافية" انقر على زر "انتقال.. Go" يظهر صندوق حوار باسم "الوظائف الاضافية" كما في الشكل (٦).

الشكل (٦) صندوق حوار إضافة السولفر

٤. ننقر بزر الفأرة الأيسر على المربع بجانب "Solver Add In" لتفعيله ثم زر "موافق Ok"، عندئذ تظهر أيقونة السولفر في قائمة "البيانات Data".

١,٤,٥ . استخدام الإكسل/ تقنية الـ Solver في حل البرامج الخطية

سنقوم فيما يأتي بعرض كيفية استخدام تقنية الـ Solver لحل مسائل البرمجة الخطية من خلال بعض الأمثلة.

مثال (٧): ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned}
&Z = 50x_1 + 40x_2 \to MAX \\
&2x_1 + 5x_2 \le 20 \\
&8x_1 + 5x_2 \le 40 \\
&5x_1 + 6x_2 \le 30 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

لحل النموذج السابق باستخدام الاكسل نتبع الإجراءات التالية:

١ . **افتح مصنفاً** جديداً وخزنه باسم Linear Models

٢ . **ادخل البيانات** على ورقة العمل Sheet1 باعتماد الترتيب والتنسيق المبين في الشكل(٧)

٣ . الحسابات :

	A	B	C	D	E
1		x1	x2		B
2	الحل	1	1		
3	معاملات دالة الهدف	50	40		0
4	معاملات الشروط الخطية	2	5		20
5		8	5		40
6		5	6		30
7					

الشكل (٧)

١ . في الخلية D2 نستخدم الصيغة التالية:

= B3 * B2 + C3 * C2

2 . في الخلية D4 نستخدم الصيغة التالية:

= B4 * B2 + C4 * C2

٣ . في الخلية D5 نستخدم الصيغة التالية:

B5 * B2 + C5 * C2

4 . في الخلية D6 نستخدم الصيغة التالية:

B6 * B2 + C6 * C2

وتبدو ورقة العمل كما في الشكل (٨)

	A	B	C	D	E
1		x1	x2		B
2	الحل	1	1	90	
3	معاملات دالة الهدف	50	40		0
4	معاملات الشروط الخطية	2	5	7	20
5		8	5	13	40
6		5	6	11	30
7					

الشكل (٨)

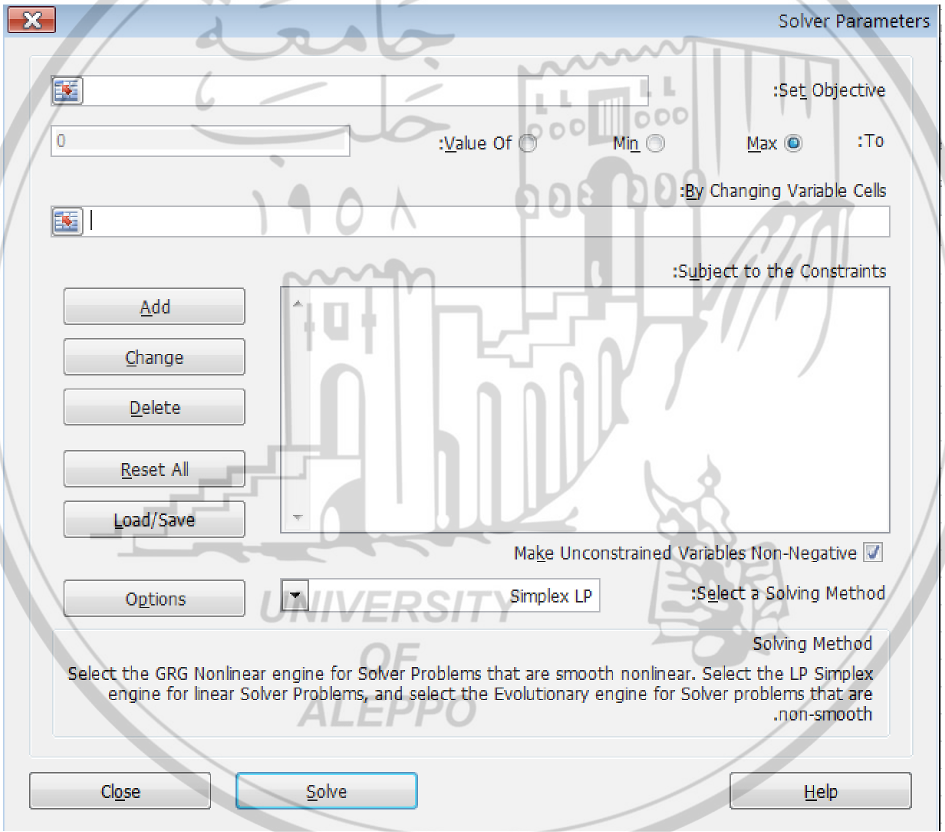
إن الحل الأولي للبرنامج الخطي ممثل في الخلايا A2 وB2 أي أن قيمة متغيرات القرار هي:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 1$$

من اجلها تكون قيمة دالة الهدف في الخلية C2 هي : $Z = 90$

4 . **إيجاد الحل المثالي** باتباع الخطوات التالية :

١. نفتح القائمة " بيانات Data "ونختار "solver"، يظهر صندوق حوار باسم "Solver Parameters " الشكل (٩)



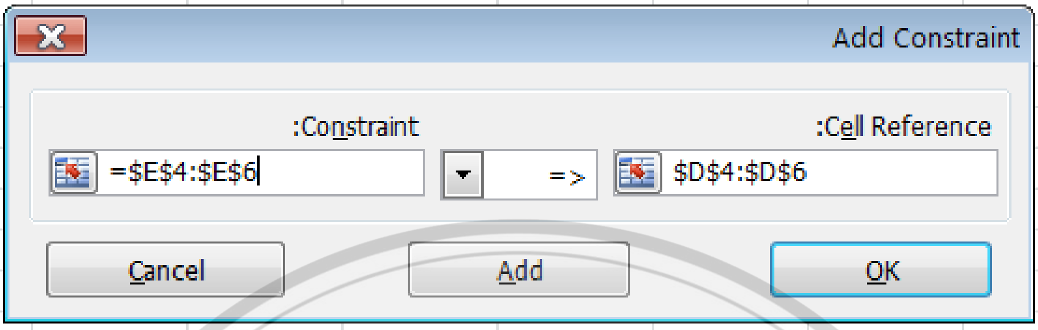
الشكل (٩) صندوق حوار "Solver Parameters"

٢. ندخل في الحقل "Set Objective" مرجع الخلية D2 خلية قيمة دالة الهدف.

٣. نختار Max ، لأن الهدف في النموذج الخطي السابق هو تعظيم الأرباح.

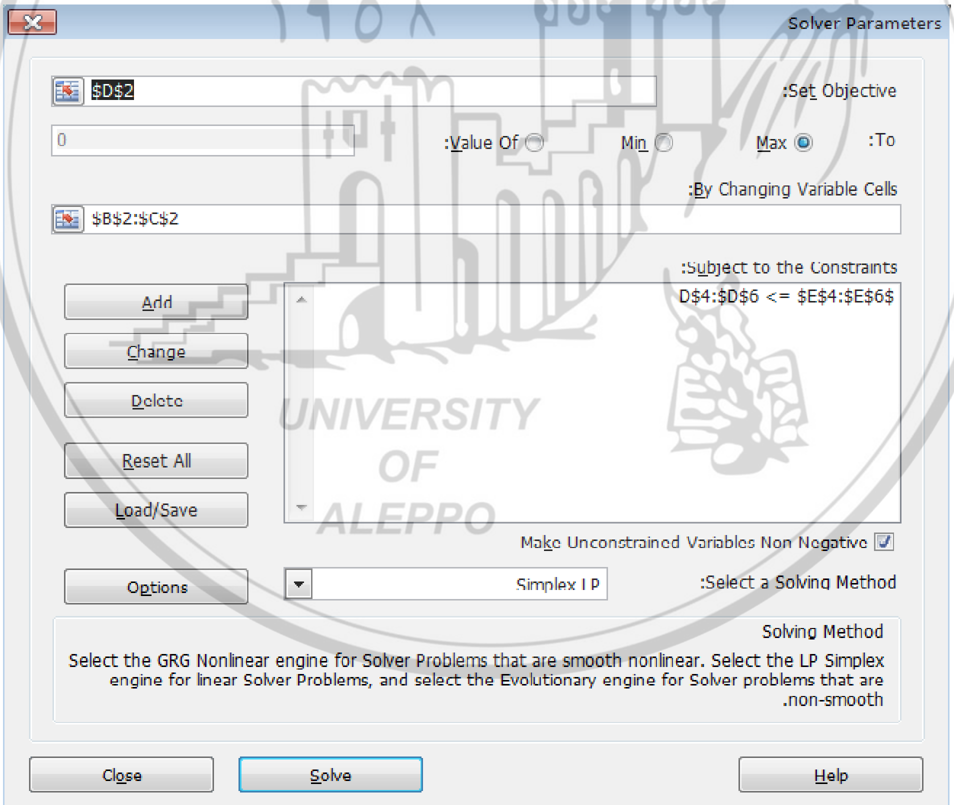
٤. ندخل في الحقل " By Changing Variable Cells " مراجع الخلايا من الخلية B2 وحتى الخلية C2 الموجود فيها القيم 1 .

٥. ننقر بالماوس على زر"Add" يظهر صندوق حوار آخر باسم "Ad Constraint" الشكل (١٠).



الشكل (١٠)

٦. ندخل في الحقل "cell Reference" مراجع الخلايا من الخلية D4 وحتى الخلية D6 الموجودة فيها القيم المحسوبة في الإجراء ٣ أعلاه.

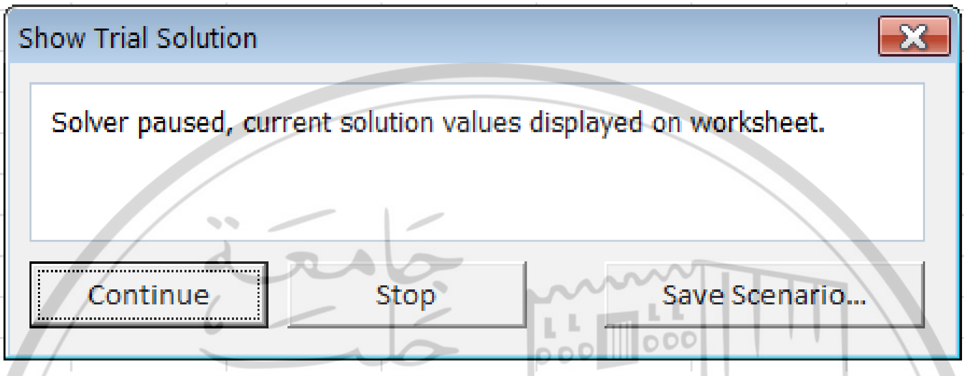


الشكل (١١)

٧. ندخل في الحقل "Constraint" مراجع الخلايا من الخلية E4 وحتى الخلية E6 الموجودة فيها قيم الطرف الثاني من الشروط الخطية.

٨. ننقر بالماوس على زر "Ok" للعودة إلى صندوق الحوار السابق " Solver Parameters" الشكل (١١).

٩. ننقر بالماوس على زر "Solver" يظهر صندوق حوار باسم " Show Trial Solution" الشكل (١٢).



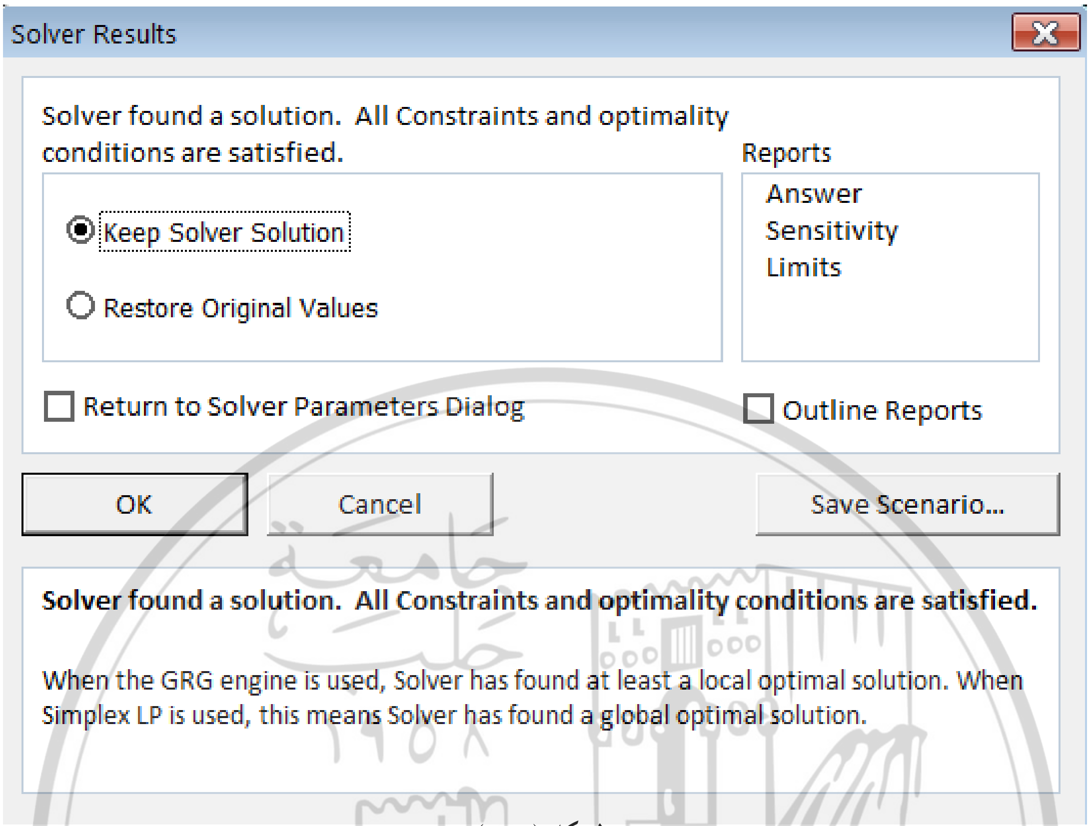
الشكل (١٢)

١٠. نتقر بالماوس على زر "Continue"، نلاحظ تغير القيم في الخلايا: A2 وB2 وC2 وC4 وC5 وC6. وهذا يعتبر بمثابة أحد حلول البرنامج الخطي ولكن ليس أمثلياً حيث أن قيمة متغيرات القرار هي :

$$x_1 = 5$$
$$x_2 = 0$$

من اجلها تكون قيمة دالة الهدف في الخلية C2 هي : $Z = 250$

١١. نتابع النقر على زر "Continue"، إلى أن يظهر صندوق حوار باسم " Solver Results" الشكل (١٣)، ونلاحظ في كل مرة ننقر فيها على الزر "Continue" تتغير القيم في الخلايا: A2 وB2 وC2 وC4 وC5 وC6، وهذا يعني ظهور حلول أخرى للبرنامج الخطي.



الشكل (١٣)

١٢. من صندوق الحوار "Solver Results":

- نفعل الخيار "Keep Solver Solution" إذا أردنا الاحتفاظ بالجدول الأخير على صفحة الإكسل، أو نفعل الخيار "Restore Original Values " إذا أردنا العودة إلى الجدول الأول الذي يعطي الحل الأولي.
- نحدد من قائمة " Reports " الخيارات التي نريدها وهي :

Answer Report تقرير الحل

Sensitivity Report تقرير تحليل الحساسية

Limits Report تقرير المدى

١٣. ننقر بالماوس على زر "موافق "Ok سيقوم الإكسل بإنشاء ثلاث صفحات اضافية لإظهار التقارير السابقة. وهي كما في الاشكال (١٥) و(١٦) و(١٧).

١٤.الحل الأخير والمثالي انظر الشكل (١٤) يظهر مع ظهور صندوق الحوار " Solver Results" حيث أن قيمة متغيرات القرار هي :

$$x_1 = 3.913$$
$$x_2 = 1.739$$

من اجلها تكون قيمة دالة الهدف في الخلية D2 هي :

$$Z = 265.2$$

	A	B	C	D	E
1		x1	x2		B
2	الحل	3.913043	1.73913	265.2174	
3	معاملات دالة الهدف	50	40		0
4	معاملات الشروط الخطية	2	5	16.52174	20
5		8	5	40	40
6		5	6	30	30

الشكل (١٤)

Microsoft Excel 14.0 Answer Report
Worksheet: [(١)مثال.xls]حل مسألة برمجة خطية باستخدام الاكسل
Report Created: 12/09/2013 07:55:12 ص
Result: Solver found a solution. All Constraints and optimality conditic
Solver Engine
Engine: Simplex LP
Solution Time: 1.607 Seconds.
Iterations: 2 Subproblems: 0
Solver Options
Max Time 100 sec, Iterations 100, Precision 0.000001, Show Iteration Results
Max Subproblems Unlimited, Max Integer Sols Unlimited, Integer Tolerance 5%, S
Objective Cell (Max)

Final Value	Original Valu	Name	Cell
265.2174	90	الحل	D2

Variable Cells

Integer	Final Value	Original Valu	Name	Cell
Contin	3.913043	1	x1 الحل	B2
Contin	1.73913	1	x2 الحل	C2

Constraints

Slack	Status	Formula	Cell Value	Name	Cell
3.478261	Not Bindi	D4<=$E!	16.5217391	معاملات الشروط ا	D4
0	Binding	D5<=$E!	40		D5
0	Binding	D6<=$E!	30		D6

الشكل (١٥) تقرير الحل

Microsoft Excel 14.0 Sensitivity Report
Worksheet: [(١)مثال.xls]حل مسألة برمجة خطية باستخدام الاكسل
Report Created: 12/09/2013 07:55:13 ص

Variable Cells

Allowable Decrease	Allowable Increase	Objective Coefficient	Reduced Cost	Final Value	Name	Cell
16.66666667	14	50	0	3.913043478	x1 الحل	B2
8.75	20	40	0	1.739130435	x2 الحل	C2

Constraints

Allowable Decrease	Allowable Increase	Constraint R.H. Side	Shadow Price	Final Value	Name	Cell
3.47826087	1E+30	20	0	16.52173913	معاملات الشروط الخطية	D4
6.153846154	8	40	4.347826087	40		D5
5	2.666666667	30	3.043478261	30		D6

الشكل (١٦) تقرير تحليل الحساسية

Microsoft Excel 14.0 Limits Report
Worksheet: [حل مسألة برمجة خطية باستخدام الاكسل.xls](١)مثال
Report Created: 12/09/2013 07:55:13 ص

Cell	Objective Name	Value
D2	الحل	265.2173913

Cell	Variable Name	Value	Lower Limit	Objective Result	Upper Limit	Objective Result
B2	الحل x1	3.913043478	0	69.56521739	3.913043478	265.2173913
C2	الحل x2	1.739130435	0	195.6521739	1.739130435	265.2173913

الشكل (١٧) تقرير المدى

مثال (٢) ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$z = 45x_1 + 12x_2 \to \text{Min}$$
$$x_1 + x_2 \geq 300$$
$$3x_1 \geq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

بإتباع الإجراءات والخطوات السابقة نجد أن الحل الأولي للبرنامج الخطي مبين في الشكل (١٨) والحل النهائي المثالي مبين في الشكل (١٩)

حيث أن قيمة متغيرات القرار هي :
$$x_1 = 83.33$$
$$x_2 = 216.667$$

من اجلها تكون قيمة دالة الهدف في الخلية D2 هي: $z = 6350$

	A	B	C	D	E
1		x1	x2		B
2	الحل	1	1	57	
3	معاملات دالة الهدف	45	12		0
4	معاملات الشروط	1	1	2	300
5	الخطية	3	0	3	250

الشكل (١٨)

	A	B	C	D	E
1		x1	x2		B
2	الحل	83.33333	216.6667	6350	
3	معاملات دالة الهدف	45	12		0
4	معاملات الشروط	1	1	300	300
5	الخطية	3	0	250	250

الشكل (١٩)

مسائل عامـة

١ - حل نموذج البرمجة الخطية الآتي بالطريقة المناسبة:

$$\begin{aligned} Z &= 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \text{Max} \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\le 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\le 80 \\ x_1 , x_2 , x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

ثم

١- جِدْ مدى التغير في معاملات متغيرات دالة الهدف.

٢- جِدْ مدى التغير في الإمكانات المتاحة.

٣- لو عدَّلنا الإمكانات المتاحة في القيد الثالث وأصبحت 100 بدلاً من 80 هل يتأثر الحل الأمثل ولماذا ؟

٤- بفرض أن الربح من $\mathbf{x_1}$ أصبح 7 بدلاً من 2 هل يتأثر الحل الأمثل؟.

٢ - لديك نموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + x_2 \rightarrow \text{Min} \\ 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\ge 6 \\ x_1 + 2x_2 &\le 3 \\ x_1 , x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

والمطلوب:

١- حل النموذج السابق بالطريقة المناسبة.

٢- جِدْ مدى التغير في معاملات متغيرات دالة الهدف.

٣- جِدْ مدى التغير في الإمكانات المتاحة.

٣ - حل نموذج البرمجة الخطية الآتي بالطريقة المناسبة:

$$\begin{aligned} Z &= 120x_1 + 30x_2 \rightarrow \text{Max} \\ 10x_1 + 2x_2 &\le 100 \\ 5x_1 + 3x_2 &\le 75 \\ 2x_1 + 4x_2 &\le 80 \\ x_1 , x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

ثم

١. جِدْ مدى التغير في معاملات متغيرات دالة الهدف.

٢. جِدْ مدى التغير في الإمكانات المتاحة.

٣. بفرض أن الربح من x_1 قد أصبح 126 هل يتغير الحل الأمثل؟

٤. بفرض وصول طلبية من المواد الأولية وأصبحت الإمكانات من المواد في القيد الأول 160 بدلاً من 100 والسؤال: هل يتأثر الحل الأمثل ؟

الإجابات: على الطالب التأكد من صحتها

١- جدول الحل الأمثل:

	x_3	x_4	B
Z	**10.5**	**3**	1275
x_1	0.15	-0.1	**7.5**
x_2	-0.25	0.5	**12.5**
x_5	0.7	-1.8	**15**

٢- مدى تغير معامل متغيرات دالة الهدف:

$50 < x_1$ معامل < 150

$24 < x_2$ معامل < 72

٣- مدى التغير في الإمكانات المتاحة

للقيد الأول: [78.57 ,150] وسعر الظل **10.5**

للقيد الثاني: [83.33, 50] وسعر الظل **3**

للقيد الثالث: الكمية المتاحة غير مستغلة بالكامل، الفائض 15 والكمية المستغلة هي: **80-15=65**

٤- لا يتغير الحل.

٥- نعم يتأثر الحل.

٤ – حل نماذج البرمجة الخطية السابقة باستخدام تقنية الـ Solver وقارن النتائج؟

الوحدة الدراسية الثانية
النماذج الخطية الخاصة
Special Linear Programming

تمهيد

في الوحدة الاولى تناولنا صياغة النموذج الرياضي الخطي للمواقف الاقتصادية والادارية التي تندرج ضمن تخطيط الإنتاج والاستغلال الأمثل للطاقة الإنتاجية أو تحديد المزيج التسويقي للمواد الخام للحصول على مركب محدد، وتناولنا بشكل مفصل اسلوب السمبلكس والطريق البيانية التي يمكن حل تلك النماذج، ولاحظنا انه كلما زادت قيود المسألة وزادت متغيرات القرار فيها ازداد الحل صعوبة وتعقيداً.

هناك بعض نماذج البرمجة الخطية لبعض المواقف الاقتصادية والادارية مثل: (اختيار أفضل أسلوب لنقل المنتجات وتوزيعها، اختيار أفضل تخصيص لعمل عمال في وظائف محددة، اختيار الطريق الاقل تكلفة، أو الطريق الاقصر، نقل اكبر كمية ممكنة من مادة ضمن سعات طريق محددة ......) يمكن حلها بتحويلها الى نموذج برمجه خطية وحلها باسلوب السمبلكس، ولكن وبسبب وجود قيود خاصة لكل من هذه النماذج كما سنرى لاحقاً فإن حلها باستخدام السمبلكس يصبح صعباً، مما جعل علماء بحوث العمليات للتفتيش وايجاد اساليب وخوارزميات خاصة لحلها وايجاد الحل الامثل لها، وسنتطرق لهذه الخوارزميات في الفصول التالية.

أهداف الوحدة الدراسية الأولى

بعد دراسة هذه الوحدة سيكون الطالب قادراً على:

١. ايجاد الحل الامثل لنماذج النقل، بحيث تلبى حاجة مراكز الاستيراد بأقل تكلفة ممكنة مع الأخذ بعين الاعتبار الكميات المتوفرة في كل مركز تصدير.

٢. ايجاد الحل الامثل لنماذج التخصيص (التعيين) لتوزيع n وظيفة (مهمة) على n عامل أو (آلة) وينفذ كل وظيفة عامل واحد فقط، بحيث تكون تكلفة التخصيص (التعيين) الإجمالية أقل ما يمكن.

٣. ايجاد الحل الامثل لنموذج البائع المتجول الذي ينطلق من مكان معين ويزور n-1 مكاناً آخر ثم يعود إلى مكان انطلاقه بشرط أن يزور كل مكان مرة واحدة، بحيث تكون تكلفة خط الرحلة أقل ما يمكن.

٤. ايجاد الحل الامثل لنموذج التدفق الأعظمي لتمرير أكبر كمية ممكنة من مركز (منبع) إلى مركز آخر (مصب) من خلال مراكز وسيطة تصل بينها شبكة من الطرق ذات سعات معينة، ويفترض أنه لا يخزن في أي مركز وسيط أية مادة.

الفصل السادس

نموذج النقل

Transportation Model

١,٦ . مقدمة

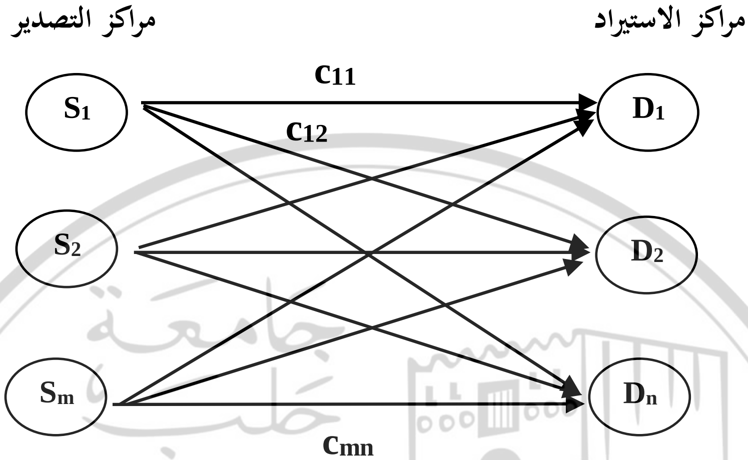
يتلخص هذا النوع من النماذج ضمن الإطار التالي:

لدينا الكميات $s_1, s_2, \ldots s_m$ المتوفرة في مراكز التصدير أو مراكز العرض S_i (Sources) حيث $(i=1,2,\ldots..m)$ من مادة معينة (بترول، حبوب، أخشاب...)، يراد نقلها إلى مراكز الاستيراد أو مراكز الطلب D_j (Destinations) حيث$(j=1,2,\ldots n)$ ، بحيث يصل إلى المركز D_j الكمية d_j من هذه المادة، علماً بأن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من المادة من كل مركز تصدير S_i إلى كل مركز استيراد D_j يساوي c_{ij} كما هو مبين في الجدول(١)، والشكل (١) يوضح الشكل الشبكي لنموذج النقل.

	مراكز الاستيراد						الكميات المتوفرة في مركز التصدير
مراكز التصدير	D_1	D_2	….	D_j	….	D_n	
S_1	c_{11}	c_{12}	….	c_{1j}	….	c_{1n}	s_1
S_2	c_{21}	c_{22}	….	c_{2j}	….	c_{2n}	s_2
	…	…	….	…	….	…	…
S_i	c_{i1}	c_{i2}	….	c_{ij}	….	c_{in}	s_i
…	…	…	….	…	….	…	…
S_m	c_{m1}	c_{m2}	….	c_{mj}	….	c_{mn}	s_m
الكميات المطلوبة في مركز الاستيراد	d_1	d_2	…	d_j	…	d_n	$\sum d_j=\sum s_i$

الجدول (١)

والمطلوب وضع خطة النقل بحيث تلبي حاجة مراكز الاستيراد بأقل تكلفة ممكنة مع الأخذ بعين الاعتبار الكميات المتوفرة في كل مركز تصدير ومع العلم أن الكميات s_i و d_j تحدد من أجل فترة زمنية محددة (أسبوع –شهر– سنة)



الشكل (١)

٢,٦. الصيغة الرياضية لنموذج النقل

لكتابة الصيغة الرياضية لنموذج النقل نتبع ما يلي:

١– **تحديد المتغيرات**: لنفرض أن x_{ij} هي كمية ما ينقل من المركز S_i إلى المركز D_J من المادة المراد نقلها. حيث $(i=1,2,\ldots m)$ و$(j=1,2,\ldots n)$

٢– **تحديد دالة الهدف**: يهدف هذا النموذج إلى نقل الكميات الموجودة في مراكز التصدير إلى مراكز الاستيراد حسب حاجتها بأقل تكلفة ممكنة أي أن:

$$W = c_{11}\,x_{11} + c_{12}\,x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \rightarrow \text{Min}$$

أو بشكل مختصر تكتب

$$\boxed{\textbf{Min (W)} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (١)}$$

٣- تحديد الشروط الخطية وتتألف من قسمين:

القسم الأول يتعلق بمراكز التصدير:

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = s_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = s_2 \\ \vdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = s_m \end{array}\right\}$$

القسم الثاني يتعلق بمراكز الاستيراد:

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = d_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = d_2 \\ \vdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = d_n \end{array}\right\}$$

أو بشكل مختصر تكتب الشروط الخطية:

$$\left.\begin{array}{lll} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \quad ; & \mathbf{i=1,2,\ldots m} & \text{شروط مراكز التصدير} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad ; & \mathbf{j=1,2,\ldots n} & \text{شروط مراكز الاستيراد} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (٢)$$

٤- تحديد الشروط الإضافية: يجب أن تكون الكميات المنقولة قيماً صحيحة وغير سالبة، ومجموع ما يتوفر في مراكز التصدير يساوي مجموع ما يُطلب في مراكز الاستيراد (شروط التوازن) أي :

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{x_{ij} \geq 0 \text{ and integer}} & \text{شرط عدم السلبية وبقيم صحيحة} \\ \sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j & \text{شرط التوازن} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (٣)$$

إن العلاقات (١) و(٢) و(٣) مجتمعة تشكل الصيغة الرياضية العامة لنموذج النقل أي:

$$\mathbf{Min\ (W)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad \text{.........................} \quad (١)$$

$$\left.\begin{array}{lll} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i & ; \quad \mathbf{i=1,2,\ldots m} & \text{شروط مراكز التصدير} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j & ; \quad \mathbf{j=1,2,\ldots n} & \text{شروط مراكز الاستيراد} \end{array}\right\} \quad \text{.........} \quad (٢)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{x_{ij} \geq 0 \ and\ integer} & \text{شرط عدم السلبية وبقيم صحيحة} \\ \sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j & \text{شرط التوازن} \end{array}\right\} \quad \text{.........} \quad (٣)$$

النموذج السابق هو نموذج برمجة خطية يمكن حله باسلوب السمبلكس، إلا أن أمثال المتغيرات في الصيغة الرياضية السابقة تساوي الواحد، مما يعطي لنموذج النقل طابعاً خاصاً، إذ توجد خوارزمية خاصة وسهلة للحل سنعرضها في الفقرة التالية.

٣,٦. خوارزمية حل نموذج النقل

تتلخص خطوات حل نموذج النقل في الخطوات الثلاث التالية:

الخطوة الأولى: بناء جدول الحل الذي يأخذ الشكل الموضح في الجدول (٢):

كل مربع يمثل الكمية x_{ij} التي يجب نقلها من المركز S_i إلى المركز D_j، وسنكتب التكلفة c_{ij} في الزاوية العليا اليسرى من كل مربع، أما قيمة x_{ij} تحدد في الخطوتين التاليتين.

الخطوة الثانية: إيجاد حل أساس ابتدائي ممكن، وهذا يتم باستخدام إحدى الطرق التالية:

١- طريقة الزاوية الشمالية القريبة North-West Corner Method

٢- طريقة التكلفة الأقل Least cost Method

٣– طريقة فوجل التقريبية Vogal’s Approximation Method

مراكز الاستيراد / مراكز التصدير	D_1	D_2	……..	D_n	الكميات المتوفرة في مراكز التصدير
S_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	s_1
S_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	s_2
……	… …	… …	… …	… …	……
S_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	s_m
الكميات المطلوبة في مراكز الاستيراد	d_1	d_2	..	d_n	$\sum d_j=\sum s_i$

الجدول (٢)

الخطوة الثالثة: البحث عن الحل الأمثل وهذا يتم باستخدام إحدى الطريقتين التاليتين:

١– طريقة الحلقات المغلقة (المسار المتعرج) Stepping Stone Method .

٢– طريقة التوزيع المعدلة (طريقة المضاريب) Modified Distribution Method (Multipliers Method).

٤،٦. إيجاد حل أساس ابتدائي ممكن

لإيجاد حل أساس ابتدائي ممكن الذي سنعتمد عليه في الوصول إلى الحل الأمثل يمكن استخدام إحدى الطرق الثلاث التالية:

١،٤،٦. طريقة الزاوية الشمالية الغربية

لا تعتمد هذه الطريقة على أي مبدأ علمي، وإنما تتطلب توزيعاً معيناً للكميات المتوفرة بحيث تحقق شروط النموذج، ويمكن تلخيص هذا الطريقة بالخطوات التالية:

الخطوة(١): نختار المربع الواقع في الزاوية الشمالية الغربية لنملأه بالشكل التالي: نقارن بين الكمية المتوفرة في مركز التصدير الأول S_1 والكمية المطلوبة في مركز الاستيراد الأول

D_1 فإذا كانت $D_1 \leq S_1$ عندئذ يتم إرسال متطلبات مركز الاستيراد الأول حتى يلبي جميع احتياجاته وما تبقى من مخزون مركز التصدير الأول يرسل إلى مركز الاستيراد الثاني حيث يلبي جميع احتياجاته وما تبقى من مخزون مركز التصدير الأول يرسل إلى مركز الاستيراد الثالث وهكذا... حتى يتم توزيع الكمية المتوفرة في مركز التصدير الأول كلها، أما إذا كانت $D_1>S_1$ عندئذ تعطى الكمية S_1 كلها إلى مركز الاستيراد الأول D_1 وننتقل إلى مركز التصدير الثاني لإكمال احتياجات المراكز D_1.

الخطوة(٢):بنفس الاسلوب السابق يتم توزيع الكمية المتوفرة في مركز التصدير الثاني ابتداءً من مركز الاستيراد غير المشبع (الذي لم يلبِ احتياجاته بعد). وهكذا بالنسبة لبقية مراكز التصدير حتى يلبِّ جميع احتياجات مراكز الاستيراد.

تنويه:

للتأكد من صحة تطبيق الخطوتين السابقتين يجب أن يكون مجموع الكميات الموزعة في كل صف يساوي الكميات المتوفرة ومجموع الكميات الموزعة في كل عمود يساوي الكميات المطلوبة.

الخطوة(٣):نحسب التكلفة الإجمالية لنموذج النقل حسب العلاقة التالية:

$$W_0 = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}\, x_{mn}$$

ملاحظة:

المتغيرات x_{ij} التي تقابل المربعات المملوءة (المشغولة) تسمى **"متغيرات اساسية basic variables"**، أما المتغيرات x_{ij} التي تقابل المربعات الفارغة تسمى "**متغيرات غير اساسية Non basic variables**".

مثال (١): لنجد الحل الأساس الابتدائي باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية للجدول (٣) التالي الذي يمثل مصفوفة تكلفة النقل بين أربعة مراكز إنتاج وأربعة مراكز بيع.

مراكز بيع / مراكز إنتاج	D_1	D_2	D_3	D_4	الكمية المتوفرة
S_1	2	3	7	11	150
S_2	0	12	5	6	125
S_3	14	1	3	9	75
S_4	10	2	5	8	50
الكميات المطلوبة	100	20	80	200	400 / 400

الجدول (٣)

في البداية نشكل جدول الحل كما في الجدول (٤) التالي:

مراكز البيع / مراكز الإنتاج	D_1	D_2	D_3	D_4	الكميات المتوفرة
S_1	2	3	7	11	150
S_2	0	12	5	6	125
S_3	14	1	3	9	75
S_4	10	2	5	8	50
الكميات المطلوبة	100	20	80	200	400 / 400

الجدول (٤)

ثم نطبق عليه الخطوات المذكورة سابقاً نحصل على الجدول (٥)، حيث بدأنا بتوزيع الكمية 150 وحدة المتوفرة في مركز الإنتاج **S_1** على مراكز البيع **D_1** و**D_2** و**D_3**، وبذلك نكون أشبعنا مركزي البيع **D_1** و**D_2** بينما المركز **D_3** بحاجة إلى الكمية 50 وحدة والتي نأخذها من مركز الإنتاج **S_2**.

تبقى في مركز الإنتاج **S_2** الكمية 75 وحدة نعطيها لمركزي البيع **D_4**، ونلاحظ أن مركز البيع **D_4** لم يشبع لذلك نعطيه الكمية المتوفرة في مركز الإنتاج **S_3** والكمية المتوفرة في مركز الإنتاج **S_4**.

مراكز البيع / مراكز الإنتاج	**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**	الكميات المتوفرة
S_1	2 / 100	3 / 20	7 / 30	11	~~150~~ ~~50~~ ~~30~~ 0
S_2	0	12	5 / 50	6 / 75	~~125~~ ~~75~~ 0
S_3	14	1	3	9 / 75	~~75~~ 0
S_4	10	2	5	8 / 50	~~50~~ 0
الكميات المطلوبة	~~100~~ 0	~~20~~ 0	~~80~~ ~~50~~ 0	~~200~~ ~~125~~ ~~50~~ 0	400 / 400

الجدول (٥)

والتكلفة الكلية لهذا التوزيع هي:

$$\mathbf{W_0} = 100*2 + 20*3 + 30*7 + 50*5 + 75*6 + 75*9 + 50*8 = \mathbf{2245}$$

٢,٤,٦. طريقة التكلفة الأقل

تعتبر هذه الطريقة أفضل من طريقة الزاوية الشمالية الغربية لأنها تعتمد على مبدأ التكلفة الأقل، وهذا هو هدفنا في حل نموذج النقل، ويمكن تلخيص هذه الطريقة بالخطوات التالية:

الخطوة(١): نبدأ بتزويد الكمية في المربع ذي التكلفة الأقل في النموذج ككل بالطلبية التي يحتاجها مركز الاستيراد من مركز التصدير المقابلين لهذا المربع.

الخطوة(٢):نتابع ملء المربعات ذات التكلفة الأقل بالتتابع إلى أن نزود جميع مراكز الاستيراد من مراكز التصدير المتوفرة.

الخطوة(٣):نحسب التكلفة الإجمالية للمربعات المختلفة.

مثال (٢): لنجد الحل الأساسي الابتدائي الممكن للمثال (١) باستخدام طريقة التكلفة الأقل. باتباع الخطوات أعلاه نحصل على الجدول (٦).

مراكز البيع / مراكز الإنتاج	D_1	D_2	D_3	D_4	الكميات المتوفرة
S_1	2	3	7	11 150	~~150~~ 0
S_2	0 100	12	5 25	6	~~125~~ ~~25~~ 0
S_3	14	1 20	3 55	9	~~75~~ ~~55~~ 0
S_4	10	2	5	8 50	~~50~~ 0
الكميات المطلوبة	~~100~~ 0	~~20~~ 0	~~80~~ ~~25~~ 0	~~200~~ ~~150~~ 0	400 400

الجدول (٦)

حيث بدأنا بالمربع المتعلق بمركز الإنتاج S_2 ومركز البيع D_1، ثم بالمربع المتعلق بمركز الإنتاج S_3 ومركز البيع D_2 ، ثم بالمربع المتعلق بمركز الإنتاج S_3 ومركز البيع D_3 ، ثم بالمربع المتعلق بمركز الإنتاج S_2 ومركز البيع D_3، ثم بالمربع المتعلق بمركز الإنتاج S_4 ومركز البيع D_4، وأخيراً المربع المتعلق بمركز الإنتاج S_1 ومركز البيع D_4.

والتكلفة الإجمالية لهذا التوزيع

$$\mathbf{W_0} = 100*0 + 0*12 + 20*1 + 25*5 + 55*3 + 150*11 + 50*8 = \mathbf{2360}$$

٣,٤,٦. طريقة فوجل التقريبية

تعتبر هذه الطريقة أفضل من سابقتيها وكثيراً ما تؤدي إلى الحل الأمثل أو قريباً من الحل الأمثل، ويمكن تلخيص هذه الطريقة بالخطوات التالية:

الخطوة(١): نحسب الفرق بين أقل تكلفتين (غير متساويتين) في كل صف وفي كل عمود يدعى هذا الفرق بالغرامة Penalty أو فروقات VAM (VAM difference) (إذا توافق في أي عمود أو أي صف تكلفتان متساويتان لا يؤخذ الفرق بينهما) ونضع الغرامات على يمين الجدول بالنسبة للصفوف وأسفل الجدول بالنسبة للأعمدة.

الخطوة(٢): نختار الصف (أو العمود) ذا الفرق الأكبر.

الخطوة(٣): نختار المربع ذا التكلفة الأقل في الصف (أو العمود) المختار في الخطوة السابقة ونعمل على تلبية طلبية مركز الاستيراد الذي يقع في هذا المربع من مركز التصدير الذي يقابله.

الخطوة(٤): نشطب الصف (أو العمود) الذي فُرِّغت الكمية المتوفرة فيه (أو تمت تلبية طلبيته)، والهدف من الشطب هو عدم حساب فروقات VAM لهذا الصف (أو العمود) عند تكرار تنفيذ خطوات هذه الطريقة.

الخطوة(٥): نكرر حساب الفرق مرة أخرى لكل من الأعمدة والأسطر (أي نكرر الخطوة الأولى والثانية والثالثة والرابعة) حتى نلبي جميع طلبيات مراكز الاستيراد من مراكز التصدير.

مثال (٣): لنجد الحل الأساسي الابتدائي الممكن للمثال (١) باستخدام طريقة فوجل التقريبية.

بعد تشكيل جدول نموذج النقل، أضفنا عموداً على يمينه لوضع فروقات الصفوف وصفاً في أسفله لوضع فروقات الأعمدة. وبتطبيق خطوات طريقة فوجل التقريبية نحصل على الجدول(٧)، حيث:

- حسب الخطوة (١) حسبنا فروقات الأعمدة وفروقات الصفوف.
- حسب الخطوة (٢) اخترنا الفرق الأكبر بين فروقات الصفوف وفروقات الأعمدة، وهي القيمة 5 من الصف الثاني التابع لمركز الإنتاج $\mathbf{S_2}$.
- حسب الخطوة (٣) اخترنا المربع من الصف الثاني ذا التكلفة الأقل، وهو تقاطع مركز الإنتاج $\mathbf{S_2}$ ومركز البيع $\mathbf{D_1}$، نقوم بتزويد مركز البيع $\mathbf{D_1}$ بالكمية 100 من مركز الإنتاج $\mathbf{S_2}$.

- حسب الخطوة (٤) شطبنا على (ظللنا) العمود المتعلق بمركز البيع $\mathbf{D_1}$ بسبب أنه لُبي طلبه.

مراكز البيع / مراكز الإنتاج	D_1	D_2	D_3	D_4	الكميات المتوفرة	فروقات الأسطر
S_1	2	3	7	11	150	1
S_2	0 100	12	5	6	~~125~~ 25	$\boxed{5}$
S_3	14	1	3	9	75	2
S_4	10	2	5	8	50	3
الكميات المطلوبة	~~100~~ 0	20	80	200	400 / 400	
فروقات الأعمدة	2	1	2	2		

الجدول (٧)

وبتطبيق خطوات طريقة فوجل التقريبية مرة ثانية نحصل على الجدول(٨)، حيث:

- حسب الخطوة (١) حسبنا فروقات الأعمدة وفروقات الصفوف، باستثناء العمود الأول التابع لمركز البيع D_1.
- حسب الخطوة (٢) اخترنا الفرق الأكبر بين فروقات الصفوف وفروقات الأعمدة، وهي القيمة 4 من الصف الأول التابع لمركز الإنتاج S_1.
- حسب الخطوة (٣) اخترنا المربع من الصف الأول ذا التكلفة الأقل، وهو تقاطع مركز الإنتاج S_1 ومركز البيع D_2 ، نقوم بتزويد مركز البيع D_2 بالكمية 20 من مركز الإنتاج S_1.
- حسب الخطوة (٤) شطبنا على (ظللنا) العمود المتعلق بمركز البيع D_2 بسبب أنه لُبي طلبه.

مراكز البيع / مراكز الإنتاج	D_1	D_2	D_3	D_4	الكميات المتوفرة	فروقات الأسطر
S_1	2	3 / 20	7	11	~~150~~ 130	1 $\boxed{4}$
S_2	0 / 100	12	5	6	~~125~~ 25	$\boxed{5}$ 1
S_3	14	1	3	9	75	2 2
S_4	10	2	5	8	50	3 3
الكميات المطلوبة	~~100~~ 0	~~20~~ 0	80	200	400 / 400	
فروقات الأعمدة	2	1 1	2 2	2 2		

الجدول (٨)

وبتطبيق خطوات طريقة فوجل التقريبية مرة ثالثة نحصل على الجدول (٩)، حيث:

- حسب الخطوة (١) حسبنا فروقات الأعمدة وفروقات الصفوف، باستثناء العمود الأول التابع لمركز البيع **D_1** والعمود الثاني التابع لمركز البيع **D_2**.
- حسب الخطوة (٢) اخترنا الفرق الأكبر بين فروقات الصفوف وفروقات الأعمدة، وهي القيمة 6 من الصف الثالث التابع لمركز الإنتاج **S_3**.
- حسب الخطوة (٣) اخترنا المربع من الصف الثالث ذا التكلفة الأقل، وهو تقاطع مركز الإنتاج **S_3** ومركز البيع **D_3**، نقوم بتزويد مركز البيع **D_3** بالكمية 75 من مركز الإنتاج **S_3**.
- حسب الخطوة (٤) شطبنا على (ظللنا) العمود المتعلق بمركز الإنتاج **S_3** بسبب أنه فُرِغ من الكمية المتوفرة فيه.

مراكز البيع / مراكز الإنتاج	D_1	D_2	D_3	D_4	الكميات المتوفرة	فروقات الأسطر
S_1	2	3 20	7	11	~~150~~ 130	1 **4** 4
S_2	0 100	12	5	6	~~125~~ 25	**5** 1 1
S_3	14	1	3 75	9	~~75~~ 0	2 2 **6**
S_4	10	2	5	8	50	3 3 3
الكميات المطلوبة	~~100~~ 0	~~20~~ 0	80	200	400 400	
فروقات الأعمدة	2	1 1	2 2 2	2 2 2		

الجدول (٩)

وبتطبيق خطوات طريقة فوجل التقريبية مرة رابعة نحصل على الجدول (١٠)، حيث:

- حسب الخطوة (١) حسبنا فروقات الأعمدة وفروقات الصفوف، باستثناء العمود الأول التابع لمركز البيع D_1 وباستثناء العمود الثاني التابع لمركز البيع D_2 وباستثناء الصف الثالث التابع لمركز الإنتاج S_3.
- حسب الخطوة (٢) اخترنا الفرق الأكبر بين فروقات الصفوف وفروقات الأعمدة، وهي القيمة 4 من الصف الثالث التابع لمركز الإنتاج S_1.
- حسب الخطوة (٣) اخترنا المربع من الصف الثالث ذا التكلفة الأقل، وهو تقاطع مركز الإنتاج S_1 ومركز البيع D_3 ، نقوم بتزويد مركز البيع D_3 بالكمية 5 من مركز الإنتاج S_1 .
- حسب الخطوة (٤) شطبنا على (ظللنا) العمود المتعلق بمركز البيع D_3 بسبب انه لُبي طلبه.

مراكز البيع / مراكز الإنتاج	D_1	D_2	D_3	D_4	الكميات المتوفرة	فروقات الأسطر
S_1	2	3 20	7 5	11	~~150~~ ~~130~~ 125	1 **4** 4 **4**
S_2	0 100	12	5	6	~~125~~ 25	**5** 1 1 1
S_3	14	1	3 75	9	~~75~~ 0	2 2 **6**
S_4	10	2	5	8	50	3 3 3 3
الكميات المطلوبة	~~100~~ 0	~~20~~ 0	~~80~~ ~~5~~ 0	200	400 400	
فروقات الأعمدة	2	1 1	2 2 2 2	2 2 2 2		

الجدول (١٠)

بما انه لم يبقَ سوى عمود واحد (مركز البيع D_4) فإننا نقوم بتلبية طلبه من الكميات المتبقية من مراكز الإنتاج S_1 وS_2 وS_4 فنحصل على الجدول(١١).

والتكلفة الإجمالية لهذه الطريقة حسب الجدول (١١) هي:

$$\mathbf{W_0} = 0*160 + 3*20 + 7*5 + 3*75 + 11*125 + 6*25 + 8*50$$
$$\mathbf{= 2235}$$

نلاحظ أن التكلفة في هذه الطريقة أفضل من الطريقتين السابقتين.

مراكز البيع / مراكز الإنتاج	D_1	D_2	D_3	D_4	الكميات المتوفرة	فروقات الأسطر
S_1	2	3 20	7 5	11 125	~~150~~ ~~130~~ ~~125~~ 0	1 4 4 4
S_2	0 100	12	5	6 25	~~125~~ ~~25~~ 0	5 1 1 1
S_3	14	1	3 75	9	~~75~~ 0	2 2 6
S_4	10	2	5	8 50	~~50~~ 0	3 3 3 3
الكميات المطلوبة	~~100~~ 0	~~20~~ 0	~~80~~ ~~5~~ 0	~~200~~ ~~175~~ ~~150~~ 0	400 400	
فروقات الأعمدة	2	1 1	2 2 2 2	2 2 2 2		

الجدول (١١)

٥,٦. البحث عن الحل الأمثل

بعد أن توصلنا إلى الحل الابتدائي الممكن باستخدام إحدى الطرق السابقة: طريقة الزاوية الشمالية القربية، طريقة التكلفة الأقل، طريقة فوجل التقريبية (ويفضل استخدام طريقة فوجل التقريبية)، نقوم بالتأكد من أمثلية الحل الابتدائي الممكن، واذا لم يكن أمثلياً تقوم بتطويره للوصول إلى الحل المثل باستخدام إحدى الطريقتين التاليتين: طريقة الحلقات المغلقة (المسار المتعرج) أو طريقة التوزيع المعدلة (طريقة المضاريب).

ملاحظة هامة:

نشير هنا الى انه قبل اختبار أمثلية الحل يجب التأكد من أن عدد المتغيرات الاساسية (عدد المربعات المشغولة) يساوي مجموع عدد مراكز الاستيراد ومراكز التصدير

ناقصاً واحداً أي (m+n-1)، وإذا كان عدد هذه المتغيرات أقل من (m+n-1) عندئذ نضيف القيمة صفر إلى أي مربع من المربعات الفارغة.

تنويه:

إن العدد الكلي للشروط الخطية ظاهرياً هي n+m ولكن المساواة (٣) في الفقرة (٣,٦) تجعل عدد الشروط الخطية المستقلة فقط (m+n-1) أي أن عدد المتغيرات الاساسية يجب ان تساوي (n+m-1)

١,٥,٦. طريقة الحلقات المغلقة (طريقة المسار المتعرج)

سنوضح خطوات هذه الطريقة بالتطبيق المباشر على المثال التالي:

مثال (٤): الجدول التالي يمثل جدول التكلفة والكميات المتوفرة في اربعة مخازن (مستودعات) والمطلوبة في كل من مراكز العرض (المعارض).

المعارض / المخازن	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	الكمية المتوفرة
S_1	9	13	8	11	12	10	200
S_2	13	10	5	8	13	17	150
S_3	18	22	6	4	12	16	300
S_4	10	7	12	2	4	1	250
الكميات المطلوبة	100	180	120	200	150	150	

الجدول (١٢)

والحل الابتدائي الممكن حسب طريقة الزاوية الشمالية الغربية معطى في الجدول (١٣). والتكلفة الإجمالية في هذه الحالة:

$$W_0 = 100*9+100*13+80*10+70*5+50*6+200*4+50*12+100*4+150*1$$
$$=5600$$

		مراكز العرض						الكميات المتوفرة
		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	
المخازن	S_1	9 / 100	13 / 100	8	11	12	10	200
	S_2	13	10 / 80	5 / 70	8	13	17	150
	S_3	18	22	6 / 50	4 / 200	12 / 50	16	300
	S_4	10	7	12	2	4 / 100	1 / 150	250
الكميات المطلوبة		100	180	120	200	150	150	**900**

الجدول (١٣)

الخطوة الأولى: تحديد المتغيرات الأساسية والمتغيرات غير الأساسية من جدول الحل الابتدائي الممكن.

من الجدول (١٣) نلاحظ أن عدد المتغيرات الأساسية 9=(n+m-1) التي تقابل المربعات المملوءة وهي:

x_{11} , x_{12} , x_{22} , x_{23} , x_{33} , x_{34} , x_{35} , x_{45} , x_{46}

أما عدد المتغيرات غير الأساسية فهي التي تقابل المربعات الفارغة وتساوي 15، وهي:

x_{13} , x_{14} , x_{15} , x_{16} , x_{21} , x_{24} , x_{25} , x_{26} , x_{31} , x_{32} , x_{36} , x_{41} , x_{42} , x_{43} , x_{44}

الخطوة الثانية: اختبار أمثلية الحل ويتم ذلك كما يلي:

أولاً: نحدد المسارات المغلقة للمتغيرات غير الأساسية: والمسار المغلق يبدأ من المربع الذي يمثل متغيراً غير أساسي وينتهي عنده ويتكون من خطوط عمودية وأفقية أركانها متغيرات أساسية (مربعات مملوءة) وإذا صادف وجود متغيرين أساسيين في طريق المسار فإننا نعرج عن المتغير الأساسي غير الركني.

فمثلاً المسار المغلق للمتغير غير الأساسي x_{15}، كما هو موضح في الجدول (١٤) هو:

$x_{15} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{35} \rightarrow x_{15}$

		مراكز العرض						الكميات المتوفرة
		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	
المخازن	S_1	9 100	13 100	8	11	12	10	200
	S_2	13	10 80	5 70	8	13	17	150
	S_3	18	22	6 50	4 200	12 50	16	300
	S_4	10	7	12	2	4 100	1 150	250
الكميات المطلوبة		100	180	120	200	150	150	**900**

الجدول (١٤)

إن عدد المسارات المغلقة يساوي عدد المتغيرات غير الأساسية والجدول (١٥) يبين جميع المسارات المغلقة للمتغيرات غير الأساسية في المثال المعطى.

رقم المسار	المتغيرات غير الأساسية	المسار المغلق للمتغير الأساسي	التكلفة غير المباشرة
1	x_{13}	$x_{13}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{13}$	+8-5+10-13 = **0**
2	x_{14}	$x_{14}\rightarrow x_{34}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{14}$	+11-4+6-5+10-13 =**+5**
3	x_{15}	$x_{15}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{35}\rightarrow x_{15}$	+12-13+10-5+6-12 =**-2**
4	x_{16}	$x_{16}\rightarrow x_{46}\rightarrow x_{45}\rightarrow x_{35}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{16}$	+10-1+4-12+6-5+10-13 =**-1**
5	x_{21}	$x_{21}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{21}$	+13-9+13-10 =**+7**
6	x_{24}	$x_{24}\rightarrow x_{34}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{24}$	+8-4+6-5 =**+5**
7	x_{25}	$x_{25}\rightarrow x_{35}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{25}$	+13-12+6-5 = **+2**
8	x_{26}	$x_{26}\rightarrow x_{46}\rightarrow x_{45}\rightarrow x_{35}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{26}$	+17-1+4-12+6-5 =**+9**
9	x_{31}	$x_{31}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{31}$	+18-9+13-10+5-6 =**+11**
10	x_{32}	$x_{32}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{32}$	+22-10+5-6=**+11**
11	x_{36}	$x_{36}\rightarrow x_{46}\rightarrow x_{45}\rightarrow x_{35}\rightarrow x_{36}$	+16-1+4-12=**+7**
12	x_{41}	$x_{41}\rightarrow x_{45}\rightarrow x_{35}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{21}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{41}$	+10-4+12-6+5-10+13-9 =**+11**
13	x_{42}	$x_{42}\rightarrow x_{45}\rightarrow x_{35}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{42}$	+7-4+12-6+5-10 =**+4**
14	x_{43}	$x_{43}\rightarrow x_{45}\rightarrow x_{35}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{43}$	+12-4+12-6 =**+14**
15	x_{44}	$x_{44}\rightarrow x_{45}\rightarrow x_{35}\rightarrow x_{34}\rightarrow x_{44}$	+2-4+12-4=**+6**

الجدول (١٥)

ثانياً: نقوم بحساب التكلفة غير المباشرة لكل مسار من المسارات المغلقة في جدول الحل الابتدائي. ولحساب التكلفة غير المباشرة لكل مسار نبدأ من بداية المسار ونضع إشارة (+)، وإشارة (−) بالتناوب على أركان المسار ونجمع التكاليف المقابلة لأركان المسار المغلق حسب إشاراتهم فمثلاً المسار الأول:

$$\begin{array}{cccc} x_{13} \rightarrow & x_{23} \rightarrow & x_{22} \rightarrow & x_{12} \\ + & - & + & - \end{array}$$

$$(+8) + (-5) + (+10) + (-13) = 0$$

وهكذا بالنسبة لباقي المسارات، انظر الجدول (١٥).

ثالثاً: إذا كانت جميع التكاليف غير المباشرة للمسارات المغلقة موجبة أو تساوي الصفر عندئذ نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل وننتقل إلى الخطوة الرابعة، أما إذا وجدت إحدى التكاليف غير المباشرة على الأقل سالبة عندئذ ننتقل إلى الخطوة الثالثة.

وحسب مثالنا فإن التكاليف غير المباشرة للمسار (3) والمسار (4) سالبة انظر الجدول (١٥) وبالتالي لم نصل إلى التوزيع الأمثل لذلك ننتقل الى الخطوة الثالثة لتحسين الحل.

الخطوة الثالثة: **تحسين الحل**.

وتتلخص هذه الخطوة بجعل أحد المتغيرات غير الأساسية ذي التكلفة غير المباشرة السالبة لمساره متغيراً أساسياً، وجعل أحد المتغيرات الأساسية في المسار متغيراً غير أساسي وذلك كما يلي:

١- **نحدد المسار ذا التكلفة غير المباشرة السالبة**، وإن وجد أكثر من تكلفة غير مباشرة سالبة عندئذ نختار المسار ذا التكلفة غير المباشرة الأكثر سلبية.

حسب مثالنا: المسار (3) هو المسار المختار لأن قيمة التكاليف غير المباشرة (2-)

٢- نضع إشارات (+) و(–) بالتناوب في أركان المسار (3) المغلق مبتدئين من المتغير غير الأساسي بالإشارة الموجبة (+) انظر الجدول (١٦)

		مراكز العرض						الكميات المتوفرة
		D_1	**D_2**	**D_3**	**D_4**	**D_5**	**D_6**	
المخازن	**S_1**	9 / 100	13 – / 100	8	11	12 +	10	200
	S_2	13	10 + / 80	5 - / 70	8	13	17	150
	S_3	18	22	6 + / 50	4 / 200	12 - / 50	16	300
	S_4	10	7	12	2	4 / 100	1 / 150	250
الكميات المطلوبة		100	180	120	200	150	150	**900**

الجدول (١٦)

> **تنويه:**
>
> إن عملية وضع إشارة (+) و(–) تعني أن نقل وحدة واحدة من المادة المنقولة إلى المربع الفارغ يستوجب إجراء تغيرات بحيث يتحقق إشباع جميع الطلبيات وبالتالي يجب إضافة كمية إلى المربعات الموجبة وطرح نفس الكمية من المربعات السالبة.

٣- نختار من قيم المتغيرات الأساسية المؤشر عليها بإشارة (–) في المسار المختار القيمة الأصغر ولتكن θ.

وحسب مثالنا: θ =50.

٤- نضيف الكمية θ إلى قيمة المتغيرات ذات الإشارة الموجبة ونطرح الكمية θ من المتغيرات ذات الإشارة السالبة.

وحسب مثالنا: يأخذ الجدول (١٦) الشكل التالي:

		مراكز العرض						الكميات المتوفرة
		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	
المخازن	S_1	9 100	13 **50**	8	11	12 **50**	10	200
	S_2	13	10 **130**	5 **20**	8	13	17	150
	S_3	18	22	6 **100**	4 200	12	16	300
	S_4	10	7	12	2	4 100	1 150	250
الكميات المطلوبة		100	180	120	200	150	150	**900**

الجدول (١٧)

٤- نحسب W التكلفة الجديدة المقابلة لهذا التغيير ونعود إلى الخطوة الثانية لاختبار أمثلية الحل.

وحسب مثالنا: من الجدول (١٧) التكلفة الإجمالية لهذا التوزيع تساوي:

$W_1 = 100*9+50*13+50*12+130*10+20*5+100*6+200*4+100*4+150*1 = 5500$

نعود إلى الخطوة الثانية ونختبر أمثلية الحل، وباتباع نفس الاسلوب السابق بحصر المسارات للمتغيرات غير الاساسية وحساب التكاليف غير المباشرة نحصل على الجدول(١٨) التالي:

رقم المسار	المتغيرات غير الأساسية	المسار المغلق للمتغير الأساسي	التكلفة غير المباشرة
1	x_{13}	$x_{13}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{13}$	+8-5+10-13 = **0**
2	x_{14}	$x_{14}\rightarrow x_{34}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{14}$	+11-4+6-5+10-13 =**+5**
3	x_{16}	$x_{16}\rightarrow x_{46}\rightarrow x_{45}\rightarrow x_{15}\rightarrow x_{16}$	+10-1+4-12 =**+1**
4	x_{21}	$x_{21}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{21}$	+13-9+13-10 =**+7**
5	x_{24}	$x_{24}\rightarrow x_{34}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{24}$	+8-4+6-5 =**+5**
6	x_{25}	$x_{25}\rightarrow x_{15}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{25}$	+13-12+13-10 = **+4**
7	x_{26}	$x_{26}\rightarrow x_{46}\rightarrow x_{45}\rightarrow x_{15}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{26}$	+17-1+4-12+13-10 =**+11**
8	x_{31}	$x_{31}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{31}$	+18-9+13-10+5-6 =**+11**
9	x_{32}	$x_{32}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{32}$	+22-10+5-6=**+11**

10	x_{35}	$x_{35}\rightarrow x_{15}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{35}$	+12-12+13-10+5-6 =**+2**
11	x_{36}	$x_{36}\rightarrow x_{46}\rightarrow x_{45}\rightarrow x_{15}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{36}$	+16-1+4-12+13-10+5-6=**+9**
12	x_{41}	$x_{41}\rightarrow x_{45}\rightarrow x_{15}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{41}$	+10-4+12-9 =**+9**
13	x_{42}	$x_{42}\rightarrow x_{45}\rightarrow x_{15}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{42}$	+7-4+12-13 =**+2**
14	x_{43}	$x_{43}\rightarrow x_{45}\rightarrow x_{15}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{43}$	+12-4+12-13+10-5 =**+12**
15	x_{44}	$x_{44}\rightarrow x_{45}\rightarrow x_{15}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{34}\rightarrow x_{44}$	+2-4+12-13+10-5+6-4=**+12**

الجدول (١٨)

نلاحظ من الجدول (١٨) أن التكاليف غير المباشرة لجميع المسارات المغلقة موجبة وبالتالي نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل والجدول (١٧) يمثل التوزيع الأمثل لعملية النقل. وننتقل الى الخطوة الرابعة.

الخطوة الرابعة: نحسب التكلفة الإجمالية للتوزيع الأمثل

التكلفة الإجمالية للمتغيرات الأساسية:

$$W^* = \sum c_{ij}\, x_{ij}$$

وحسب المثال السابق نجد أن

$$W^* = W_1 = 5500$$

وهي اصغر تكلفة نقل ممكنة.

مثال (٥): يترك للطالب

أعد حل المثال (٤) السابق باعتماد طريقة فوجل التقريبية في ايجاد الحل الاولي الممكن وقارن نتائج الحل مع نتائج المثال (٤)، ماذا تستنتج؟؟؟

٢,٥,٦. طريقة التوزيع المعدلة (طريقة المضاريب)

تعتبر هذه الطريقة اسلوباً آخر لإيجاد الحل الأمثل لنموذج النقل ويسميها البعض باسلوب السمبلكس لأنها تعتمد بشكل مباشر على خواص الترافق في البرمجة الخطية ولن

نتطرق هنا إلى الأساس الرياضي لهذه الطريقة وسنعرض فقط الطريقة العملية لإيجاد الحل الأمثل(*) وسنلخصها بالمراحل والخطوات التالية:

المرحلة الأولى: نجد الحل الأساس الابتدائي الممكن بإحدى الطرق الثلاث المذكورة سابقاً.

المرحلة الثانية: نختبر أمثلية الحل وذلك باتباع الخطوات التالية:

الخطوة (١): نضيف عموداً على يسار الجدول لنضع فيه قيم المتغير المساعد u_i ونضيف سطراً في أعلى الجدول لنضع فيه قيم المتغير المساعد v_j.

الخطوة (٢): نحسب قيم كل من u_i وv_j بالاعتماد على المتغيرات الأساسية باستخدام المعادلة: $u_i + v_j = c_{ij}$

حيث مجموع قيم u_i , v_j تعتبر تكلفة غير مباشرة، وسنوضح ذلك مباشرة من خلال المثال التالي.

مثال (٦): لنأخذ الجدول (١٣) الذي يمثل الحل الأساس الممكن الابتدائي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية من المثال (٤) ولنحسن الحل باستخدام طريقة المضاريب، سنعيد كتابته بعد إضافة صف في أعلاه وعمود على يساره لحساب قيم u_i , v_j كما في الجدول (١٩)، حيث حصلنا على قيم v_j , u_i في الجدول (١٩) كما يلي:

إن حل جملة المعادلات $u_i + v_i = c_{ij}$ للمتغيرات الأساسية يؤدي إلى مجموعة حلول لأن عدد المعادلات أقل من عدد المتغيرات لذا وحتى نستطيع حل مثل هذه المعادلات نعطي أحد المتغيرات قيمة اختيارية وعادة القيمة صفر أي: $u_1 = 0$، (بالتطبيق المباشر على الجدول (١٩))

(*) لمزيد من المعلومات يمكن الرجوع إلى المراجع التالية:

- البرمجة الخطية أ.د. خالد ماغوط مطبوعات جامعة حلب.
- المدخل إلى بحوث العمليات أ.د. احمد رفيق قاسم مطبوعات جامعة حلب.

	v_j	**9**	**13**	**8**	**6**	**14**	**11**	الكميات المتوفرة
u_i		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	
0	S_1	9 / 100	13 / 100	8	11	12	10	200
-3	S_2	13	10 / 80	5 / 70	8	13	17	150
-2	S_3	18	22	6 / 50	4 / 200	12 / 50	16	300
-10	S_4	10	7	12	2	4 / 100	1 / 150	250
الكميات المطلوبة		100	180	120	200	150	150	**900**

الجدول (١٩)

١. نضع في الصف الأول $u_1 = 0$، عندئذ $0+v_1 = 9 \Leftarrow v_1 = 9$، ونضع في العمود الأول **$v_1 = 9$**.

٢. نتجه أفقيا إلى العمود الثاني ونجد أن: $0 + v_1 = 13 \Leftarrow v_2 = 13$ ونضع في العمود الثاني **$v_2 = 13$**

٣. نتجه عمودياً إلى الصف الثاني من العمود الثاني لنجد أن: $13 + u_2 = 10 \Leftarrow u_2 = -3$ ونضع في الصف الثاني **$u_2 = -3$**.

٤. نتجه افقياً إلى العمود الثالث من الصف الثاني لنجد أن $-3 + v_3 = 5 \Leftarrow v_3 = 8$ ونضع في العمود الثالث **$v_3 = 8$**.

٥. نتجه عمودياً إلى الصف الثالث من العمود الثالث لنجد أن: $8 + u_3 = 6 \Leftarrow u_3 = -2$ ونضع في الصف الثالث **$u_3 = -2$**.

٦. نتجه افقياً إلى العمود الرابع من الصف الثالث لنجد أن $-2 + v_4 = 4 \Leftarrow v_4 = 6$ ونضع في العمود الرابع **$v_4 = 6$**.

٧. نتجه افقياً إلى العمود الخامس من الصف الثالث لنجد أن $-2 + v_5 = 12 \Leftarrow$
$v_5 = 14$ ونضع في العمود الرابع **$v_5 = 14$**.

٨. نتجه عمودياً إلى الصف الرابع من العمود الخامس لنجد أن: $14 + u_4 = 4 \Leftarrow$
$u_4 = -10$ ونضع في الصف الرابع **$u_4 = -10$**.

٩. نتجه افقياً إلى العمود السادس من الصف الرابع لنجد أن $-10 + v_6 = 1 \Leftarrow$
$v_6 = 11$ ونضع في العمود السادس **$v_6 = 11$**.

الخطوة (٣): نحسب التكلفة غير المباشرة للمتغيرات غير الأساسية وذلك بجمع u_i , v_i المقابلة للمتغيرات غير الأساسية ونضع الناتج في الزاوية السفلى اليمني من مربعات المتغيرات غير الأساسية انظر الجدول (٢٠)، سنرمز للتكلفة غير المباشرة للمتغيرات غير الأساسية بـ $\bar{c}_{ij}$ أي: $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j$

	v_j	9	13	8	6	14	11	الكميات المتوفرة
u_i		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	
0	S_1	9 **100**	13 **100**	8 **8**	11 **6**	12 * **14**	10 * **11**	200
-3	S_2	13 **6**	10 **80**	5 **70**	8 **3**	13 **11**	17 **8**	150
-2	S_3	18 **7**	22 **11**	6 **50**	4 **200**	12 **50**	16 **9**	300
-10	S_4	10 **-1**	7 **3**	12 **-2**	2 **-4**	4 **100**	1 **150**	250
الكميات المطلوبة		100	180	120	200	150	150	**900**

الجدول (٢٠)

<u>الخطوة (٤)</u>: نقارن بين $\bar{c}_{ij}$ التكلفة غير المباشرة وc_{ij} التكلفة المباشرة (المفروضة) في المربعات التي تحوي المتغيرات غير الأساسية (المربعات الفارغة)، فإذا كانت جميع قيم

التكاليف المباشرة c_{ij} اكبر من التكاليف غير المباشرة $\bar{c}_{ij}$ عندئذ يكون الحل السابق هو الحل الأمثل **وننتقل إلى المرحلة الرابعة.** أما إذا وجدت قيم تكاليف غير مباشرة اكبر من التكاليف المباشرة عندئذ يكون الحل السابق ليس أمثلياً **وننتقل إلى المرحلة الثالثة** لتحسين الحل.

بعبارة أخرى يكون الحل حلاً أمثلياً عندما يكون جميع $c_j < \bar{c}_{ij}$ للمتغيرات غير الأساسية. وسنضع إشارة (*) نجمة في المربع الذي يكون فيه $c_{ij} < \bar{c}_{ij}$ ، وحسب مثالنا المتغيرات غير الأساسية التي فيها $c_{ij} < \bar{c}_{ij}$ هي x_{15} وx_{16} انظر الجدول (٢٠)

المرحلة الثالثة: **تحسين الحل** ويتم باتباع الخطوات التالية:

الخطوة (١): **نختار احد المتغيرات غير الأساسية المشار إليها بـ** (*)، وحسب مثالنا نختار المتغير غير الأساسي x_{15}.

تنويه : إذا وجد أكثر من متغير غير أساسي مؤشر عليه بـ (*)، عندئذ يفضل اخذ المتغير غير الأساسي المؤشر عليه بـ (*) ذي الفرق الأكبر بين التكاليف غير المباشرة والتكاليف المباشرة.

الخطوة (٢): نشكل لهذا المتغير غير الأساسي مساراً مغلقاً والمسار المغلق يبدأ من المربع الذي يمثل متغيراً غير أساسي وينتهي عنده ويتكون من خطوط عمودية وأفقية أركانها متغيرات أساسية (مربعات مملوءة) وإذا صادف وجود متغيرين أساسيين في طريق المسار فإننا نعرج عن المتغير الأساسي غير الركني.

وحسب مثالنا المسار هو: $x_{15} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{35} \rightarrow x_{15}$

الخطوة (٣): نضع إشارات(+) و(–) بالتناوب في أركان المسار المغلق مبتدئين من المتغير غير الأساسي بالإشارة الموجبة (+) انظر الجدول (٢١)

الخطوة (٤): نختار من قيم المتغيرات الأساسية في المسار المغلق المشكل اصغر كمية مؤشر عليها بإشارة (–) وحسب مثالنا $\theta = 50$.

	v_j	9	13	8	6	14	11	الكميات المتوفرة
u_i		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	
0	S_1	9 **100**	13 - **100**	8 **8**	11 **6**	12 + * **14**	10 * **11**	200
-3	S_2	13 **6**	10 + **80**	5 - **70**	8 **3**	13 **11**	17 **8**	150
-2	S_3	18 **7**	22 **11**	6 + **50**	4 **200**	12 - **50**	16 **9**	300
-10	S_4	10 **-1**	7 **3**	12 **-2**	2 **-4**	4 **100**	1 **150**	250
الكميات المطلوبة		100	180	120	200	150	150	**900**

الجدول (٢١)

الخطوة (٥): نضيف θ = 50 إلى الكميات في المربعات ذات الإشارة الموجبة ونطرحها من الكميات في المربعات ذات الإشارة السالبة انظر الجدول (٢٢).

	v_j							الكميات المتوفرة
u_i		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	
	S_1	9 100	13 **50**	8	11	12 **50**	10	200
	S_2	13	10 **130**	5 **20**	8	13	17	150
	S_3	18	22	6 **100**	4 200	12	16	300
	S_4	10	7	12	2	4 100	1 150	250
الكميات المطلوبة		100	180	120	200	150	150	**900**

الجدول (٢٢)

ونلاحظ من الجدول السابق ان التكلفة الإجمالية لهذا التوزيع تساوي:

$$W_1 = 100*9+50*13+50*12+130*10+20*5+100*6+200*4+100*4+150*1 = 5500$$

وهي أفضل من W_0

الخطوة (٦): نعود إلى **المرحلة الثانية لنعيد تطبيق الخطوات (١) و(٢) و(٣) و(٤)** للتحقق من أمثلية الحل الذي حصلنا عليه. وحسب مثالنا نحصل على الجدول (٢٣) التالي:

	v_j	**9**	**13**	**8**	**6**	**12**	**9**	الكميات المتوفرة
u_i		**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**	**D_5**	**D_6**	
0	**S_1**	9 / 100	13 / **50**	8 / **2**	11 / **0**	12 / **50**	10 / **9**	200
−3	**S_2**	13 / **12**	10 / **130**	5 / **20**	8 / **3**	13 / **9**	17 / **12**	150
-2	**S_3**	18 / **13**	22 / **17**	6 / **100**	4 / 200	12 / **10**	16 / **13**	300
-8	**S_4**	10 / **1**	7 / **4**	12 / **-6**	2 / **-8**	4 / 100	1 / 150	250
الكميات المطلوبة		100	180	120	200	150	150	**900**

الجدول (٢٣)

من الجدول السابق نلاحظ أن جميع المتغيرات غير الأساسية فيها $c_{ij} > \bar{c}_{ij}$ وبالتالي الجدول (٢٣) يمثل التوزيع الامثل وننتقل الى المرحلة الرابعة.

المرحلة الرابعة: **نحسب التكلفة الإجمالية للتوزيع الأمثل** الذي توصلنا إليه .

التكلفة الإجمالية للمتغيرات الأساسية تحسب :

$$\boxed{W^* = \sum c_{ij}\, x_{ij}}$$

وحسب المثال السابق نجد أن:

$W^* = W1 = 5500$

وهي قيمة أفضل من $w_0 = 5600$.

٦,٦. ملاحظات هامة حول نموذج النقل وخوارزميتها

١,٦,٦. حالة تنوع المنتجات في كل طلبية (إرسالية)

إن الصيغة القياسية لنموذج النقل تنطلق من فرضية وجود منتج وحيد يجب شحنه من مراكز التصدير (مراكز العرض) إلى مراكز الاستيراد (مراكز الطلب). وفي الحياة العملية، نواجه عادة خطوط إنتاج مختلفة تنتج منتجات متنوعة نرغب في شحنها إلى أقسام بيع محددة لإشباع الطلبات في هذه الأقسام. فكيف نستطيع استخدام هذه الصيغة في حالة تنوع المنتجات في كل طلبية (إرسالية)؟

في مثل هذه الحالة نحدد الكمية الكلية D_j من جميع المنتجات باستخدام وحدة قياس معيارية مناسبة (طن مثلاً، كيلو، لتر، متر...) ونقيس أيضا S_i باستخدام نفس وحدة القياس، وتحدد تكلفة النقل c_{ij} بالنسبة لوحدة القياس المعيارية.

٢,٦,٦. حالة وجود فائض في العرض أو فائض في الطلب

إن الصيغة القياسية لنموذج النقل تتطلب التوازن والمعبر عنه بالعلاقة (٣) من شروط نموذج النقل أي: $\sum S_i = \sum Dj$ ، إلا أن التوازن في الحياة العملية لا يتحقق دائماً، إذ غالباً ما يتضمن نظام النقل فائضاً في العرض لا يجد طلباً عليه أو فائضاً في الطلب لا يمكن إشباعه. **فكيف نستطيع استخدام خوارزمية النقل؟**

في مثل هذه الحالات نضيف مركزاً وهمياً للعرض أو الطلب (لمراكز الاستيراد أو مراكز التصدير) لامتصاص الفائض، وعناصر التكلفة المرتبطة بهذا المركز تكون صفرية ومن ثم نطبق خوارزمية النقل بالأسلوب المعتاد.

مثال (٧): جِدْ التوزيع الأمثل لنموذج النقل التالية بفرض أن تكاليف النقل معطاة بالجدول(٢٤).

مراكز العرض / مراكز الإنتاج	D_1	D_2	D_3	الكميات المتوفرة
S_1	6	2	1	40
S_2	4	3	5	20
S_3	8	6	3	30
S_4	10	7	1	30
الكميات المطلوبة	10	20	30	60 / 120

الجدول (٢٤)

الجدول (٢٥) يبين الحل الأساس الابتدائي الممكن باستخدام طريقة فوجل، حيث أضفنا مركز عرض وهمي D_4 الذي يحتاج الكمية 60 ليصبح النموذج متوازناً.

	مراكز العرض				الكميات المتوفرة	فروقات الأسطر
مراكز الإنتاج	D_1	D_2	D_3	D_4		
S_1	6 10	2 20	1	0 10	~~40~~ ~~20~~ ~~10~~ 0	1 1 1 1 $\boxed{1}$
S_2	4	3	5	0 20	~~20~~ 0	$\boxed{3}$
S_3	8	6	3	0 30	~~30~~ 0	3 3 $\boxed{3}$
S_4	10	7	1 30	0	~~30~~ 0	1 1 1 1 1
الكميات المطلوبة	~~10~~ 0	~~20~~ 0	~~30~~ 0	~~60~~ ~~40~~ ~~10~~ 0	120 / 120	
فروقات الأعمدة	2 2 2 $\boxed{4}$	1 $\boxed{4}$	2 2 2 0 0	0 0 0 0 0		

الجدول (٢٥)

والتكاليف الإجمالية حسب الجدول (٢٥) هي:

$$W_0 = 6 * 10 + 2 * 20 + 0 * 10 + 0 * 20 + 0 * 30 + 1 * 30 = 130$$

لاختبار الحل يجب أن يكون عدد المتغيرات الأساسية يساوي $n+m-1 = 7$ ولذلك نضع (0) في أي مربع، وسنعيد كتابة الجدول السابق لحساب كل من u_i , v_i الجدول (٢٦).

v_i		**6**	**2**	**3**	**0**	
u_i		**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**	الكميات المتوفرة
0	**S_1**	6 10	2 20	1 * **3**	0 10	40
0	**S_2**	4 * **6**	3 **2**	5 **3**	0 20	20
0	**S_3**	8 **6**	6 **2**	3 **0**	0 30	30
-2	**S_4**	10 **4**	7 **0**	1 30	0 **-2**	30
الكميات المطلوبة		10	20	30	60	120 120

الجدول (٢٦)

بمقارنة التكلفة غير المباشرة $\bar{c}_{ij}$ والتكلفة المباشرة (المفروضة) c_{ij} في المربعات التي تحوي المتغيرات غير الأساسية(المربعات الفارغة)، نجد أن المتغيرات غير الأساسية x_{13} وx_{21} تحقق $\bar{c}_{ij} > c_{ij}$ ، وبالتالي الحل السابق ليس أمثلياً وننتقل إلى **الخطوة الثالثة** لتحسين الحل.

نختار المتغير غير الأساسي x_{13} ونشكل له مساراً مغلقاً، التالي:

$x_{13} \rightarrow x_{14} \rightarrow x_{34} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{13}$

ثم نضع إشارات(+) و(–) بالتناوب في أركان المسار المغلق مبتدئين من المتغير غير الأساسي بالإشارة الموجبة(+) انظر الجدول (٢٧)

v_i		6	2	3	0	
u_i		**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**	الكميات المتوفرة
0	**S_1**	6 / 10	2 / 20	1 / + / * / **3**	0 / - / 10	40
0	**S_2**	4 / * / **6**	3 / **2**	5 / **3**	0 / 20	20
0	**S_3**	8 / **6**	6 / **2**	3 / 0 / -	0 / 30 / +	30
-2	**S_4**	10 / **4**	7 / **0**	1 / 30	0 / **-2**	30
الكميات المطلوبة		10	20	30	60	120 / 120

الجدول (٢٧)

ثم نختار من قيم المتغيرات الأساسية في المسار المغلق المشكل اصغر كمية مؤشر عليها بإشارة (−) وهي $\theta = 0$ ، التي نضيفها للكميات في المربعات ذات الإشارة الموجبة ونطرحها من الكميات في المربعات ذات الإشارة السالبة فنحصل على الجدول(٢٨).

	D_1	**D_2**	**D_3**	**D_4**	الكميات المتوفرة
S_1	6 / 10	2 / 20	1 / **0**	0 / 10	40
S_2	4	3	5	0 / 20	20
S_3	8	6	3	0 / 30	30
S_4	10	7	1 / 30	0	30
الكميات المطلوبة	10	20	30	60	120

الجدول (٢٨)

لم يطرأ على الجدول (٢٨) تغيير سوى تغير مكان الصفر وبالتالي: $W_1 = 130$

نتابع اختبار الحل بحساب كل من u_i ،v_i للجدول (٢٨) والتكاليف غير المباشرة للمتغيرات غير الاساسية، كما في الجدول (٢٩)

v_i		6	2	1	0	
u_i		**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**	الكميات المتوفرة
0	**S_1**	[6] 10	[2] 20	[1] **0**	[0] 10	40
0	**S_2**	[4] * **6**	[3] **2**	[5] **1**	[0] 20	20
0	**S_3**	[8] **6**	[6] **2**	[3] 1	[0] 30	30
0	**S_4**	[10] **6**	[7] **2**	[1] 30	[0] **0**	30
الكميات المطلوبة		10	20	30	60	120 / 120

الجدول (٢٩)

نلاحظ أن الجدول (٢٩) لا يمثل حلاً أمثلياً، لوجود متغير غير اساسي x_{21} فيه $c_{21} < \bar{c}_{21}$ لذا نتابع عملية تحسين الحل حيث نشكل له مساراً مغلقاً، التالي:

$x_{21} \to x_{12} \to x_{14} \to x_{24} \to x_{21}$

ثم نضع إشارات(+) و(−) بالتناوب في أركان المسار المغلق مبتدئين من المتغير غير الأساسي بالإشارة الموجبة(+) انظر الجدول (٣٠).

ثم نختار من قيم المتغيرات الأساسية في المسار المغلق المشكل اصغر كمية مؤشر عليها بإشارة (−) وهي $\theta = 10$، التي نضيفها للكميات في المربعات ذات الإشارة الموجبة ونطرحها من الكميات في المربعات ذات الإشارة السالبة فنحصل على الجدول(٣١).

v_i		6	2	1	0	
u_i		**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**	الكميات المتوفرة
0	**S_1**	6 − 10	2 20	1 **0**	0 + 10	40
0	**S_2**	4 + * **6**	3 **2**	5 **1**	0 - 20	20
0	**S_3**	8 **6**	6 **2**	3 1	0 30	30
0	**S_4**	10 **6**	7 **2**	1 30	0 **0**	30
الكميات المطلوبة		10	20	30	60	120 120

الجدول (٣٠)

والتكاليف الإجمالية حسب الجدول (٣١) هي:

$$W_2 = 2 * 20 + 1 * 0 + 0 * 20 + 4*10 + 0 * 30 + 1* 30 = 110$$

	D_1	**D_2**	**D_3**	**D_4**	الكميات المتوفرة
S_1	6	2 20	1 **0**	0 20	40
S_2	4 **10** **6**	3 **2**	5 **1**	0 10	20
S_3	8 **6**	6 **2**	3 1	0 30	30
S_4	10 **6**	7 **2**	1 30	0 **0**	30
الكميات المطلوبة	10	20	30	60	120

الجدول (٣١)

وهي أفضل من W_1، نتابع اختبار الحل بحساب كل من v_i، u_i للجدول (٣١) والتكاليف غير المباشرة للمتغيرات غير الاساسية، كما في الجدول (٣٢).

v_i		4	2	1	0	
u_i		**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**	الكميات المتوفرة
0	**S_1**	6 **4**	2 20	1 0	0 20	40
0	**S_2**	4 10	3 **2**	5 **1**	0 10	20
0	**S_3**	8	6 **2**	3 **1**	0 30	30
0	**S_4**	10 **4**	7 **2**	1 30	0 **0**	30
الكميات المطلوبة		10	20	30	60	120

الجدول (٣٢)

نلاحظ أن الجدول (٣٢) يمثل حلاً أمثلياً، لعدم وجود متغير غير اساسي فيه $c_{ij} > \bar{c}_{ij}$، وبالتالي: $\mathbf{w}^* = w_2 = \mathbf{110}$

٣,٦,٦. حالة c_{ij} تقيس ربح نقل الوحدة الواحدة بدلاً من تكلفة نقل الوحدة الواحدة

نصادف أحياناً مشكلة اقتصادية من الشكل التالي:

- عندما يكون ربح نقل الوحدة الواحدة من المادة من كل مركز تصدير S_i إلى كل مركز استيراد D_j يساوي a_{ij}.
- أو عندما تكون الإمكانية العظمى للإنتاج في الفترة (i) تساوي S_i، والكمية المتاحة في الفترة j يجب أن تساوي على الأقل D_j ، وa_{ij} تقيس ربح الوحدة الواحدة من السلعة المنتجة في الفترة (i) والمباعة في الفترة j والمطلوب تحقيق اكبر ربح ممكن.

إن دالة الهدف في مثل هذه المشاكل من نوع التعظيم Max، ويمكن الوصول إلى الحل الأمثل لهذه المشكلة بتطبيق خوارزمية النقل مع بعض الإجراءات الإضافية التالية:

١. نحدد اكبر عنصر a_{ij} (اكبر ربح للوحدة) في نموذج التعظيم ونرمز لها بـ M
٢. نستبدل جميع العناصر a_{ij} (الأرباح) بعناصر جديدة هي c_{ij} حيث: $c_{ij} = M - a_{ij}$
٣. نقيس c_{ij} التكاليف النسبية، ويتحول نموذج تعظيم دالة الهدف إلى نموذج تصغيره، أي تصبح دالة الهدف للنموذج المعدل من نوع التصغير.
٤. نجد الحل الأمثل للنموذج المعدل بتطبيق خوارزمية النقل ونحدد قيم المتغيرات الأساسية في الحل.
٥. ندخل قيم a_{ij} الأصلية في خلايا المتغيرات الأساسية ونحسب قيمة دالة الهدف الأصلي قبل التعديل.

مثال (٨): بفرض أن S_1 , S_2 , S_3 , S_4 هي فترات إنتاجية في احد المصانع , D_1 , D_2 , D_3 , D_4 فترات البيع للبضاعة المنتجة في الفترات الإنتاجية المختلفة، والجدول (٣٣) يبين الأرباح المتوقعة للوحدة الواحدة والإمكانية العظمى للإنتاج في كل فترة والكميات الممكن أن تباع في كل فترة إنتاجية، والمطلوب تنظيم الإنتاج بحيث نحصل على اكبر ربح ممكن.

فترات البيع / فترات الإنتاج	D_1	D_2	D_3	D_4	كمية الإنتاج العظمى
S_1	6	10	11	12	40
S_2	8	9	7	12	20
S_3	4	6	9	12	30
S_4	2	5	11	12	30
الكميات الممكن أن تباع	10	20	30	60	

الجدول (٣٣)

الحل: لتطبيق خوارزمية النقل نحدد اكبر ربح موجود في الجدول السابق وهي القيمة 12، ثم نستبدل عناصر المصفوفة بقيم جديدة حسب العلاقة: $c_{ij} = 12 - a_{ij}$ فنحصل على الجدول التالي:

فترات البيع / فترات الإنتاج	**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**	كمية الإنتاج العظمى
S_1	6	2	1	0	40
S_2	4	3	5	0	20
S_3	8	6	3	0	30
S_4	10	7	1	0	30
الكميات الممكن أن تباع	10	20	30	60	

الجدول (٣٤)

نطبق على الجدول (٣٤) خوارزمية النقل، وجدول الحل الأمثل معطى في الجدول (٣٥).

	D_1	**D_2**	**D_3**	**D_4**	**الكميات المتوفرة**
S_1	6	2 20	1 0	0 20	40
S_2	4 10	3	5	0 10	20
S_3	8	6	3	0 30	30
S_4	10	7	1 30	0	30
الكميات المطلوبة	10	20	30	60	120

الجدول (٣٥)

والتكاليف الإجمالية حسب الجدول (٣٥) هي:

$$W^* = 2 * 20 + 1 * 0 + 0 * 20 + 4*10 + 0 * 30 + 1* 30 = 110$$

أما الحل الأمثل لنموذج الأرباح المعطى في الجدول (٣٣) هو:

$$Z^* = 10 * 20 + 11 * 0 + 12 * 20 + 8*10 + 12 * 30 + 11* 30 = 1330$$

يترك التأكد من الحل الأمثل للطالب.

مسائل عامـة

١- جِدْ حل الأساس الابتدائي لنموذج النقل التالي باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية وطريقة الحلقات المغلقة في تحسين الحل:

		مراكز الاستيراد				الكميات المتاحة
		D_1	D_2	D_3	D_4	
مراكز التصدير	S_1	15	25	10	12	30
	S_2	18	14	17	13	50
	S_3	9	20	12	14	70
	S_4	19	12	6	5	90
	S_5	8	17	10	24	110
الكميات المطلوبة		130	130	50	30	

٢- جِدْ الحل الأمثل لنموذج النقل التالي مستخدماً طريقة فوجل في إيجاد الحل الأساس الابتدائي وطريقة الحلقات المغلقة في تحسين الحل:.

		مراكز البيع				الكميات المتاحة
		D_1	D_2	D_3	D_4	
مراكز الإنتاج	S_1	6	4	8	10	10
	S_2	2	3	6	7	20
	S_3	1	5	3	1	30
الكميات المطلوبة		40	20	30	30	

٣- جِدْ الحل الأمثل لنموذج النقل التالي مستخدماً طريقة التكلفة الأقل في إيجاد الحل الأساس الابتدائي وطريقة التوزيع المعدلة في تحسين الحل:.

		مراكز الاستيراد			الكميات المتاحة
		D_1	D_2	D_3	
مراكز التصدير	S_1	6	2	8	120
	S_2	7	5	7	50
	S_3	4	3	6	40
	S_4	8	2	4	30
الكميات المطلوبة		150	40	50	

٤- جِدْ الحل الأمثل لنموذج النقل التالي:

		مراكز الطلب			الكميات المتاحة
		D_1	D_2	D_3	
مراكز العرض	S_1	6	2	1	40
	S_2	4	3	5	20
	S_3	8	6	3	30
	S_4	10	7	1	30
الكميات المطلوبة		10	20	30	

مع العلم أن الكمية المراد شحنها لمركز الطلب الأول D_1 يجب أن تكون من مركز العرض الرابع S_4.

٥- جِدْ الحل الأمثل لمسائل النقل التالية مستخدماً طريقة فوجل في إيجاد الحل الأساس الابتدائي وطريقة التوزيع المعدلة في تحسين الحل:

1)		مراكز الاستيراد			الكميات المتاحة
		D_1	D_2	D_3	
مراكز التصدير	S_1	5	1	0	20
	S_2	3	2	4	10
	S_3	7	5	2	15
	S_4	9	6	0	15
الكميات المطلوبة		5	10	15	

2)		مراكز الاستيراد				الكميات المتاحة
		D_1	D_2	D_3	D_4	
مراكز التصدير	S_1	11	21	6	5	20
	S_2	14	10	13	9	40
	S_3	5	16	8	10	60
	S_4	15	8	2	1	80
	S_5	4	13	6	20	100
الكميات المطلوبة		120	120	40	20	

الفصل السابع

نموذج التعيين

Assignment Models

١,٧ . تمهيد

يتلخص هذا النوع من النماذج ضمن الإطار العام التالي: لدينا n وظيفة Job (مهمة Working) يمكن أن تنفذ بواسطة n عامل Personal أو (آلة Machine) وينفذ كل وظيفة عامل واحد فقط، إن تكلفة انجاز الوظيفة j باستخدام العامل i تساوي c_{ij} ويكون الهدف هو تعيين (تخصيص) عامل لكل عمل تكون تكلفة التعيين الإجمالية أقل ما يمكن.

٢,٧ . الصيغة الرياضية لنموذج التعين

يتصف نموذج التعيين بـ:

١- مصفوفة تكاليف التعيين وهي مصفوفة مربعة.

٢- مجموع قيم المتغيرات x_{ij} لكل سطر ولكل عمود في مصفوفة التخصيص يجب أن يساوي الواحد الصحيح.

٣- قيمة كل متغير x_{ij} في مصفوفة التعيين تساوي: اما 1 $(x_{ij}=1)$ اذا تم انجاز الوظيفة j بالعامل i ، أو تساوي 0 $(x_{ij}=0)$ في الحالات الأخرى، وحيث: $j=1,2,\dots n$, $i=1,2,\dots.n$

وعليه فان نموذج التعيين بأخذ الصيغة الرياضية التالية:

$$\text{Min}(w)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1\,; \qquad i=1,2,\ldots.n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1\,; \qquad j=1,2,\ldots.n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$x_{ij}=\begin{cases}1\\0\end{cases} \qquad ; \qquad \forall\, i\,,\,j \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

إن الصيغة الرياضية السابقة تؤول إلى:

- **نموذج برمجة خطية** يمكن حلها باسلوب السمبلكس.
- **نموذج النقل** حيث تعتبر حالة خاصة من نموذج النقل مع ملاحظة أن:

$$m = n \qquad \& \qquad S_i = D_j = 1$$

وبالرغم من إمكانية حل نموذج التعيين باسلوب السمبلكس أو خوارزمية النقل، إلا أنه توجد خوارزمية خاصة تعتبر أسهل وأفضل الخوارزميات لحل مسائل التعيين وهي الخوارزمية الهنغارية (المجرية).

٣,٧. الخوارزمية الهنغارية Hungarian Algorithm

لحل نموذج التعيين باستخدام الخوارزمية الهنغارية نتبع الخطوات التالية وسوف نستعين بالمثال (١) لتوضيح خطوات الخوارزمية:

مثال (١): ليكن لدينا الجدول التالي الذي يمثل التكلفة الزمنية لأربعة أشخاص سينفذون أربعة مهن:

المهن / الأشخاص	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	15	25	10	35
S_2	17	27	40	21
S_3	12	28	9	19
S_4	10	26	17	23

الجدول (١)

والمطلوب إيجاد التعيين (التخصيص) الأمثل بحيث تكون التكلفة الزمنية الإجمالية لتنفيذ هذه المهمات أقل ما يمكن.

الخطوة (١): التأكد من أن مصفوفة تكاليف التعيين مربعة أي: $m = n$، وإذا كان $n \neq m$ فإننا نضيف سطراً أو عموداً وهمياً تكاليفه أصفار.

الخطوة (٢): نحدد أصغر عنصر في كل سطر ونطرحه من جميع عناصر السطر.

لتطبيق هذه الخطوة، نضيف عموداً على يمين الجدول ونضع فيه أصغر عنصر في كل سطر، كما في الجدول (٢).

	المهن				
الأشخاص	**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**	**Min**
S_1	15	25	10	35	10
S_2	17	27	40	21	17
S_3	12	28	9	19	9
S_4	10	26	17	23	10

الجدول (٢)

وبطرح العنصر الأصغر في كل سطر من جميع عناصر السطر نحصل على الجدول التالي الجدول (٣).

	المهن			
الأشخاص	**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**
S_1	5	15	0	25
S_2	0	10	23	4
S_3	3	19	0	10
S_4	0	16	7	13

الجدول (٣)

الخطوة (٣): نحدد أصغر عنصر في كل عامود ونطرحه من جميع عناصر العمود.

لتطبيق هذه الخطوة، نضيف سطراً في أسفل الجدول (٣) ونضع فيه اصغر عنصر في كل عمود، كما في الجدول (٤).

	المهن			
الأشخاص	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	5	15	0	25
S_2	0	10	23	4
S_3	3	19	0	10
S_4	0	16	7	13
Min	0	10	0	4

الجدول (٤)

وبطرح العنصر الأصغر في كل عمود من جميع عناصر العمود نحصل على الجدول (٥).

	المهن			
الأشخاص	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	5	5	0	21
S_2	0	0	23	0
S_3	3	9	0	6
S_4	0	6	7	9

الجدول (٥)

الخطوة (٤): نغطي جميع الأصفار في مصفوفة التكلفة الناتجة بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية، بحيث يمر الخط الأفقي على جميع عناصر السطر والخط العمودي على جميع عناصر العمود، فإذا كان عدد الخطوط العمودية والأفقية يساوي عدد الأسطر ننتقل إلى **الخطوة (٦)**، وإلا ننقل إلى **الخطوة (٥)**.

حسب مثالنا في الجدول (٦) غطينا السطر الثاني والعمود الأول والعمود الثالث لأن كل واحد منها يحوي أكثر من صفرين، وبما أن عدد الخطوط يساوي (٣) وهو أقل من (٤) إذاً ننتقل إلى الخطوة (٥).

	المهن			
الأشخاص	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	5	5	0	21
S_2	0	0	23	0
S_3	3	9	0	6
S_4	0	6	7	9

الجدول (٦)

الخطوة (٥): إذا كان عدد الخطوط الأفقية والعمودية أقل من عدد الأسطر عندئذ ننفذ الإجراءات التالية:

١- نختار أصغر عنصر من العناصر غير المغطاة بخطوط، وحسب مثالنا العنصر هو (5).

٢- نطرح هذا العنصر من جميع العناصر غير المغطاة بخطوط.

٣- نضيف هذا العنصر إلى كل عنصر يقع عند تقاطع خط أفقي مع خط عامودي، وبالتطبيق على الجدول(٦) نحصل على الجدول (٧).

	المهن			
الأشخاص	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	5	0	0	16
S_2	5	0	28	0
S_3	3	4	0	1
S_4	0	6	7	9

الجدول (٧)

٤- نكرر الخطوة (٤) حتى نحصل على عدد من الخطوط الأفقية والعمودية يساوي عدد الأسطر، كما في الجدول (٨).

	المهن			
الأشخاص	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	5	0	0	16
S_2	5	0	28	0
S_3	3	4	0	1
S_4	0	6	7	9

الجدول (٨)

الخطوة (٦): إذا كان عدد الخطوط الأفقية والعمودية يساوي عدد الأسطر أو الأعمدة عندئذ نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل وذلك بعد القيام بالإجراءات التالية:

١- نبحث عن السطر (العمود) الذي يحتوي على عنصر صفري وحيد ونخصص هذا العنصر الصفري بوضعه ضمن مربع مظلل ونشطب الأصفار في عامود (سطر) هذا العنصر.

٢- نكرر هذه العملية حتى نأتي على جميع الأسطر والأعمدة ونكون بذلك خصصنا في كل سطر وكل عمود صفراً وحداً انظر الجدول (٩).

	المهن			
الأشخاص	**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**
S_1	5	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	16
S_2	5	$\cancel{0}$	28	$\boxed{0}$
S_3	3	4	$\boxed{0}$	1
S_4	$\boxed{0}$	6	7	9

الجدول (٩)

تنويه: إذا لم نستطع تخصيص في كل سطر وفي كل عامود صفراً وحيداً عندئذ نكرر الخطوة (٥).

وحسب الجدول (٩) الحل الأمثل هو:

تعيين الشخص S_1 لتنفيذ المهمة D_2 وتكلفته الزمنية 25

تعيين الشخص S_2 لتنفيذ المهمة D_4 وتكلفته الزمنية 21

تعيين الشخص S_3 لتنفيذ المهمة D_3 وتكلفته الزمنية 9

تعيين الشخص S_4 لتنفيذ المهمة D_4 وتكلفته الزمنية 10

وإجمالي التكلفة: $W^* = 25 + 21 + 9 + 10 = 65$

٤,٧ . حالات خاصة

١,٤,٧ . حالة عدم تساوي عدد الاسطر مع عدد الاعمدة

عندما لا يتساوى عدد الأسطر مع عدد الأعمدة لا بد من إضافة إما سطر وهمي أو عمود وهمي تكلفته صفرية، ومن ثم نكمل الخطوات السابقة: (طرح الأسطر – طرح الأعمدة – التغطية – التعيين).

مثال (٢) جِدْ أقل تكلفة لتعيين ثلاثة عمال في ثلاث مهام مع انه لدينا اربع مهام

المهام / عامل	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	5	4	10	6
S_2	2	8	12	7
S_3	4	5	13	2

الجدول (١٠)

بما ان عدد الاسطر لا تساوي عدد الاعمدة نضيف سطراً وهمياً كما في الجدول (١١):

المهام / عامل	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	5	4	10	6
S_2	2	8	12	7
S_3	4	5	13	2
S_4	0	0	0	0

الجدول (١١)

- بطرح الأسطر نحصل على الجدول (١٢):

المهام / عامل	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	1	0	6	2
S_2	0	6	10	5
S_3	2	3	11	0
S_4	0	0	0	0

الجدول (١٢)

- بطرح الأعمدة نحصل على نفس الجدول (١٢) (الصفر اصغر عنصر في كل عمود).

- التغطية: نحصل على الجدول (١٣):

المهام / عامل	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	1	0	6	2
S_2	0	6	10	5
S_3	2	3	11	0
S_4	0	0	0	0

الجدول (١٣)

بما أن عدد الخطوط الافقية والعمودية تساوي عدد الأسطر أو عدد الأعمدة في الجدول(١٣) فإننا وصلنا إلى جدول الحل الامثل.

- التعيين (التخصيص) :

التكلفة	المهام		العامل
4	D_2	⟶	S_1
2	D_1	⟶	S_2
2	D_4	⟶	S_3
0	D_3	⟶	S_4
8	مجموع التكاليف		

٢,٤,٧. حالة مصفوفة ارباح عوضاً عن مصفوفة تكاليف

عندما نكون امام حالة مصفوفة ارباح عندئذ نأخذ أكبر قيمة في المصفوفة ونطرح بقية القيم منها نحصل على مصفوفة تكاليف نطبق عليها الخوارزمية الهنغارية، وبعد الوصول الى جدول الحل النهائي في التخصيص نأخذ بعين الاعتبار قيم مصفوفة الارباح.

مثال (٣): يقوم قسم المبيعات في إحدى الشركات الإلكترونية المنتجة للتلفزيون والراديو والمسجلات والآلات الحاسبة بتسويق هذه المنتجات إلى أربع دول عربية، حيث بلغت الأرباح التي يجنوها بالدولار عن كل منتج كما يلي :

المسجلات	الآلات الحاسبة	الراديو	التلفزيون	الأجهزة / الدول
2	4	6	10	**الاردن**
3	5	8	6	**العراق**
5	8	3	9	**سورية**
4	3	7	7	**لبنان**

الجدول (١٤)

والمطلوب إجراء التخصيص أو التعيين اللازم بحيث نحقق أعلى ربح ممكن.

نقوم أولاً بتحويل مصفوفة الأرباح إلى مصفوفة تكلفة أو ندم بحيث نأخذ أكبر قيمة في المصفوفة ونطرح بقية القيم منها، ومن ثم نكمل الخطوات السابقة: (طرح الأسطر – طرح الأعمدة – التغطية – التعيين).

- اكبر قيمة في الجدول (١٤) هي 10 بطرح جميع عناصر المصفوفة من القيمة 10 نحصل على الجدول (١٥):

المسجلات	الآلات الحاسبة	الراديو	التلفزيون	الأجهزة / الدول
8	6	4	0	**الاردن**
5	3	0	2	**العراق**
4	1	6	0	**سورية**
3	4	0	0	**لبنان**

الجدول (١٥)

- نطبق خطوات الخوارزمية الهنغارية: (طرح الأسطر – طرح الأعمدة – التغطية – التعيين) نحصل على الجدول النهائي(١٦) (يترك للطالب متابعة الحل).

المسجلات	الآلات الحاسبة	الراديو	التلفزيون	الأجهزة / الدول
5	5	4	$\boxed{0}$	**الاردن**
2	2	$\boxed{0}$	2	**العراق**
1	$\boxed{0}$	6	~~0~~	**سورية**
$\boxed{0}$	4	~~0~~	~~0~~	**لبنان**

الجدول (١٦)

- ويكون التخصيص والارباح كما يلي :

1- تتخصص الاردن بتسويق التلفزيونات بربح قدره 10 دولارات.

2- تتخصص العراق بتسويق الراديوات بربح قدره 8 دولارات.

3- تتخصص سورية بتسويق الآلات الحاسبة بربح قدره 8 دولارات.

4- تتخصص لبنان بتسويق المسجلات بربح قدره 4 دولارات.

وبالتالي يكون المجموع الأعلى للأرباح : $ $10 + 8 + 8 + 4 = 30$

٣,٤,٧.حالة عدم تخصيص موظف محدد لأداء مهمة محددة

في هذه الحالة:

- إذا كان النموذج من نوع تقليل التكاليف فإننا نُضيف معاملاً بكمية كبيرة جداً (M).
- إذا كان النموذج من نوع تعظيم الارباح فإننا نُضيف معاملاً بكمية كبيرة جداً (–M) .

مثال (٤): ترغب إحدى الإدارات في تعيين ثلاثة موظفين على ثلاث وظائف مع رغبتها في عدم تخصيص الموظف الثالث لأداء الوظيفة الأولى، والمطلوب إيجاد الحل الأمثل بأقل التكاليف.

وظائف / موظفين	D_1	D_2	D_3
S_1	7	6	5
S_2	8	5	6
S_3	10	9	6

الجدول (١٧)

- لعدم تخصيص الموظف الثالث لأداء الوظيفة الأولى نستبدل تكلفة الموظف الثالث لأداء الوظيفة الأولى بـ M فنحصل على الجدول(١٨):

وظائف / موظفين	D_1	D_2	D_3
S_1	7	6	5
S_2	8	5	6
S_3	M	9	6

الجدول (١٨)

• بطرح الأسطر نحصل على الجدول (١٩):

وظائف / موظفين	D_1	D_2	D_3
S_1	2	1	0
S_2	3	0	1
S_3	M – 6	3	0

الجدول (١٩)

• بطرح الأعمدة نحصل على الجدول (٢٠):

وظائف / موظفين	D_1	D_2	D_3
S_1	0	1	0
S_2	1	0	1
S_3	M – 8	3	0

الجدول (٢٠)

• بتغطية الاصفار نحصل على الجدول (٢١):

وظائف / موظفين	D_1	D_2	D_3
S_1	0	1	0
S_2	1	0	1
S_3	M – 8	3	0

الجدول (٢٠)

• التعيين (التخصيص) :

الموظفين		الوظائف	التكلفة
S_1	$\longrightarrow$	D_1	7
S_2	$\longrightarrow$	D_2	5
S_3	$\longrightarrow$	D_3	6
مجموع التكاليف			18

مسائل عامـة

١- جِدْ الحل الأمثل لمسائل التعيين التالية:

المهن / العمال	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
S_1	4	9	3	4	8
S_2	9	8	6	7	2
S_3	7	5	8	11	4
S_4	9	5	5	3	8
S_5	10	11	3	5	7

الوظائف / الموظفين	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
S_1	3	9	2	4	7
S_2	6	1	5	6	6
S_3	9	4	7	10	3
S_4	5	5	4	2	1
S_5	9	6	4	2	6

٢- بفرض لدينا المعلومات التالية عن تكاليف إنجاز ثلاث وظائف على ثلاث آلات:

آلات / وظائف	D_3	D_2	D_1
S_1	21	17	31
S_2	17	19	35
S_3	20	21	27

٣- لنفرض أنه لدى مشفى حلب الجامعي 4 ممرضات وترغب إدارة المشفى في تخصيصهن على 4 أقسام، وكانت التكاليف المترتبة على تخصيص كل ممرضة في كل قسم من الأقسام مُعطاة بالجدول التالي:

أقسام / ممرضات	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	24	10	21	11
S_2	14	22	10	15
S_3	15	17	20	19
S_4	11	19	14	13

٤- ترغب إحدى الإدارات في تعيين اربعة موظفين في اربعة وظائف مع رغبتها في عدم تخصيص الموظف الثالث لأداء الوظيفة الثالثة، وعدم تخصيص الموظف الرابع لأداء الوظيفة الخامسة والمطلوب إيجاد الحل الأمثل بأقل التكاليف.

وظائف / موظفين	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
S_1	16	25	20	23	22
S_2	17	26	24	19	31
S_3	22	13	30	21	13
S_4	19	21	23	22	10

الفصل الثامن

مسألة البائع المتجول

Traveling Salesman Model

١,٨ . تمهيد

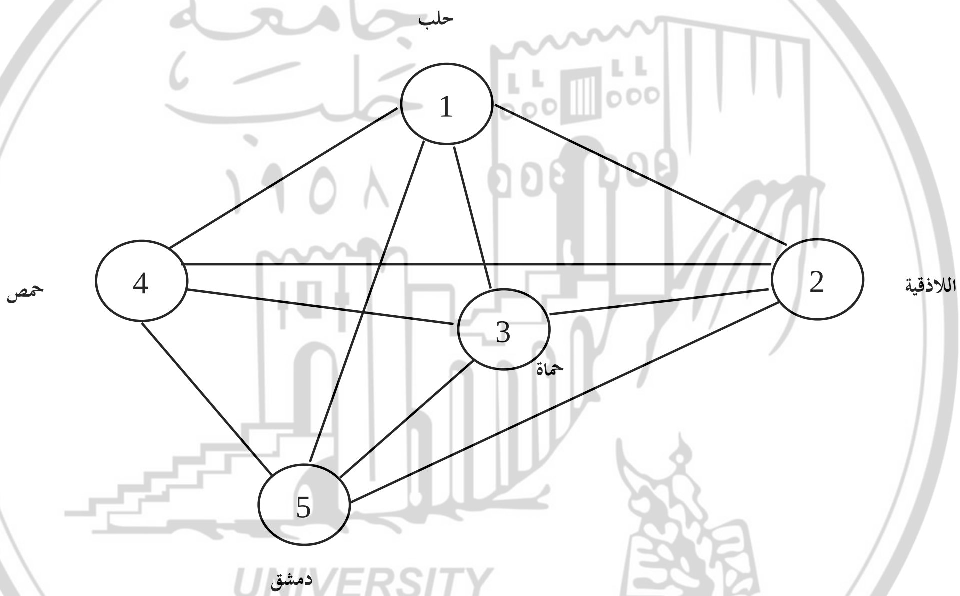
إن هذا النوع من المسائل يتلخص ضمن الإطار العام التالي: ينطلق بائع من مكان معين (قاعدة أو مركز انطلاق) ويزور n-1 مكاناً آخر ثم يعود إلى قاعدته بشرط أن يزور كل مكان مرة واحدة، بالإضافة إلى أن أجور السفر بين كل زوج من الأماكن يساوي إلى c_{ij} (ليس من الضروري أن يكون $c_{ij}=c_{ji}$). والمطلوب إيجاد خط الرحلة الأمثل بحيث يحقق أقل تكلفة ممكنة.

إن خط الرحلة يتألف من n مكان متتابع ويصل بين كل مكانين متتاليين وصلة أو طريق بحيث تشكل جميع الوصلات ودائرة كاملة ولتحقيق الهدف المنشود يمكن تحويل هذه المسألة إلى مسألة تعيين بشكل أنه يوجد لدينا n عامل n عمل، وتكلفة السفر هي تكلفة التعيين إلا أن حل مسألة البائع المتجول باستخدام خوارزمية التعيين غالباً ما يؤدي إلى حلٍ تقريبي يحتاج إلى تطوير باستخدام خوارزمية التفريغ والتحديد، بالإضافة إلى ذلك هناك خوارزميات متعددة لمعالجة هذه المسألة وأفضلها هي خوارزمية أقرب جار.

٢,٨. خوارزمية أقرب جار Nearest Neighbor Algorithm

وتعتمد على مبدأ اختيار أرخص وصلة متبقية (تكلفة) على التوالي، بحيث يؤدي في النهاية إلى حلقة كاملة مباشرة لخط الرحلة، وتتلخص بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى: نشكل مصفوفة التكلفة وتتألف من n سطر وn عمود (n عدد الأمكنة التي سيزورها البائع بما فيها مكان الانطلاق) وعناصر المصفوفة c_{ij} هي تكاليف السفر من مكان لآخر، وحيث أن $c_{ij} = 0$ عندما $i=j$ (أي أن أجرة السفر بين المكان نفسه معدومة)



الشكل (٢)

مثال (1): الشكل (١) يمثل الأماكن التي يزورها البائع المتجول. وبفرض أن مصفوفة، تكاليف التنقل بين الأماكن التي يزورها البائع المتجول معطاة في الجدول(١):

أماكن الزيارة	1	2	3	4	5
1	0	35	80	105	165
2	35	0	45	20	80
3	80	45	0	30	75
4	105	20	30	0	60
5	165	80	75	60	0

الجدول (١)

الخطوة الثانية: نستبدل عناصر القطر الرئيسي بأعداد كبيرة (أكبر من أي عدد موجود في المصفوفة).

وحسب مثالنا نقوم بتبديل عناصر القطر الرئيس بـ (١٠٠٠) نحصل على الجدول (٢).

أماكن الزيارة	1	2	3	4	5
1	**1000**	35	80	105	165
2	35	**1000**	45	20	80
3	80	45	**1000**	30	75
4	105	20	30	**1000**	60
5	165	80	75	60	**1000**

الجدول (٢)

الخطوة الثالثة: نختار أصغر عنصر من عناصر المصفوفة ونضعه ضمن مربع (أو نظلله) (إن وجد أكثر من عنصر نختار أحدها كيفياً) إن اختيار أصغر عنصر يعني أننا اخترنا ارخص أجرة سفر بين الأماكن في خط الرحلة.

وحسب مثالنا أصغر تكلفة هي c_{24} أو c_{42} نختار احدهما وليكن c_{24} وهذا يعني أن الوصلة $4 \rightarrow 2$ تُقبل كجزء من خط الرحلة، انظر الجدول (٣).

أماكن الزيارة	1	2	3	4	5
1	**1000**	35	80	105	165
2	35	**1000**	45	$\boxed{20}$	80
3	80	45	**1000**	30	75
4	105	20	30	**1000**	60
5	165	80	75	60	**1000**

الجدول (٣)

الخطوة الرابعة: نستبدل كل عناصر سطر وعمود العنصر المشار إليه بدائرة، وكذلك نستبدل نظيره بالعدد الكبير وحسب مثالنا بـ (1000) فنحصل على الجدول (٤).

أماكن الزيارة	1	2	3	4	5
1	**1000**	35	80	**1000**	165
2	**1000**	**1000**	**1000**	$\boxed{\mathbf{20}}$	**1000**
3	80	45	**1000**	**1000**	75
4	105	**1000**	30	**1000**	60
5	165	80	75	**1000**	**1000**

الجدول (٤)

الخطوة الخامسة: نختار أصغر عنصر من عناصر المصفوفة السابقة باستثناء العنصر المشار إليه بمربع (أي نكرر الخطوتين الثالثة والرابعة).

وحسب مثالنا أصغر تكلفة هي c_{43} وهذا يقابل الانتقال من المكان 4 إلى المكان 3 أي أن الوصلة المقبولة هنا هي 3→4 وتُقبل كجزء من خط الرحلة ونضع هذا العنصر ضمن مربع الجدول (٥) التالي:

أماكن الزيارة	1	2	3	4	5
1	**1000**	35	80	**1000**	165
2	**1000**	**1000**	**1000**	$\boxed{\mathbf{20}}$	**1000**
3	80	45	**1000**	**1000**	75
4	105	**1000**	$\boxed{\mathbf{30}}$	**1000**	60
5	165	80	75	**1000**	**1000**

الجدول (٥)

نستبدل كل عناصر سطر وعمود العنصر c_{43}، وكذلك نستبدل نظيره بالعدد (1000) فنحصل على الجدول (٦).

أماكن الزيارة	1	2	3	4	5
1	**1000**	35	**1000**	**1000**	165
2	**1000**	**1000**	**1000**	$\boxed{\mathbf{20}}$	**1000**
3	80	45	**1000**	**1000**	75
4	**1000**	**1000**	$\boxed{\mathbf{30}}$	**1000**	**1000**
5	165	80	**1000**	**1000**	**1000**

الجدول (٦)

الخطوة السادسة: فإذا كانت الوصلات السابقة تشكل دائرة كاملة أي تغطي جميع الأماكن عندئذ يكون الحل هو أقرب إلى الأمثل (بعبارة أخرى إذا أصبح عدد العناصر

المشار إليها بدائرة يساوي عدد الأماكن التي سيزورها البائع بما فيها مكان الانطلاق عندئذ نكون قد وصلنا إلى الحل القريب من الأمثل)

وحسب الجدول (٦) فإن وصلة العنصر $c_{43} = 30$ الذي وضعناه ضمن دائرة لا تشكل دائرة كاملة مع الوصلات السابقة أي: $3 \rightarrow 4$ و$4 \rightarrow 2$ غير كاملة، عندئذ نكرر الخطوة الرابعة.

وبتطبيق الخطوة الرابعة والخامسة نجد أن أصغر عنصر هو $c_{12} = 35$ ونحصل على الجدول (٧).

أماكن الزيارة	1	2	3	4	5
1	1000	35	1000	1000	1000
2	1000	1000	1000	20	1000
3	80	1000	1000	1000	75
4	1000	1000	30	1000	1000
5	165	1000	1000	1000	1000

الجدول (٧)

وبما أن وصلته لا تشكل دائرة كاملة مع الوصلات السابقة حسب الخطوة السادسة أي:

$$1 \rightarrow 2 \;,\; 2 \rightarrow 4 \;,\; 4 \rightarrow 3$$

عندئذ نكرر الخطوة الرابعة.

وبتطبيق الخطوة الرابعة والخامسة مرة أخرى نجد أن أصغر عنصر $c_{35} = 75$ ونحصل على الجدول (٨).

أماكن الزيارة	1	2	3	4	5
1	1000	35	1000	1000	1000
2	1000	1000	1000	20	1000
3	1000	1000	1000	1000	75
4	1000	1000	30	1000	1000
5	165	1000	1000	1000	1000

الجدول (٨)

وبما أن وصلته لا تشكل دائرة كاملة حسب الخطوة السادسة عندئذ نكرر الخطوة الرابعة.

وبتطبيق الخطوة الرابعة والخامسة مرة أخرى نجد أن أصغر عنصر $165 = c_{51}$ ونحصل على الجدول (٩).

أماكن الزيارة	1	2	3	4	5
1	**1000**	**35**	**1000**	**1000**	**1000**
2	**1000**	**1000**	**1000**	**20**	**1000**
3	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**75**
4	**1000**	**1000**	**30**	**1000**	**1000**
5	**165**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**

الجدول (٩)

نلاحظ في الجدول (٩) أن الوصلات المختارة تشكل دائرة كاملة حسب الخطوة السادسة أي أن:

$$1 \to 2 \ , \ 2 \to 4 \ , \ 4 \to 3 \ , 3 \to 5 \ , \ 5 \to 1$$

وبالتالي نكون قد وصلنا إلى الحل القريب من الأمثل والذي يساوي مجموع العناصر المشار إليها بدوائر أي:

$$W = 35 + 20 + 75 + 30 + 165 = 325$$

مسائل عامـة

تبين الجداول التالية مصفوفة التكلفة للتنقل بين عدة مواقع حدد خط الرحلة للبائع المتجول بأقل تكلفة.

١)

أماكن الزيارة	1	2	3	4	5
1	0	1	1	2	5
2	1	0	3	5	3
3	8	8	0	6	7
4	3	2	1	0	6
5	4	3	1	5	0

٢)

أماكن الزيارة	d_1	d_2	d_3	d_4
s_1	0	8	7	2
s_2	7	0	11	4
s_3	9	5	0	8
s_4	10	11	5	0

الفصل التاسع

نموذج التدفق الأعظمي

Maximal – Flow Models

١,٩ . تمهيد

تهدف مسائل التدفق الأعظمي إلى تمرير أكبر كمية ممكنة من مركز (منبع) Source إلى مركز آخر (مصب) Destination من خلال مراكز وسيطة تصل بينها شبكة من الطرق ذات سعات معينة، ويفترض أنه لا يخزن في أي مركز وسيط أية مادة، أي أن المواد التي تصل إلى أي مركز وسيط تُنقل مباشرة إلى مركز آخر.

كلمة مركز يمكن أن تكون مدناً أو مستودعات تخزين أو مراكز إنتاج، أو مراكز استيراد وتصدير أو آبار بترول أو غاز أو مناجم فحم...الخ.

أما شبكة الطرق فيمكن أن تكون وسائل نقل أو أنابيب ذات طبيعة توافق المادة المرسلة من خلالها...الخ

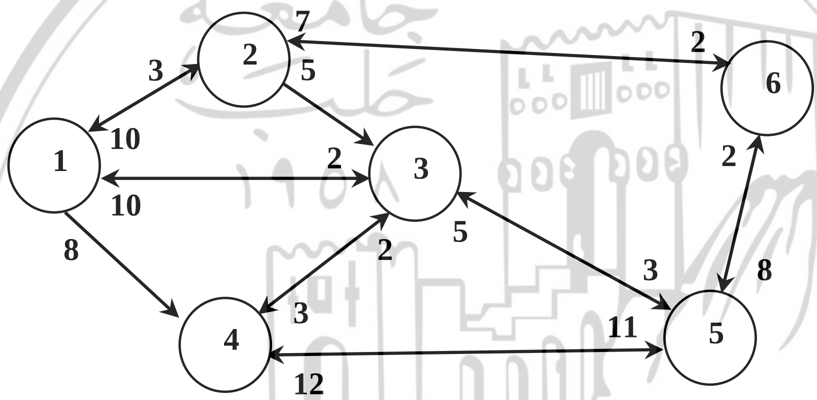
٢,٩ . الشكل العام لنموذج التدفق الأعظمي

في هذا النوع من المسائل يفترض وجود مراكز (عقد) عددها n تصل بينها شبكة من طرق النقل (أقواس تصل بين العقد)، ويفترض أن لكل طريق أو قوس سعة أعظمية C_{ij} لا يمكن للكمية المنقولة من العقدة (i)إلى العقدة (j) أن تتجاوزها، ونميز من هذه العقد أو المراكز العقدة الابتدائية أو المصدر S وسوف نرمز لها بـ (١) والعقدة النهائية أو المصب T وسوف نرمز لها بـ (n) أما بقية العقد سنعطيها الترقيم (n-1) ,… ,(3) ,(2) .

الطرق (الأقواس) التي تصل بين جميع المراكز (العقد) يمكن أن تكون مزدوجة أي يمكن نقل كمية من العقدة (i) إلى العقدة (j) وكمية أخرى من العقدة (j) إلى العقدة (i)، أي يمكن أن يمثل القوس الواحد كميتين ولكن كل واحدة باتجاه، وفي حالة وجود قوس ذي اتجاه واحد عندئذ تكون سعة الاتجاه المعاكس مساوية للصفر.

ضمن هذه الفرضيات يُطلب أن نمرر عبر هذه الشبكة أكبر كمية ممكنة من مادة ما تصدر عن المصدر S لتصل إلى المصب T (أي من العقدة (١) إلى العقدة (n)).

مثال (١): لتوضيح ما سبق نأخذ الشبكة التالية:



الشكل (١)

العقدة (1): المصدر، العقدة (6) : المصب. العقد 2,3,4,5 : مراكز وسيطة.

الأرقام فوق الأقواس تصل بين العقد تعبر عن السعة الأعظمية للطريق والأسهم تعبر عن اتجاه الطريق، فمثلاً إذا كان النقل يتم بوساطة شاحنات عندئذ يتم النقل من العقدة (٢) إلى العقدة (٣) وسعة الطريق حمولة خمس شاحنات أما سعة النقل من العقدة (٣) إلى العقدة (٢) فيساوي صفراً، ويتم أيضا النقل من العقدة (١) إلى العقدة (٣) وسعة الطريق حمولة عشر شاحنات أما من العقدة (٣) إلى العقدة (١) فهي حمولة شاحنتين، وهكذا...

مثال (٢): نريد أسبوعياً إرسال الكمية 65 طن من مادة معينة من مدينة حلب S إلى المراكز الثلاثة t_3 , t_2 , t_1 في مدينة عمان T التي تطلب أسبوعياً من هذه المادة الكميات $d_1 = 20 , d_2 = 20 , d_3 = 25$. ولإجراء هذا النقل لدينا الوسائل التالية:

- القطارات: وتستطيع تأمين نقل الكمية 10 طن من S إلى كل من المراكز t_3 , t_2 , t_1 على أن لا تزيد حمولتها الأسبوعية الكلية على 25 طن.
- السيارات: وتستطيع تأمين نقل الكميات (13، 8، 7) طن من S إلى المركز t_3 , t_2 , t_1 على الترتيب على أن لا تزيد حمولتها الأسبوعية الكلية على 25 طن.
- الطائرات: وتستطيع تأمين نقل الكميات (4، 10، 5) طن من S إلى المركز t_3 , t_2 , t_1 على الترتيب، على أن لا تزيد حمولتها الأسبوعية الكلية على 15 طن.

فإذا رمزنا بـ S_1 لمطار المدينة وS_2 لمركز انطلاق السيارات وS_3 لمحطة القطارات عندئذ يمكن صياغة النموذج بالشكل التالي:

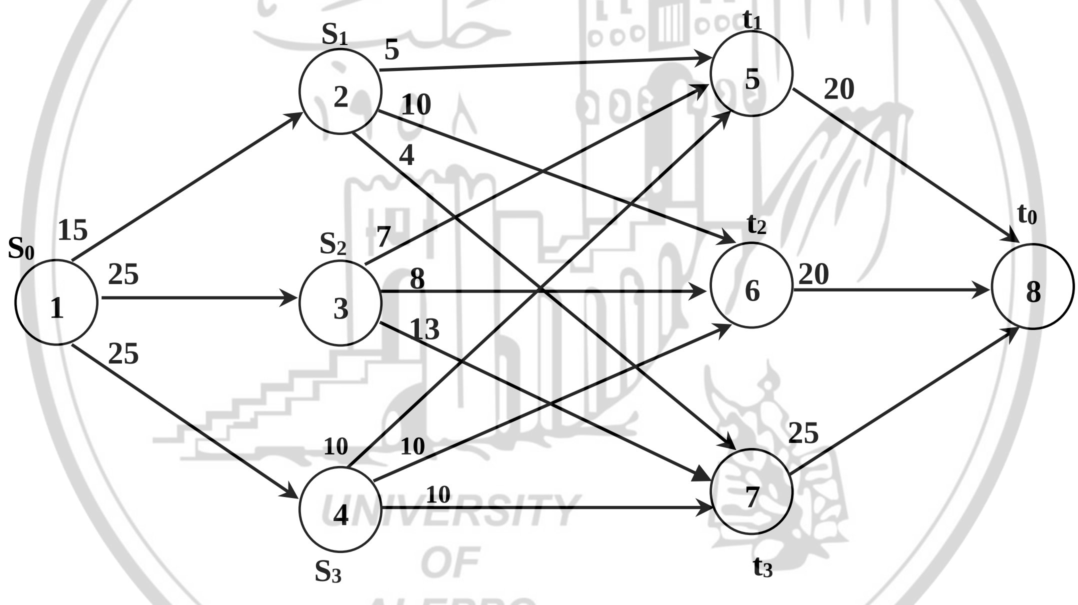
T / S	t_1	t_2	t_3	الكميات المتوفرة c_i
s_1	5	10	4	15
s_2	7	8	13	25
s_3	10	10	10	25
الكميات المطلوبة d_j	20	20	25	65

الجدول (١)

نريد نقل مادة متوفرة في ثلاثة مراكز تصدير S_1 , S_2 , S_3 تتوفر في الأول منها الكمية 15 من هذه المادة، وفي الثاني الكمية 25 وفي الثالث الكمية 25 ، ونريد نقل أكبر كمية ممكنة من هذه المادة إلى ثلاثة مراكز استيراد t_1 , t_2 , t_3 يطلب الأول منها الكمية 20، والثاني الكمية 20، والثالث الكمية 25 من هذه المادة ويتم النقل باستعمال شبكة طرق تتجه من كل مركز S_i إلى كل مركز t_i سعاتها معطاة بالجدول (١).

لوضع النموذج السابق على شكل نموذج تدفق أعظمي نصل مراكز التصدير s_i بمركز تصدير وهمي s_0 بحيث تكون سعات الطرق s_0s_i هي الكميات c_i المتوافرة في s_i، ونصل مراكز الاستيراد t_j بمركز استيراد وهمي t_0 بحيث تكون سعات الطرق t_jt_0 هي الكميات المطلوبة في t_j ، ويصبح هدف النموذج نقل أكبر كمية ممكنة من المنبع s_0 إلى المصب t_0، فنحصل بذلك على شبكة النقل التالية (الشكل (٢)).

وللمحافظة على التسمية المتجانسة للمراكز كما ورد آنفاً نضع أرقام (1) بدلاً من s_0 و(8) بدلاً من t_0 ونضع الأرقام (2,3,4,5,6,7) بدلاً من $(s_1 , s_2 , s_3 , t_1 , t_2 , t_3)$ على الترتيب.



الشكل (٢)

٣,٩. الصيغة الرياضية لنموذج التدفق الأعظمي

من أجل تحويل المخطط الشبكي لنموذج التدفق الأعظمي إلى الصيغة الرياضية لابد من الأخذ بالحسبان ما يلي:

١- كل قوس في المخطط الشبكي يقابل متغيراً.

٢- العقد في المخطط الشبكي تقابل شروط الصيغة الرياضية.

فإذا كانت y كمية التدفق من المنبع (العقدة (١) الابتدائية) إلى المصب (العقدة (n) النهائية) وإذا كانت x_{ij} كمية التدفق بين العقدة i والعقدة j عندئذ، يعبر عن دالة الهدف لنموذج التدفق الأعظمي رياضياً بالشكل التالي:

$$\textbf{Max } Z = y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(1)}$$ **(دالة الهدف)**

بالإضافة إلى أن مجموع ما يتم نقله من المنبع إلى بقية المراكز أو العقد يساوي إلى y أي:

$$\sum_{j=2}^{n} x_{1j} = y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(2)}$$ **(شرط العقدة الابتدائية)**

ومجموع ما يتم إيصاله إلى المصب من بقية المراكز أو العقد الأخرى يساوي إلى y أي:

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_{in} = y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(3)}$$ **(شرط العقدة النهائية)**

ومجموع التدفق الواصل إلى أي مركز وسيط (عقدة وسيطية) (2,3,....,n-1) يساوي إلى التدفق الخارج منه أي أن:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = \sum_{j=1}^{n} x_{kj} \;\; ; \;\; \textbf{(k=2,3,...n-1)...(4)}$$ **(شرط العقد المتوسطة)**

بالإضافة إلى أن كمية التدفق هي كمية غير سالبة وأقل أو تساوي السعة c_{ij} العظمى المسموح بها في القوس بين العقدة i والعقدة j أي:

$$\mathbf{0 \le x_{ij} \le c_{ij} \quad \forall \;\; i \;\&\; j \;\; \ldots\ldots (5)}$$ **(شرط عدم السلبية مع تحديد سعة الطرق)**

نلاحظ أن الصيغة الرياضية السابقة هي برنامج خطي يمكن حله بالطرق المعروفة (السمبلكس) حيث يطلب فيه تعيين الكميات x_{ij} بحيث يتحقق نقل أكبر كمية من المنبع إلى المصب ونظراً للشكل الخاص لهذا النموذج، فانه يمكن حلها بالطرق الخاصة.

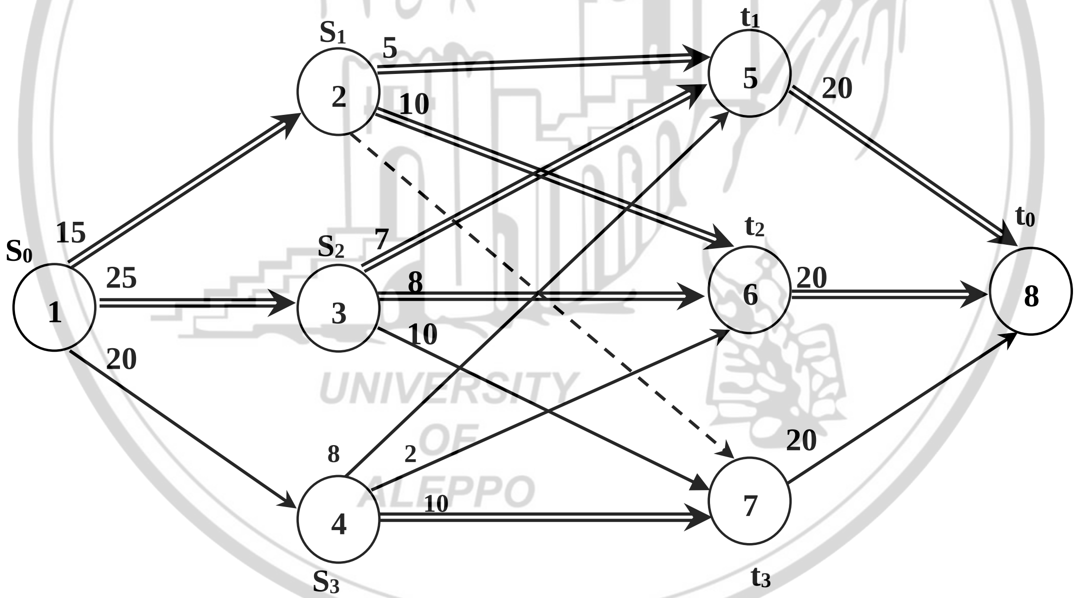
٤,٩ . الأساليب الخاصة لحل نموذج التدفق الأعظمي

١,٤,٩ . خوارزمية فورد – فليكرسون Ford and Fulkerson Algorithm

سنشرح مراحل تطبيق هذه الخوارزمية بالاعتماد على المثال (١)

المرحلة الأولى:البدء بحل أولي

لنبدأ بحل أولي ما لهذا النموذج، وليكن الحل الذي يمثله الشكل (٣) حيث وضعنا خطاً مزدوجاً للدلالة على أن الطريق المقابل "مشبع" أي أنه ينقل كمية مساوية لسعته الأعظمية، وحيث وضعنا خطوطاً متقطعة على الطرق التي لم تستخدم للنقل والتي سنقول عنها "خالية"، أما الأرقام الموجودة فوق كل طريق فهي الكميات التي تنقلها في هذا الطريق وفق هذا الحل.



الشكل (٣)

نلاحظ في هذا الحل أن كل الطرق التي تذهب من العقدة (1) وتنتهي بالعقدة (8) تحوي على طريق مشبع واحد على الأقل ولا يمكن تحميل هذه الطرق أية كمية إضافية، ونرى أن هذا الحل يؤدي إلى نقل الكمية (60) من العقد (2،3،4) إلى العقد

(7،6،5) إلا أنـه لا يـؤدي إلى تحقيـق جميـع الطلبيـات (أي لا يـؤدي إلى نقـل جميـع الكميات المتوافرة). لذلك يجب تحسين الحل .

المرحلة الثانية: تحسين الحل، وذلك باتباع الخطوات التالية:

الخطوة (١): نضع إشارة * بجانب العقدة (1) المنبع ثم نحاول تأشير المراكز الأخرى بالطريقة التالية:

لنفرض أن R هو أحد العقد أو المراكز التي وضعت بجانبها الإشارة *، وليكن S مركزاً متصلاً بـ R بطريق مباشر. فإذا لم يكن بجانب s إشارة ما، فإننا نؤشر عليه في إحدى الحالتين التاليتين:

١- إذا كان الطريق الواصل بين R ,S يتجه من R إلى S وإذا لم يكن هذا الطريق مشبعاً، في هذه الحالة يمكن زيادة الكمية المنقولة من R إلى S.

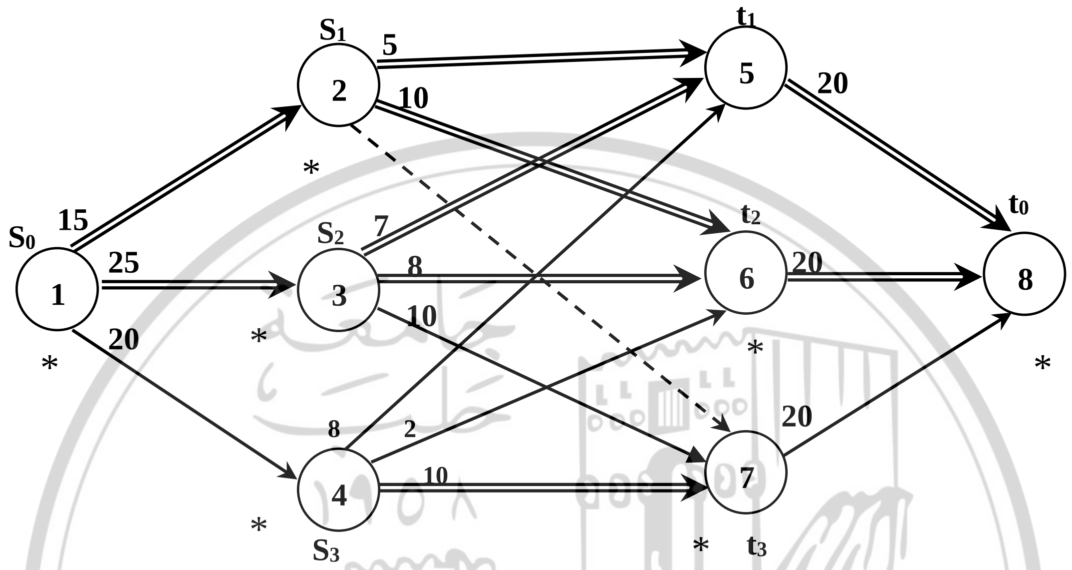
٢- إذا كان الطريق الواصل بين S, R يتجه من S إلى R وإذا لم يكن هذا الطريق خالياً في هذه الحالة يمكن إنقاص الكمية المنقولة من S إلى R.

حسب هذه الطريقة وضعنا إشارة * على العقد (1,4,6,3,7,8) على الترتيب ونلاحظ أننا نجتاز الطرق (1,4) ,(4,6) , (3,7) , (7,8) بالاتجاه الصحيح أما الطريق (3،6) بالاتجاه المعاكس، كما في الشكل(٤).

الخطوة (٢): نقوم بزيادة كمية ما على الطرق الأربعة التي بالاتجاه الصحيح (المباشر)، وإنقاص الكمية نفسها على الطريق بالاتجاه المعاكس .

وهذا يعني بالنسبة للعقد الوسيطية، ما يدخل إلى كل عقدة يساوي ما يخرج من العقدة. أما بالنسبة للمنبع (1) والمصب (n) فإنه ما يخرج من العقدة (1) وما يدخل إلى العقدة (n) يؤدي إلى حل أفضل من الحل السابق.

وحسب مثالنا فان أكبر كمية يمكن نقلها على الطرق: (7،8) ، (3،6) ،(4،6) ، (1،4) هي الكمية 3 التي تؤدي إلى إشباع الطريق (3،7)، ونستطيع إنقاص الكمية نفسها من الطريق (3،6) لأن الكمية المنقولة عليه كانت تساوي 8.

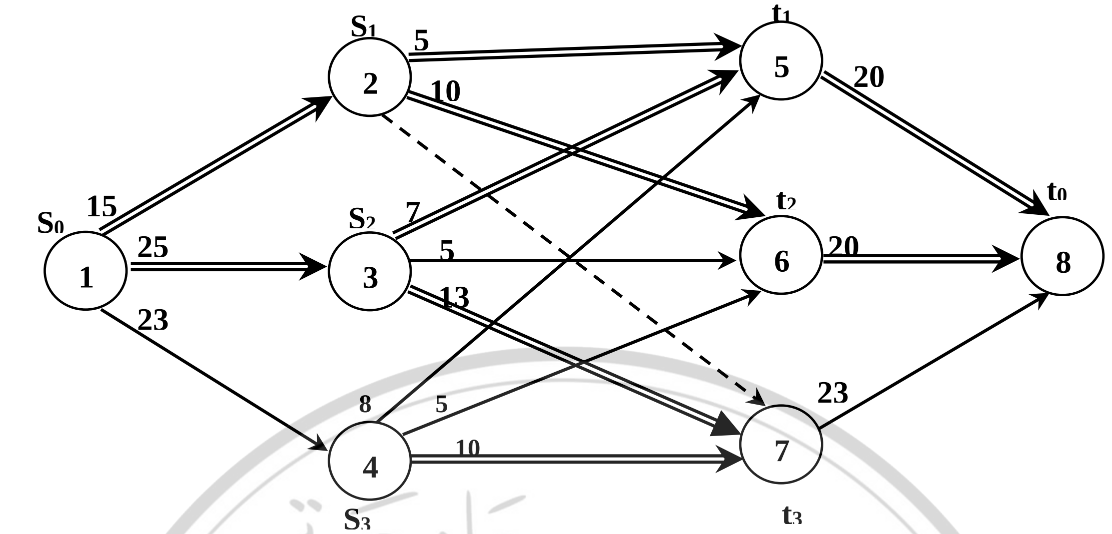


الشكل (٤)

ملاحظة: الكمية المنقولة بالاتجاه المباشر تساوي الكمية التي يمكن إضافتها إلى الطرق المباشرة وتؤدي إلى إشباع أحدها وهذا يتحقق بأخذ أصغر الكميات التي يمكن إضافتها إلى الطرق المباشرة لتصبح مشبعة، وحسب مثالنا فان الكميات التي يمكن إضافتها هي (8،5، 3، 5) على الترتيب وأصغرها هو 3 المقابلة للطريق (3،7).

إذا أجرينا هذه الزيادة وهذا الإنقاص فان الكمية الكلية المنقولة تصبح (63) بدلا من (60) وهذا الحل أفضل كما هو موضح بالشكل (٥).

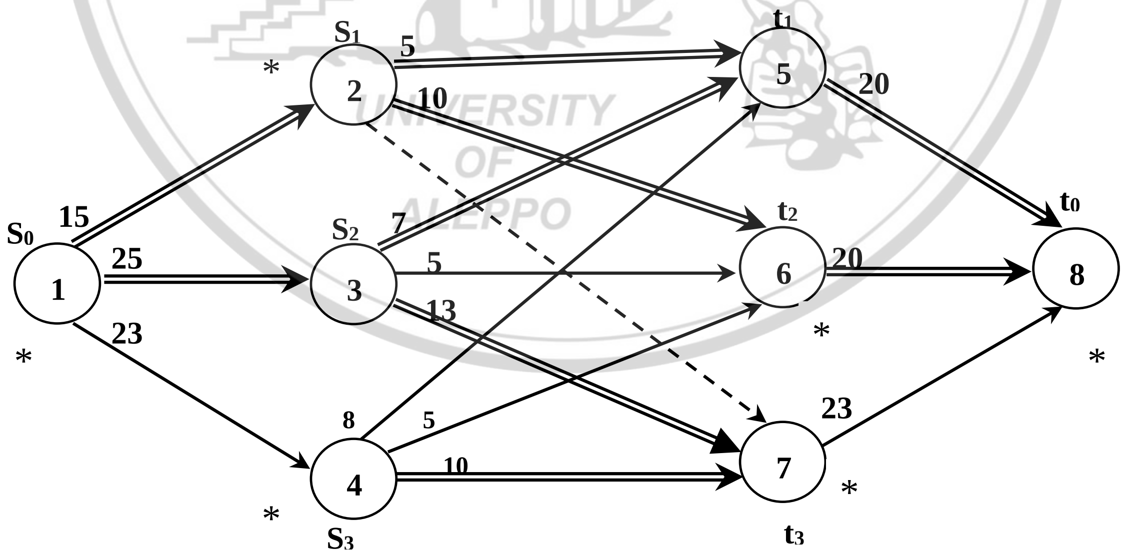
الخطوة (٣): نكرر الخطوة (١) لوضع الإشارات والخطوة (٢) لزيادة وإنقاص الكميات المنقولة على الطرق، ونتوقف عن التكرار إذا لم نستطع وضع الإشارات، وعندها نكون وصلنا إلى الحل الأمثل.



الشكل (٥)

إن الحل الأمثل في الشكل (٥) هو أفضل من الحل في الشكل (٣) ولكننا ما زلنا نستطيع البداية بوضع إشارة جانب العقدة (1) المنبع، ثم التوصل إلى وضع إشارة بجانب العقدة (8) المصب وذلك باتباع القاعدة المذكورة سابقاً لوضع الإشارات انظر الشكل (٦)، أي أننا نستطيع تحسين الحل بإجراء إضافة وانقاص كميات على الطرق:

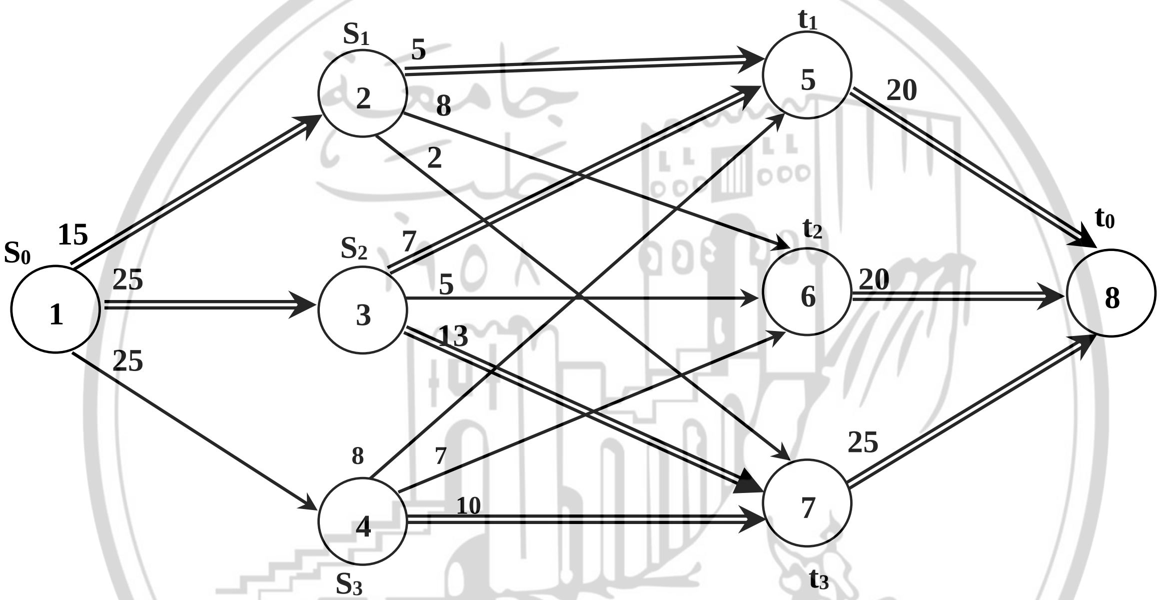
(1,4) , (4,6) , (6,2) , (2,7) , (7,8)



الشكل (٦)

ونلاحظ من الشكل (٦) أننا نجتاز الطرق (1,4) , (4,6) , (2,7) , (7,8) بالاتجاه المباشر أما الطريق (6,2) بالاتجاه المعاكس، وأكبر كمية يمكن نقلها على الطرق المباشرة هي الكمية 2 التي تؤدي إلى إشباع الطريق (1,4) ونستطيع إنقاص هذه الكمية من الطريق (6,2).

إذا أجرينا الزيادة والنقصان على الطرق فان الكمية المنقولة تصبح 65 بدلاً من (63) وهذا الحل أفضل ونجده ممثلاً بالشكل (٧)



الشكل (٧)

إن الحل في الشكل (٧) هو أفضل من الحل في الشكل (٥)، وبما أننا لا نستطيع وضع الإشارات كما مر بنا سابقاً، إذاً الشكل (٧) يعطي الحل النهائي الأمثل الذي يؤمن نقل كافة الكميات المتوفرة في المراكز المصدرة.

وهذا الحل يعني أنه يجب أن:

- نرسل من العقدة (2) (مركز التصدير S_1) الكمية 5 إلى العقدة (5) (مركز الاستيراد t_1)، والكمية 8 إلى العقدة (6) (مركز الاستيراد t_2)، والكمية 2 إلى العقدة (7) (مركز الاستيراد t_3).

- نرسل من العقدة (3) (مركز التصدير S_2) الكمية 7 إلى العقدة (5) (مركز الاستيراد t_1)، والكمية 5 إلى العقدة (6) (مركز الاستيراد t_2)، والكمية 13 إلى العقدة (7) (مركز الاستيراد t_3).
- نرسل من العقدة (4) (مركز التصدير S_3) الكمية 8 إلى العقدة (5) (مركز الاستيراد t_1)، والكمية 7 إلى العقدة (6) (مركز الاستيراد t_2)، والكمية 10 إلى العقدة (7) (مركز الاستيراد t_3).

٢,٤,٩. خوارزمية نائب وماغوط(*) Nayeb and Maghaut Algorithm

لإيجاد التدفق الأعظمي وتحديد مسار هذا التدفق من المصدر S إلى المصب T (أي من العقدة (١) إلى العقدة (n)) نتبع المراحل التالية:

المرحلة الأولى:

نقوم بتمثيل المخطط التدفقي في مصفوفة عدد أسطرها يساوي عدد أعمدتها ويساوي عدد العقد الموجودة في المخطط الشبكي، وعناصر المصفوفة هي السعات الأعظمية للأقواس الواصلة بين العقد، ونرمز لهذه المصفوفة بالرمز C، الجدول(٢).

	1	2	....	(n-1)	n
1		C_{12}	....	$C_{1(n-1)}$	C_{1n}
2	C_{21}		....	$C_{2(n-1)}$	C_{2n}
. .	. .	. .	....	. .	. .
(n-1)	$C_{(n-1)1}$	$C_{(n-1)2}$	....		$C_{(n-1)n}$
N	C_{n1}	C_{n2}	....	$C_{n(n-1)}$	

الجدول (٢) : المصفوفة (C)

فمثلاً: C_{12} تعني السعة الأعظمية للطريق من (١) إلى (٢)، C_{21} تعني السعة الأعظمية للطريق من (٢) إلى (١).

(*) وضعت هذه الخوارزمية من قبل أ.د. خالد ماغوط ود. ابراهيم نائب في نهاية عام ١٩٩٤ ونشرت في سلسلة العلوم الاقتصادية ١٩٩٥ مجلة بحوث جامعة حلب المحكمة – سوريا.

ونلاحظ أنه لأجل $i = j$ التي تقابل المربعات (الطرق) الواقعة على القطر الرئيسي لا يمكن أن نمرر فيها أية كمية وذلك واضح من مفهوم النموذج، أي:

$$C_{ij}=0 \quad \text{if} \quad i=j$$

أما باقي عناصر المصفوفة فتكون قيماً غير سالبة أي:

$$C_{ij} \geq 0 \qquad \forall \quad i\,,\,j \quad ; \quad i \neq j$$

المرحلة الثانية: وتتضمن الخطوات التالية:

الخطوة (١):

١. نبدأ بالسطر (1) ونختار منه أكبر قيمة من القيم C_{1j} $(j=2,3,\ldots n-1,n)$ غير المعدومة ولتكن C_{1k} ونحدد عمود هذا العنصر وليكن k .

٢. نضع إشارة (−) فوق السعة C_{1k}، وهذا يعني أننا سنمرر في هذه المحاولة أكبر كمية ممكنة θ من (١) إلى k وبالتالي ستنقص سعة هذا الطريق بالكمية θ نفسها.

٣. نضع إشارة (+) فوق السعة C_{ki}، (وهذا يعني أن سعة الطريق من k إلى (1) ستزيد بالكمية θ نظراً لما ورد إلى k من (1)).

٤. إذا كانت جميع القيم معدومة في سطر (1) عندئذ نكون قد وصلنا إلى الجدول الأخير (المصفوفة الأخيرة) والتي سنرمز لها بـ C^* وننتقل إلى **المرحلة الثالثة**.

الخطوة (٢):

نفتش عن أكبر قيمة غير معدومة في السطر الذي حدد عموده في الخطوة السابقة أي السطر k ونحدد عمود هذا العنصر وليكن L حيث $k \neq L$ (أي أننا نستبعد الأعمدة المأخوذة في الخطوة السابقة لان k لن يعيد إلى (1) ما استورده منه) ونضع إشارة (−) فوق السعة C_{kL}، وإشارة (+) فوق السعة C_{Lk} بالمفهومين السابقين نفسيهما.

الخطوة (٣):

إذا كان $L = (n)$ ، أي إذا استطعنا وضع إشارة (–) فوق السعة التي عمودها (n) أي فوق السعة C_{iL} ($i=1,2,3,\ldots, n-1$) عندئذ ننتقل إلى **الخطوة (٥)**.

أما إذا كان $L \neq (n)$ عندئذ نكرر **الخطوة (٢)** حتى نصل إلى وضع إشارة (–) فوق السعة التي عمودها (n) أي فوق السعة C_{in} ($i=1,2,\ldots n-1$) وننتقل بعد ذلك إلى **الخطوة (٥)** أما في حالة عدم التمكن من الوصول إلى وضع إشارة (–) فوق السعة التي عمودها (n) ننتقل إلى **الخطوة (٤)**.

الخطوة (٤):

إن عدم تمكننا من وضع إشارة (–) على السعة C_{in} ($i=1,2,\ldots n-1$) الواقعة في عمود (n) يعني وصلنا إلى السطر الذي فيه جميع القيم التي يمكن المفاضلة بينها حول القيمة العظمى معدومة بما فيها القيمة التي تقع في تقاطع ذلك السطر مع العمود (n).

هنا يبدو للوهلة الأولى انه يجب الانتقال إلى المرحلة الثالثة ولكن في هذه الحالة يكون الطريق من العقدة المقابلة لذلك السطر إلى العقدة (n) مشبعاً ولا يمكن أن نمرر فيه أية كمية، لذلك نعود إلى العقدة المقابلة للسطر المأخوذ في الخطوة السابقة **ونحاول إيجاد أكبر قيمة فيه بعد استبعاد القيمة التي لم تؤد إلى متابعة وضع إشارة (–)**، وبالتالي لدينا الحالات التالية:

أ- **إن أمكن إيجادها، عندئذ**: إذا كانت هذه القيمة في عمود (n) عندئذ نؤشر عليها بـ(–) وننتقل إلى الخطوة (٥)، أما إذا لم تكن هذه القيمة في عمود (n) عندئذ نحدد عمود هذه القيمة ونعود إلى الخطوة (٢).

ب- **أما إذا لم نتمكن من إيجادها، عندئذ**: نكرر تطبيق الخطوة (٤) وذلك بالعودة إلى السطر المأخوذ في الخطوة الأسبق ونحاول إيجاد أكبر قيمة بعد استبعاد القيمة التي لم تؤد إلى متابعة وضع إشارة (–) ونعود إلى (أ) .

ت- **إذا** عدنا إلى تطبيق الخطوة (٤) إلى السطر (1) (عقدة المصدر) ولم يكن بالإمكان إيجاد قيمة غير معدومة فيه بعد استبعاد القيم غير المعدومة التي لم تؤد إلى وضع إشارة (–) على السعة غير المعدومة في عمود (n) (عقدة المصب) عندئذ نكون قد وصلنا إلى الجدول الأخير (المصفوفة الأخيرة) C^* وننتقل إلى **المرحلة الثالثة**.

ملاحظة: الخطوات (١) و(٢) و(٣) تعني أننا حددنا سلسلة من الأقواس التي تصدر المصدر (١) بالمصب (n) ويمر فيها أكبر سعة ممكنة يمكننا إرسال في هذه السلسلة مقدار θ الذي يساوي أصغر السعات المؤشر عليها بـ (–) وبالوقت نفسه إنقاص هذه الكمية θ من سلسلة الأقواس السابقة ولكن باتجاه عكسي أي من المصب إلى المصدر أي من السعات المؤشر عليها بـ (+).

الخطوة (٥):

نختار القيمة θ بالشكل التالي:

$$\theta = \min \{C^-_{ij}\} > 0$$

أي نختار أصغر سعة مؤشر عليها بإشارة (–)، هذا يعني أننا حددنا أعلى تدفق يمكن أن ينقل في سلسلة الأقواس المحددة في الخطوات السابقة.

الخطوة (٦):

نطرح القيمة θ من العناصر C^-_{ij} (السعات المؤشر عليها بإشارة (–))، ونضيف θ إلى العناصر C^+_{ij} (السعات المؤشر عليها بإشارة (–))، فنحصل على مصفوفة جديدة، وبذلك نكون قد زدنا التدفق من (١) إلى (n) بمقدار θ .

الخطوة (٧):

نكرر **المرحلة الثانية** مع استخدام السعات الجديدة (المصفوفة الجديدة) وهكذا إلى أن نخرج منها في الخطوة (١) أو (٤) حيث ننتقل إلى المرحلة الثالثة التالية:

المرحلة الثالثة:

لتكن C المصفوفة الابتدائية التي عناصرها C_{ij} ، ولتكن C^* المصفوفة النهائية الناتجة عن المرحلة الثانية والتي عناصرها C^*_{ij} ، نحسب المصفوفة X مصفوفة الحل الأمثل والناتجة عن طرح عناصر المصفوفة C^* من عناصر المصفوفة C .

أي أن عناصر المصفوفة X تحسب بالشكل:

$$x_{ij} = \begin{cases} C_{ij} - C^*_{ij} & \text{if} \quad C_{ij} > C^*_{ij} \\ 0 & \text{if} \quad C_{ij} \le C^*_{ij} \end{cases}$$

إن $x_{ij} = C_{ij} - C^*_{ij}$ تمثل الكمية التي مرت بالطريق الواصل من المركز i إلى المركز j ، أي أن المصفوفة $X = [x_{ij}]$ هي مصفوفة الحل الأمثل.

بعد حساب المصفوفة X يمكن العودة إلى المخطط الشبكي لتحديد التدفق الذي سينتقل في الأقواس بين العقد (المراكز) لإيصاله إلى (n).

والتدفق الأعظمي من العقدة (١) إلى العقدة (n) يساوي مجموع قيم θ المحددة بالخطوة (٥) من المرحلة الثانية أي:

$$Z = \sum\theta$$

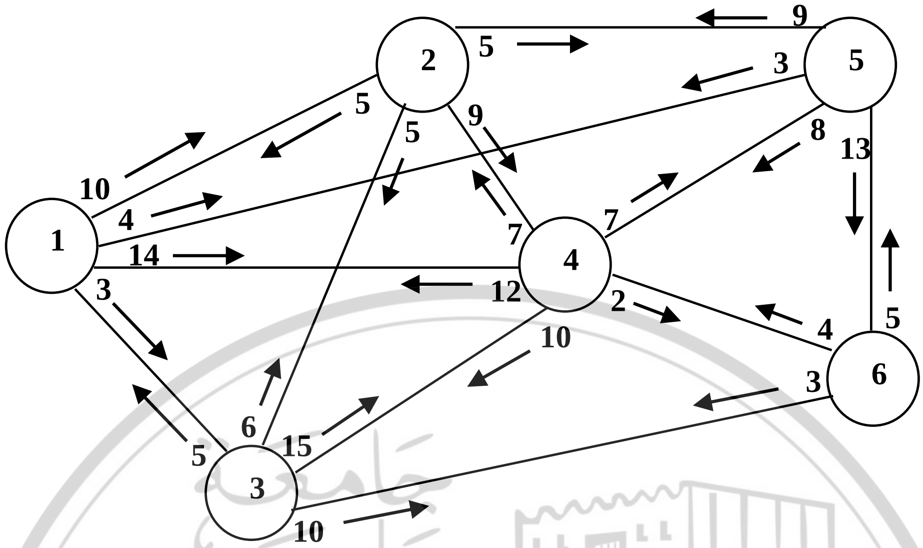
أو من المصفوفة X حيث:

$$Z = \sum_j x_{1j} = \sum_i x_{in}$$

تنويه:

في المرحلة الثانية، إذا كان هناك في أحد الأسطر عنصران متساويان أو أكثر مساوية للقيمة الكبرى عندئذ نختار أحدها، أما إذا كان أحدهما هو تقاطع هذا السطر مع العمود (n) فإننا نختار العنصر المتقاطع مع العمود (n)

مثال (٣): ليكن لدينا المخطط الشبكي التالي:



الشكل (٨)

الشكل (٨) يقابل المصفوفة NC = 0، الجدول (٣)

	1	2	3	4	5	6
1	0	10	3	14	4	0
2	5	0	5	9	5	0
3	5	6	0	15	0	10
4	12	7	10	0	7	2
5	3	9	0	8	0	13
6	0	0	3	4	5	0

الجدول (٣) : المصفوفة **NC = 0**

باتباع خطوات المرحلة الثانية من مراحل الخوارزمية: لنأخذ الجدول(٤) المصفوفة NC=1 التي هي نفسها المصفوفة NC = 0. ونطبق عليها الخطوة (١) من المرحلة الثانية.

حسب الخطوة (١): ننفذ الإجراءات التالية:

- نحدد أكبر عنصر في السطر (1) وهي القيمة (14) الواقعة في العمود (4).

- نضع إشارة – في مربعها وإشارة + في المربع المناظر، أي في مربع تقاطع السطر (4) والعمود (1).
- ننتقل إلى السطر (4) ونحدد أكبر عنصر فيه وهي القيمة (10)، أي العنصر في العمود (3).
- نضع إشارة – في مربعها وإشارة + في المربع المناظر، أي في مربع تقاطع السطر (3) والعمود (4).
- ننتقل إلى السطر الثالث ونحدد أكبر عنصر فيه وهي القيمة (10) أي العنصر في العمود (6).
- نضع إشارة – في مربعها وإشارة + في المربع المناظر، أي في مربع تقاطع السطر (6) والعمود (3) .
- بما أن العمود (6) هو العمود الأخير، عندئذ نكون حددنا سلسلة من الأقواس تصل من المصدر (1) إلى المصب (6) أي:

$$\mathbf{1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 6}$$

وأصغر كمية منقولة مؤشر عليها بـ (–) هي: $\theta = 10$

	1	2	3	4	5	6
1	0	10	3	14 -	4	0
2	5	0	5	9	5	0
3	5	6	0	15 +	0	10 -
4	12 +	7	10 -	0	7	2
5	3	9	0	8	0	13
6	0	0	3 +	4	5	0

الجدول (٤) : المصفوفة NC = 1

وحسب الخطوة(٥) من المرحلة الثانية نضيف $\theta = 10$ إلى المربعات المؤشر عليها بـ (+) ونطرح من المربعات المؤشر عليها بـ(–) ونحصل بذلك على الجدول (٥) المصفوفة NC =2 .

	1	2	3	4	5	6
1	0	10^{-}	3	4	4	0
2	5^{+}	0	5	9^{-}	5	0
3	5	6	0	25	0	0
4	22	7^{+}	0	0	7^{-}	2
5	3	9	0	8^{+}	0	13^{-}
6	0	0	13	4	5^{+}	0

الجدول (٥) : المصفوفة NC = 2

والمسار في الجدول (٥) هو: $\mathbf{1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 6}$ و $\mathbf{\theta = 7}$

وبمتابعة الحل بوضع الإشارات على الجدول (٥) نحصل على الجداول (٦) و(٧) و(٨) و(٩) التالية :

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	3	4^{-}	4	0
2	12	0	5	2^{+}	5^{-}	0
3	5	6	0	25	0	0
4	22^{+}	14^{-}	0	0	0	2
5	3	9^{+}	0	15	0	6^{-}
6	0	0	13	4	12^{+}	0

الجدول (٦) : المصفوفة NC = 3

والمسار في الجدول (٦) هو: $\mathbf{1 \to 4 \to 2 \to 5 \to 6}$ و $\mathbf{\theta = 4}$

وبمتابعة الحل بوضع الإشارات على الجدول (٦) نحصل على الجداول (٧) التالي:

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	3	0	4^{-}	0
2	12	0	5	6	1	0
3	5	6	0	25	0	0
4	26	10	0	0	0^{+}	2^{-}
5	3^{+}	13	0	15^{-}	0	2
6	0	0	13	4^{+}	16	0

الجدول (٧) : المصفوفة NC = 4

والمسار في الجدول (٧) هو: $\mathbf{1 \to 5 \to 4 \to 6}$ و $\mathbf{\theta = 2}$

وبمتابعة الحل بوضع الإشارات على الجدول (٧) نحصل على الجداول (٨) التالي:

	1	2	3	4	5	6
1	0	3^{-}	3	0	2	0
2	12^{+}	0	5	6^{-}	1	0
3	5	6	0	25	0	0
4	26	10^{+}	0	0	2^{-}	0
5	5	13	0	13^{+}	0	2^{-}
6	0	0	13	6	16^{+}	0

الجدول (٨) : المصفوفة NC = 5

والمسار في الجدول (٨) هو: $\mathbf{6 \to 5 \to 4 \to 2 \to 1}$ و $\mathbf{2 = \theta}$

وبمتابعة الحل بوضع الإشارات على الجدول (٨) نحصل على الجداول (٩) التالي:

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	3	0	2	0
2	14	0	5	4	1	0
3	5	6	0	25	0	0
4	26	12	0	0	0	0
5	5	13	0	15	0	0
6	0	0	13	6	18	0

الجدول (٩) : المصفوفة NC = 6

الجدول (٩) يشير إلى وصولنا إلى الحل الأمثل وذلك بسبب عدم تمكننا من وضع إشارة (–) على عناصر العمود الأخير لأنها أصفار حسب الخطوة (٤) من المرحلة الثانية.

	1	2	3	4	5	6
1	0	9	0	14	2	0
2	0	0	0	5	4	0
3	0	0	0	0	0	10
4	0	0	10	0	7	2
5	0	0	0	0	0	13
6	0	0	0	0	0	0

الجدول (١٠) : المصفوفة *NC

باتباع خطوات المرحلة الثالثة من مراحل الخوارزمية: بطرح عناصر المصفوفة$NC = 6$ من عناصر المصفوفة $NC = 0$ ، نحصل على الجدول (١٠) الذي يمثل التدفق الأعظمي الأمثل.

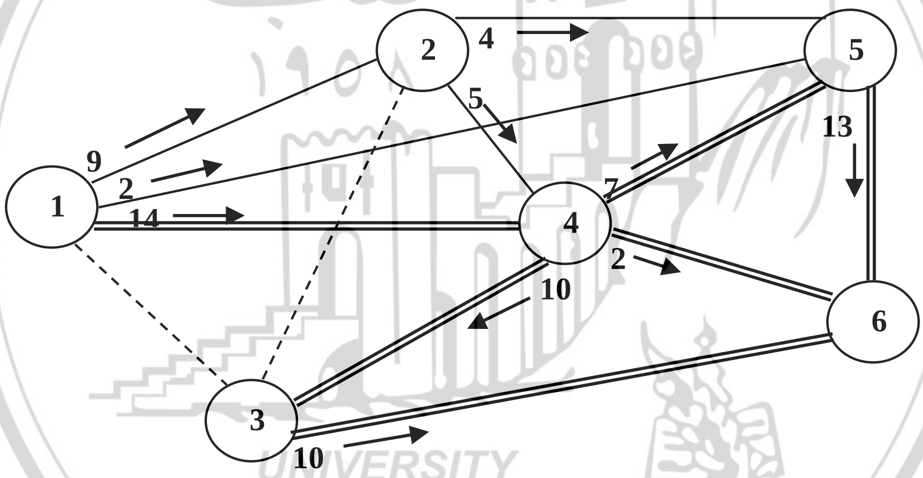
أما قيمة التدفق الأعظمي فيحسب بإحدى الطرق التالية:

١. مجموع قيم θ لجميع الجداول السابقة وتساوي 25 ،

٢. مجموع عناصر السطر الأول من مصفوفة *NC، الجدول (١٠)، وتساوي 25.

٣. مجموع عناصر العمود الأخير من مصفوفة *NC ، الجدول (١٠)، وتساوي 25.

الشكل (٩) يمثل شبكة التدفق الأعظمي للتوزيع الأمثل للكميات المنقولة.



الشكل (٩)

٣,٤,٩. ملاحظات ومقارنات

١- في مسائل التدفق الأعظمي ليس من الضروري أن تكون الكمية المتوافرة في S_0 مساوية الكمية المطلوبة t_0 كما إنه ليس من الممكن دائماً تأمين نقل الكمية الصغرى من هاتين الكميتين، ولكن يبرهن أننا إذا اتبعنا طريقة وضع الإشارات المذكورة سابقاً، وإذا لم نستطع وضع إشارة بجانب المصب t_0 فإن الحل الذي يكون لدينا هو أفضل حل ممكن.

٢- **خوارزمية فورد وفليكرسون** تقتضي بأن نبدأ بحل أولي ما، ثم نتبع طريقة وضع إشارات مبتدئين بالمنبع S_0 وصولاً إلى وضع إشارة بجانب المصب t_0 والانتقال إلى حل أفضل، كما رأينا سابقاً. ونكرر هذه العملية حتى نصل إلى حل لا نتمكن فيه من وضع إشارة بجانب المصب t_0 فيكون هو الحل النهائي الذي يؤمن نقل أكبر كمية ممكنة من S_0 إلى t_0.

٣- **خوارزمية فورد وفليكرسون** تعتمد مباشرة على المخطط الشبكي ويجب البدء كما ذكرنا في الملاحظة السابقة بحل ما، ثم نقوم بتحسينه، **إن هذه العملية ممكنة عندما يكون لدينا :**

- مخطط شبكي صغير الحجم، أي عندما يكون عدد المراكز محدوداً.
- كل قوس يمثل نقل كميات باتجاه واحد فقط.

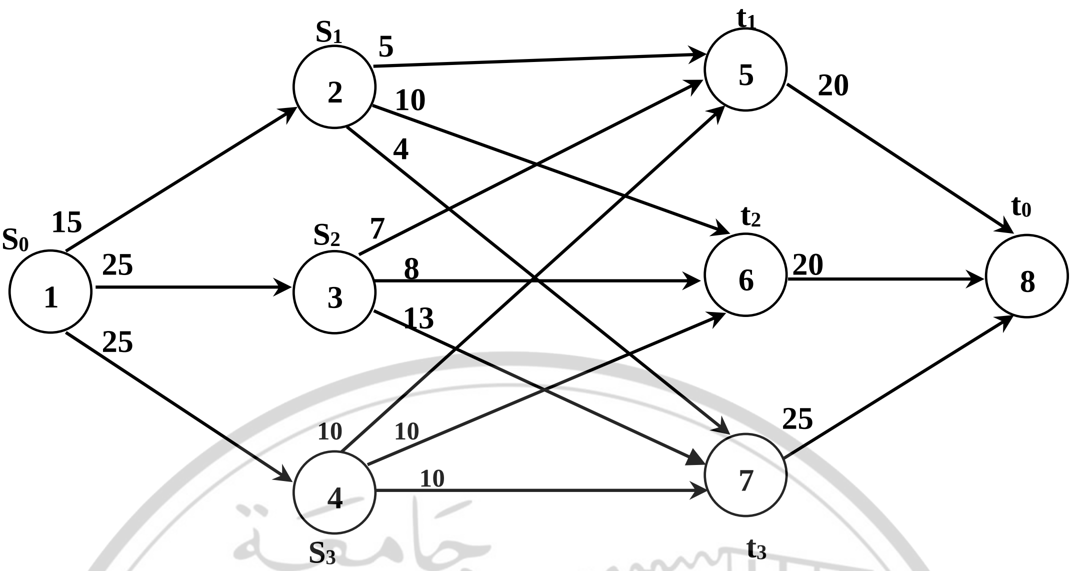
بينما في حالة المخططات الشبكية كبيرة الحجم أو المخططات الشبكية التي أقواسها تنقل كميات باتجاهين متعاكسين، فإن خوارزمية فورد فليكرسون تصبح عملية معقدة جداً وتستهلك وقتاً كبيراً.

٤- **خوارزمية نائب وماغوط** يمكنها أن تعالج أي نوع من الشبكات مهما يكن عدد الأقواس فيها بعد تحويل المخطط الشبكي إلى مصفوفة كما رأينا سابقاً.

٥- **خوارزمية نائب وماغوط** تحتاج إلى جداول عديدة للوصول إلى الحل الأمثل، لذلك فإن برمجتها حاسوبياً تعطي الحل بشكل أسرع، وهذا له الأثر الكبير في سرعة الحصول على النتائج لدى متخذي القرار ودقتها.

مثال (٤)

باستخدام خوارزمية نائب وماغوط جِدْ التدفق الأعظمي للشبكة الشكل (١٠):



الشكل (١٠)

الحل:

الجدول (١١) يمثل الشبكة السابقة والتي سنطبق عليها خطوات المرحلة الثانية من الخوارزمية، فنحصل على الجداول (١٢) ..... (٢٠)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		15	25 -	25				
2					5	10	4	
3	+				7	8	13 -	
4					10	10	10	
5								20
6								20
7			+					25 -
8							+	

الجدول (١١)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		15	12	25 -				
2					5	10	4	
3	13				7	8		
4	+				10 -	10	10	
5				+				20 -
6								20
7			13					12
8					+		13	

الجدول (١٢)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		15 -	12	15				
2	+				5	10 -	4	
3	13				7	8		
4	10					10	10	
5				10				10
6		+						20 -
7			13					12
8					10	+	13	

الجدول (١٣)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		5	12	15 -				
2	10				5		4	
3	13				7	8		
4	10 +					10 -	10	
5				10				10
6		10		+				10 -
7			13					12
8					10	10 +	13	

الجدول (١٤)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		5	12 -	5				
2	10				5 -	+	4	
3	13 +				7	8 -		
4	20						10	
5		+		10				10 -
6		10 -	+	10				
7			13					12
8					10 +	20	13	

الجدول (١٥)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		5	7 -	5				
2	10					5	4	
3	13 +				7 -	3		
4	20				+		10 -	
5		5	+	10 -				
6		5	5	10				
7			13	+				12 -
8					15	20	13 +	

الجدول (١٦)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		5 -		5				
2	10 +					5 -	4	
3	25					3		
4	20				7 -	+	3	
5		5	7	3 +				5 -
6		5 +	5	10 -				
7			13	7				5
8					15 +	20	20	

الجدول (١٧)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1				5 -				
2	15					+	4 -	
3	25					3		
4	20 +				2	5 -	3	
5		5	7	8				
6		10 -	5	10 +				
7		+	13	7				5 -
8					20	20	20 +	

الجدول (١٨)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1				1 -				
2	15					4		
3	25					3		
4	24 +				2	1	3 -	
5		5	7	8				
6		6	5	14				
7		4	13	7 +				1 -
8					20	20	24 +	

الجدول (١٩)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2	15					4		
3	25					3		
4	25				2	1	2	
5		5	7	8				
6		6	5	14				
7		4	13	8				
8					20	20	25	

الجدول (٢٠)

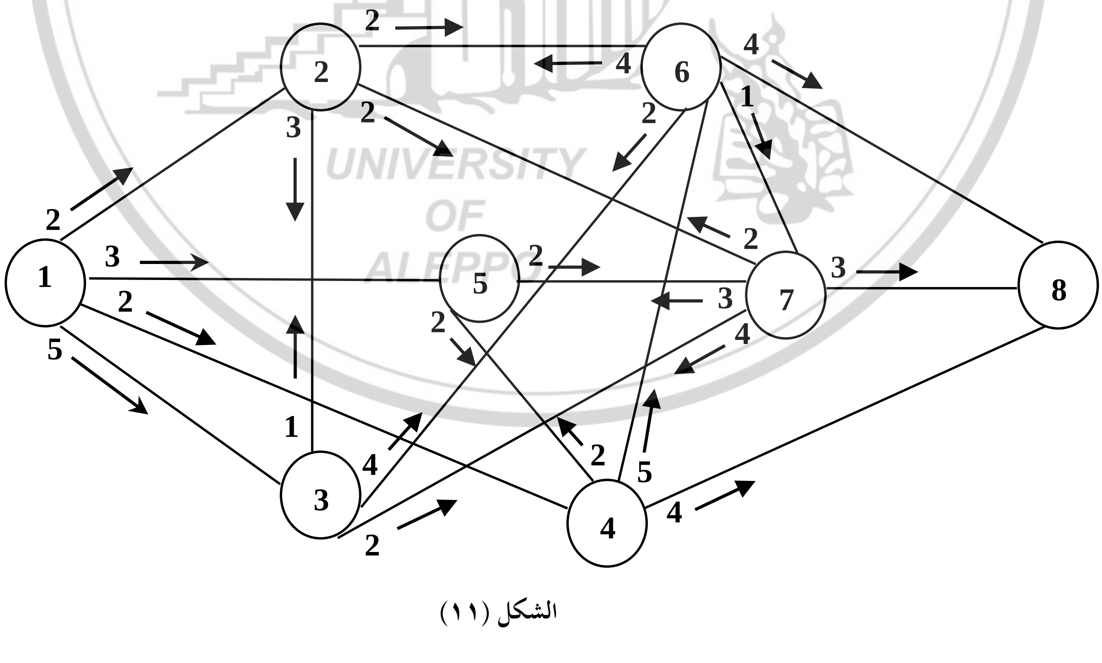
باتباع خطوات المرحلة الثالثة من مراحل الخوارزمية: نحصل على الجدول (٢١) الذي يمثل التدفق الأعظمي الأمثل.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		15	25	25				
2					5	6	4	
3					7	5	13	
4					8	9	8	
5								20
6								20
7								25
8								

الجدول (٢١) الحل الأمثل

أما قيمة التدفق الأعظمي **فيساوي** 65 .

مثال (٥): باستخدام خوارزمية نائب وماغوط جِدْ التدفق الأعظمي للشبكة التالية الشكل (١١):



الشكل (١١)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		2^{-}	1	2	1			
2	+		3^{-}			2	2	
3	4	1^{+}				2^{-}	0	
4					4	3^{+}		4^{-}
5	2						2	
6		4	4^{+}	2^{-}			1	
7		2	6		3			1
8				+		4	2	

الجدول (٢٤)

الجدول (٢٢) يمثل الشبكة السابقة والتي سنطبق عليها خطوات المرحلة الثانية من الخوارزمية، فنحصل على الجداول (٢٣) ..... (٢٨)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		2	5^{-}	2	3			
2			3			2	2	
3	+	1				4^{-}	2	
4					2	5		4
5				2			2	
6		4	2^{+}				1	4^{-}
7		2	4		3			3
8						+		

الجدول (٢٢)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		2	1	2	3^{-}			
2			3			2	2	
3	4	1				+	2^{-}	
4					2^{+}	5^{-}		4
5	+			2^{-}			2	
6		4	6^{-}	+			1	
7		2	4^{+}		3			3^{-}
8						4	+	

الجدول (٢٣)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		2^{-}	1	2	1			
2	+		3^{-}			2	2	
3	4	1^{+}				2^{-}	0	
4					4	3^{+}		4^{-}
5	2						2	
6		4	4^{+}	2^{-}			1	
7		2	6		3			1
8				+		4	2	

الجدول (٢٤)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1			1	2^{-}	1			
2	2		1^{+}			2	2^{-}	
3	4	3^{-}				+	0	
4	+				4	5^{-}		2
5	2						2	
6		4	6^{-}	+			1	
7		2^{+}	6		3			1^{-}
8				2		4	2^{+}	

الجدول (٢٥)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1			1^{-}	1	1			
2	2		2			2^{-}	1	
3	4^{+}	2^{-}				1	0	
4	1				4	4^{+}		2^{-}
5	2						2	
6		4^{+}	5	1^{-}			1	
7		3	5		3			
8				2^{+}		4	3	

الجدول (٢٦)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1				1	1 -			
2	2		3			1	1	
3	5 +	1				1	0	
4	1				4	5		1 -
5	2						2	
6		5	5				1	
7		3	6		3			
8				3 +		4	3	

الجدول (٢٧)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1					1			
2	2		3			1	1	
3	5	1				1	0	
4	2				4	5		
5	2						2	
6		5	5				1	
7		3	6		3			
8				4		4	3	

الجدول (٢٨)

باتباع خطوات المرحلة الثالثة من مراحل الخوارزمية: نحصل على الجدول (٢٩) الذي يمثل التدفق الأعظمي الأمثل.

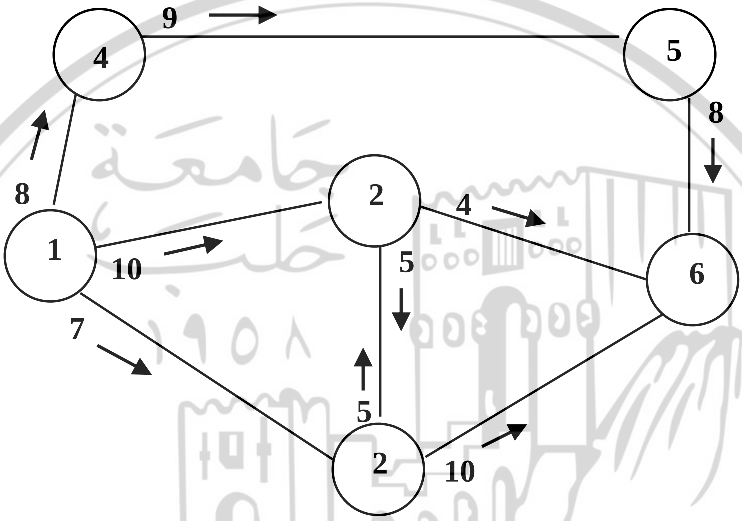
أما قيمة التدفق الأعظمي فيساوي 11 .

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		2	5	2	2			
2						1	1	
3		0				3	2	
4								4
5				2				
6								4
7								3
8								

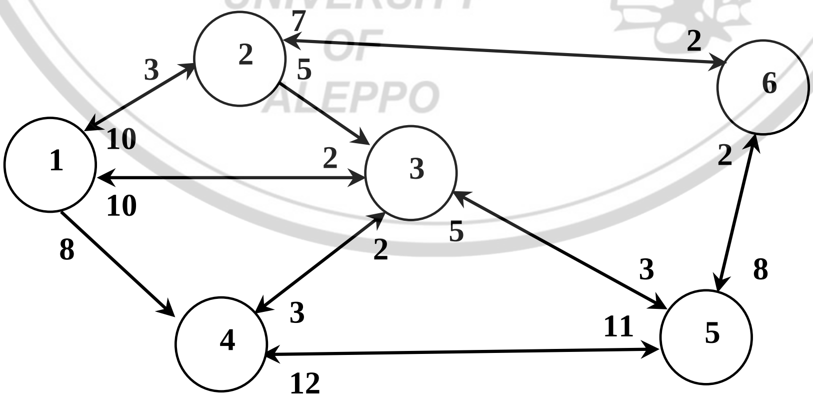
الجدول (٢٩) الحل الأمثل

مسائل عامة

١. جِدْ قيمة التدفق الأعظمي الذي سيتم نقله من المصدر إلى المصب وحدد المسار الذي يتم فيه النقل لكل من الشبكات التالية باستخدام خوارزمية فورد وفليكرسون، ثم باستخدام خوارزمية نائب وماغوط:



الشكل (١٢)



الشكل (١٣)

الوحدة الدراسية الثالثة
التحليل الشبكي
Network Analysis

تمهيد

التخطيط هو عصب الحياة، ونحن بني الإنسان خلقنا الله لنعمر الأرض ونستثمر دنيانا لآخرتنا.

تنقسم إدارة وتخطيط المشاريع إلى ثلاث مراحل:

١- دراسة المشروع وتقسيمه إلى أقسام يمكن السيطرة عليها وإدارتها بسهولة، فكلما صغر حجم المشروع كلما استطاع الإنسان تحديد أبعاده وإدراكه بصورة أفضل. تدعى الأقسام المختلفة التي تكون المشروع بالأنشطة ولكل نشاط بداية ونهاية.

٢- توصيف طبيعة كل نشاط والإجراءات اللازمة لإنجازه من خلال الإجابة على الأسئلة التالية:

- ما هي الفترة الزمنية اللازمة لإكمال كل نشاط من أنشطة المشروع؟
- هل الأنشطة متتالية؟
- هل يمكن تنفيذ أكثر للنشاط في آن واحد؟
- ما هي المواد اللازمة والأيدي العاملة والخبرات الفنية المتيسرة لتنفيذ المشروع؟
- ما هو رأس المال المتوفر لتنفيذ المشروع؟
- موقع المشروع وقربه من المواقع الحيوية؟

٣- السيطرة والرقابة: وذلك برسم صورة واضحة للمشروع بكامله من بدايته إلى نهايته وتقدير اللوازم المطلوبة ودراسة الإمكانات المتاحة لتنفيذ المشروع قبل أوانه وماذا يحدث لو تأخر المشروع، ما هو المردود وما هي التكاليف، كل هذا يجب أن يكون واضحاً ومعروفاً حتى نتمكن من الوصول إلى الهدف المنشود.

أهداف الوحدة الدراسية الأولى

بعد دراسة هذه الوحدة سيكون الطالب قادراً على:

١. رسم شبكة الأعمال التي تكون المشروع من خلال الانشطة السابقة والانشطة اللاحقة.

٢. فهم الفرق بين اسلوب المسار الحرج CPM (Critical path Method) وتقنية تقييم ومراجعة المشروع PERT (Project Evaluation and Review Technique) كأدوات إدارية فعالة في تخطيط وجدولة تنفيذ المشروعات ومتابعة عمليات التنفيذ والرقابة عليها.

٣. حساب زمن البداية المبكر والمتأخر للأنشطة وزمن الانجاز المبكر والمتأخر للأنشطة من أجل تحديد الانشطة الحرجة.

٤. تحديد المسار الحرج في شبكات CPM وحساب طوله.

٥. تحديد المسار الحرج في شبكات PERT وحساب طوله.

٦. دراسة الخواص الاحتمالية لشبكات PERT.

٧. حساب زمن البداية المتأخر وزمن الانجاز المبكر للأنشطة من أجل حساب الوقت الفائض للأنشطة غير الحرجة.

الفصل العاشر

تخطيط وجدولة المشاريع

١,١٠. مقدمة

يعتبر كل من اسلوب المسار الحرج CPM وتقنية تقييم ومراجعة المشروع PERT أداة إدارية فعالة في تخطيط وجدولة تنفيذ المشروعات ومتابعة عمليات التنفيذ والرقابة عليها.

أول من قام بتصميم اسلوب المسار الحرج شركة دي بونت Du pont الأمريكية عام ١٩٥٧ لأغراض تخطيط وجدولة تنفيذ أحد مصانع الكيماويات التابع لها، ثم انتشر استخدام هذا الأسلوب في عدد من مجالات الصناعات الإنشائية كبناء الجسور والمستشفيات والمصانع.

أما تقنية تقييم ومراجعة البرامج فقد صمم بتعاون مجموعة من الباحثين في عامي ١٩٥٨ و ١٩٥٩ لحساب البحرية الأمريكية بغرض تخطيط وجدولة تنفيذ مشروعاتها العسكرية ولأغراض التحكم في شفرات الأسلحة الهجومية والدفاعية، وقد انتشر هذا الاسلوب أيضاً منذ ذلك التاريخ في جدولة وتنفيذ المشروعات باختلاف أنواعها.

يتشابه اسلوب المسار الحرج CPM مع تقنية تقييم ومراجعة البرامج PERT من حيث الأسس والأطر والإجراءات فكل منهما يؤدي إلى توفير أفضل الخطط لتنفيذ المشروعات طبقاً لتتابعها الزمني والتقني، كما يوفر البيانات اللازمة لمتابعة التنفيذ بكفاءة

عن طريق التركيز على المهام والعمليات التي تمثل مراكز اختناق، غير أنهما يختلفان من حيث أسس وإجراءات حساب الزمن اللازم لتنفيذ كل مهمة أو عملية من عمليات المشروع كما يلي:

- **في شبكات CMP**: يقدر زمن وحيد لكل نشاط وأحياناً زمنين – زمن طبيعي وزمن مضغوط.
- **في شبكات PERT**: بما انه نموذج احتمالي فان زمن انجاز النشاط يتعلق بثلاثة تقديرات مختلفة للزمن هي:

١- **الزمن a**: هو الزمن الاكثر تفاؤلاً Optimistic Time (أي اقصر زمن ممكن) بافتراض تحقق أفضل الشروط لإنجاز النشاط.

٢- **الزمن m**: هو الزمن الاكثر امكانية (احتمالاً) Most Likely Time (أي منوال التوزيع) بافتراض تحقق شروط طبيعية لإنجاز النشاط.

٣- **الزمن b**: هو الزمن الاكثر تشاؤماً Pessimistic Time (أي اطول زمن ممكن) بافتراض تحقق أسوأ الشروط لإنجاز النشاط.

وقد بينت الدراسات أن تقديرات زمن انجاز النشاط في PERT تخضع لتوزيع بيتا β Beta Distribution وحسب هذا التوزيع فان التوقع الرياضي Mathematical Expectation لزمن انجاز كل نشاط هو:

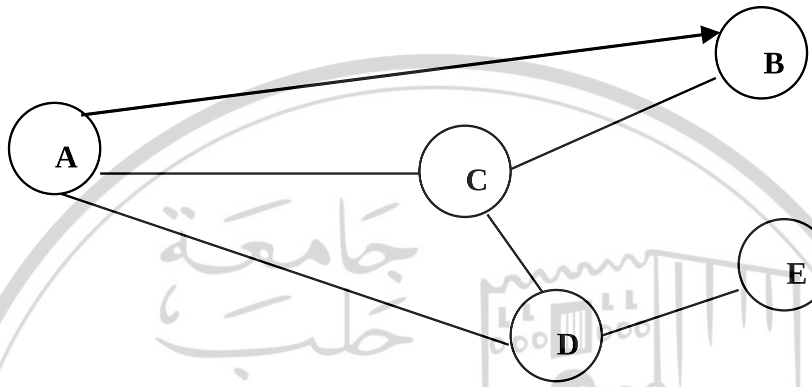
$$E = \frac{a + 4m + b}{6} \qquad \text{.......................................} \; (1)$$

والانحراف المعياري Standard Deviation لزمن انجاز كل نشاط هو:

$$\sigma = \frac{b - a}{6} \qquad \text{.......................................} \; (2)$$

٢,١٠. تعاريف ومصطلحات أساسية

الشبكة Network: هي مجموعة من العقد (nodes) ومجموعة من الأقواس (arcs) التي تصل بين أزواج العقد، يرمز للعقد إما بحروف متسلسلة أو بأعداد متسلسلة، وللأقواس بأسماء العقد التي تصل بينها، ومثال على ذلك الشبكة في الشكل (١).



الشكل (١)

القوس الموجه directed arc: يكون القوس موجهاً إذا كان له اتجاه مرتبط به، وتحدد الاتجاهات بوضع أسهم على الأقواس ومثال على ذلك القوس AB في الشكل (١) حيث أن حركة هذا القوس تبدأ من A وتنتهي في B ولا يسمح بحركة معاكسة من B إلى A ، وأما الأقواس غير الموجهة فيسمح بالحركة باتجاهين متعاكسين.

الأقواس المتصلة Connected arcs: نقول عن قوسين أنهما متصلين إن كان لهما عقدة مشتركة ومثال على ذلك في الشكل (١) الأقواس AB وAC متصلة أما AB وCD ليست متصلة.

المسار Path: إن تتابع الأقواس (مع إهمال اتجاهاتها) التي تصل بين العقدة i والعقدة j يسمى مساراً بين هاتين العقدتين، و إذا كان i=j عندئذ يشكل المسار حلقة (Loop)، ومثال الأقواس من AB إلى BC إلى CD إلى DE تشكل مساراً، أما الأقواس المتصلة من BC إلى CD إلى DA إلى AC ليست مساراً لأن العقدة C تقع فيه مرتان.

الشبكة المتصلة Connected Network: نقول عن الشبكة أنها متصلة إذا كان لكل زوج من العقد في الشبكة على الأقل مسار واحد يصل بينهما، ومثال على ذلك الشبكة في الشكل (١).

النشاط Activity: إن أي مشروع يقسم إلى مجموعات صغيرة من الأعمال التي يمكن السيطرة عليها بسهولة، وهذه المجموعات تدعى الأنشطة، هذه الأنشطة يجب أن تنفذ وفق تسلسل أو ترتيب معين بقصد الوصول إلى هدف نهائي منشود، وكل نشاط في المشروع يمثل بقوس موجه وعقدتين لتمثلا بداية ونهاية النشاط تسمى عقدة بداية النشاط بالحادث الخلفي tail event وعقدة نهاية النشاط بالحادث الأمامي head event الشكل(٢).

الشكل (٢)

يطلق على الحادث الذي يحدد بداية المشروع بحادث البداية Start event Project، ويطلق على الحادث الذي يحدد نهاية المشروع الحادث الأخير (النهائي) Terminal event Project.

إن انجاز الأنشطة يحتاج إلى بذل الجهد واستهلاك الزمن وإنفاق المال والموارد الأخرى، بينما نجد أن الحوادث لا تتطلب مطلقاً تخصيص مثل هذه الموارد.

٣,١٠. قواعد رسم الشبكة

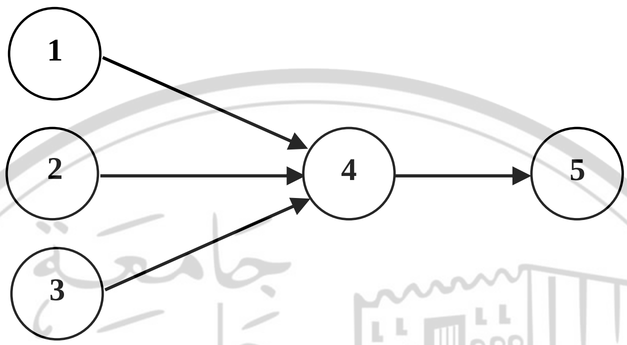
يمكن تلخيص القواعد الخاصة برسم شبكة كما يلي:

١- نمثل كل نشاط بقوس موجه، وكل حادث بعقدة تأخذ شكل دائرة صغيرة.

٢- نحدد جهة التقدم في كل نشاط بتخصيص رقم للحادث الخلفي (بداية النشاط) اصغر من الرقم الخاص بالحادث الأمامي (نهاية النشاط).

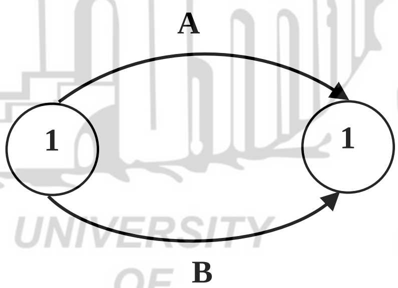
٣- القوس قد يأخذ شكل الخط المستقيم، وليس بالضرورة أن يكون طوله متناسباً مع مدة النشاط.

٤- لا يمكن أن تبدأ أية أنشطة في كل حادث ما لم تنجز تماماً الأنشطة التي تنتهي في هذا الحادث كما في الشكل (٣).



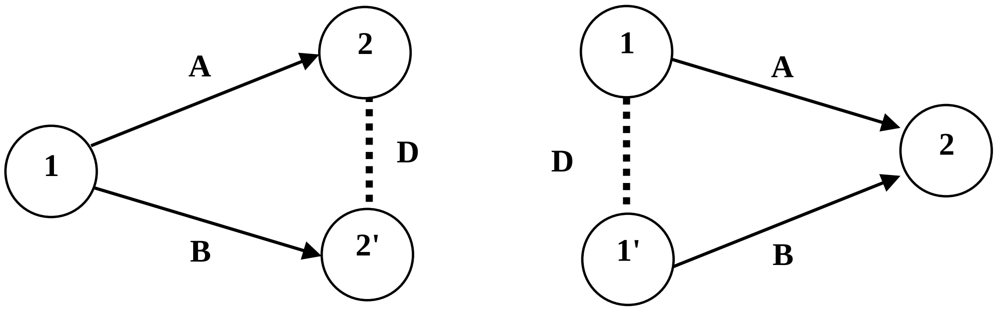
الشكل (٣)

٥- لا يمكن أن يكون لنشاطين في آن واحد الحادث الخلفي والحادث الأمامي، كما في الشكل (٤).



الشكل (٤)

وإذا كان هناك نشاطان يمكن انجازهما في آن واحد عندئذ يجب إدخال نشاط وهمي إلى الشبكة (نرسم النشاط الوهمي بخط منقط (متقطع)) لتمييز إما الحادث الخلفي لهذين النشاطين كما في الشكل (٥) (أ)، أو الحادث الأمامي لهذين النشاطين كما في الشكل (٥) (ب).



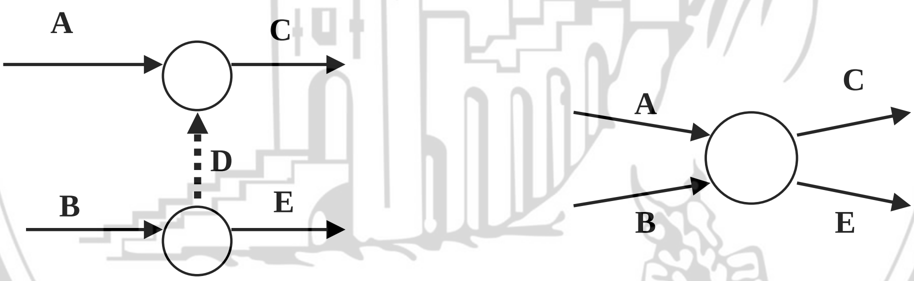
أ

ب

الشكل (٥)

ويلاحـظ في الشـكل (٥) أن النشـاط D الـوهمي لا يسـتهلك زمنـاً ولا يحتـاج إلى موارد معينة وفائدته فقط في تأسيس العلاقات المنطقية في الشبكة.

مثال (١): الشكل (٦) يمثل الشبكة المحددة بالأنشطة التالية: النشاطات A , B يسبقان النشاط C و النشاط E يلحق أو يلي النشاط B فقط.



(الرسم الصحيح) (الرسم خطأ)

الشكل (٦)

٦- لتأسيس علاقات الأسبقية بين الأنشطة بشكل صحيح في الشبكة يجب الاجابة على الأسئلة التالية عند اضافة أي نشاط جديد الى الشبكة:

- ما هي الأنشطة التي يجب ان تنجز قبل أن يبدأ هذا النشاط؟
- ما هي الأنشطة التي يجب أن تلي هذا النشاط؟
- ما هي الأنشطة التي يجب أن تنفذ مع هذا النشاط في آن واحد؟

٧- يوضع إلى جانب كل قوس الزمن اللازم لانجاز النشاط الذي يمثله هذا القوس.

مثال (٢): ارسم المخطط الشبكي الذي يوضح الفعاليات والأنشطة المختلفة لمشروع حفر بئر نفطي، حيث أن الأنشطة هي:

A : تحديد المنطقة المطلوب التنقيب عن النفط فيها.

B : بناء الطرق والجسور المطلوبة.

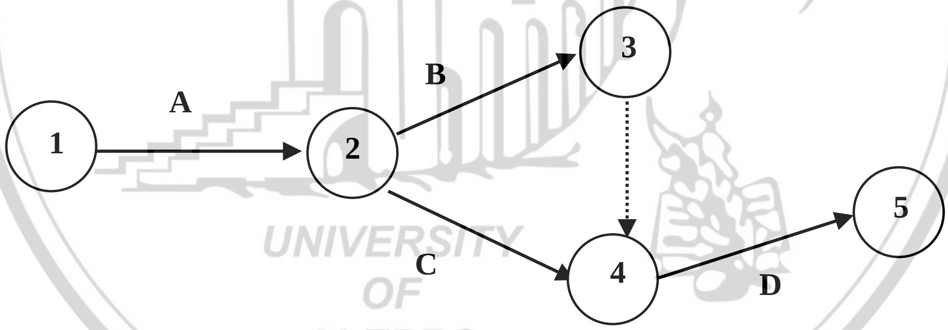
C : تأسيس مواقع السكن والعمل.

D : تحضير المعدات والأجهزة المطلوبة في عمليات الحفر والشروع في الحفر.

مع العلم انه لا يمكن بناء الطرق وتأسيس المواقع دون معرفة المنطقة.

من خلال نص المسألة نلاحظ أن C , B يشتركان في نفس نقطة البداية والنهاية و A النشاط الأول، و D النشاط النهائي.

لذلك لابد من ادخال نشاط وهمي K لتميز إما الحادث الخلفي أو الامامي للنشاطين B,C ، الشكل (٧).



الشكل (٧)

مثال (٣) ارسم شبكة CPM التي تتضمن الانشطة التالية (الزمن بالأسابيع)

النشاط	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
الزمن	3	4	6	5	2	7	3	5	3	4	6	8

بحيث تتحقق علاقات الأسبقية التالية:

١- الأنشطة C , B , A هي الانشطة الأولى في المشروع ويمكن أن تبدأ في آن واحد.

٢- النشاطان B , A يسبقان النشاط D.

٣- النشاط B يسبق الأنشطة F , E , H.

٤- النشاطان C , F يسبقان النشاط G.

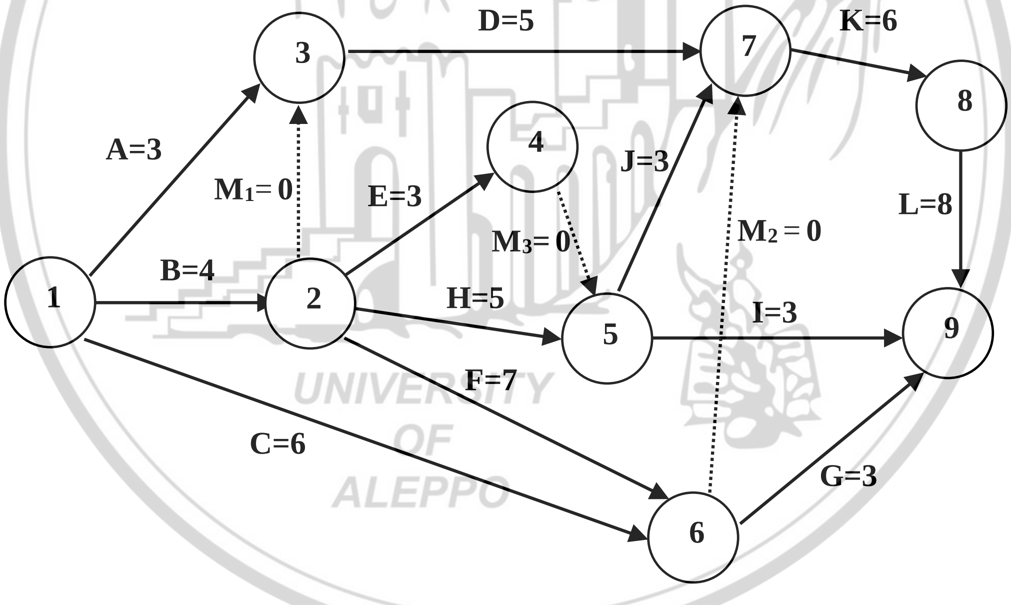
٥- النشاطان H , E يسبقان النشاطان J , I.

٦- الأنشطة J , F , D , C تسبق النشاط K.

٧- النشاط K يسبق النشاط L.

٨- الأنشطة L , G , I هي الانشطة النهائية في المشروع.

الشكل (٨) يعبر عن رسم الشبكة للمثال المعطى، حيث نلاحظ أن الأنشطة الوهمية M_1 وM_2 استخدمت لبناء علاقة الاسبقية باسلوب صحيح والنشاط الوهمي M_3 لتميز الحادث الامامي للنشاطين H,E.



الشكل (٨)

مثال (٤): ارسم شبكة PERT لمشروع تجهيز شقة سكنية بعد أن تم بناء الهيكل الخارجي لها، يتألف هذا المشروع من ثمانية أنشطة وسبع حوادث مع العلم ان تقديرات الزمن الثلاثة (الاكثر تفاؤلاً والاكثر امكانية والأكثر تشاؤماً) وكذلك القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لزمن انجاز كل نشاط مبين في الجدول (١)

رمز النشاط	موضوع النشاط	تقديرات الزمن			التوقع الرياضي	الانحراف المعياري
		a	m	b	E	σ
A	تجهيز المواد الاولية اللازمة والتعاقد مع ورشات العمل	4	6	8	6	0.67
B	تأسيس التمديدات الكهربائية	2	3	5	3.17	0.5
C	تأسيس التمديدات الصحية	3	4	6	4.17	0.5
D	وضع الابواب والنوافذ	2	3	7	3.5	0.83
E	تبليط الأرض	5	7	10	7.17	0.83
F	الاكسار الداخلي	6	9	15	9.5	1.5
H	طلاء المنزل	5	7	9	7	0.67
G	اكمال التمديدات الكهربائية والصحية	2	3	5	3.17	0.5

الجدول (١)

وبفرض ان الأنشطة في المشروع تحقق علاقات الاسبقية التالية:

١- النشاط A يسبق النشاطين C , B

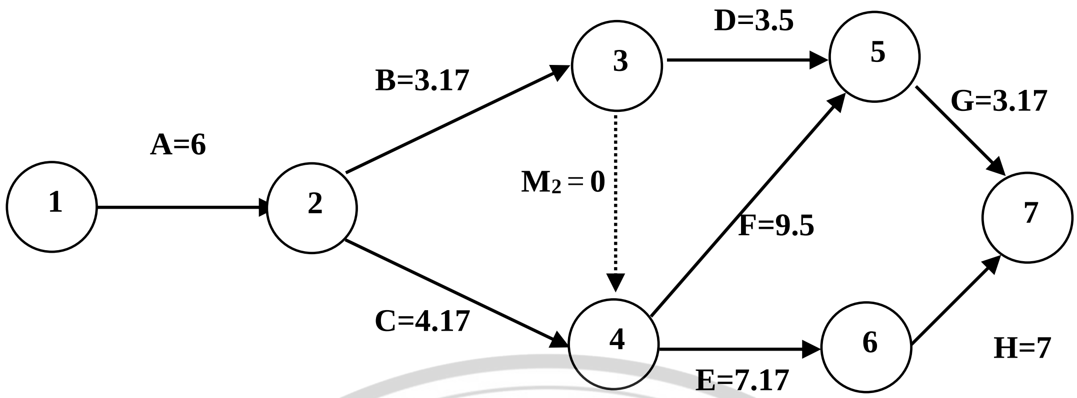
٢- النشاط C يسبق النشاطين F , E

٣- النشاط E يسبق النشاط H.

٤- النشاط B يسبق الانشطة F , E , D.

٥- النشاط H , G هما نشاطان نهائيان في المشروع.

الشكل (٩) يعبر عن رسم الشبكة للمشروع، حيث استخدمنا النشاط الوهمي L لتحقيق علاقة الاسبقية.



الشكل (٩)

٤,١٠. تحديد المسار الحرج في الشبكات وحساب طوله

يتألف المسار الحرج في شبكة ما من سلسلة الأنشطة الحرجة التي تصل بين حادث بداية الشبكة وحادث نهاية الشبكة والتي تشكل اطول مسار فيها.

ونقول عن نشاط أنه حرج اذا كان التأخير في البدء به يؤدي إلى تأخير الانتهاء من انجاز المشروع بكامله، ونقول عن نشاط انه غير حرج اذا كانت طبيعة المشروع تسمح بالبدء به في وقت مبكر او انجازه في وقت متأخر دون ان يؤثر على التاريخ المحدد لإنجاز المشروع بكامله.

يرافق النشاط غير الحرج وقت فائض يعطي للإدارة مرونة في استخدام الموارد المتاحة.

اما لتحديد وحساب المسار الحرج في شبكات CPM وشبكات PERT يتم من خلال ثلاث مراحل:

١- حساب زمن البداية المبكر للأنشطة (حسابات مرحلة الانتقال نحو الامام).

٢- حساب زمن الانجاز المتأخر للأنشطة (حسابات مرحلة الانتقال نحو الوراء).

٣- مرحلة تحديد الانشطة الحرجة وطولها.

١,٤,١٠. دراسة المسار الحرج في شبكات CPM

لتحديد الانشطة التي تشكل المسار الحرج للمشاريع التي تؤول إلى شبكات **CPM** نتبع المراحل والخطوات التالية:

المرحلة الأولى: حساب زمن البداية المبكر Earliest Start Time **لجميع الانشطة** (حسابات مرحلة الانتقال نحو الامام).

لنرمز بـ ES_i إلى زمن البداية المبكرة لجميع الأنشطة التي تنطلق من الحادث i ، وقد اتفق على أنه عندما i=1 أي حادث بداية الشبكة فان: $ES_1 = 0$

ولنرمز بـ D_{ij} إلى مدة النشاط (i,j). وبالتالي فإننا نحصل على حسابات الانتقال نحو الامام بتطبيق العلاقة التالية: (الحسابات تتم من حادث بداية الشبكة نحو الامام باتجاه حادث نهاية الشبكة).

$$ES_j = \underset{i}{Max}[ES_i + D_{ij}] \qquad \text{..............................} \ (3)$$

لجميع الانشطة (i,j) وحيث أن $ES_1 = 0$

من العلاقة السابقة نلاحظ أنه لحساب زمن البداية المبكر للحادث (j) يجب ان نحسب أولاً زمن البداية المبكر للحوادث الخلفية لجميع الأنشطة (i,j) والتي تنتهي في الحادث (j).

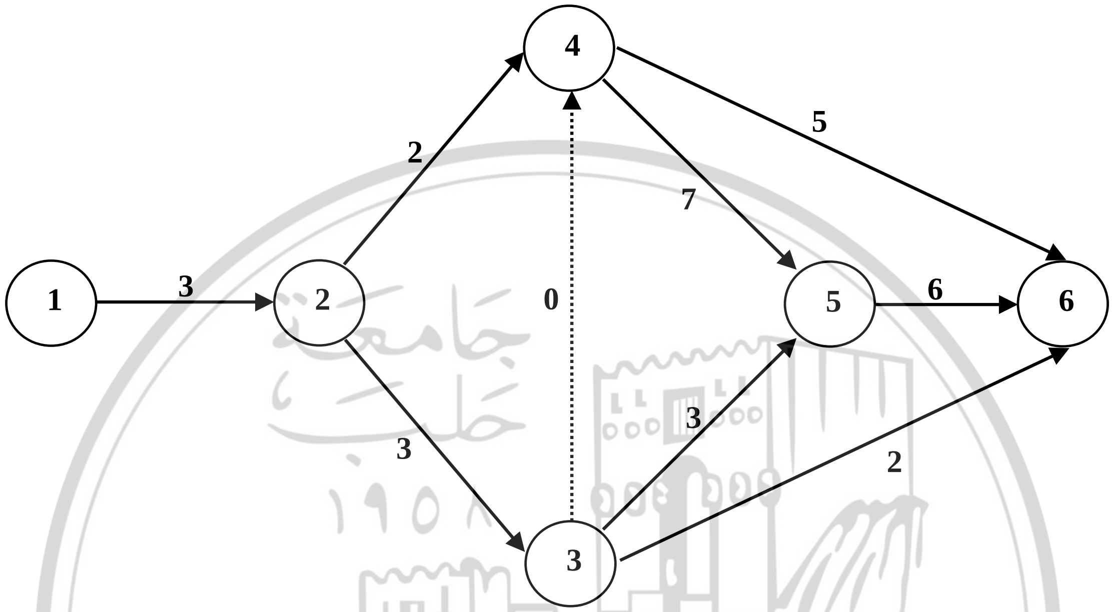
ومن أجل سهولة الدراسة يمكن وضع النتائج إما في جدول أو نضع القيم الناتجة في مربعات فوق أو بجانب الحوادث.

مثال (٥): لدينا الشبكة CPM لأحد المشاريع التالية الشكل (١٠) والمطلوب تحديد المسار الحرج وطوله.

لنطبق عليها حسابات الانتقال نحو الأمام:

١. زمن البداية المبكر عند الحادث (1) بداية المشروع:

حسب القاعدة فإن $ES_1=0$ ، زمن البداية المبكر لبدء المشروع، ونضع هذه القيمة في المربع الذي يقع فوق الحادث (1) (حادث بداية النشاط).



الشكل (١٠)

٢. زمن البداية المبكر عند الحادث (2):

$$ES_2 = ES_1 + D_{12} = 0 + 3 = 3$$

وذلك لأنه يوجد نشاط وحيد النشاط (1,2) ينتهي في الحادث (2) يسبق النشاطين (2,3) و(2,4)، وبالتالي زمن البداية المبكر للنشاطين (2,3) و(2,4) هو 3، ونضع هذه القيمة في المربع الذي يقع فوق الحادث (2)، انظر الشكل (١١).

٣. زمن البداية المبكر عند الحادث (3):

$$ES_3 = ES_2 + D_{23} = 3 + 3 = 6$$

وذلك لأنه يوجد نشاط وحيد (2,3) ينتهي في الحادث (3) يسبق الأنشطة (3,4) و(3,5) و(3,6)، وبالتالي زمن البداية المبكر للأنشطة (3,4) و(3,5) و(3,6) هو 6، ونضع هذه القيمة في المربع الذي يقع جانب الحادث (3)، انظر الشكل (١١).

٤. **زمن البداية المبكر عند الحادث (4):**

$$ES_4 = \underset{i=2,3}{Max}[(ES_2+D_{24}),(ES_3+D_{34}) = Max[(3+2),(6+0)] = 6$$

وذلك لأنه يوجد نشاطان (2,4) و(3,4) ينتهيان في الحادث (4) ويسبقان النشاطين (4,5) و(4,6)، وبالتالي زمن البداية المبكر للنشاطين (4,5) و(4,6) هو القيمة الاكبر أي 6، ونضعها فوق الحادث (4)، انظر الشكل(١١).

٥. **زمن البداية المبكر عند الحادث (5):**

$$ES_5 = \underset{i=3,4}{Max}[(ES_3+D_{35}),(ES_4+D_{45}) = Max[(6+3),(6+7)] = 13$$

وذلك لأنه يوجد نشاطان (3,5) و(4,5) ينتهيان في الحادث (5) ويسبقان النشاط (5,6) وبالتالي زمن البداية المبكر للنشاط (5,6) هو القيمة الاكبر أي 13، ونضعها فوق الحادث(5)، انظر الشكل (١١).

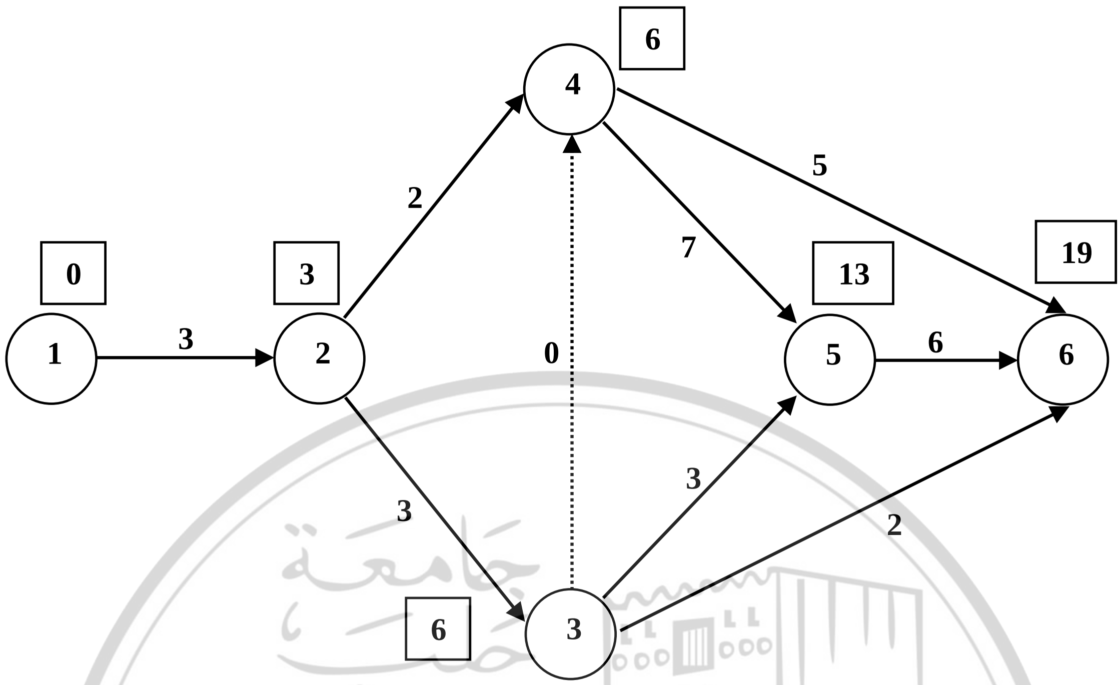
٦. **زمن البداية المبكر لإنهاء المشروع:**

$$\begin{aligned} ES_6 &= \underset{i=3,4,5}{Max}[(ES_3+D_{36}),(ES_4+D_{46}),(ES_5+D_{56})] \\ &= Max[(6+2),(13+6),(6+5)] = 19 \end{aligned}$$

وذلك لأنه يوجد ثلاثة أنشطة نهائية (3,6) و(4,6) و(5,6) تنتهي في الحادث(6)، وبالتالي زمن انهاء المشروع المبكر هو القيمة الاكبر 19، ونضعها في المربع فوق الحادث(6)، انظر الشكل (١١). والجدول (٢) يبين الأزمنة المبكرة لجميع الانشطة .

زمن البداية المبكر ES_i	المدة الزمنية D_{ij}	النشاط (i,j)
0	3	(1,2)
3	3	(2,3)
3	2	(2,4)
6	0	(3,4)
6	3	(3,5)
6	2	(3,6)
6	7	(4,5)
6	5	(4,6)
13	6	(5,6)

الجدول(٢)



الشكل (١١)

المرحلة الثانية: حساب زمن الانجاز المتأخر Latest Completion Time **لجميع الأنشطة** (حسابات مرحلة الانتقال نحو الوراء).

في هذه المرحلة يتم الانتقال من حادث نهاية الشبكة إلى الوراء حتى حادث بداية الشبكة وتهدف هذه المرحلة إلى حساب زمن الانجاز المتأخر (زمن النهاية المتأخر) لجميع الانشطة.

لنرمز بـ LC_i لزمن الانجاز المتأخر لجميع الأنشطة المنتهية في الحادث i، وقد اتفق على انه عندما i=n الحادث النهائي فإن $LC_n = ES_n$ وبالتالي نحصل على حسابات الانتقال نحو الوراء بتطبيق العلاقة التالية:

$$LC_i = \underset{j}{Min}[LC_j - D_{ij}] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(4)}$$

لجميع الانشطة (i,j) وحيث ان $LC_n = ES_n$

من العلاقة السابقة نلاحظ أنه لحساب زمن النهاية المتأخر للحادث (i) يجب أن نحسب أولاً زمن النهاية المتأخرة لجميع الانشطة التي تنطلق من الحادث (i). ونضع القيم الناتجة داخل مثلثات فوق أو بجانب الحوادث.

١. زمن الانجاز المتأخر لإنهاء المشروع عند الحادث(6):

$$LC_6 = ES_6 = 19$$

حسب القاعدة ونضع القيمة داخل المثلث فوق الحادث (6) انظر الشكل (١٢).

٢. زمن الانجاز المتأخر عند الحادث(5):

$$LC_5 = [LC_6 - D_{56}] = 19 - 6 = 13$$

وذلك لأنه يوجد نشاط وحيد (5,6) يبدأ من الحادث (5) وينتهي عند الحادث (6) وبالتالي زمن الانجاز المتأخر للنشاط (5,6) هو 13، ونضع النتيجة داخل المثلث بجانب الحادث (5) انظر الشكل (١٢).

٣. زمن الانجاز المتأخر عند الحادث(4)

$$LC_4 = \underset{j=5,6}{\mathrm{Min}}[LC_j - D_{4j}] = \mathrm{Min}[(13-7),(19-5)] = 6$$

لأنه يوجد نشاطان (4,5) ,(4,6) يبدآن من الحادث (4) وبالتالي زمن الانجاز المتأخر للنشاطين (4,5) و(4,6) هو القيمة الاصغر 6، ونضع النتيجة داخل المثلث فوق الحادث (4) انظر الشكل (١٢).

٤. زمن الانجاز المتأخر عند الحادث(3)

$$LC_3 = \underset{j=4,5,6}{\mathrm{Min}}[LC_j - D_{3j}] = \mathrm{Min}[(6-0),(13-3),(19-2)] = 6$$

لأنه يوجد ثلاثة انشطة (3,4) و(3,5) و(3,6) تبدأ من الحادث (3) وبالتالي زمن الانجاز المتأخر للأنشطة (3,4) و(3,5) و(3,6) هو القيمة الاصغر 6، ونضع النتيجة داخل المثلث بجانب الحادث (3)، انظر الشكل (١٢).

٥. زمن الانجاز المتأخر عند الحادث(2)

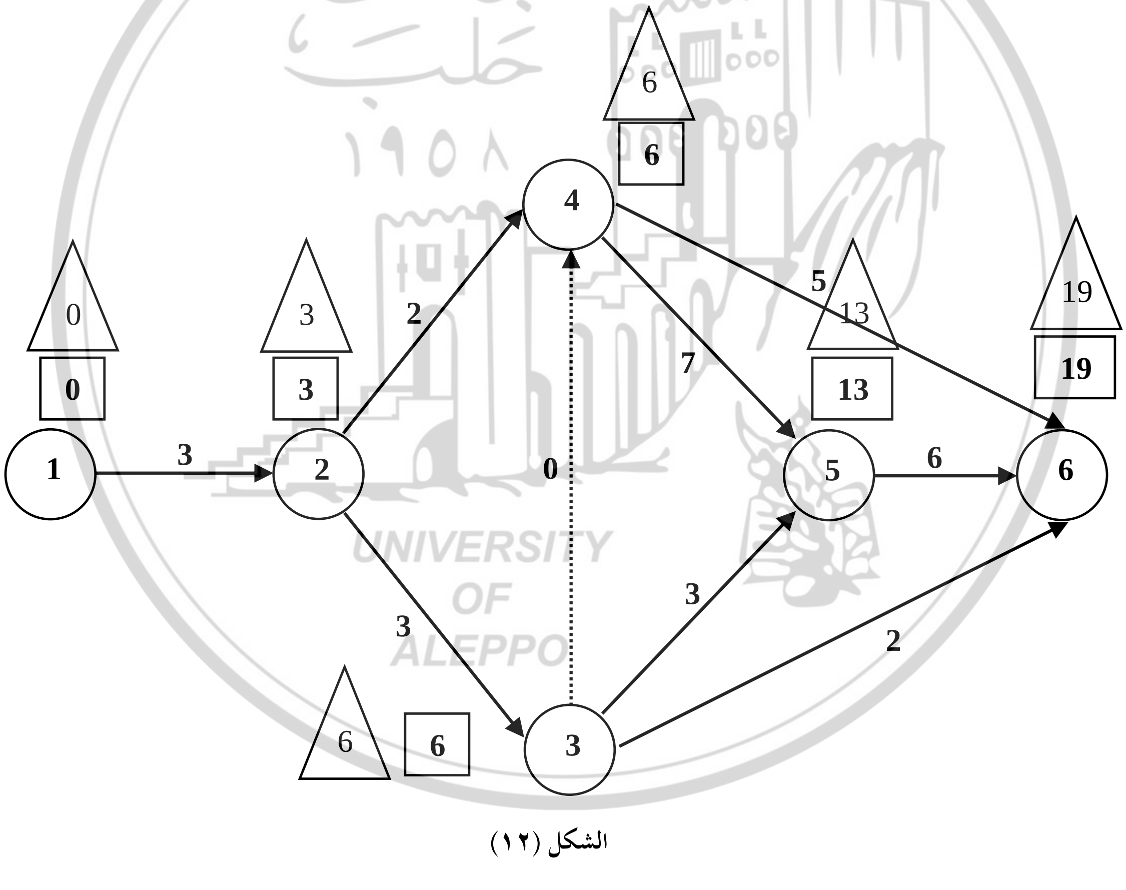
$$LC_2 = \underset{j=3,4}{\mathrm{Min}}[LC_j - D_{2j}] = \mathrm{Min}[(6-3),(6-2)] = 3$$

لأنه يوجد نشاطان (2,3) و(2,4) يبدآن من الحادث (2) وبالتالي زمن الانجاز المتأخر للأنشطة (2,3) و(2,4) هو القيمة الاصغر 3، ونضع النتيجة داخل المثلث فوق الحادث (2)، انظر الشكل (١٢).

٦. زمن الانجاز المتأخر عند الحادث(1) بداية المشروع

$$LC_1 = [LC_2 - D_{12}] = [3-3)] = 0$$

لأنه يوجد نشاط وحيد (1,2) يبدأ من الحادث (1) وبالتالي زمن الانجاز المتأخر للنشاط (1,2) هو 0، ونضع النتيجة داخل المثلث فوق الحادث (1). انظر الشكل (١٢).



الشكل (١٢)

والجدول (٣) يبين ازمنة الانجاز المتأخر لجميع الانشطة اضافة إلى الأزمنة المبكرة لجميع الانشطة.

زمن الانجاز المتأخر LC_j	زمن البداية المبكر ES_i	المدة الزمنية D_{ij}	النشاط (i,j)
3	0	3	(1,2)
6	3	3	(2,3)
6	3	2	(2,4)
6	6	0	(3,4)
13	6	3	(3,5)
19	6	2	(3,6)
13	6	7	(4,5)
19	6	5	(4,6)
19	13	6	(5,6)

الجدول(٣)

المرحلة الثالثة: مرحلة تحديد الانشطة الحرجة وطوله

تحدد الانشطة الحرجة باستخدام نتائج الانتقالين نحو الأمام ونحو الوراء حسب القاعدة التالية:

نقول إن النشاط (i,j) يقع في المسار الحرج اذا تحققت الشروط الثلاثة التالية معاً:

$$\left.\begin{array}{l} ES_i = LC_i \\ ES_j = LC_j \\ ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = D_{ij} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5)$$

العلاقات السابقة تعني أنه يجب ان تتساوى القيم الموضوعة في المثلث وفي المربع المرافق للحادث الخلفي وللحادث الامامي لكل نشاط بالإضافة إلى أن يكون الفرق بين القيمة في المربع (أو المثلث) للحادث الأمامي والقيمة في المربع (أو المثلث) للحادث الخلفي يساوي مدة النشاط وبالاعتماد على العلاقات (٥) نجد أن الانشطة: (1,2) , (2,3) , (3,4) , (4,5) , (5,6) تحدد المسار الحرج في الشبكة المدروسة والذي يساوي 19 وحدة زمنية، ونلاحظ أن بقية الأنشطة تحقق الشرط الأول والثاني ولكنها لا تحقق الشرط الثالث وبالتالي هي أنشطة غير حرجة.

٢,٤,١٠. دراسة المسار الحرج في شبكة PERT

ذكرنا سابقاً أن الفرق بين شبكة CPM و PERT هو في تحديد زمن انجاز النشاط إذ أن مدة النشاط D_{ij} في شبكاتCPM هو زمن محدد وبالتالي فان المسار الحرج في CPM يأخذ قيمة محددة تساوي مجموع قيم D_{ij} للأنشطة الحرجة الداخلة فيه، بانحراف معياري يساوي الصفر (كما تم في الفقرة السابقة).

أما في شبكة PERT فانه توجد ثلاثة تقديرات لزمن انجاز النشاط (a,m,b) وبالتالي فإنه لحساب قيمة المسار الحرج وتحديد الأنشطة الحرجة نتبع نفس الاسلوب السابق ولكن عوضاً عن D_{ij} زمن انجاز النشاط (i,j) نأخذ القيمة المتوقعة E_{ij} لزمن انجاز النشاط (i,j) المحسوبة في العلاقة (١)، وبالتالي فإن العلاقات (٣) و(٤) و(٥) تأخذ الشكل:

$$ES_j = \underset{i}{Max}[ES_i + E_{ij}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

لجميع الانشطة (i,j) وحيث أن $ES_1 = 0$

$$LC_i = \underset{j}{Min}[LC_j - E_{ij}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

لجميع الانشطة (i,j) وحيث ان $LC_n = ES_n$

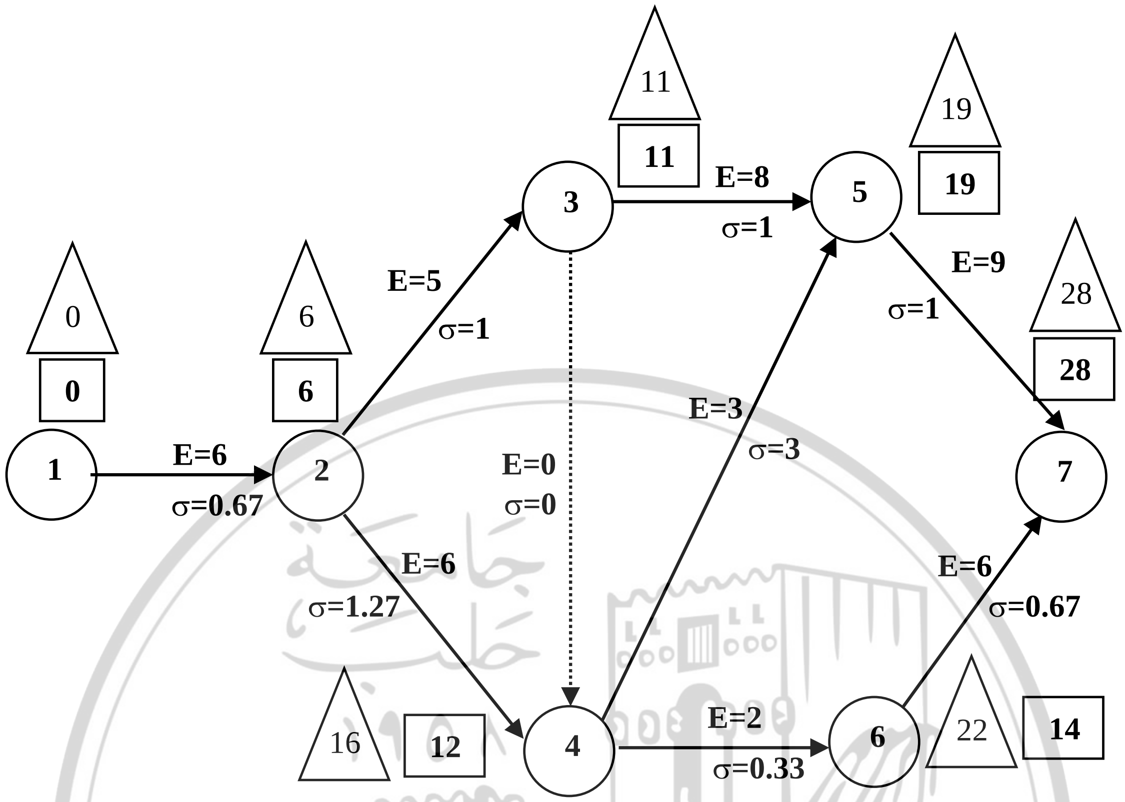
$$\left.\begin{array}{l} ES_i = LC_i \\ ES_j = LC_j \\ ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = E_{ij} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

وبناء على ذلك فان المسار الحرج في شبكة PERT يساوى مجموع القيم المتوقعة للأنشطة الحرجة الداخلة في المسار أما الانحراف المعياري للمسار الحرج في PERT فيحسب باستخدام العلاقة التالية:

$$\sigma_{PE} = \sqrt{\sum \sigma_{ij}^2} \quad ; \quad \text{للأنشطة الحرجة فقط } \sigma_{ij} \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

وحيث σ_{ij} هي الانحراف المعياري لزمن انجاز النشاط (i,j) المحسوب بالعلاقة (٢).

مثال (٦): جِدْ المسار الحرج لشبكة PERT الشكل (١٣)، حيث أن القيمة المتوقعة لأزمنة انجاز الانشطة المختلفة والانحراف المعياري موجودة فوق كل نشاط.



الشكل (١٣)

نحسب القيم بداخل المربعات باستخدام العلاقة (٦) والقيم داخل المثلثات باستخدام العلاقة (٧) وحسب العلاقات (٨) نجد أن الأنشطة التالية:

(1,2) , (2,3) , (3,5) , (5,7) تحدد المسار الحرج في شبكة PERT وقيمته تساوي مجموع القيم المتوقعة للأنشطة الحرجة السابقة أي تساوي 28 وحدة زمنية أما الانحراف المعياري للمسار الحرج حسب العلاقة (٩) يساوي:

$$\sigma_{PE} = \sqrt{(0.67)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2} = 1.857$$

٣,٤,١٠. الخواص الاحتمالية الاخرى لشبكات PERT

بسبب كون شبكات PERT تخضع لقوانين الاحتمال فانه بالإمكان الحصول على خواص اخرى غير المسار الحرج، تلعب دوراً هاماً في انجاز المشاريع واتخاذ القرار المتعلق بتنفيذ وانجاز المشاريع.

أولاً: حساب احتمال انجاز تنفيذ المشروع بعد مضي وقت معين وليكن x على البداية بالمشروع:

هذا الاحتمال يمكن استخراجه من جدول التوزيع الطبيعي المعياري، الذي يقابل قيمة المتغير الطبيعي المعياري Z والذي يحسب من العلاقة:

$$Z = (x - E) / \sigma_{PE} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

بمستوى دلالة مقداره $\alpha = 0.05$

مثال (٧): ما هو احتمال انجاز المشروع بعد مضي 30 وحدة زمنية

في المثال السابق وجدنا ان التوقع الرياضي لإنجاز المشروع هو 28 وحدة زمنية بانحراف معياري مقداره 1.857 ± وحدة زمنية، وبالتالي لحساب احتمال انجاز المشروع بعد مضي 30 وحدة زمنية أي $(x = 30)$ نحسب Z من العلاقة السابقة أي:

$$Z = (30 - 28) / 1.857 = 1.1$$

وبالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن الاحتمال الذي يقابل القيمة $Z = 1.1$ بمستوى دلالة $\alpha = 0.05$ يساوي 0.8749.

ثانياً: تحديد الزمن T الذي تكون فيه الإدارة على ثقة من انجاز المشروع بمستوى دلالة $\alpha = 0.05$ أي بدرجة ثقة تعادل $0.95 = (1 - 0.05)$

ويتم ذلك بإيجاد العدد المقابل للاحتمال 0.95 من جدول التوزيع الطبيعي المعياري والذي يساوي 1.65 وعندئذ الزمن يحسب من العلاقة التالية:

$$T = E + 1.65\, \sigma_{PE} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

وحسب مثالنا السابق:

$$T = 28 + 1.65\,(1.857) = 31.06$$

أي انه بعد مضي 31 وحدة زمنية على بداية المشروع تكون الادارة على ثقة من انجاز المشروع باحتمال 0.95 .

٥,١٠. حساب الوقت الفائض في شبكات CPM و PERT

الوقت الفائض للأنشطة الحرجة يساوي الصفر، بينما للأنشطة غير الحرجة فيكون مختلفاً عن الصفر، واقتصادياً فإن الوقت الفائض هو المدة الزمنية التي يمكن بمقدارها تأخير البدء بتنفيذ نشاط دون أن يؤدي ذلك إلى تأخير في انجاز المشروع.

وقبل حساب الوقت الفائض سنعرف زمنين جديدين هما:

١- زمن البداية المتأخر LS_{ij} (Latest Start Time) للنشاط (i,j) ويحسب من العلاقة:

$$LS_{ij} = LS_j - D_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

٢- زمن الانجاز المبكر EC_{ij} (Earliest Completion Time) للنشاط (i,j) ويحسب من العلاقة:

$$EC_{ij} = ES_i + D_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

وبالتالي الوقت الفائض F (Float) للنشاط (i,j) هو عبارة عن الفرق بين الحد الأقصى للوقت المتاح لإنجاز النشاط (LC_j - ES_i) وبين مدته الفعلية D_{ij} أي أن:

$$\left.\begin{aligned} F_{ij} &= LC_j - ES_i - D_{ij} \\ &= LC_j - EC_{ij} \\ &= LS_{ij} - ES_i \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

أي يساوي الفرق بين النهاية المتأخرة والنهاية المبكرة أو الفرق بين البداية المتأخرة والبداية المبكرة للنشاط (i,j).

وللسهولة يمكن تلخيص حسابات المسار الحرج والأوقات الفائضة للأنشطة غير الحرجة في جدول كما سنرى لاحقاً.

مثال (٨): لنأخذ المثال (٥) ولنحسب الأزمنة المختلفة في الشبكة.

النتائج ملخصة في الجدول(٤) التالي:

٧ الوقت الفائض F_{ij}	٦ زمن الانجاز المبكر EC_{ij}	٥ زمن البداية المتأخر LS_{ij}	٤ زمن الانجاز المتأخر LC_j	٣ زمن البداية المبكر ES_i	٢ المدة الزمنية D_{ij}	١ النشاط (i,j)
0	3	0	3	0	3	(1,2)
0	6	3	6	3	3	(2,3)
1	5	4	6	3	2	(2,4)
0	6	6	6	6	0	(3,4)
4	9	10	13	6	3	(3,5)
11	8	17	19	6	2	(3,6)
0	13	6	13	6	7	(4,5)
8	11	14	19	6	5	(4,6)
0	19	13	19	13	6	(5,6)

الجدول(٤)

الاعمدة (١) و(٢) و(٣) و(٤) حصلنا عليها من الشبكة المتعلقة بالمثال (٥)، أما الاعمدة (٥) و(٦) و(٧) فنحصل عليها من استخدام العلاقات (١٢) و(١٣) و(١٤) أو يمكن من الجدول مباشرة وذلك بالشكل التالي:

عناصر العمود (٥) نحصل عليها من عناصر العمود (٤) – عناصر العمود (٢)

عناصر العمود (٦) نحصل عليها من عناصر العمود (٣) – عناصر العمود (٢)

عناصر العمود (٧) نحصل عليها من:

إما عناصر العمود (٤) – عناصر العمود (٦)

أو عناصر العمود (٥) – عناصر العمود (٣)

ونلاحظ ان الوقت الفائض للأنشطة الحرجة يساوي الصفر.

٦,١٠. طريقة جديدة [١] لحساب الازمنة المبكرة والمتأخرة والوقت الفائض في شبكات CPM و PERT

لحساب زمن البداية والنهاية المبكر وزمن البداية والنهاية المتأخر لكل نشاط بالاضافة الى الزمن الفائض على الشبكة مباشرة نتبع الخطوات التالية:

---

(١) **هذه الطريقة وأسلوب عرضها من اعداد مؤلف الكتاب**

أولاً: حساب زمن البداية والنهاية المبكر للانشطة:

سنبدأ الحساب من بداية الشبكة الى نهايتها، وسنضع نتائج الحسابات ضمن مستطيل بجانب كل نشاط (قوس) كما في الشكل التالي وبنفس الترتيب:

زمن النهاية المبكر ، زمن البداية المبكرر

حيث:

- زمن البداية المبكر لكل نشاط هو أول زمن يمكن البدء به في تنفيذ النشاط، ويساوي:
  - ✓ للنشاط الأول في الشبكة: الصفر.
  - ✓ للانشطة الأخرى: زمن النهاية المبكر لنشاط سابق.

ملاحظة: اذا كان يوجد أكثر من نشاط سابق عندئذ نختار زمن البداية المبكر الأكبر من الانشطة السابقة

- زمن النهاية المبكر لكل نشاط هو أقرب زمن يمكن الانتهاء من تنفيذ النشاط، ويساوي الى زمن البداية المبكر مضافاً اليه زمن النشاط.

أولاً: حساب زمن البداية والنهاية المتأخر للانشطة:

سنبدأ الحساب من نهاية الشبكة الى بدايتها، سنضع نتائج الحسابات ضمن مثلث بجانب كل نشاط (قوس) كما في الشكل التالي وبنفس الترتيب:

زمن النهاية المتأخر ، زمن البداية المتأخر

حيث:

- زمن النهاية المتأخر لكل نشاط هو آخر موعد يمكن الانتهاء من تنفيذ النشاط، ويساوي:

✓ للانشطة الاخيرة في الشبكة: زمن النهاية المبكر الأكبر من بين أزمنة النهايات المبكرة.

✓ للانشطة الأخرى: زمن البداية المتأخر لنشاط لاحق.

ملاحظة: اذا كان يوجد أكثر من نشاط لاحق عندئذ نختار زمن البداية المتأخر الأصغر من الانشطة اللاحقة.

- زمن البداية المتأخر لكل نشاط هو آخر موعد يمكن البدء بتنفيذ النشاط، ويساوي إلى زمن النهاية المتأخر مطروحاً منه زمن النشاط.

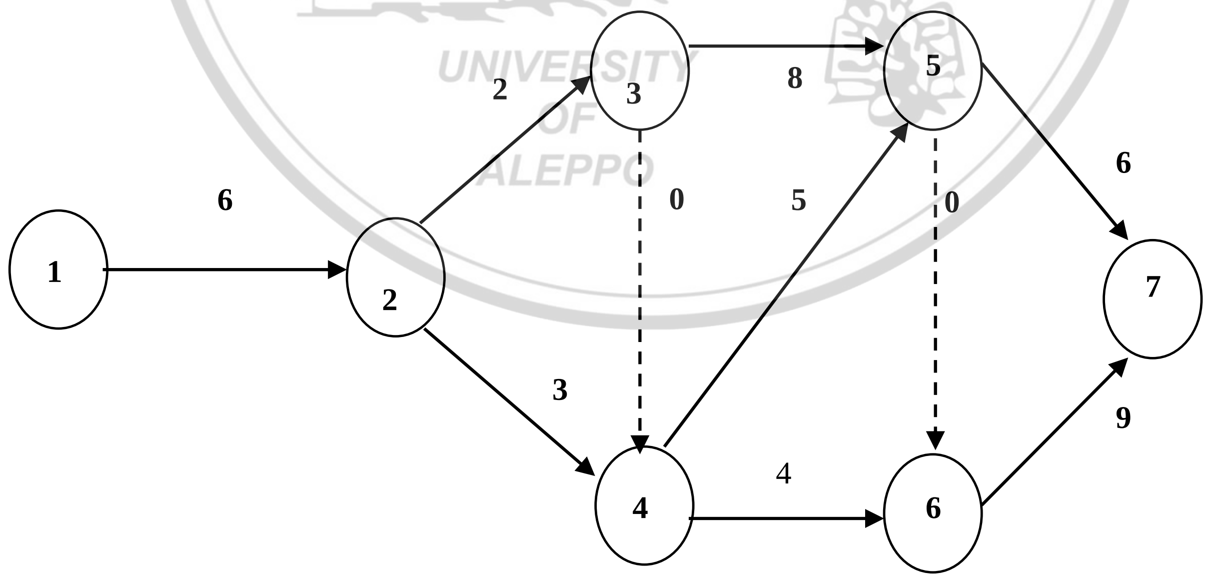
ثالثاً: حساب الوقت الفائض الانشطة و تحديد الانشطة الحرجة:

الزمن الفائض للنشاط هو الزمن الذي يمكن تأخير البدء بتنفيذ هذا النشاط دون أن يؤدي ذلك إلى تأخير في انجاز المشروع، وهو مقدار الفرق بين القيم المتقابلة في المثلثات مع المستطيلات أي:

زمن البداية المبكر– زمن البداية المتأخر أو زمن النهاية المبكر – زمن النهاية المتأخر.

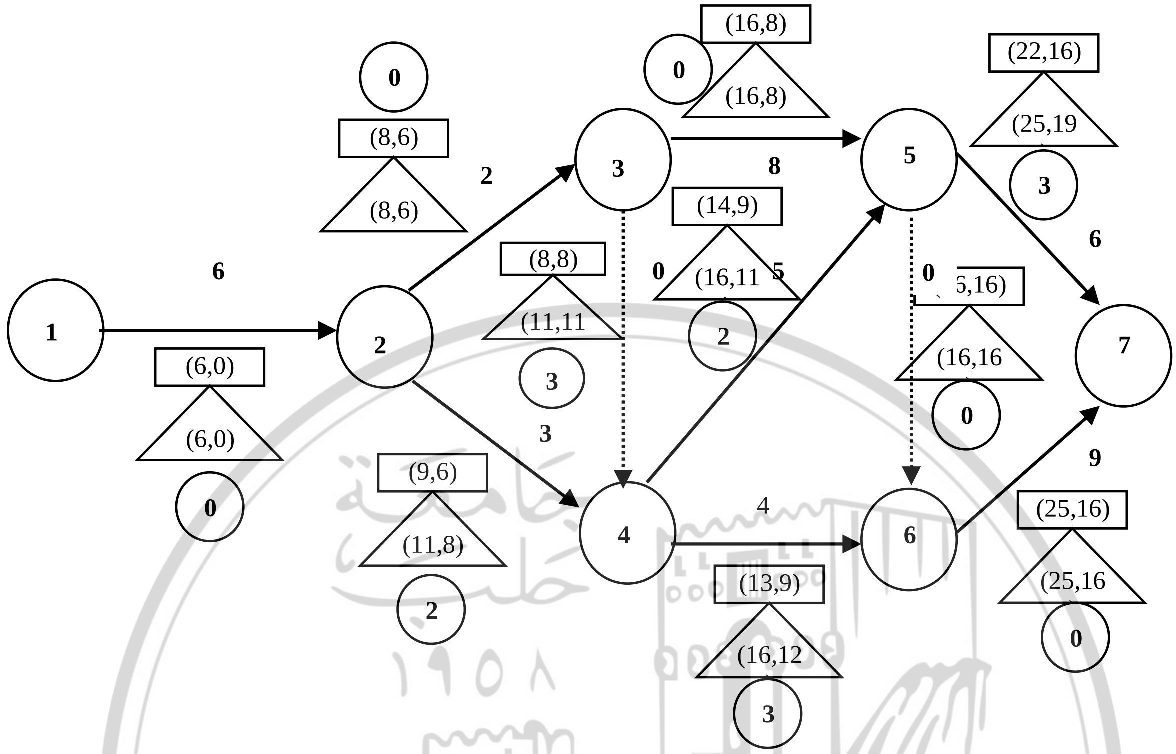
وسنضع النتيجة ضمن دائرة بجانب كل نشاط، وبالتالي سنلاحظ ان الانشطة الحرجة هي الأنشطة التي زمنها الفائض صفر، ماعدا ذلك فهي أنشطة غير حرجة.

مثال (٨): الشكل (١٤) التالي يمثل الأنشطة وزمن تنفيذ كل نشاط لمشروع ما:



الشكل (١٤)

باتباع خطوات الطريقة السابقة نحصل على الشكل (١٥) التالي:



الشكل (١٥)

في الشكل (١٥) **المستطيلات** تعبر عن الأزمنة المبكرة ، **و المثلثات** تعبر عن الأزمنة المتأخرة و **الدوائر** الوقت الفائض

والمساران الحرج: هو المسار الأول: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$

وطوله = 25

مسائل عامة

١- ليكن لدينا البيانات الآتية لأحد المشاريع:

النشاط	زمن انجاز النشاط (أسبوع)
1-4	6
1-2	28
2-4	0
2-3	14
4-5	6
3-5	8
5-6	20

والمطلوب: ارسم الشبكة التي تمثل هذه الأنشطة، ثم حدد المسار الحرج، واحسب الوقت الفائض للأنشطة.

٢- البيانات الآتية متعلقة بمشروع معين.

الأنشطة	زمن انجاز النشاط
1-2	2
1-3	1
2-5	3
2-6	5
3-5	4
5-6	1
3-4	3
4-7	2
5-8	7
6-8	6
7-8	6

والمطلوب:

١- ارسم الشبكة التي تمثل هذه الأنشطة.

٢- احسب على الشبكة زمن البداية المبكر وزمن الانجاز المتأخر للأنشطة.

٣- حدد المسار الحرج.

٤- احسب زمن البداية المتأخر وزمن الانجاز المبكر للأنشطة.

٥- احسب الوقت الفائض للأنشطة.

٣- تسعى احدى الشركات الى بناء مصنع لإنتاج سلعة استهلاكية وهذا المشروع يتألف من الأنشطة التالية:

النشاط	توصيف النشاط	الزمن بالشهور
1-2	تحديد الموقع وشراء الأرض اللازمة	4
2-3	وضع المخططات وتصاميم المصنع	3
3-4	موافقة مجلس الادارة في الشركة	1
4-6	الترخيص لاخذ موافقة الجهات المسؤولة	2
2-7	اجراء مناقصة للاتفاق مع متعهد	1
4-5	الاتفاق مع متعهد وتوقيع العقد	1
5-10	توصيل الكهرباء والماء الى موقع المصنع	3
6-8	توظيف العمال	2
7-8	شراء الآلات والمعدات	4
8-9	تركيب الآلات وخطوط الانتاج	3
5-8	اختبار عمل الالات	1
9-10	انتاج عينة من السلع	1
7-10	تدريب العمال على الآلات	2

والمطلوب:

١- ارسم الشبكة المناسبة

٢- حدد المسار الحرج للشبكة واحسب طوله.

٣- احسب الوقت الفائض لكل نشاط.

٤- مؤسسة سكنية تخطط لبناء مشروع سكني بتطبيق نموذج بيرت، وتتكون أنشطة هذا المشروع من الأنشطة الآتية:

النشاط	وصف النشاط	زمن انجاز الانشطة (بالشهور)		
		الاكثر تفاؤلاً	الاكثر احتمالاً	الاكثر تشاؤماً
1-2	وصف الأساس	3	6	9
1-3	حفريات الملاجئ والطوابق تحت الأرض	6	9	12
2-4	تمديدات المياه والكهرباء	4	6	8
3-5	بناء الهيكل	1	3	4
4-5	وضع عوازل الكهرباء والحرارة والصوت	5	7	9
5-6	عمليات الإكمال	5	10	15

والمطلوب:

١- ارسم الشبكة المناسبة.

٢- احسب ازمنة البداية والنهاية المبكرة والمتأخرة والوقت الفائض للأنشطة.

٣- احسب زمن انجاز المشروع وانحرافه المعياري.

٤- احسب الوقت الفائض للأنشطة.

٥- الزمن المتوقع لا نجاز المشروع بدرجة ثقة 95%.

٥- البيانات الآتية للأنشطة التي يتكون منها مشروع ما.

النشاط	الزمن الاكثر تفاؤلاً	الزمن الاكثر احتمالاً	الزمن الاكثر تشاؤماً
1-2	4	5	12
1-3	1	1.5	5
2-4	2	3	4
2-5	3	4	11
2-3	2	3	2
4-7	1.5	2	2.5
5-7	1.5	3	4.5
3-6	2.5	3.5	7.5
6-7	1.5	2	2.5
7-8	1	2	3

والمطلوب: ١- ارسم الشبكة المناسبة.

٢- جِدْ المسار الحرج من خلال زمن البداية المبكر وزمن الانجاز المتأخر للأنشطة.

٣- احسب زمن انجاز المشروع وانحرافه المعياري.

٤- احسب الوقت الفائض للأنشطة.

٦- ترغب إحدى الشركات في إجراء دراسة لمنتج جديد، وقد قدمت البيانات الخاصة بالأنشطة المختلفة لهذا المشروع والمطلوب حساب احتمال تنفيذه في مدة أقصاها ٦٧ يوماً.

النشاط	وصف النشاط	زمن انجاز الانشطة (بالشهور)		
		الاكثر تفاؤلاً	الاكثر احتمالاً	الاكثر تشاؤماً
1-2	اختيار الباحثين	4	10	28
2-3	اجتماع الباحثين وتحديد خطة الدراسة	2	8	14
3-6	جمع البيانات عن السوق	10	28	34
1-4	جمع البيانات عن الموارد المتوفرة في الشركة	6	24	42
4-5	تحليل البيانات ودراسة الجدوى	4	10	16
5-6	تقديم التقرير للإدارة لاتخاذ القرار	12	30	160

الوحدة الدراسية الرابعة
نظرية الألعاب
Game Theory

تمهيد

تعتبر نظرية الألعاب إحدى الوسائل الحديثة التي تُستخدَم لاتخاذ القرارات في الحالات والمواقف التي تتميز بوجود الصراع بين الوحدات المتنافسة المستقلة سواءً كانت أفراداً أو تنظيمات، حيث لا يستطيع متخذ القرار أن يسيطر بشكل كامل على العوامل المؤثرة في النتائج التي يستطيع الحصول عليها من قراره.

ويتلخص مفهوم نظرية الألعاب بوجود لعبة محددة أو مباراة لها هدف نهائي يسعى من أجله كل لاعب ومن خلال مراحل خاصة يتم اختيارها حسب قوانين اللعب وأسلوب اللعبة.

إن النماذج الأكثر بساطة لمسائل الألعاب والمنافسة هي الألعاب الرياضية المختلفة وألعاب الشطرنج وورق اللعب والدومينو وغيرها... وهناك شبه كبير بين المشاركين في مثل هذه الألعاب وبين سلوك المتحاربين لاحتلال موقع معين أو سلوك المتنافسين في سوق معينة، وهذا الشبه أدى إلى تعميم لفظ لعبة أو مباراة بحيث يشمل جميع الأوضاع الاجتماعية والاقتصادية والسياسية والعسكرية وغيرها من الأوضاع التي تتضمن تنافساً أو تعاكس مصالح، كما أدّى هذا الشبه إلى بروز "نظرية الألعاب" للتعبير عن مجمل الطرائق الرياضية التي تناقش وتحلل الأوضاع[١].

---

[١] د. أحمد رفيق قاسم. المدخل إلى بحوث العمليات – جامعة حلب (ص: ٣٦٧-٣٦٨).

يعتبر العالم الفرنسي أميل بوريل Emile Borel أول مَن طرح فكرة النظرية سنة ١٩٢١. إلاّ أن الفضل الأكبر في إرساء أركان هذه النظرية وبرهنة نتائجها الأساسية وإظهار الإمكانيات الهائلة لها في التطبيق في المجالات الاقتصادية والعسكرية والإدارية يرجع إلى العالمين جون فون نيومان John von neumon وأسكار مورجانستون Oskar Morganstern. فبعد أن أثبت فون نيومان القانون الأساسي للنظرية (قانون الأدنى الأعظمي Minimax) عام ١٩٢٨، تعاون مع مورجانسترن في تقديم النظرية كأداة لتحليل المواقف التنافسية المتعارضة في المجالات الاقتصادية والحربية عام ١٩٤٤. ومنذ ذلك الحين وحتى وقتنا هذا لم يتوقف سيل الإضافات والتطوير ومحاولات التغلب على مشاكل التطبيق، ومن أهم الإضافات التي فتحت آفاقاً جديدة للتطبيق هي نتائج دراسات شابلي L.S.Shapley حيث قدم الدالة المعروفة بدالة قيم شابلي، والتي على أساسها تتحدد قيمة عائد المباريات متعددة الأطراف لكل من المشاركين فيها بصورة فريدة.

وسوف نستعرض في هذا الفصل المبادئ الأولية للنظرية مع شرح بعض مجالات التطبيق، وسنقتصر في هذا الصدد على ما يسمى الألعاب الثنائية ذات المجموع الصفري مع إعطاء فكرة عن الألعاب ذات n شخص والألعاب بدون المجموع الصفري.

أهداف الوحدة الدراسية الرابعة

بعد دراسة هذه الوحدة سيكون الطالب قادراً على:

١. فهم المصطلحات المتعلقة بنظرية الالعاب.

٢. تحويل المواقف التنافسية بين الشركات الى مصفوفة كنموذج للعبة وتحليلها.

٣. التمييز بين لعبة ذات شخصين ولعبة متعددة الأطراف.

٤. التمييز بين لعبة بمجموع صفري ولعبة بدون المجموع الصفري.

٥. ايجاد الحل الامثل لنماذج الالعاب بين شخصين ومجموع صفري، وتحديد استراتيجيات كل لاعب وقيمة اللعبة ولصالح من باستخدام:

- نقطة التوازن.
- الطريقة الجبرية.
- حذف التراكيب المحكومة.
- اسلوب السمبلكس.

٦. ايجاد الحل الامثل لنماذج الالعاب بين عدة اشخاص ومجموع صفري، باعتماد اسلوب التحالفات أو التخصيصات.

٧. ايجاد الحل الامثل لنماذج الالعاب بين عدة اشخاص بدون المجموع الصفري.

الفصل الحادي عشر

الالعاب الاستراتيجية الثنائية

١,١١. تعاريف ومفاهيم أساسية

اللعبة Game: هي مجموعة قواعد تحدِّد ما يجب أو ما يستطيع أن يفعله اللاعب، هذه القواعد تُعرِّف المعلومات المتوفرة لدى كل لاعب وعدد الخطوات ونهاية اللعبة والكمية التي يأخذها أو يعطيها أي لاعب... إلخ.

اللاعب Player: هو وحدة مستقلة لاتخاذ القرارات وليس من الضروري أن يكون اللاعب شخصاً فرداً وإنما قد يكون جماعة تعمل في مؤسسة ما أو فريقاً أو دولة...

الخطوة Move: هي النقطة التي يتوجب فيها على اللاعب اتخاذ قرار الاختيار (البديل) وهناك نوعان من الخطوة:

١- الخطوة الشخصية Personal Move: هي اختيار مدروس وواعٍ لأحد البدائل المتاحة أمام اللاعب.

٢- الخطوة العشوائية Chance Move: هي اختيار غير واعٍ لأحد البدائل المتاحة أمام اللاعب وذلك طبقاً لتوزيع احتمالي معين بواسطة قواعد اللعب.

اللعبة بمعلومات كاملة: ونقول عن اللعبة أنها بمعلومات كاملة إذا كانت الخطوات شخصية مثل لعبة الشطرنج، ونقول عن اللعبة أنها بمعلومات غير كاملة إذا كانت الخطوات عشوائية مثل لعبة الدومينو.

المباراة Play: هي تطبيق خاص لقواعد اللعبة يؤدي في النهاية إلى نتيجة معينة، يتم دفع العوائد أو المدفوعات Payments التي تأخذ صورة تحقيق هدف معين أو كسب عدد من النقاط... إلخ.

الاستراتيجية Strategy: وهي معيار تأخذ بالحسبان مجموعة القواعد التي تحدد اختيار اللاعب في كل خطوة يخطوها في اللعبة. وهناك نوعان من الاستراتيجيات:

١- الاستراتيجية الصرفة أو البسيطة Pure Strategy: وهي الاستراتيجية التي يمارسها اللاعب طوال وقت اللعبة أو المعيار الدائم لاختيار نفس طريقة اللعب طوال وقت اللعبة.

٢- الاستراتيجية المختلطة أو المركبة Mixed Strategy: وهي المعيار الذي يُحدِّد التصرف الذي يجب أن يسلكه متخذ القرار بالاعتماد على مجموعة محددة من الاحتمالات، وبكلام آخر هي التوزيع الاحتمالي الذي يخصص احتمالات محددة لاختيار كل من الاستراتيجيات الصرفة.

تصنيف الألعاب: تُصنَّف الألعاب عادةً إما حسب عدد اللاعبين المشاركين في اللعبة أو عدد الاستراتيجيات أو حسب نتيجة اللعبة.

فحسب عدد اللاعبين تقسم الألعاب إلى نوعين:

١- لعبة ذات شخصين: أي أن عدد المشاركين في اللعبة اثنان فقط.

٢- لعبة متعددة الأطراف: أي أن عدد المشاركين في اللعبة أكثر من اثنين.

وحسب عدد الاستراتيجيات تُقسَم الألعاب إلى نوعين أيضاً:

١- لعبة محددة: وهي اللعبة التي يكون فيها عدد الاستراتيجيات المتاحة أمام كل لاعب محدوداً.

٢- لعبة مستمرة (غير محددة): وهي اللعبة التي يكون فيها عدد الاستراتيجيات المتاحة أمام كل لاعب غير محدد أي لانهائي.

أما **حسب نتيجة اللعبة** فتقسم إلى نوعين أيضاً:

١- لعبة ذات مجموع صفري: وهي اللعبة التي يكون فيها ربح اللاعب الأول يساوي تماماً خسارة اللاعب الآخر.

٢- لعبة ذات مجموع غير صفري: وهي اللعبة التي يكون فيها ربح أحد اللاعبين لا يساوي خسارة اللاعب الآخر وإنما يمكن أن يخسران الطرفين أو يكسبا نتيجة المباراة.

إن الألعاب ذات المجموع الصفري لها أهميتها القصوى في الحياة العملية وسنركز اهتمامنا عليها في هذا الفصل.

٢,١١. لعبة ذات شخصين ومجموع صفري

وهي اللعبة التي تتضمن طرفَي نزاع وأن مجموع ما يخسره أحد الأطراف يساوي تماماً ما يربحه الطرف الآخر أو العكس. ويصنف هذا النوع من الألعاب حسب عدد الاستراتيجيات التي يملكها كل لاعب.

فمثلاً إذا كان اللاعب الأول يملك استراتيجيتين والثاني يملك ثلاث استراتيجيات عندئذٍ نقول إن اللعبة تتم وفق الشكل (٣ × ٢).

وإذا كان اللاعب الأول يملك خمس استراتيجيات والثاني يملك أربع استراتيجيات عندئذٍ نقول إن اللعبة تتم وفق الشكل (٤ × ٥). وهكذا...

وبشكل عام إذا كان لدينا لعبة مؤلفة من شخصين وذات مجموع صفري، وكان اللاعب الأول يتصرف بـ m استراتيجية والثاني بـ n استراتيجية، وإذا اختار اللاعب الأول الاستراتيجية i $(i = 1, 2, \dots, m)$ والثاني الاستراتيجية j $(j = 1, 2, \dots, n)$ عندئذٍ ربح اللاعب الأول (وبالتالي خسارة الثاني) يساوي a_{ij}.

تدعى المصفوفة $[a_{ij}]_{mxn}$ بمصفوفة المدفوعات أو مصفوفة الأرباح أو العوائد والتي تأخذ الشكل التالي:

		استراتيجيات اللاعب B					
		1	2	………	j	………	n
استراتيجيات اللاعب A	1	a_{11}	a_{12}	………	a_{1j}	………	a_{1n}
	2	a_{21}	a_{22}	………	a_{2j}	………	a_{2n}
	…	…………………………………					
	i	a_{i1}	a_{i2}	………	a_{ij}	………	a_{in}
	…	…………………………………					
	m	a_{m1}	a_{m2}	………	a_{mj}	………	a_{mn}

سنعتبر أن اللاعب الأول A هو لاعب الأرباح وأن اللاعب الثاني B هو لاعب الخسائر، وأن a_{ij} في المصفوفة السابقة تعبر عن ربح اللاعب A فيما إذا كانت أكبر من الصفر أي $a_{ij} > 0$ وتعبّر عن خسارته إذا كانت أصغر من الصفر أي $a_{ij} < 0$.

وبالمثل فإن a_{ij} تعبّر عن خسارة اللاعب B فيما إذا كانت $a_{ij} > 0$ وتعبّر عن ربحه فيما إذا كانت أصغر من الصفر أي $a_{ij} < 0$.

بكلام آخر إذا استخدم اللاعب A الاستراتيجية i واستخدم اللاعب B الاستراتيجية j عندئذٍ نقول إن اللاعب B سيدفع إلى اللاعب A ما قيمته a_{ij} شريطة أن يكون $a_{ij} > 0$.

نقول عن لعبة استراتيجية أنها عادلة إذا كانت قيمة اللعبة مساوية للصفر ونقول عندئذٍ أن اللعبة تحقق مبدأ تكافؤ الفرص بالنسبة للاعبين، ونقول عن لعبة أنها لصالح A إذا كانت قيمتها موجبة، ونقول عن لعبة أنها لصالح B إذا كانت قيمتها سالبة.

مثال(١): لنأخذ اللعبة التالية بين شخصين ومجموع صفر المعطاة بالمصفوفة التالية:

		استراتيجيات اللاعب **B**		
		1	2	3
استراتيجيات اللاعب A	1	18	2	0
	2	1	3	10
	3	5	4	5
	4	16	3	2

٣,١١. خوارزمية* حل الألعاب ذات الشخصين ومجموع صفري

في الواقع يوجد طرق كثيرة وأساليب متعددة لإيجاد حل الألعاب ذات الشخصين ومجموع صفري، وسنعمل في هذه الفقرة على اختصار هذه الطرق والأساليب في خوارزمية واحدة، تحقق الأهداف التالية:

١- إمكانية حلّ أي لعبة مؤلفة من طرفَي نزاع ومجموع صفري بعد تحويلها إلى مصفوفة.

٢- تجنب الحسابات المعقدة واختصار العمليات الحسابية إلى أدنى حد ممكن.

٣- إمكانية برمجتها على الحاسوب مهما كان عدد الاستراتيجيات المتعلقة باللاعبين.

وتتضمن الخوارزمية المراحل التالية:

١,٣,١١. المرحلة الأولى: إيجاد الاستراتيجيات البسيطة ونقاط الاستقرار إن أمكن.

توجد ألعاب يستطيع فيها كل لاعب أن يختار استراتيجية بسيطة تضمن له عائداً معيناً بصرف النظر عن سلوك الخصم.

فإذا فرضنا أن اللاعب A اختار الاستراتيجية **i** فإنه يضمن حصوله على الأقل على:

$$\max_{i} \min_{j} a_{ij} \qquad (1)$$

وبالمثل فإن اللاعب B (الخصم بنظر اللاعب A) يتوقع باختيار اللاعب A الاستراتيجية i أن يحصل على الأقل على:

* هذه الخوارزمية وأسلوب عرضها من وضع مؤلف الكتاب.

$$\max_{j} \min_{i} \left(-a_{ij}\right) \qquad (2)$$

وبما أن:

$$\max_{j} \min_{i} \left(-a_{ij}\right) = \max_{j} - (\max_{i} a_{ij}) = -\min_{j} \max_{i} a_{ij}$$

فإن اللاعب الثاني يضمن أن يحصل على الأقل على:

$$-\min_{j} \max_{i} a_{ij} \qquad (3)$$

أي أن اللاعب الأول سوف يحصل على الأكثر على:

$$\min_{j} \max_{i} a_{ij} \qquad (4)$$

مما سبق نلاحظ أن اللاعب A يضمن أن يحصل على الأقل على $\max_{i} \min_{j} a_{ij}$ ونقول في هذه الحالة أن اللاعب A اعتمد معيار أكبر القيم الصغرى في اختيار استراتيجيته البسيطة، ونلاحظ أيضاً أن اللاعب B يستطيع أن يمنع اللاعب A من الحصول على أكثر من $\min_{j} \max_{i} a_{ij}$ ونقول في هذه الحالة أن اللاعب B اعتمد معيار أصغر القيم العظمى في اختيار استراتيجيته البسيطة. ويلاحظ بشكل عام أن:

$$\max_{i} \min_{j} a_{ij} \le \min_{j} \max_{i} a_{ij} \qquad (5)$$

لأنه لا يمكن تحقق الحالة المعاكسة أي $\max_{i} \min_{j} a_{ij} > \min_{j} \max_{i} a_{ij}$ لأن هذا يعني أن اللاعب A يستطيع أن يجعل ربحه على الأقل $\max_{i} \min_{j} a_{ij}$ بينما يستطيع اللاعب B جعل ربح A أقل تماماً من $\max_{i} \min_{j} a_{ij}$ وهذا غير ممكن.

إذاً لدينا بالنسبة لمجموعة الاستراتيجيات البسيطة المعيارين التاليان:

$$\left.\begin{aligned} \min\ \max \left[a_{ij}\right] &= \min_{j} \max_{i} a_{ij} \\ \max\ \min \left[a_{ij}\right] &= \max_{i} \min_{j} a_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

فإذا تحقق الشرط التالي:

$$\max_{i} \min_{j} a_{ij} = \min_{j} \max_{i} a_{ij} = v \qquad (7)$$

عندئذٍ نقول إن للمصفوفة $A = [a_{ij}]$ نقطة استقرار، بمعنى أن اللاعب الأول A يمكن أن يختار استراتيجية ونرمز لها بـ I_0 تمكنه من أن يحصل على الأقل على V، وأن اللاعب الثاني B يمكن أن يختار استراتيجية j_0 تضمن له أن اللاعب A سوف لن يحصل على أكثر من V، ونقول أن الزوج من الاستراتيجيات (I_0, j_0) يشكل نقطة توازن للعبة ونقول أن اللعبة التي تحوي نقطة توازن بأنها لعبة مستقرة ومحددة بدقة والاستراتيجيات المقابلة لهذه النقطة هي خطط (استراتيجيات) الأقل خسارة لكلا اللاعبين.

خلاصة المرحلة الأولى:

١- إن الشرط اللازم والكافي لكي تكون للعبة ما نقطة توازن (استقرار) هو وجود عنصر في مصفوفة العائد يمثل في نفس الوقت أصغر قيمة في السطر وأكبر قيمة في العمود. انظر المثالين (٢) و(٣).

٢- قد تكون هناك أكثر من نقطة استقرار في اللعبة الواحدة. انظر المثال (٤)

٣-هناك بعض الألعاب لا تحوي نقاط استقرار. انظر المثال (٥)

مثال (٢): ليكن لدينا مصفوفة العائد التالية التي تمثل لعبة بين شخصين ومجموع صفر:

		استراتيجيات اللاعب B		
		1	2	3
استراتيجيات اللاعب A	1	-1	6	-2
	2	2	4	6
	3	-2	-6	12

نضيف عموداً على يمين المصفوفة نضع فيه أصغر القيم في كل السطر $\min\limits_{j} a_{ij}$ ونضيف سطراً في أسفل المصفوفة لنضع فيه أكبر القيم في كل عامود $\max\limits_{i} a_{ij}$ كما يلي:

		استراتيجيات اللاعب B			
		1	2	3	min
استراتيجيات اللاعب A	1	-1	6	-2	-2
	2	2	4	6	2
	3	-2	-6	12	-2
max		2	6	12	

ثم نختار أكبر القيم في عامود min وأصغر القيم في سطر max، فإذا تساوت القيمتان عندئذ نكون قد حصلنا على نقطة توازن أو استقرار كما في المصفوفة التالية:

		استراتيجيات اللاعب **B**				
		1	2	3	min	
استراتيجيات اللاعب A	1	-1	6	-2	-2	
	2	2	4	6	2	max
	3	-2	-6	12	-2	
max		2	6	12		
		min				

أي أنه من مصلحة اللاعب A اختيار الاستراتيجية 2 واللاعب B اختيار الاستراتيجية 1 وقيمة اللعبة 2 = V وهي لمصلحة اللاعب A لأنها موجبة.

مثال (٣): لنأخذ المصفوفة التالية التي تمثل لعبة بين شخصين ومجموع صفر:

		استراتيجيات اللاعب **B**		
		1	2	3
استراتيجيات اللاعب A	1	18	2	0
	2	1	3	10
	3	5	4	5

باتباع نفس الاسلوب في المثال السابق نحصل على المصفوفة التالية:

		استراتيجيات اللاعب **B**				
		1	2	3	min	
استراتيجيات اللاعب A	1	18	2	0	0	
	2	1	3	10	1	
	3	5	4	5	4	max
max		18	4	10		
			min			

واللعبة مستقرة وقيمتها 4 = V وهي لمصلحة اللاعب A.

مثال (٤) لتكن لدينا مصفوفة اللعبة التالية:

		استراتيجيات اللاعب **B**		
		1	2	3
استراتيجيات اللاعب A	1	4	3	2
	2	3	8	2
	3	5	-3	-4

باتباع نفس الاسلوب في المثال السابق نحصل على المصفوفة التالية:

		استراتيجيات اللاعب **B**				
		1	2	3	min	
استراتيجيات اللاعب A	1	4	3	2	2	max
	2	3	8	2	2	max
	3	5	-3	-4	5	
max		5	8	2		
				min		

وهنا يجب أن يلعب اللاعب B الاستراتيجية الصرفة 3 أما اللاعب A فيمكنه أن يلعب أياً من الاستراتيجيتين الصرفتين الأولى أو الثانية أو أية استراتيجية مزيجة مركبة من هاتين الاستراتيجيتين وقيمة اللعبة $V = 2$ وهي لمصلحة A.

مثال (٥):لتكن لدينا اللعبة التالية:

		استراتيجيات اللاعب **B**		
		1	2	3
استراتيجيات اللاعب A	1	2	4	-1
	2	3	1	4

باتباع نفس الاسلوب في المثال السابق نحصل على المصفوفة التالية:

		استراتيجيات اللاعب **B**				
		1	2	3	min	
استراتيجيات اللاعب A	1	2	4	-1	-1	
	2	3	1	4	1	max
max		3	4	4		
		min				

نلاحظ في هذا المثال أنه لا توجد نقطة توازن وأن اللعبة غير مستقرة وأن كلا اللاعبين لا يمكنهما اختيار استراتيجية صرفة إلا إذا اكتفى A بربح أقل مما يستطيع تحقيقه، أو إذا قبل B خسارة أكبر مما يستطيع تجنبه، وهنا نجد أن على كل من اللاعبين البحث عن استراتيجية مزيجة تجعل قيمة اللعبة عدداً محصوراً بين (1) و (3) أي أن قيمة اللعبة للمثال هي: $1 \le V \le 3$.

٢,٣,١١. المرحلة الثانية: مصفوفة اللعبة لا تحوي نقطة استقرار (نقطة توازن)

إذا كانت مصفوفة اللعبة لا تحوي نقطة استقرار أي أن:

$$\max_{i} \min_{j} a_{ij} \neq \min_{j} \max_{i} a_{ij} \qquad (8)$$

عندئذ فإن كل لاعب سيلجأ إلى اختيار مزيج من الاستراتيجيات وبنسب محددة أي أن كل لاعب يستخدم ما يسمى بالاستراتيجية المركبة Mixed Strategy وهي التوزيع الاحتمالي الذي يعين احتمالات محددة لكل استراتيجية بسيطة، وقيمة اللعبة تكون محصورة في المجال:

$$\max_{i} \min_{j} a_{ij} \leq V \leq \min_{j} \max_{i} a_{ij} \qquad (9)$$

ولهذا سنميز بين الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: إذا كانت مصفوفة اللعبة مؤلفة من عدة أسطر وعدة أعمدة أي من الشكل $(m \times n)$ عندئذٍ ننتقل إلى المرحلة الرابعة، الفقرة (**٤,٣,١١.**).

الحالة الثانية: إذا كانت مصفوفة اللعبة مؤلفة من سطرين وعمودين أي من الشكل (٢ × ٢) عندئذٍ ننتقل إلى المرحلة الثالثة، الفقرة (**٣,٣,١١.**).

٣,٣,١١. المرحلة الثالثة: مصفوفة اللعبة من الشكل (٢ × ٢)

أي أن لكل لاعب استراتيجيتان فقط ومصفوفة العائد تأخذ الشكل التالي:

		استراتيجيات اللاعب B	
		1	2
استراتيجيات اللاعب A	1	a_{11}	a_{12}
	2	a_{21}	a_{22}

إذا فرضنا أن اللاعب A الذي يريد أن يزيد من ربحه إلى أعظم قيمة ممكنة سيختار الاستراتيجية الصرفة الأولى باحتمال x_1 والثانية باحتمال x_2 عندئذ فإن الاستراتيجية المركبة (التوزيع الاحتمالي) X للاعب A هي: $X=(x_1, x_2)$.

أما اللاعب B فإنه سيختار الاستراتيجية الصرفة الأولى باحتمال y_1 والثانية باحتمال y_2 وعندئذ فإن الاستراتيجية المركبة (التوزيع الاحتمالي) Y للاعب B هي: $Y = (y_1, y_2)$.

مع العلم أن:

$$y_1 + y_2 = 1 \ \& \ x_1 + x_2 = 1 \ \& \ x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$$

وبالتالي فإن:

العائد المتوقع للاعب A عندما يلعب اللاعب B الاستراتيجية الأولى فقط هو:

$$u_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \tag{10}$$

والعائد المتوقع للاعب A أيضاً عندما يلعب اللاعب B الاستراتيجية الثانية فقط هو:

$$u_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \tag{11}$$

أما إذا لعب اللاعب B الاستراتيجية البسيطة الأولى باحتمال y_1 والثانية باحتمال y_2 عندئذٍ فإن العائد المتوقع للاعب A سيكون:

$$v = y_1 \, . \, u_1 + y_2 \, . \, u_2 \tag{12}$$

وهي كمية محصورة بين u_1 و u_2 (وذلك لأن $y_1 + y_2 = 1$ و $y_1, y_2 \geq 0$).

ولحساب قيمة كل من x_1 و x_2 نكتب:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \tag{13}$$

وبما أن $x_1 + x_2 = 1$ فإن $x_2 = (1 - x_1)$ ومنه نجد:

$$a_{11}x_1 + a_{21}(1-x_1) = a_{12}x_1 + a_{22}(1-x_1)$$

ومنه نجد

$$(a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12})\, x_1 = a_{22} - a_{21}$$

وبالتالي احتمال أن يلعب اللاعب A الاستراتيجية الأولى:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} \tag{14}$$

ومنه احتمال أن يلعب اللاعب B الاستراتيجية الثانية:

$$x_2 = (1 - x_1) = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} \tag{15}$$

وقيمة اللعبة تُحسَب من تعويض x_1 و x_2 في إحدى العلاقتين (١٠) أو (١١) وهي:

$$V^* = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} \quad (16)$$

وبمحاكمة مشابهة نجد أن مسألة اللاعب B الذي يريد أن يُنقص خسارته إلى أقل قيمة ممكنة يتعين عليه استخدام الاستراتيجية المركبة $y = (y_1, y_2)$ وسينتج أن:

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} \quad (17)$$

$$y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} \quad (18)$$

وقيمة اللعبة ستكون:

$$V^* = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} \quad (19)$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها في العلاقة (١٦).

خلاصة الخطوة الثالثة:

عندما نكون أمام لعبة ذات شخصين ومجموع صفري من الشكل (٢ × ٢) ولم تحو نقطة توازن أو استقرار عندئذٍ فإن كل لاعب سيختار مزيجاً من الاستراتيجيات بنسب محددة معطاة بالعلاقات (١٤) و (١٥) و (١٧) و (١٨) وقيمة اللعبة هي معطاة بالعلاقة (١٦) أو (١٩).

مثال (٦):ليكن لدينا اللعبة التالية:

		استراتيجيات اللاعب B	
		1	2
استراتيجيات اللاعب A	1	8	-5
	2	2	2

باتباع اسلوب التفتيش عن نقطة استقرار كما في المصفوفة التالية:

		استراتيجيات اللاعب **B**		
		1	2	min
استراتيجيات	1	8	-5	-5
اللاعب A	2	2	6	2
max		8	6	

max

min

نلاحظ أن هذه اللعبة لا تحوي نقاط استقرار وقيمة اللعبة تتراوح بين $2 \le V^* \le 6$

عندئذٍ فإن اللاعب A سيلعب الاستراتيجية الأولى باحتمال x_1 والثانية باحتمال x_2.

حسب العلاقة (١٤):
$$x_1 = \frac{6-2}{(8+6)-(-5+2)} = \frac{4}{17}$$

حسب العلاقة (١٥):
$$x_2 = 1 - x_1 = \frac{13}{17}$$

وفي هذه الحالة سيضمن اللاعب A عائداً متوقعاً يساوي حسب العلاقة (١٦):

$$V^* = \frac{58}{17} = 3.41$$

أما اللاعب B فإنه سيلعب الاستراتيجية الأولى باحتمال: $y_1 = \frac{11}{17}$

والاستراتيجية الثانية باحتمال: $y_2 = \frac{6}{17}$

وقيمة اللعبة:

$$V^* = \frac{58}{17} = 3.41$$

٤،٣،١١. المرحلة الرابعة: مصفوفة اللعبة من الشكل (mxn)

أي أن لكل لاعب أكثر من استراتيجيتين عندئذٍ نتبع الخطوات التالية:

خطوة (١): حذف التراكيب المحكومة من قبل التراكيب الأخرى إن أمكن.

يقال عن استراتيجية لاعب أنها محكومة تماماً باستراتيجية أخرى إذا كانت جميع نتائج الاستراتيجية المحكومة أسوأ من النتائج المناظرة التي تعطيها الاستراتيجية الحاكمة مهما يكن تصرف الخصم.

بكلام آخر بالنسبة للاعب A لاعب الأرباح: إذا وجد في مصفوفة اللعبة أن جميع عناصر أحد الأسطر وليكن k أصغر أو تساوي العناصر المقابلة لها في سطر آخر وليكن L أي أن:

$$a_{kj} \le a_{Lj} \quad ; \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

عندئذ اللاعب A لن يختار الاستراتيجية k بأي حال من الأحوال لأن الاستراتيجية L ستكون دائماً أفضل من k مهما كانت اختيارات الخصم B ويمكن عندئذٍ حذف السطر k لأنه يُعتبر محكوماً من قبل السطر L.

أما بالنسبة للاعب B لاعب الخسارة: إذا وجد في مصفوفة اللعبة أن جميع عناصر أحد الأعمدة وليكن r أكبر أو تساوي العناصر المقابلة لها في عامود آخر وليكن s أي أن:

$$a_{ir} \ge a_{is} \quad ; \qquad i=1, 2, \ldots, m$$

عندئذٍ اللاعب B لن يختار في أي حال من الأحوال الاستراتيجية r لأن الاستراتيجية s ستكون أفضل من الاستراتيجية r مهما كانت اختيارات الخصم A ويمكن عندئذٍ حذف العمود r لأنه محكوم من قبل العمود s.

خطوة (٢): إذا استطعنا الوصول إلى مصفوفة من الشكل (٢ × ٢) نتيجة حذف التراكيب المحكومة عندئذٍ يمكننا إيجاد قيمة اللعبة كما مرّ معنا في المرحلة الثالثة، الفقرة (١١،٣،٣).

وإذا لم تصبح اللعبة من الشكل (٢ × ٢) عندئذ نلجأ إلى إيجاد حل اللعبة باستخدام إحدى خوارزميات البرمجة الخطية ننتقل إلى المرحلة الخامسة، الفقرة (١١،٣،٥).

مثال (٧): ليكن لدينا اللعبة التالية:

		استراتيجيات اللاعب B					
		1	2	3	4	5	6
استراتيجيات اللاعب A	1	1	-2	2	1	2	-2
	2	1	-1	1	0	-1	-3
	3	3	2	-1	3	3	1
	4	3	0	-2	0	5	1

بمقارنة العمودين الخامس والسادس نجد أن عناصر العمود الخامس أكبر من عناصر العمود السادس إذاً يمكن حذف العمود الخامس لأنه محكوم من قبل العمود السادس.

بمقارنة العمودين الأول والسادس نجد أنه يمكن حذف العمود الأول لنفس السبب السابق، مصفوفة اللعبة تصبح بالشكل التالي:

		استراتيجيات اللاعب B					
			2	3	4		6
استراتيجيات اللاعب A	1		-2	2	1		-2
	2		-1	1	0		-3
	3		2	-1	3		1
	4		0	-2	0		1

ونلاحظ من المصفوفة الأخيرة أنه بمقارنة السطرين الثالث والرابع نجد أن عناصر السطر الرابع أصغر من العناصر المقابلة لها من السطر الثالث لهذا يمكن حذف السطر الرابع لأنه محكوم من قبل السطر الثالث ومصفوفة اللعبة تأخذ الشكل:

		استراتيجيات اللاعب B					
			2	3	4		6
استراتيجيات اللاعب A	1		-2	2	1		-2
	2		-1	1	0		-3
	3		2	-1	3		1

وبمقارنة العمودين الثاني والسادس نلاحظ أن عناصر العمود الثاني أكبر أو تساوي من العناصر المقابلة من العمود السادس وبالتالي يمكن حذف العمود الثاني لأنه محكوم من قبل العمود السادس وكذلك بمقاربة العمود الرابع والسادس نلاحظ أنه يمكن حذف العمود الرابع لنفس السبب ومصفوفة اللعبة تأخذ الشكل:

		استراتيجيات اللاعب B					
				3			6
استراتيجيات اللاعب A	1			2			-2
	2			1			-3
	3			-1			1

وبمقارنة السطرين الأول والثاني نجد أن عناصر السطر الثاني أصغر أو تساوي من العناصر المقابلة في السطر الأول لذلك يمكن حذف السطر الثاني لأنه محكوم من قبل السطر الأول أي أن مصفوفة اللعبة تصبح من الشكل:

		استراتيجيات اللاعب B					
				3			6
استراتيجيات اللاعب A	1			2			-2
	3			-1			1

وهي لعبة من الشكل (٢×٢) لحلها نعود إلى المرحلة الثالثة ونستنتج الحل كما يلي:

إذا فرضنا أن اللاعب A سيلعب الاستراتيجية (1) باحتمال قدره x_1 والاستراتيجية (3) باحتمال قدره x_3 عندئذ حسب العلاقات (١٤) و (١٥) نجد:

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{2}{3}$$

وحسب العلاقة (١٦) فإن قيمة اللعبة $V^* = 0$

وبالعودة إلى المصفوفة الأصلية نجد أن اللاعب A سيلعب:

الاستراتيجية (1) باحتمال قدره $x_1 = 1/3$، والاستراتيجية (2) باحتمال قدره $x_2 = 0$

الاستراتيجية (3) باحتمال قدره $x_3 = 2/3$، الاستراتيجية (4) باحتمال قدره $x_4 = 0$

وقيمة اللعبة $V^* = 0$ وهي لعبة عادلة.

وبنفس المحاكمة بالنسبة للاعب B ستجد أنه سيلعب:

الاستراتيجية (1) باحتمال قدره $y_1 = 0$،الاستراتيجية (2) باحتمال قدره $y_2 = 0$

الاستراتيجية (3) باحتمال قدره $y_3 = 1/2$، الاستراتيجية (4) باحتمال قدره $y_4 = 0$

الاستراتيجية (5) باحتمال قدره $y_5 = 0$،الاستراتيجية (٦) باحتمال قدره $y_6 = 1/2$

وقيمة اللعبة $V^* = 0$.

٥,٣,١١. المرحلة الخامسة: تحويل لعبة إلى نموذج برمجة خطية

لنفرض أنه لدينا مصفوفة اللعبة ذات الشخصين ومجموع صفري التالية:

		استراتيجيات اللاعب B					
		1	2	………	j	………	n
استراتيجيات اللاعب A	1	a_{11}	a_{12}	………	a_{1j}	………	a_{1n}
	2	a_{21}	a_{22}	………	a_{2j}	………	a_{2n}
	…	……………………………………					
	i	a_{i1}	a_{i2}	………	a_{ij}	………	a_{in}
	…	……………………………………					
	m	a_{m1}	a_{m2}	………	a_{mj}	………	a_{mn}

وبفرض أن المصفوفة السابقة لا تحوي نقاط استقرار ولا يمكن تحويلها إلى الشكل (٢ × ٢)، وأن قيمة اللعبة هي V.

مسألة اللاعب A:

سيستخدم اللاعب A استراتيجية مركبة معرفة بدلالة الشعاع الاحتمالي:

$X = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_m)$

حيث أن:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0 \qquad (1)$$

والعائد المتوقع للاعب A عندما يلعب اللاعب B الاستراتيجية (1):

$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + \ldots. + a_{m1}x_m$

وهذا العائد يجب أن لا يقل عن قيمة اللعبة V أي:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + \ldots + a_{m1}x_m \geq V$$

أما العائد المتوقع للاعب A عندما يلعب اللاعب B الاستراتيجية (2) هو:

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{31}x_3 + \ldots + a_{m2}x_m \ge V$$

وهكذا... بالنسبة لباقي الاستراتيجيات التي يلعبها اللاعب B.

بكلام آخر:

إن العائد المتوقع للاعب A عندما يلعب اللاعب B الاستراتيجية j تعطى بالعلاقة:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \ge V \; ; \; (j = 1,2,\ldots,n) \qquad (2)$$

وغاية اللاعب A جعل عائده المتوقع أكبر ما يمكن أي:

$$Z = V \to Max \qquad (3)$$

إذاً مسألة اللاعب A تأخذ النموذج التالي:

$$(4) \begin{cases} Max\ Z = V & \text{دالة الهدف} \\ \left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \ge V \; ; \; (j = 1,2,\ldots,n) \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \end{array}\right\} & \text{الشروط الخطية} \\ x_i \ge 0 & \text{شروط عدم السلبية} \end{cases}$$

وهو برنامج خطي، يمكن حلّه وإيجاد قيمة اللعبة V وقيم الاحتمالات x_i، إلا أننا لا بد من إجراء بعض التعديلات لتحويل الشكل السابق إلى نموذج خطي نظامي كما يلي:

<u>أولاً : في حالة V > 0</u>

في حالة V > 0 نقوم بتقسيم الشروط الخطية في البرنامج السابق على V ، أي:

$$a_{11}\frac{x_1}{V}+a_{21}\frac{x_2}{V}+........+a_{m1}\frac{x_m}{V}\geq 1$$

$$a_{12}\frac{x_1}{V}+a_{22}\frac{x_2}{V}+........+a_{m2}\frac{x_m}{V}\geq 1$$

....

$$a_{1n}\frac{x_1}{V}+a_{22}\frac{x_2}{V}+........+a_{mn}\frac{x_m}{V}\geq 1$$

$$\frac{x_1}{V}+\quad\frac{x_2}{V}+.......+\frac{x_m}{V}=\frac{1}{V}$$

لنضع:

$$X_i=\frac{x_i}{V} \qquad , \quad z = 1/V$$

وبما أن:

Max V = min 1/V أو Max Z = min z

وبما أن:

$$\frac{1}{V}=X_1+X_2+................+X_m$$

فإن نموذج البرمجة الخطية السابق (٤) يصبح:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Min } z = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_m & \text{دالة الهدف} \\
\left.\begin{array}{l}
a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ a_{m1}X_m \geq 1 \\
a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ a_{m2}X_m \geq 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ a_{mn}X_m \geq 1
\end{array}\right\} & \text{الشروط الخطية} \\
X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots , X_m \geq 0 & \text{شروط عدم السلبية}
\end{array}\right\} \quad (5)$$

وهو برنامج خطي نظامي لمسألة اللاعب A.

ثانياً: في حالة $V \leq 0$

أما في حالة $V = 0$ فإن عملية القسمة السابقة تصبح غير ممكنة، وفي حالة $V<0$ فإن عملية القسمة تغير من إشارة المتراجحات، وللتغلب على هاتين المشكلتين نقوم بإضافة ثابت موجب وليكن k، إلى جميع عناصر مصفوفة اللعبة بحيث تضمن أن قيمة اللعبة بعد تعديل المصفوفة تكون أكبر من الصفر، وبعد الحصول على الحل الأمثل، نطرح من قيمة اللعبة الثابت k وبذلك نحصل على القيمة الحقيقية للعبة. والثابت k يساوي القيمة المطلقة لأصغر عنصر سالب مضافاً إليه واحداً.

مسألة اللاعب B:

سيستخدم اللاعب B الاستراتيجية المركبة المعرفة بدلالة الشعاع الاحتمالي:

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

حيث أن:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y_j \geq 0 \qquad (6)$$

والعائد المتوقع للاعب B عندما يلعب اللاعب A الاستراتيجية i تعطى بالعلاقة:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq V \; ; (i = 1,2,\ldots\ldots, m) \qquad (7)$$

وغاية اللاعب B جعل عائده المتوقع أصغر ما يمكن أي:

$$Z = V \rightarrow Max$$

إذاً مسألة اللاعب B تأخذ الشكل التالي:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Min } z = V & \text{دالة الهدف} \\
\left.\begin{array}{l}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq V \; ; (i = 1,2,\ldots., m) \\
\sum_{j=1}^{n} y_j = 1
\end{array}\right\} & \text{الشروط الخطية} \\
y_j \geq 0 & \text{شروط عدم السلبية}
\end{array}\right\} (8)$$

وهو برنامج خطي، بإجراء بعض التعديلات التالية:

بتقسيم الشروط الخطية على V في حالة $V > 0$، ووضع $y_j = \frac{y_i}{V}$ و $z = \frac{1}{V}$

وملاحظة أن:

$$\min V = \max 1/V \quad \text{أو} \quad \min z = \text{Max } Z$$

وأن:

$$\frac{1}{V} = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

نجد أن نموذج البرمجة الخطية السابق (٨) يأخذ الشكل:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Max } Z = Y_1 + Y_2 + \dots\dots + Y_n & \text{دالة الهدف} \\ \left.\begin{array}{l} a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + \dots\dots\dots a_{1n}Y_n \geq 1 \\ a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + \dots\dots\dots a_{2n}Y_n \geq 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{m1}Y_1 + a_{m2}Y_2 + \dots\dots\dots a_{mn}Y_n \geq 1 \end{array}\right\} & \text{الشروط الخطية} \\ X_1, X_2, \dots\dots\dots, X_n \geq 0 & \text{شروط عدم السلبية} \end{array}\right\} \quad (9)$$

وهو برنامج خطي نظامي لمسألة اللاعب B.

بمقارنة البرنامجين (٥) و (٩) نلاحظ أنهما برنامجان مترافقان أي أن مسألة اللاعب الأول (A) هي عبارة عن المسألة المرافقة للاعب الثاني (B) أو بالعكس. وبديهي أن الحل الأمثل لإحدى المسألتين يعطي مباشرة الحل الأمثل للمسألة المرافقة الأخرى.

لذلك لإيجاد قيمة اللعبة واحتمالات أن يلعب كل لاعب استراتيجياته يمكن استخدام احد اساليب السمبلكس، وسنقدم في فقرة مستقلة خوارزمية متكاملة لحل لعبة بين شخصين ومجموع صفري.

مثال (٨): لدينا مصفوفة لعبة بين شخصين ومجموع صفري ولنكتب البرنامج الخطي لكل لاعب:

		استراتيجيات اللاعب **B**		
		1	2	3
استراتيجيات اللاعب A	1	3	2	3
	2	2	3	4
	3	5	4	2

بما أن عناصر مصفوفة اللعبة موجبة إذاً يمكن التقسيم على V وبالتالي مسألة اللاعب A هي:

$$\begin{aligned}
\min z &= X_1 + X_2 + X_3 \\
& 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \geq 1 \\
& 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 \geq 1 \\
& 3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \geq 1 \\
& X_1, X_2, X_3 \geq 0
\end{aligned}$$

وحيث أن:

$$X_i = \frac{x_i}{V} \Rightarrow x_i = \frac{X_i}{z}; i = 1,2,3$$

$$V = 1/z$$

مسألة اللاعب B هي:

$$\begin{aligned}
\text{Max } Z &= Y_1 + Y_2 + Y_3 \\
& 3Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 \leq 1 \\
& 2Y_1 + 3Y_2 + 4Y_3 \leq 1 \\
& 5Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \leq 1 \\
& Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0
\end{aligned}$$

وحيث أن:

$$Y_j = \frac{y_j}{V} \Rightarrow y_j = Y_j / Z, j = 1,2,3$$

$$V = 1/Z$$

وبحل أحد هذين البرنامجين نحصل على حل البرنامج الآخر والحل كما هو:

اللاعب A: $x_1 = 0$ $x_2 = 3/5$ $x_3 = 2/5$

اللاعب B: $y_1 = 2/5$ $y_2 = 0$ $y_3 = 3/5$

وقيمة اللعبة هي $V = \frac{16}{5}$ وهي لصالح اللاعب A.

٤,١١. خوارزمية حل لعبة بأسلوب السمبلكس(*):

سنقدم في هذه الفقرة خوارزمية لحل الألعاب ذات الشخصين ومجموع صفري لا تحوي نقاط استقرار، هذه الخوارزمية تأخذ بعين الاعتبار أحدث خوارزميات السمبلكس مع الاستفادة من خواص الترافق بين البرامج المترافقة لاستنتاج حل المرافق من جدول السمبلكس الذي يمثل الحل الأمثل للبرنامج الأولي.

خطوات الخوارزمية

١- نضيف ثابت k إلى جميع عناصر مصفوفة اللعبة وذلك لتجنب الحالة التي يكون فيها قيمة اللعبة صفراً أو سالبة وحيث k يساوي القيمة المطلقة لأصغر عنصر سالب مضافاً إليه واحد.

٢- نرمز لاحتمال أن يلعب اللاعب B الاستراتيجية j بالرمز y_j حيث $(j=1, 2,\ldots, n)$.

٣- نرمز لاحتمال أن يلعب اللاعب A الاستراتيجية i بالرمز x_i حيث $(i=1,2, \ldots, n)$.

٤- حسب ما درسنا في الفقرة السابقة حتى توصلنا إلى الشكل النهائي للبرنامج الخطي أجرينا بعض التعديلات، لذلك سنرمز لاحتمال أن يلعب اللاعب B الاستراتيجية j بـ Y_j حيث $(j=1,2, \ldots, n)$ ولاحتمال أن يلعب اللاعب A الاستراتيجية i بـ X_{n+i} حيث $(i=1,2, \ldots, m)$ عند كتابة البرنامج الخطي لكل لاعب مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$x_i = X_{n+i}/z$$
$$y_j = Y_j/Z$$

٥- البرنامج الخطي للاعب A سيأخذ الصيغة التالية:

(*) هذه الخوارزمية وطريقة عرضها من وضع مؤلف الكتاب.

$$\left.\begin{aligned}&\min\ z=\sum_{i=1}^{m}X_{n+i}\\&\sum_{i=1}^{m}a_{ij}X_{n+1}\geq 1\quad ;j=1,2,....,n\\&X_{n+i}\geq 0\end{aligned}\right\}\qquad (10)$$

وبعد حل النموذج السابق باستخدام خوارزمية السمبلكس نحسب ما يلي:

قيمة اللعبة:

$$V = 1/z - k \qquad (11)$$

احتمال أن يلعب اللاعب A الاستراتيجية i:

$$x_i = x_{n+i}/z \quad ; i=1,2,\ldots,m \qquad (12)$$

٦- البرنامج الخطي للاعب B سيأخذ الصيغة التالية:

$$\left.\begin{aligned}&\text{Max}\ z=\sum_{j=1}^{n}Y_j\\&\sum_{j=1}^{n}a_{ij}Y_j\leq 1\quad ;i=1,2,....,m\\&Y_j\geq 0\end{aligned}\right\}\qquad (13)$$

وبعد حل النموذج السابق باستخدام خوارزمية السمبلكس نحسب ما يلي:

قيمة اللعبة:

$$V = 1/z - k \qquad (14)$$

احتمال أن يلعب اللاعب B الاستراتيجية j:

$$y_j = Y_{j+i}/Z \ , j=1,2,\ldots,n \qquad (15)$$

٦- نطبق خوارزمية السمبلكس (راجع الفصل الثالث) على أحد البرنامجين ويُفضل على برنامج اللاعب B وبعد إجراء تكرارات التطوير المختلفة نحصل على جدول الحل الأمثل الذي يعطي حل برنامج اللاعب B واللاعب A مباشرة.

ومن ثم نجد قيمة V و x_{n+i} و y_j من العلاقات (١١) و(١٢) و(١٤) و(١٥).

مثال (٩): لنأخذ اللعبة التالية:

		استراتيجيات اللاعب B		
		1	2	3
استراتيجيات اللاعب A	1	3	-1	-3
	2	-3	3	-1
	3	-4	-3	3

نلاحظ أنه لا يوجد نقاط استقرار وقيمة اللعبة $-3 < v < 3$ ويمكن أن تكون صفراً لذلك نضيف ثابت k يساوي القيمة المطلقة لأصغر قيمة سالبة مضافاً لها واحداً أي:

$$k = 5$$

وتصبح مصفوفة اللعبة بالشكل التالي:

		استراتيجيات اللاعب B		
		1	2	3
استراتيجيات اللاعب A	1	8	4	2
	2	2	8	4
	3	1	2	8

برنامج اللاعب A هو النموذج الخطي التالي:

$$\min z = X_4 + X_5 + X_6$$
$$8X_4 + 2X_5 + X_6 \geq 1$$
$$4X_4 + 8X_5 + 2X_6 \geq 1$$
$$2X_4 + 4X_5 + 8X_6 \geq 1$$
$$X_4, X_5, X_6 \geq 0$$

مع العلم أن:

$$v = 1/z - 5$$
$$x_i = X_{3+i}/z \; ; i=1,2,3\ldots$$

برنامج اللاعب B هو النموذج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = Y_1 + Y_2 + Y_3$$
$$8Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \leq 1$$
$$2Y_1 + 8Y_2 + 4Y_3 \leq 1$$
$$Y_1 + 2Y_2 + 8Y_3 \leq 1$$
$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

مع العلم أن:

$v = 1/z - 5$

$y_j = Y_j/Z$; $j= 1,2,3,\ldots$

باستخدام خوارزمية السمبلكس لحل برنامج اللاعب B نجد أن جدول السمبلكس الأول يأخذ الشكل التالي:

	Y_1	Y_2	Y_3	B
Z	-1	-1	-1	0
Y_4	8	4	2	1
Y_5	2	8	4	1
Y_6	1	2	8	1

وبإجراء تكرارات التطويل نحصل على جدول الحل الأمثل التالي:

	Y_4	Y_5	Y_6	B
Z	5/49	11/196	1/14	45/196
Y_1	1/7	-1/14	0	1/14
Y_2	-3/98	31/196	-1/14	11/196
Y_3	-1/98	-3/98	1/7	5/49

من الجدول السابق نجد أن:

- حل النموذج الخطي للاعب B هو:

$Z=45/196 \quad Y_1 = 1/14 \quad Y_2 = 11/196 \quad Y_3 = 5/49$

$Y_4 = Y_5 = Y_6 = 0$

- وبالتالي حل مسألة اللاعب B هي:

قيمة اللعبة

$$v = 1/Z - 5 = \frac{196}{45} - 5 = -0.64$$

احتمال أن يلعب اللاعب B الاستراتيجية 1:

$$y_1 = Y_1/Z = \frac{1/14}{45/196} = \frac{14}{45} = 0.31$$

احتمال أن يلعب اللاعب B الاستراتيجية 2:

$$y_2 = Y_2/Z = \frac{11/196}{45/196} = \frac{11}{45} = 0.24$$

احتمال أن يلعب اللاعب B الاستراتيجية 3:

$$y_3 = Y_3/Z = \frac{5/49}{48/196} = \frac{20}{45} = 0.45$$

- حل النموذج الخطي للاعب A هو:

عناصر سطر Z وذلك بتبديل كل Y بـ X مع إبقاء الأدلة أي أن:

$z=45/196 \quad X_4 = 5/49 \quad X_5 = 11/196 \quad X_6 = 1/14$

$$X_1 = X_2 = X_3 = 0$$

- وبالتالي حل مسألة اللاعب A هي:

قيمة اللعبة: $v = 1/z - 5 = \frac{196}{45} - 5 = -0.64$

احتمال أن يلعب اللاعب A الاستراتيجية 1: $x_1 = X_4 / Z = \frac{5/49}{45/196} = \frac{20}{45} = 0.45$

احتمال أن يلعب اللاعب A الاستراتيجية 2: $x_2 = X_5 / Z = \frac{11/196}{45/196} = \frac{11}{45} = 0.24$

احتمال أن يلعب اللاعب A الاستراتيجية 3: $x_3 = X_6 / Z = \frac{1/14}{45/196} = \frac{14}{45} = 0.31$

مما سبق نستنتج أن اللاعب A سيستخدم الاستراتيجية المركبة التالية:

$(x_1 = 0.45,\ x_2 = 0.24,\ x_3 = 0.31)$

واللاعب B سيستخدم الاستراتيجية المركبة التالية:

$(y_1 = 0.31,\ y_2 = 0.21\ ,\ y_3 = 0.44)$

وقيمة اللعبة $v = -0.64$ وهي لصالح اللاعب B.

مسائل عامـة

١) جِدْ الحل الأمثل للألعاب الاستراتيجية التالية:

1)		**استراتيجيات اللاعب B**		
		1	2	3
استراتيجيات اللاعب A	1	18	2	0
	2	1	3	10
	3	5	4	5
	4	16	3	2

٢)		**استراتيجيات اللاعب B**		
		1	2	3
استراتيجيات اللاعب A	1	-1	6	-2
	2	2	4	6
	3	-2	-6	12

٣)		**استراتيجيات اللاعب B**	
		1	2
استراتيجيات اللاعب A	1	2	0
	2	1	3

٤)		**استراتيجيات اللاعب B**			
		1	2	3	4
استراتيجيات اللاعب A	1	2	1	2	2
	2	1	2	-1	3
	3	2	-3	-1	-4

٢) حل الألعاب التالية باستخدام البرمجة الخطية.

١)		استراتيجيات اللاعب **B**		
		1	2	3
استراتيجيات اللاعب A	1	-1	1	1
	2	2	-2	2
	3	3	3	-3

٢)		استراتيجيات اللاعب **B**			
		1	2	3	4
استراتيجيات اللاعب A	1	10	20	-20	13
	2	12	14	0	15
	3	7	2	18	19

٣)		استراتيجيات اللاعب **B**			
		1	2	3	4
استراتيجيات اللاعب A	1	-3	-1	1	0
	2	-1	-2	-2	-1
	3	0	1	-1	3

٣) مصفوفة الدفع التالية تبين الاستراتيجيات الثلاث للدفاع الجوي لمقابلة طائرات العدو الذي يستخدم ثلاثة أساليب في الهجوم. والمطلوب تحديد أفضل أسلوب دفاع جوي لإيقاع أكبر خسارة في طائرات العدو.

		استراتيجيات الهجوم		
		1	2	3
استراتيجيات الدفاع الجوي	1	0.7	0.2	0.05
	2	0.4	0.45	0.15
	3	0.2	0.25	0.8

٤) تتنافس شركتان سياحيتان للحصول على أكبر عدد من الزبائن لإعداد رحلات إلى مناطق سياحية مختلفة، إن الأسلوب المتبع لزيادة نصيب كل شركة في السوق هو استخدام أسلوب الدعاية، وتتبع كل شركة ثلاثة استراتيجيات خاصة بالحملة الدعائية. وتبين المصفوفة التالية نسبة زيادة عدد الزبائن للشركة الأولى A:

		استراتيجيات الشركة **B**		
		1	2	3
استراتيجيات الشركة A	1	1	-7	-13
	2	9	-1	-3
	3	17	3	2

جِدْ الاستراتيجيات الخاصة لكل شركة مع إيجاد القيمة المثلى للمنافسة.

٥) مؤسستان تتنافسان في سوق معين، وكل مؤسسة تستطيع أن تختار للترويج عن بضائعها سواءً عن طريق التلفزيون أو عن طريق الجرائد ولنفرض أن حصص المؤسستين في السوق وفقاً للتراكيب الإعلانية المتعددة معطاة في مصفوفة العائد التالية:

		استراتيجيات المؤسسة **B**	
		J	TV
استراتيجيات المؤسسة A	J	0.60	0.40
	TV	0.50	0.70

فما هو القرار الأمثل لكل مؤسسة حول استخدام التلفزيون والجرائد في ترويج بضائعهما.

الفصل الثاني عشر

الالعاب الاستراتيجية متعددة الاطراف

١,١٢. مقدمة

تناولنا في الفصل السابق الالعاب الاستراتيجية ذات شخصين ولاحظنا انه في الالعاب ذات الشخصين ومجموع صفري ان اللعبة تعتمد على مفهوم الاستراتيجية اما بسيطة او مركبة والتي تحدِّد مجموعة من القواعد لكل لاعب ترشده إلى كيفية التصرف في كل موقف يمكن أن يحدث له، ويحصل كل لاعب على قيمة اللعبة الخاصة به عندما يطبق الاستراتيجية.

سنتناول في هذا الفصل الالعاب الاستراتيجية متعددة الاطراف ذات المجموع الصفري، والالعاب الاستراتيجية بدون المجموع الصفري.

٢,١٢. لعبة ذات n شخص ومجموع صفري

الألعاب المؤلفة من n شخص لا تعتمد على مفهوم الاستراتيجية بل تعتمد على قيمة اللعبة للاعب (أو لمجموعة اللاعبين) عندما يلعب (أو يلعبون) ضد التحالف المكون من اللاعبين الآخرين، وسنتناول في هذه الفقرة مفهوم اللعبة ذات n شخص والتي تعتمد على مفهوم التحالفات او التخصيصات.

١,٢,١٢. التحالفات

إذا كان اللاعبون المشتركون في لعبة ما هم: A, B, C, D عندها يمكننا تشكيل التحالفات (الاتحادات أو الائتلافات) التالية:

تسلسل	المجموعة (I)	ستلعب ضد	المجموعة (II)
١-	A, B, C		D
٢-	A, B, D		C
٣-	A, C, D		B
٤-	B, C, D		A
٥-	A, B		C, D
٦-	A, C		B, D
٧-	A, D		B, C

إذا كانت قيمة اللعبة من أجل اللاعبين A, B, C هي V عندئذ قيمة اللعبة من أجل اللاعب D هي V- لأن اللعبة ذات مجموع صفري.

ولذلك سيكون لدينا في حالة لعبة مؤلفة من 4 لاعبين، سبع قيم (خصائص) وكل قيمة تعتبر حلاً للعبة، وبشكل عام إذا كان لدينا n لاعب عندئذٍ يمكن تشكيل عدد من التحالفات يساوي إلى $(2^{n-1} - 1)$ وتقوم بحل الـ $(2^{n-1} - 1)$ لعبة ثنائية ذات مجموع صفري كما مر معنا في الفقرة السابقة.

مثال (١): ليكن لدينا ثلاثة لاعبين A, B, C، حيث لكل لاعب استراتيجيتان، والعائد معبراً عنه بدلالة الاستراتيجيات المختارة من قبل كل لاعب معطاة في الجدول التالي:

الاستراتيجيات			العوائد		
A	B	C	A	B	C
P_1	Q_1	R_1	2	1	-3
P_1	Q_1	R_2	-1	1	0
P_1	Q_2	R_1	-1	-2	3

P_1	Q_2	R_2	0	2	-2
P_2	Q_1	R_1	3	-2	-1
P_2	Q_2	R_1	0	-1	1
P_2	Q_2	R_2	-1	1	0

حيث أن اللاعب A لديه الاستراتيجيتان P_1, P_2 ، واللاعب B لديه الاستراتيجيتان Q_1, Q_2، واللاعب C لديه الاستراتيجيتان R_1, R_2.

يمكن تشكيل ثلاثة تحالفات ممكنة كما يلي:

اللاعبان B, C ضد اللاعب A

اللاعبان A, C ضد اللاعب B

اللاعبان A, B ضد اللاعب C

١– مسألة اللاعب A ضد اللاعبين B, C:

إن مصفوفة العائد من وجهة نظر اللاعب A هي:

		استراتيجيات اللاعبين B, C			
		Q_1R_1	**Q_1R_2**	**Q_2R_1**	**Q_2R_2**
استراتيجيات اللاعب A	**P_1**	2	-1	-1	0
	P_2	3	-2	0	-1

نلاحظ أن هذه المصفوفة تحتوي على نقطة توازن وبالتالي:

- الاستراتيجية المثلى للاعب A هو البديل P_1.
- الاستراتيجية المثلى للاعبين B, C معاً هو البديل (Q_4, R_2).
- وقيمة اللعبة من أجل اللاعب A هي: $V(A) = -1$
- وقيمة اللعبة من أجل تحالف اللاعبين B, C معاً هي: $V(A) = 1$
- وهي غير عادلة ولصالح تحالف اللاعبين B, C.

٢– مسألة اللاعب B ضد اللاعبين A, C:

إن مصفوفة العائد من وجهة نظر اللاعب B هي:

		استراتيجيات اللاعبين A, C			
		P_1R_1	P_1R_2	P_2R_1	P_2R_2
استراتيجيات اللاعب B	Q_1	1	1	-2	0
	Q_2	-2	2	-1	1

هذه المصفوفة لا تحوي نقطة توازن إلا أننا نلاحظ أن التحالف بين اللاعبين A, C لن يلعبا أبداً التراكيب التالية من الاستراتيجيات:

P_1R_2 لأن عناصر عموده أكبر أو تساوي عناصر عمود P_1R_1

P_2R_2 لأن عناصر عموده أكبر أو تساوي عناصر عمود P_2R_1

لذلك بحذف العمودين P_1R_2 و P_2R_2 تصبح مصفوفة اللعبة كما يلي:

		استراتيجيات اللاعبين A, C			
		P_1R_1		P_2R_1	
استراتيجيات اللاعب B	Q_1	1		-2	
	Q_2	-2		-1	

وهي مصفوفة من الشكل (٢ × ٢) يمكن حلّها بالطريقة الجبرية (كما مر معنا سابقاً) وبالحل نجد أن:

- اللاعب B سيلعب الاستراتيجية Q_1 باحتمال 1/4 والاستراتيجية Q_2 باحتمال 3/4 .
- وقيمة اللعبة من أجل اللاعب B هي: $V(B) = -1/25$.
- أما تحالف اللاعبين A, C سيلعب الاستراتيجية:

P_1R_1 باحتمال 1/4

P_1R_2 باحتمال 0

P_2R_1 باحتمال 3/4

P_2R_2 باحتمال 0

- وقيمة اللعبة من أجل تحالف اللاعبين A, C هي: $V(A, C) = 1/25$
- وهي غبر عادلة ولصالح التحالف بين C, A ضد اللاعب B.

٣– مسألة اللاعب C ضد اللاعبين A, B:

إن مصفوفة العائد من وجهة نظر اللاعب C هي:

		استراتيجيات اللاعبين A, B			
		P_1Q_1	P_1Q_2	P_2Q_1	P_2Q_2
استراتيجيات اللاعب C	R_1	-3	3	-1	1
	R_2	0	-2	2	0

وهذه المصفوفة لا تحوي نقطة توازن، ونلاحظ أن التحالف بين A, B لن يلعب الاستراتيجيات:

P_2Q_1 لأن عناصر عمودها أكبر من عناصر عمود P_1Q_1

P_2Q_2 لأن عناصر عمودها أكبر من عناصر عمود P_1Q_1

بحذف العمودين P_2Q_2, P_2Q_1 تأخذ مصفوفة اللعبة الشكل (٢ × ٢) التالي:

		استراتيجيات اللاعبين A, D			
		P_1Q_1	P_1Q_2		
استراتيجيات اللاعب C	R_1	-3	3		
	R_2	0	-2		

وهي مصفوفة من الشكل (٢ × ٢) يمكن حلّها بالطريقة الجبرية وبالحل نجد أن:

- اللاعب C سيلعب الاستراتيجية R_1 باحتمال 1/4 والاستراتيجية R_2 باحتمال 3/4.
- وقيمة اللعبة من أجل اللاعبC هي: $V(C) = -0.75$.
- أما تحالف اللاعبين A, B سيلعب الاستراتيجية:

  الاستراتيجية P_1Q_1 باحتمال 5/8

  والاستراتيجية P_1Q_2 باحتمال 3/8

  والاستراتيجية P_2Q_1 باحتمال 0

  والاستراتيجية P_2Q_2 باحتمال 0

- وقيمة اللعبة من أجل تحالف اللاعبين A, B هي: $V(A, B) = 0.75$

- وهي غير عادلة ولصالح التحالف بين A, B ضد اللاعب C.

مما سبق نحصل على قيم (خصائص) اللعبة بين ثلاثة أشخاص A, B, C ومجموع صفر هي:

$V(A) = -1.00$	$V(B, C) = 1.00$
$V(B) = -1.25$	$V(A, C) = 1.25$
$V(C) = -0.75$	$V(A, B) = 0.75$

مثال(٢): إذا كان لدينا ثلاثة لاعبين **A , B , C** وكل لاعب يملك استراتيجيتين، والعوائد المتوقعة من الاستراتيجيات كما يلي:

الاستراتيجيات			العوائد		
A	**B**	**C**	**A**	**B**	**C**
P_1	Q_1	R_1	**6**	**3**	**-9**
P_1	Q_1	R_2	**-3**	**3**	**0**
P_1	Q_2	R_1	**-3**	**-6**	**9**
P_1	Q_2	R_2	**-0**	**6**	**-6**
P_2	Q_1	R_1	**9**	**-6**	**-3**
P_2	Q_1	R_2	**-6**	**0**	**-6**
P_2	Q_2	R_1	**-0**	**-3**	**3**
P_2	Q_2	R_2	**-3**	**3**	**0**

حيث نلاحظ أن اللاعب **A** يملك استراتيجيتين ممكنتين P_1, P_2، واللاعب **B** يملك استراتيجيتين ممكنتين Q_1, Q_2 ، واللاعب **C** يملك استراتيجيتين ممكنتين R_1, R_2.

ويمكن دراسة مصفوفة الألعاب من خلال تشكيل ثلاثة تحالفات ممكنة وذلك على الشكل التالي:

١ – مسألة اللاعب A ضد اللاعبين B, C:

ومصفوفة العائد من وجهة نظر اللاعب A هي:

		استراتيجيات اللاعبين **B, C**			
		Q_1R_1	Q_1R_2	Q_2R_1	Q_2R_2
استراتيجيات اللاعب **A**	P_1	6	-3	-3	0
	P_2	9	-6	0	-3

إن هذه اللعبة تحوي نقطة توازن : $\underset{j}{\text{Min}}\,\underset{i}{\text{Max}} = \underset{i}{\text{Max}}\,\underset{j}{\text{Min}} = -3$ وبالتالي:

- الاستراتيجية المثلى للاعب **A** هي P_1 .
- الاستراتيجية المثلى للتحالف ما بين اللاعبين **B , C** هي: Q_1R_2.
- قيمة اللعبة $V(B,C) = 3$ $V(A) = -3$
- واللعبة غير عادلة ولصالح التحالف **B , C**.

٢ – مسألة اللاعب B ضد اللاعبين A, C:

إن مصفوفة العائد من وجهة نظر اللاعب B هي:

		استراتيجيات اللاعبين **A, C**			
		P_1R_1	**P_1R_2**	**P_2R_1**	**P_2R_2**
استراتيجيات اللاعب **B**	**Q_1**	3	3	-6	0
	Q_2	-6	6	-3	3

بالنظر إلى هذه المصفوفة نجد أن الاستراتيجية الثانية P_1R_2 والاستراتيجية الرابعة P_2R_2 لن يقوم اللاعب (التحالف) **C , A** بإمكانية استخدامهما ، لأنهما سيحققان لهما أكبر الخسائر علماً أن لديهما فرصاً أفضل من الاستراتيجيات الأخرى لتحقيق خسائر أقل (الحل بطريقة السيطرة) وبالتالي من مصلحتهم حذف هاتين الاستراتيجيتين فتصبح المصفوفة :

		استراتيجيات اللاعبين **A, C**			
		P_1R_1		**P_2R_1**	
استراتيجيات اللاعب **B**	**Q_1**	3		-6	
	Q_2	-6		-3	

وبما أن هذه اللعبة لا تحوي نقطة توازن أي: $\underset{j}{\text{Min}}\,\underset{i}{\text{Max}} \neq \underset{i}{\text{Max}}\,\underset{j}{\text{Min}}$ فإن قيمها محصورة ما بين: $\mathbf{-1 \le V \le -2}$.

بالحل الجبري نجد:

- اللاعب B سيلعب الاستراتيجية Q_1 باحتمال 1/4 والاستراتيجية Q_2 باحتمال 3/4 .

- وقيمة اللعبة من أجل اللاعب B هي: $V(B) = -3.75$.
- أما تحالف اللاعبين A, C سيلعب الاستراتيجية:

P_1R_1 باحتمال 1/4

P_1R_2 باحتمال 0

P_2R_1 باحتمال 3/4

P_2R_2 باحتمال 0

- وقيمة اللعبة من أجل تحالف اللاعبين A, C هي: $V(A, C) = 3.75$
- وهي غير عادلة ولصالح التحالف بين C, A ضد اللاعب B.

٣- مسألة اللاعب C ضد اللاعبين A, B:

إن مصفوفة العائد من وجهة نظر اللاعب C هي:

		استراتيجيات اللاعبين A, B			
		P_1Q_1	P_1Q_2	P_2Q_1	P_2Q_2
استراتيجيات اللاعب C	R_1	-9	9	-3	3
	R_2	0	-6	6	0

وهذه المصفوفة لا تحوي نقطة توازن.

ونلاحظ أن التحالف بين A, B لن يلعبا الاستراتيجيتين P_2Q_1 و P_2Q_2 لأنهما سيحققان لهما أكبر الخسائر، وبالتالي يمكن حذفهما بطريقة السيطرة أو التحكم وبالتالي تأخذ مصفوفة اللعبة الشكل (٢ × ٢):

		استراتيجيات اللاعبين A, B			
		P_1Q_1	**P_1Q_2**		
استراتيجيات اللاعب C	R_1	-9	9		
	R_2	0	-6		

بالحل الجبري نجد:

- اللاعب C سيلعب الاستراتيجية R_1 باحتمال 1/4 والاستراتيجية R_2 باحتمال 3/4.

- وقيمة اللعبة من أجل اللاعب C هي: $V(C) = -2.25$.
- أما تحالف اللاعبين A, B سيلعب الاستراتيجية:

الاستراتيجية P_1Q_1 باحتمال 5/8

والاستراتيجية P_1Q_2 باحتمال 3/8

والاستراتيجية P_2Q_1 باحتمال 0

والاستراتيجية P_2Q_2 باحتمال 0

- وقيمة اللعبة من أجل تحالف اللاعبين A, B هي: $V(A, B) = 2.25$
- وهي غير عادلة ولصالح التحالف بين A, B ضد اللاعب C.

مما سبق نحصل على قيم (خصائص) اللعبة بين ثلاثة أشخاص A, B, C ومجموع صفر هي:

$V(A) = -3.00$	$V(B, C) = 3.00$
$V(B) = -3.75$	$V(A, C) = 3.75$
$V(C) = -2.25$	$V(A, B) = 2.25$

٢,٢,١٢. التخصيصات

لتكن $V_1, V_2, \ldots, V_n$ قيم اللعبة للاعبين المشتركين في لعبة ذات n شخص ومجموع صفر. عندما يلعب كل لاعب وحيداً ضد تحالف اللاعبين الآخرين فإننا نسمي $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ تخصيصاً ما إذا تحقق الشرطان التاليان:

$$x_i \geq V_i \quad ; i = 1,2,2,\ldots, n \qquad (1)$$
$$\sum x_i = 0 \qquad (2)$$

مثال (٣): لنأخذ المثال (١٠)، لقد وجدنا أن قيم اللعبة عندما يلعب كل لاعب وحيداً ضد تحالف اللاعبين الآخرين هي:

$V(A) = -1, V(B) = -1.25, V(C) = -0.75$

لذلك يمكن أن نعتبر التراكيب التالية بمثابة تخصيص يمكن أن يعتمده اللاعبون:

1) [-0.75, 0.25, 0.5]
2) [2.00, -1.25, -0.75]
3) [0.30, -0.80, 0.70]

4) [-0.15, 0.85, -0.70]

بينما التراكيب التالية لا تمثل تخصيصاً:

5) [0.5, 0.5, -1.00]

لأن: $x_3 = -1.00 < V(3) = 0.75$

6) [0.26, -1.26, 1.00]

لأن: $x_2 = -1.26 < V(2) = -1.2575$

إذا عدنا إلى جدول العائد الأصلي للعبة في المثال (١٠) نلاحظ أنه إذا اختار اللاعبون A, B, C الاستراتيجيات (البدائل) P_1, Q_1, R_1 على الترتيب ستكون عوائدهم 2, 1, -3 على الترتيب، أي أن اللاعب C سيخسر(3-) واللاعبان B, A سيربحان 2, 1 على الترتيب، وهذا الحل لا يكون مرغوباً به بالنسبة للاعب C ونحن نعلم أن اللاعب C إذا لعب وحيداً ضد تحالف A, B فإن خسارته لن تكون أكبر من V(C) = -0.75، أما اللاعبان A, B سوف لن يقبلا عائداً متحققاً لهما يجلهما يدفعان أكثر من 1.25 أو 1 على الترتيب.

من هذا المنطلق فإنه إذا أخذنا:

$$V'(A) = 0.5$$
$$V'(B) = -0.25$$
$$V'(C) = -0.25$$

نلاحظ أن هذه العوائد لا تكون أقل من قيمة اللعبة بالنسبة لكل لاعب أي أن:

$$V'(A) = 0.5 > V(A) = -1.00$$
$$V'(B) = -0.25 > V(B) = -1.25$$
$$V'(C) = -0.25 > V(C) = -0.75$$

لذلك سمينا V'(C), V'(B), V'(A) بتخصيص ما، وبالتالي فإن لكل لعبة ذات n شخص ومجموع صفري مجموعة من التخصيصات وكل لاعب سيفضل أحد التخصيصات وذلك لأن بقية التخصيصات ستكون محكومة من قبل التخصيص المفضل.

فمثلاً:

- اللاعبان C, B (بدون تحالفات) سيفضلان التراكيب (1) على (2) أو (4) على (2)
- اللاعبان B, A (بدون تحالفات) سيفضلان التركيب (4) على (1)

وبناءً على ذلك نحصل على مجموعة من التخصيصات تمثل حلاً للعبة ذات الـ n شخص ومجموع صفري تحقق الشرطين التاليين:

١- لا يوجد أي تخصيص في المجموعة المفضلة يحكم التخصيصات الأخرى ضمن المجموعة.

٢- أي تخصيص آخر هو محكوم من قبل واحد من التخصيصات الموجودة في المجموعة المفضلة.

وفي مثالنا فإن الحل يتألف من مجموعة تضم ثلاثة تخصيصات تحقق الشرطين السابقين وهي:

7) [0.05, 0.25, -0.75]
8) [0.5, -1.25, 0.75]
9) [-1.00, 0.25, 0.75]

فمثلاً نلاحظ أن:

التخصيص 8 أفضل من التخصيص 1 بالنسبة للاعبين C, A

التخصيص 9 أفضل من التخصيص 2 بالنسبة للاعبين C, B

التخصيص 8 أفضل من التخصيص 3 بالنسبة للاعبين C, A

التخصيص 8 أفضل من التخصيص 4 بالنسبة للاعبين C, A

مثال (٤): لنأخذ المثال (١١) لقد وجدنا أن قيم اللعبة عندما يلعب كل لاعب وحيداً ضد تحالف اللاعبين الآخرين هي:

$$V(A) = -3.00 \qquad V(B) = -3.75 \qquad V(C) = -2.25$$

من جدول العائد الأصلي للعبة نلاحظ أنه إذا اختار اللاعبون C,B,A الاستراتيجيات P_1, Q_1, R_1 على الترتيب عندها تكون عوائدهم **$(6 + 3; + 9; -)$** على الترتيب حيث اللاعب C يخسر تسع وحدات نقدية واللاعبان (B,A) يربحان (3,6) وحدات نقدية على الترتيب .

من المنطقي أن لا يكون اللاعب C ميالاً لقبول هذه النتيجة كعائد متحقق له، لأنه وكما نعلم إذا لعب وحيداً ضد اللاعبين B,A معاً فإن خسارته لن تكون أكبر من -(2.25 وحدة وفي المقابل فإن اللاعبين B,A لن يقبلا أبداً

نفرض أن لدينا التخصيص التالي:

$$V(A) = 1.25 \qquad V(B) = -0.75 \qquad V(C) = -0.75$$

في هذه الفرضية يكون اللاعبون مقتنعين ويبقون على حالهم لأننا بالمقارنة نجد:

$$1.25 > -3 \qquad -0.75 > -3.75 \qquad -0.75 > -2.25$$

لذلك يمكن أن نعتبر التراكيب التالية بمثابة تخصيص يمكن أن يعتمده اللاعبون:

1) [-2.25, 0.75, 1.50]
2) [6.00, -3.75, -2.25]
3) [0.9, -2.4, 1.5]
4) [-0.45, 2.55, -2.10]

بينما التراكيب التالية لا تمثل تخصيصاً:

5) [1.5, 1.5, -3.00]

لأن: $x_3 = -3.00 < V(3) = -2.25$

6) [0.75, -3.78, 3.00]

لأن: $x_2 = -3.78 < V(2) = -3.75$

إن اللاعبين B , C بدون تحالفات سيفضلان كلاً من التراكيب (1) على (2) وكذلك (4) على (2) كما يلي :

$$(-2.25; +0.75; +1.5) > (6; -3.75; -2.25)$$
$$(0.45; +2.55; 2.10) > (6; -3.75; -2.25)$$

كذلك إن اللاعبين B , A بدون تحالفات سيفضلان كلاً من التراكيب (4) على (1) :

$$(-0.45;+2.55;-2.10)>(-2.25;+0.75+1.50)$$

٣,١٢. الألعاب الإستراتيجية بدون المجموع الصفري

في الألعاب بدون المجموع الصفري لا يكون مجموع المكاسب والخسائر مساوياً للصفر ومثل هذه الألعاب يمكن أن تمثل مواقف اقتصادية حيث أن النتيجة النهائية للتنافس بين شركتين لا تستدعي بالضرورة أن يكون ربح الأولى تساوي خسارة الثانية.

في الألعاب بين n شخص ومجموع غير صفري يكون من السهل إضافة لاعب وهمي n + 1 في لعبة بين n شخص معطاة لا تختصر الحل، لأن هذا اللاعب ليس حراً بل سينضم إلى التحالفات الممكنة، وسنعالج موقف اللاعب n + 1 فقط من وجهة نظر خسارته العظمى.

فإذا كان $V_1, V_2, \ldots, V_n$ قيم اللعبة من أجل اللاعبين $1, 2, \ldots, n$ على الترتيب وإذا كان V_{n+1} قيمة اللعبة من أجل اللاعب الوهمي n + 1.

نسمي قيمة اللعبة V من أجل اللاعبين $1, 2, \ldots, n$ والداخلين في تحالفات بـ

$$w = v(1, 2, \ldots, n) = -v_{n+1} \qquad (1)$$

نسمي: $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ تخصيصاً ما، إذا كان لدينا

$$x_i \geq v_i \quad ; i = 1, 2, \ldots n \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = w, \qquad (3)$$

إن تعريف حل ما من أجل لعبة بين n شخص بدون شرط المجموع الصفري هو نفسه من أجل لعبة ذات مجموع صفري، وهذا الحل يتضمن مجموعة من التخصيصات بشكل أنه:

- لا يوجد تخصيص واحد في المجموعة يحكم التخصيصات الأخرى في المجموعة.
- أي تخصيص آخر سيكون محكوماً بواسطة واحد من التخصيصات الموجودة في المجموعة.

مثال (٥): لنأخذ لعبة بين شخصين ومجموع غير صفري والعائد معبراً عنه بدلالة البدائل المختارة من قبل كل لاعب موضحاً بالجدول التالي:

الاستراتيجيات		العائد	
A	B	A	B
P_1	Q_1	3	-1
P_1	Q_2	-1	1
P_2	Q_1	1	0
P_2	Q_2	-2	-1

١- من أجل اللاعب A تكون مصفوفة العائد معطاة على الشكل التالي:

		استراتيجيات اللاعب **B**	
		Q_1	Q_2
استراتيجيات اللاعب **A**	P_1	3	-1
	P_2	1	-2

وهذه المصفوفة تحوي نقطة توازن وقيمة اللعبة $V(A) = -1$

٢- من أجل اللاعب B تكون مصفوفة العائد معطاة على الشكل التالي:

		استراتيجيات اللاعب **A**	
		P_1	P_2
استراتيجيات اللاعب **B**	Q_1	-1	0
	Q_2	1	-1

وهذه المصفوفة لا تحوي نقطة توازن نلجأ إلى الحل الجبري والذي ينتج أن اللاعب B سيستخدم استراتيجية مركبة: أي أن اللاعب B سيلعب الاستراتيجية Q_1 باحتمال 2/3 و Q_2 باحتمال 1/3. وقيمة اللعبة $V(B) = -1/3$

٣- من أجل اللاعب الوهمي (n + 1) أي اللاعب (3) ونرمز له بـ C تكون مصفوفة العائد معطاة بالشكل التالي:

		استراتيجيات اللاعبين **A, B**			
		P_1Q_1	P_1Q_2	P_2Q_1	P_2Q_3
استراتيجيات اللاعب **C**	**R**	-2	0	-1	3

وهذه المصفوفة تحوي نقطة توازن لذلك فإن قيمة اللعبة: $V(C) = -2$

مما سبق نستنتج أن قيمة اللعبة من أجل اللاعبين A, B الداخلين في التحالف هي:

$$W = V(A, B) = -V_{n+1} = 2$$

والحل يكون معطى بواسطة أي تخصيص $[x_1, x_2]$ شريطة أن يكون:

$$x_1 \geq -1,\ x_2 \geq -1/3,\ x_1 + x_2 = 2$$

مثال (٦):ليكن لدينا لعبة بين شخصين بدون المجموع الصفري وليكن لدينا المعطيات التالية:

$v_1 = 1 \qquad v_2 = 0 \qquad v_{n+1} = v_3 = -3$

عندئذ قيمة اللعبة من أجل اللاعبين 1, 2 والداخلين بالتحالفات هي:

$$w = -v_3 = 3$$

التخصيصات التالية:

- $[1, 2], [2, 1], [3, 0]$ هي تخصيصات اللعبة لأنها تحقق الشروط (٢) و (٣).

أما التخصيصات:

- $[4, -1]$ لا تعتبر تخصيصاً لأن الشرط (٢) غير محقق $-1 < v_2 = 0$
- $[1, 1]$ لا تعتبر تخصيصاً لأن الشرط (٣) غير محقق $w > 2 = (1 + 1)$

مسائل عامـة

١) ليكن لدينا ثلاثة لاعبين A, B, C حيث يوجد أمام كل لاعب استراتيجيتان، والعائد معبراً عنه بدلالة الاستراتيجيات المختارة من قبل كل لاعب معطاة في الجدول التالي:

الاستراتيجيات			العوائد		
A	B	C	A	B	C
P_1	Q_1	R_1	2	1	-2
P_1	Q_1	R_2	1	1	1
P_1	Q_2	R_1	-2	-3	2
P_1	Q_2	R_2	2	2	-3
P_2	Q_1	R_1	-2	-2	-2
P_2	Q_2	R_1	0	-1	0
P_2	Q_2	R_2	-1	1	1

جِدْ الحل الامثل لهذه اللعبة باستخدام التحالفات الممكنة، ثم جِدْ تخصيصين ممكنان.

٢) لتكن لدينا لعبة بين شخصين ومجموع غير صفري والعائد معبراً عنه بدلالة الاستراتيجيات المختارة من قبل كل لاعب موضحاً بالجدول التالي:

الاستراتيجيات		العائد	
A	B	A	B
P_1	Q_1	3	-1
P_1	Q_2	-1	1
P_2	Q_1	1	0
P_2	Q_2	-2	-1

جِدْ الحل الامثل لهذه اللعبة.

المراجع العربية

١. حسين أحمد حسين علي، السوافيري فتحي رزق ، **بحوث العمليات في المحاسبة – مدخل معاصر باستخدام الحاسب الآلي**، الدار الجامعية، الإسكندرية 2003.

٢. حمدان فتحي ، مرعي رشيق رفيق ، **مقدمة في بحوث العمليات** ،دار وائل،عمان 2004.

٣. السوافيري فتحي رزق ، **مدخل معاصر في بحوث العمليات : تطبيقات باستخدام الحاسب الدار الجامعية** ، الإسكندرية 2003.

٤. الشيخ عاصم عبدا لرحمن، **بحوث العمليات : و استخدام حزم البرمجيات برمجية الخوارزمي**، دار المناهج ،عمان1999.

٥. صالح سمير أبو الفتوح ، **بحوث العمليات لدعم القرارات في ظل التشغيل الإلكتروني**، جامعة المنصورة، القاهرة 2000.

٦. صالح هلال هادي وآخرون، **بحوث العمليات وتطبيقاتها**، اللجنة الجامعية للشؤون العلمية، الجامعة التكنولوجية، الأردن 1990.

٧. الصفدي محمد سالم ، **بحوث العمليات تطبيق وخوارزميات** ، دار وائل ، عمان1999.

٨. العبيدي محمود، الفضل مؤيد عبد الحسين ، **بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال**، مؤسسة الوراق، عمان 2004.

٩. العلي ابراهيم، **بحوث العمليات** . مطبعة دار الكتاب بدمشق، جامعة تشرين، 1991.

١٠. علي علي حسين ، الفضل مؤيد عبد الحسين، إبراهيم نجاح باقر ،**بحوث العمليات و تطبيقاتها في وظائف المنشأة**، دار زهران، عمان1999.

١١. قاسم أحمد رفيق، **المدخل إلى بحوث العمليات**، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، جامعة حلب، 1992.

١٢. الكبيسي موفق محمد ، **بحوث العمليات تطبيقات و خوارزميات** ، دار الحامد ، عمان1999.

١٣. ماغوط خالد، **البرمجة الخطية** ، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، جامعة حلب، 1991.

١٤. المحمد صبحي **بحوث العمليات** ، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية / التعليم المفتوح جامعة حلب 2006.

١٥. مرعي عبد الحي ، أبو زيد كمال خليفة ،**بحوث العمليات في المحاسبة** ، الدار الجامعية، الإسكندرية 2000.

١٦. مشرقي حسن، باقية انعام **نظرية القرارات الادارية** ، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، جامعة حلب 2009.

١٧. المعزاوي عبد السلام، **بحوث العمليات في مجالات الاستثمار والإنتاج والنقل والتخزين**، دار الشرق، 1991.

١٨. منصور عوض وآخرون، **بحوث العمليات المبرمجة** ، دار الأمل للنشر والتوزيع، عمان 1991.

١٩. المهتدي أكرم محمد عرفان، **الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية** : بحوث العمليات ،دار صفاء 2004.

٢٠. الموسوي منعم، **الأساليب الكمية في الإدارة**، جامعة عمان الأهلية، 1993.

٢١. نائب ابراهيم و ماغوط خالد، **خوارزمية جديدة لإيجاد حل مسألة التدفق الأعظمي في الشبكات ووضع برنامج حاسوبي لها،** مجلة بحوث جامعة حلب، العدد (18) 1995.

٢٢. نائب ابراهيم وباقية انعام، **خوارزمية أتمتة الانجاز الأمثل للمشاريع الكبيرة بتكلفة مثلى،** مجلة بحوث جامعة حلب، العدد (20) 1997.

٢٣. نائب إبراهيم، المحمد صبحي، مشرقي حسن، باقية انعام **بحوث العمليات** ، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، جامعة حلب 2008.

٢٤. نائب ابراهيم، **المخططات الزمنية للمحاكاة الآلية لصفوف الانتظار المتعدد الأطوار والقنوات** ، المؤتمر العلمي على مستوى جمهورية جورجيا والتي دعت إليه جامعة تبليسي، مدينة كوري "جورجيا" 1991.

٢٥. نائب إبراهيم، باقية انعام **نظرية القرارات الادارية** ، دار وائل، عمان 2001.

٢٦. نائب ابراهيم، **خوارزمية حاسوبية لضغط الأنشطة في شبكات CPM** (المؤتمر العلمي الثاني لعلوم الحوسبة وتطبيقاتها، المنعقد في رحاب جامعة العلوم التطبيقية في الفترة 21 – 22/ 1998/9).

المراجع الأجنبية

1- Rardin Ronald L - **Optimization In Operations Research** -Pearson ,1998,London

2- Bazaraa M., Jarvis J., Sheralih - **Linear Programming And Network Flows -** Newyork 1990.

3- Budnick Frank`S; Mcleavey Dennis ؛Mojena Richard – **Principles Of Operations Research For Management** - A.I.T.B.S - 2004 New Delhi .

4- Gupta Prem ؛Kumar Hira D.S – **Problems In Operations Research : Principles And Solutions** - S.Chands Company-2000 New Delhi.

5- Hiller Frederick ؛Liberman Gerald J - **Introduction To Operations Research** - Mc Graw-Hill - 2001 Boston .

6- Jensen Paul.A ؛Bard Jonathan - **Operations Research Models And Methods** - John Wiley -2003 N.J .

7- Kalavathy S . - **Rations Research** - Vikas – 2000 new Delhi .

8- Leighton F. - **Introduction To Parallel Algorithms And Architecture: Arrays, Trees** - Morgan Kaufmann - New York , 1992.

9- Moulin H. **-Game Theory For The Social Sciences-** New York, University Press, 1982.

10- Nering E. Tucker A. **-Linear Programming And Related Problems -** Boston 1992.

11- Phillips D., Diaz A. **-Fundamentals Of Network Analysis** - N.J. U.S.A 1981.

12- Ravindea K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, James B. Orlin - **Network Flows (Theory, Algorithms, And Applications)**- Prentice Hall, Englewood Cliffs, New jersey 1993.

13- Sharma J . K - **Operations Research Theory And Applications** - Mac Milan - 2004 New Delhi .
14- Shutlr M. F., Littlechild C.S. -**Operations Research In Management**-. Prentice Hell International (Uk) Ltd, London, 1991.
15- Taha Hamdy A.- **Operations Research (An Introduction)** - Macmillan Publishing Co., Inc, 3ed, Newyork, 1992.
16- Taha ؛Hamdy A - **Operations Research : An Introduction** - Prentice Hall – 2003 N.J .
17- Thomas L. - **Game Theory And Applications**, Holsted Press, Newyork 1984.

دليل المصطلحات العلمية

(عربي – إنكليزي)

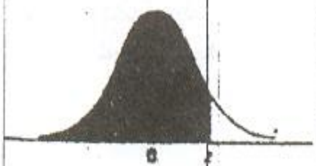
-A-	
Absolute	مطلق
Activity	نشاط
Algbric Method	الطريقة الجبرية
Algorithm	خوارزمية
Alternative optima	حل بديل
Arcs	أقواس
Netwwork Diagram	مخطط شبكي
Assignment Problems	مشكلة التعيين
Available resources	موارد متاحة
-B-	
Balancing Transportation mode	موازنة – نموذج نقل
Basic	قاعدة – أساسي
Basic Solution	حل اساس
Basic Variables	متغيرات أساسية
-C-	
Canonical From	شكل نظامي
Chain	سلسلة
Constraints	قيود
CPM	أسلوب المسار الحرج

Critical activity	النشاط الحرج
Critical Path	مسار حرج
-D-	
Demand	طلب
Dual	مرافق
Dual Model	نموذج مقابل
Dual Simplex method	اسلوب المرافق للسمبلكس
Dual Solution	حل المرافق
Dummy activity	النشاط الوهمي
-E-	
Earliest Start Time	زمن البداية المبكرة
Earliest Completion Time	زمن الانجاز المبكر
Event	حدث
Expected Time	الوقت المتوقع
-F-	
Feasibility Condition	شرط الامكانية
Feasible Soluation	حل ممكن أو مقبول
Float time	وقت فائض
-G-	
Graphical Method	الطريقة البيانية
-H-	
Hungarian Method	الطريقة الهنجارية
-L-	
Latest Completion Time	زمن الإنجاز المتأخر

Latest Start Time	زمن البدء المتأخر
Least Costs Method	طريقة اقل التكاليف
Linear Programming	برمجة خطية
Linear Programming Model	نماذج البرمجة الخطية
Linear Conditions	الشروط الخطية
-M-	
Maximization	تعظيم
Minimization	تخفيض
Model	نموذج
Modified Distribution	التوزيع المعدل
Most Likely Time	الوقت الأكثر احتمالاً
-N-	
Network models	النموذج الشبكي
Nodes	عقد
Non-Basic variable	متغير خارج الأساس
Non-Critical activity	نشاط غير حرج
Non-Negativity	عدم السلبية
Non negativity restriction	قيد عدم السلبية
North-west Corner	الزاوية الشمالية الغربية
-O-	
Objective Function	دالة الهدف
Operations Research	بحوث العمليات
Optimality Condition	شرط الأمثلية

Optimistic Time	الوقت التفاؤلي
Optimum Solution	الحل الأمثل
-P-	
Parallel Events	احداث متوازية
Pessimistic Time	الوقت التشاؤمي
Pivot Element	العنصر المحوري
Pivot Row	سطر محوري
Pivot Column	عمود محوري
Primal-dual algorithm	خوارزمية الأولي – المرافق
Program Evalution Review Technique (PERT)	أسلوب تقييم ومراجعة البرامج(بيرت)
-R-	
Relation	علاقة
-S-	
Sensitivity Analysis	تحليل الحساسية
Sequence Events	حوادث متتالية
Simplex Method	طريقة السمبلكس
Simplex Table	جدول السمبلكس
Slack Variable	متغير فرق
Solution Space	منطقة حل
Standard Form	الشكل القياسي
Starting Basic Solution	اساس ابتدائي
Stepping-Stone	حجر التنقل (المسار المتعرج)
Supply	العرض

-T-	
Transportion Problem	مشكلة النقل
-U-	
Unbounded Solution Space	منطقة حل غير محددة
-V-	
Variable	متغير
Vogal's Approximation	طريقة فوجل التقريبية



ملحق (أ)

جدول التوزيع الطبيعي

Areas Under The Normal Curve

ع (Z)	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	,٥٠٠٠	,٥٠٤٠	,٥٠٨٠	,٥١٢٠	,٥١٦٠	,٥١٩٩	,٥٢٣٩	,٥٢٧٩	,٥٣١٩	,٥٣٥٩
٠,١	,٥٣٩٨	,٥٤٣٨	,٥٤٧٨	,٥٥١٧	,٥٥٥٧	,٥٥٩٦	,٥٦٣٦	,٥٦٧٥	,٥٧١٤	,٥٧٥٣
٠,٢	,٥٧٩٣	,٥٨٣٢	,٥٨٧١	,٥٩١٠	,٥٩٤٨	,٥٩٨٧	,٦٠٢٦	,٦٠٦٤	,٦١٠٣	,٦١٤١
٠,٣	,٦١٧٩	,٦٢١٧	,٦٢٥٥	,٦٢٩٣	,٦٣٣١	,٦٣٦٨	,٦٤٠٦	,٦٤٤٣	,٦٤٨٠	,٦٥١٧
٠,٤	,٦٥٥٤	,٦٥٩١	,٦٦٢٨	,٦٦٦٤	,٦٧٠٠	,٦٧٣٦	,٦٧٧٢	,٦٨٠٨	,٦٨٤٤	,٦٨٧٩
٠,٥	,٦٩١٥	,٦٩٥٠	,٦٩٨٥	,٧٠١٩	,٧٠٥٤	,٧٠٨٨	,٧١٢٣	,٧١٥٧	,٧١٩٠	,٧٢٢٤
٠,٦	,٧٢٥٧	,٧٢٩١	,٧٣٢٤	,٧٣٥٧	,٧٣٨٩	,٧٤٢٢	,٧٤٥٤	,٧٤٨٦	,٧٥١٧	,٧٥٤٩
٠,٧	,٧٥٨٠	,٧٦١١	,٧٦٤٢	,٧٦٧٣	,٧٧٠٤	,٧٧٣٤	,٧٧٦٤	,٧٧٩٤	,٧٨٢٣	,٧٨٥٢
٠,٨	,٧٨٨١	,٧٩١٠	,٧٩٣٩	,٧٩٦٧	,٧٩٩٥	,٨٠٢٣	,٨٠٥١	,٨٠٧٨	,٨١٠٦	,٨١٣٣
٠,٩	,٨١٥٩	,٨١٨٦	,٨٢١٢	,٨٢٣٨	,٨٢٦٤	,٨٢٨٩	,٨٣١٥	,٨٣٤٠	,٨٣٦٥	,٨٣٨٩
١,٠	,٨٤١٣	,٨٤٣٨	,٨٤٦١	,٨٤٨٥	,٨٥٠٨	,٨٥٣١	,٨٥٥٤	,٨٥٧٧	,٨٥٩٩	,٨٦٢١
١,١	,٨٦٤٣	,٨٦٦٥	,٨٦٨٦	,٨٧٠٨	,٨٧٢٩	,٨٧٤٩	,٨٧٧٠	,٨٧٩٠	,٨٨١٠	,٨٨٣٠
١,٢	,٨٨٤٩	,٨٨٦٩	,٨٨٨٨	,٨٩٠٧	,٨٩٢٥	,٨٩٤٤	,٨٩٦٢	,٨٩٨٠	,٨٩٩٧	,٩٠١٥
١,٣	,٩٠٣٢	,٩٠٤٩	,٩٠٦٦	,٩٠٨٢	,٩٠٩٩	,٩١١٥	,٩١٣١	,٩١٤٧	,٩١٦٢	,٩١٧٧
١,٤	,٩١٩٢	,٩٢٠٧	,٩٢٢٢	,٩٢٣٦	,٩٢٥١	,٩٢٦٥	,٩٢٧٨	,٩٢٩٢	,٩٣٠٦	,٩٣١٩
١,٥	,٩٣٣٢	,٩٣٤٩	,٩٣٥٧	,٩٣٧٠	,٩٣٠٢	,٩٣٩٤	,٩٤٠٦	,٩٤١٨	,٩٤٢٩	,٩٤٤١
١,٦	,٩٤٥٢	,٩٤٦٣	,٩٤٧٤	,٩٤٨٤	,٩٤٩٥	,٩٥٠٥	,٩٥١٥	,٩٢٢٥	,٩٥٣٥	,٩٥٤٥
١,٧	,٩٥٥٤	,٩٥٦٤	,٩٥٧٣	,٩٥٨٢	,٩٥٩١	,٩٥٩٩	,٩٦٠٨	,٩٦١٦	,٩٦٢٥	,٩٦٣٣
١,٨	,٩٦٤١	,٩٦٤٩	,٩٦٥٦	,٩٦٦٤	,٩٦٧١	,٩٦٧٨	,٩٨٨٦	,٩٦٩٣	,٩٦٩٩	,٩٧٠٦
١,٩	,٩٧١٣	,٩٧١٩	,٩٧٢٦	,٩٧٣٢	,٩٧٣٨	,٩٧٤٤	,٩٧٥٠	,٩٧٥٦	,٩٧٦١	,٩٧٦٧
٢,٠	,٩٧٧٢	,٩٧٧٨	,٩٧٨٣	,٩٧٨٨	,٩٧٩٣	,٩٧٩٨	,٩٨٠٣	,٩٨٠٨	,٩٨١٢	,٩٨١٧
٢,١	,٩٨٢١	,٩٨٢٦	,٩٦٣٠	,٩٨٣٤	,٩٨٣٨	,٩٨٤٢	,٩٨٤٦	,٩٨٥٠	,٩٨٥٤	,٩٨٥٧
٢,٢	,٩٨٦١	,٩٨٦٤	,٩٨٦٨	,٩٨٧١	,٩٨٧٥	,٩٨٧٨	,٩٨٨١	,٩٨٨٤	,٩٨٨٧	,٩٨٩٠
٢,٣	,٩٨٩٣	,٩٨٩٦	,٩٨٩٨	,٩٩٠١	,٩٩٠٤	,٩٩٠٦	,٩٩٠٩	,٩٩١١	,٩٩١٣	,٩٩١٦
٢,٤	,٩٩١٨	,٩٩٢٠	,٩٩٢٢	,٩٩٢٥	,٩٩٢٧	,٩٩٢٩	,٩٩٣١	,٩٩٣٢	,٩٩٣٤	,٩٩٣٦
٢,٥	,٩٩٣٨	,٩٩٤٠	,٩٩٤١	,٩٩٤٣	,٩٩٤٥	,٩٩٤٦	,٩٩٤٨	,٩٩٤٩	,٩٩٥١	,٩٩٥٢
٢,٦	,٩٩٥٣	,٩٩٥٥	,٩٩٥٦	,٩٩٥٧	,٩٩٥٩	,٩٩٦٠	,٩٩٦١	,٩٩٦٢	,٩٩٦٣	,٩٩٦٤
٢,٧	,٩٩٦٥	,٩٩٦٦	,٩٩٦٧	,٩٩٦٨	,٩٩٦٩	,٩٩٧٠	,٩٩٧١	,٩٩٧٢	,٩٩٧٣	,٩٩٧٤
٢,٨	,٩٩٧٤	,٩٩٧٥	,٩٩٧٦	,٩٩٧٧	,٩٩٧٧	,٩٩٧٨	,٩٩٧٩	,٩٩٧٩	,٩٩٨٠	,٩٩٨١
٢,٩	,٩٩٨١	,٩٩٨٢	,٩٩٨٢	,٩٩٨٣	,٩٩٨٤	,٩٩٨٤	,٩٩٨٥	,٩٩٨٥	,٩٩٨٦	,٩٩٨٦
٣,٠	,٩٩٨٧	,٩٩٨٧	,٩٩٨٧	,٩٩٨٨	,٩٩٨٨	,٩٩٨٩	,٩٩٨٩	,٩٩٨٩	,٩٩٩٠	,٩٩٩٠
٣,١	,٩٩٩٠	,٩٩٩١	,٩٩٩١	,٩٩٩١	,٩٩٩٢	,٩٩٩٢	,٩٩٩٢	,٩٩٩٢	,٩٩٩٣	,٩٩٩٣
٣,٢	,٩٩٩٣	,٩٩٩٣	,٩٩٩٤	,٩٩٩٤	,٩٩٩٤	,٩٩٩٤	,٩٩٩٤	,٩٩٩٥	,٩٩٩٥	,٩٩٩٥
٣,٣	,٩٩٩٥	,٩٩٩٥	,٩٩٩٥	,٩٩٩٦	,٩٩٩٦	,٩٩٩٦	,٩٩٩٦	,٩٩٩٦	,٩٩٩٦	,٩٩٩٧
٣,٤	,٩٩٩٧	,٩٩٩٧	,٩٩٩٧	,٩٩٩٧	,٩٩٩٧	,٩٩٩٧	,٩٩٩٧	,٩٩٩٧	,٩٩٩٧	,٩٩٩٨

تم تدقيق الكتاب علمياً من قبل :

الأستاذ الدكتور	**الأستاذ الدكتور**	**الأستاذ الدكتور**
سمير دركزلي	**علاء الدين جبل**	**أميرة عبيدو**

المدقق اللغوي

الأستاذ الدكتور

عبد الرزاق الخشروم

Aleppo University Publications
Open Education
Management & Accounting for Middle
and Small Business Enterprises

Operations Research

By

Dr. Ibrahim Nayeb
Professor of
statistics and Management Information Systems Department

Academic Year
2014 – 2015

مديرية الكتب و المطبوعات – المطبعة الرقمية

السعر: