حساب الإنشاءات

كلية الهندسة المعمارية

السنة الثالثة

فصل دراسي ثاني

حساب الإنشاءات

منشورات جامعة حلب

كلية الهندسة المعمارية

حساب الإنشاءات

الدكتور المهندس

أديب أحمد أعرج

لطلاب السنة الثالثة–كلية الهندسة المعمارية

قسم علوم البناء والتنفيذ

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

١٤٣٦هـ–٢٠١٥ م

الفهرس Index

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة: preface

يهدف هذا الكتاب إلى تعريف المهندس المعماري بالمبادئ الأساسية التي يعتمد عليها المهندس الإنشائي في تحليل وحساب الإنشاءات الهندسية المختلفة منطلقين من مبدأ التكامل التام والمشترك بين العلوم الهندسية وخاصة في المجالين المعماري والإنشائي والذي لابد للمهندس المعماري من الإحاطة به بهدف توسيع مداركه العلمية والعملية بهدف الربط بين التصميم والتخطيط والتنفيذ من جهة وبين العلوم الإنشائية من جهة أخرى بهدف إعطاء المهندس المعماري أرضية هندسية يستطيع من خلالها بناء ومحاكاة المفاهيم المعمارية بأسلوب علمي سليم.

يتم الاعتماد على مبادئ حساب الإنشاءات في تصميم جميع المنشآت الهندسية المبنية من الحجر أو البيتون المسلح أو الفولاذ أو الخشب، لذلك لابد للمهندس المعماري من الإحاطة والمعرفة الأولية بهذه المبادئ التي يعتمد عليها أثناء تصميم وتنفيذ هذه المنشآت.

لقد تم عرض هذه المادة بشكل مبسط من خلال الأمثلة العملية الكثيرة والمتعددة التي توضح المفاهيم الأساسية لكل من القوى والجهود التي درسناها في السنوات السابقة في مقرري التوازن ومقاومة المواد ومن ثم دراسة الانتقالات والدورانات وحل الجمل غير المقررة معتمدين على طرائق القوة والانتقالات في تقريرها، حيث شاع استعمال المنشآت غير المقررة في العالم مطلع القرن العشرين مع إدخال البيتون المسلّح كمادة رئيسة للبناء، فمن شأن هذه المادة أن تعطي المنشأ استمراراً continuity طبيعياً بحيث يعمل كوحدة متكاملة ويصبح غير مقرر، فاشتدت الحاجة منذ ذلك الحين لتسهيل حل مثل هذه المنشآت، وفي الفترة الواقعة بين عامي ١٩٢٠ –١٩٣٥ انتشرت طريقة استعمال اللحام بالقوس الكهربائي arc welding في المنشآت المعدنية مما أعطى تلك المنشآت استمراراً وبالتالي جعلها غير مقررة أيضاً. لذلك لابد من عرض كيفية إيجاد القوى والجهود في الجمل غير المقررة لنتمكن من معرفة أبعاد ومقاطع العناصر الإنشائية المكونة للمنشآت الهندسية سواء كانت خرسانية أو معدنية أو خشبية.

من أجل تبسيط عرض مواضيع هذا الكتاب فقد تم تقسيمه إلى سبعة فصول، حيث استعرضنا في الفصل الأول المبادئ الأساسية في تحليل الإنشاءات للجمل المقررة وغير المقررة والعلاقة بين القوى الداخلية والحمولات الخارجية، إضافة لاستعراض قانون التجميع بشكل موسع نظرا لأهميته الكبيرة في تبسيط وحل معظم المسائل المطروحة في هذا الكتاب، بالإضافة لاستعراض بعض الخصائص الأساسية التي تسهل علينا إيجاد ردود الأفعال ورسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف.

أما الفصل الثاني فقد تم استعراض بعض الطرائق المستخدمة في حساب التشوهات الناتجة عن عزم الانعطاف والتي تعتمد على كتابة معادلات ورسم مخططات عزوم الانعطاف، وهي المعادلة التفاضلية للخط المرن ونظرية الجائز البديل وعلاقة عزم المساحة والتي سوف نعتمد عليها في حل الجمل غير المقررة.

وقد تناولنا في الفصل الثالث طريقة القوى الوهمية في تحليل الجمل غير المقررة البسيطة وهي الجائز الموثوق والمسنود والجائز الموثوق من الطرفين لتساعدنا في حل الجمل الإنشائية المعقدة.

واستعرضنا في الفصل الرابع نظرية العزوم الثلاثة في تحليل الجوائز المستمرة المستخدمة بشكل كبير في حل الجوائز المستخدمة في الأبنية العامة والخاصة.

أما الفصل الخامس فيتناول نظرية الميل والسهم (الدورانات) في تقرير إطارات الفئة الأولى (وهي الإطارات التي لا تخضع لتأثير انتقال أفقي) مستفيدين من العقد الصلبة التي تؤمن الاستمرارية بين الجائز والعمود.

أما الفصلين السادس والسابع فقد تم تخصيصهما لعرض طريقة العمل الافتراضي في حساب الانتقالات والدورانات للجمل المقررة إضافة لحساب القوى والجهود في الجمل غير المقررة والتي تأخذ بعين الاعتبار تأثير جميع الجهود التي تتعرض لها المنشأة الهندسية، مما يساعدنا في حساب الجمل الشبكية المقررة وغير المقررة إضافة لتأثير تغير درجات الحرارة وأخطاء التصنيع.

وفي النهاية أتمنى لأبنائنا الطلبة وزملائنا المهندسين الاستفادة من هذه المساهمة العلمية المتواضعة في مجال التحليل الإنشائي، والله ولي التوفيق.

الفصل الأول

مبادئ أساسية Basic Principles

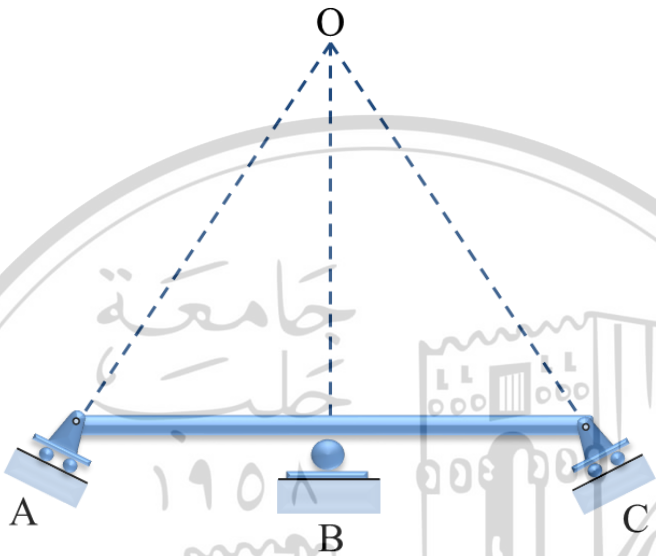
١-١مقدمة: **preface**

إن المنشأ من الناحية الهندسية هو عبارة عن آلية تدعم مجموعة القوى المطبقة عليها في وضع محدد، متوازن ومستقر. وبصورة عامة يكون المنشأ مستقراً إذا كان بإمكانه تأمين مقاومة تعاكس أي حركة وشيكة فيه incipient movement وتتكون هذه المقاومة بشكل مركباتِ ردودِ فعل reaction components عددها كافٍ أو أكثر من كافٍ والتي يمكن ايجادها باستخدام معادلات التوازن equilibrium equation والمعادلات الشرطية condition equations. (المعادلات الشرطية تنتج عن وجود أوضاع خاصة في المنشأ فمثلاً إن وجود مفصل hinge في إحدى نقاطه يخولنا كتابة معادلة توازن إضافية). فإذا كان عدد المرّكبات المستقلة لردود الفعل مساوياً أو يزيد عن عدد معادلات التوازن والمعادلات الشرطية كان المنشأ مستقراً، أما إذا كان عدد المركبات أقل من عدد المعادلات فإن المنشأ غير مستقر حتماً. على أن الشرط السابق وإن كان ضرورياً للاستقرار فإنه غير كافٍ، إذ أن استقرار المنشأ لا يعتمد فقط على عدد المركبات بل على ترتيبها الهندسي أيضاً geometric arrangement. إن الشكل رقم (١-١) يبين جائزا بثلاثة ردود فعل مستقلة وهي تساوي عدد معادلات التوازن الثلاثة في الاتجاه الأفقي والشاقولي والدوراني:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_o = 0 \qquad (1-1)$$

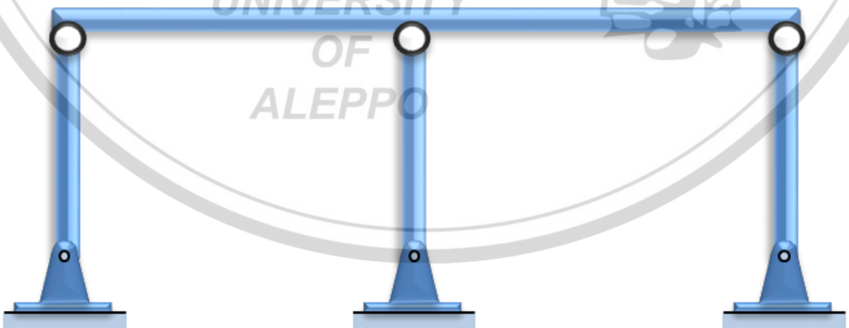
فللوهلة الأولى قد نظن أن الجائز مستقر ولكن بعد إمعان النظر في امتداد محاور ردود الفعل نرى أنها تلتقي جميعاً في نقطة واحدة هي O ففي حالة الحمولة العامة يكون الجائز عاجزا عن معاكسة الحركة الدورانية حول النقطة O فهو إذاً غير مستقر. إن هذا النوع من عدم الاستقرار الناتج عن الوضعية الهندسية لردود الفعل يسمى بعدم الاستقرار الهندسي geometric instability ويكون المنشأ غير مستقر هندسياً.

على أنه في الحالة الخاصة الوحيدة التي يكون فيها محور محصلة الحمولة ماراً بالنقطة O ينعدم عزم الحمولة حول O. فيكون الجائز في حالة توازن قلق unstable equilibrium وهكذا فإنه يمكن للمنشآت غير المستقرة هندسياً أن تتخذ وضعاً مستقراً قلقاً تحت تأثير حمولة خاصة عليها.



الشكل رقم (١-١) عدم الاستقرار الهندسي

إن المنشأ المبين في الشكل رقم (١-٢) هو مثال آخر على عدم الاستقرار الهندسي حيث تكون جميع مركبات ردود الفعل متوازية وبالتالي فليس بإمكان المنشأ معاكسة أية حركة في الاتجاه الأفقي. إلا أنه يتوازن بشكل قلق تحت تأثير القوى الشاقولية فقط.



الشكل رقم (١-٢) عدم الاستقرار الهندسي

سوف نستبعد المنشآت غير المستقرة هندسيا من المناقشة في هذا الكتاب. سنفترض دوماً أن ترتيب مركبات ردود الفعل مناسبة للاستقرار فيكون الشرط المتبقي لتحري استقرار المنشأ هو مقارنة عدد مركبات ردود الفعل مع عدد المعادلات.

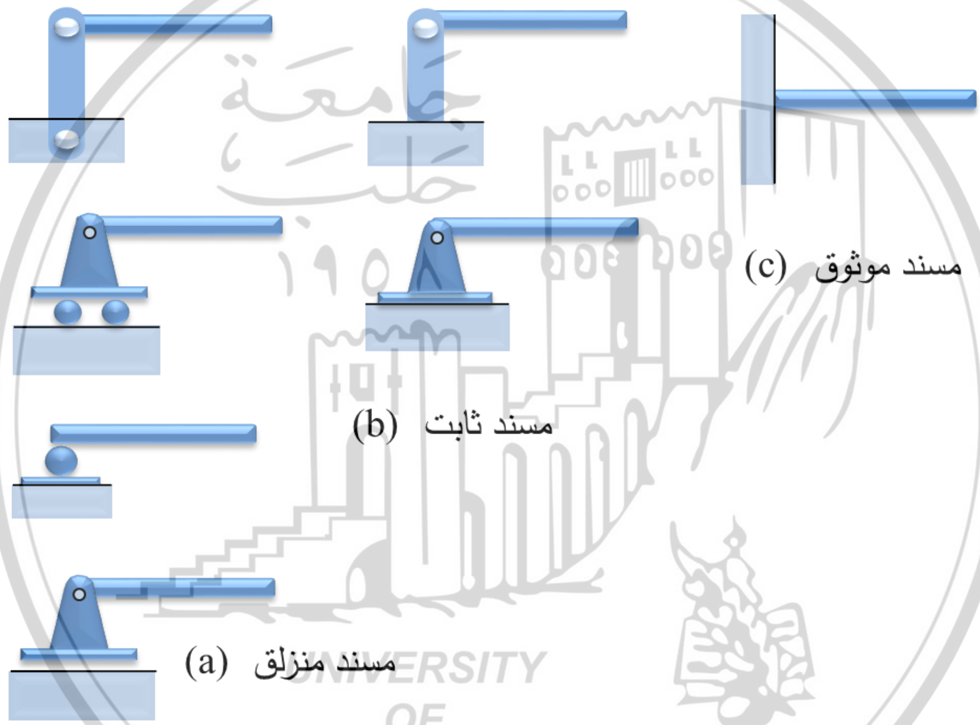
١-٢المنشآت المقررة وغير المقررة: Determinate and Indeterminate Structures

إذا تعذّر إيجاد مركبات ردود الفعل الخارجية أو القوى الداخلية لأي منشأ بالاعتماد على معادلات التوازن فقط والمعادلات الشرطية (إن وجدت) يكون المنشأ غير مقرراً. تختلف المنشآت غير المقررة من ناحية درجة عدم تقريرها، وتقاس درجة عدم التقرير لمنشأ ما بعدد المجاهيل التي تزيد عن عدد معادلات التوازن والمعادلات الشرطية. وبالإمكان تصنيف عدم التقرير indeterminate إلى نوعين: خارجي وداخلي كما سنرى فيما يلي.

١-٢-١ المنشآت المقررة خارجياً والاستقرار الخارجي: External Determinateness Structures and Stability

يكون المنشأ مقرراً خارجياً إذا كان عدد مركبات ردود الفعل الخارجية مساوياً لعدد معادلات التوازن والمعادلات الشرطية (في حال وجودها)، وهذا العدد من المركبات هو الحد الأدنى اللازم لجعل المنشأ مستقراً. أما إذا زاد عدد المركبات عن مجموع عدد المعادلات فإن المنشأ يكون غير مقرراً، والمركبات الزائدة نسميها فائضة redundant حيث أنها تفيض عن العدد اللازم للاستقرار. وبالإمكان النظر للموضوع من زاوية أخرى فنقول إنه في المنشأ المقرر يكون عدد مركبات ردود الفعل الخارجية مساوياً عدد الحركات المختلفة المستقلة التي يمكن حدوثها لجسم المنشأ أو لجزء منه وذلك عندما تُحذف مركبات ردود الفعل التي تقابل الحركات، والمقصود بالحركة هنا هو انتقال أو دوران المنشأ ككل أو جزء منه بدون إحداث تشوهات deformations داخلية فيه. وتحسب مركبات ردود الفعل بكتابة معادلة التوازن المقابلة للحركة التي منع رد الفعل حدوثها، وكذلك إن إضافة كل مفصل hinge في أي نقطة من نقاط المنشأ بشكل يسمح بالدوران النسبي لأجزائه ينتج معادلة شرطية لكل مفصل مما يسمح بحساب مركبات ردود فعل أخرى. ويبين الشكل رقم (١-٣) ثلاثة من الأنواع المألوفة للمساند supports وقد رُسمت بأشكالها الرمزية التي تُبيَّن بها عادة. فالمسند في الشكل رقم (١-٣a) هو من نوع المفصل المنزلق roller وهو يزود المنشأ بمركبة رد فعل وحيدة في الاتجاه العمودي على سطح الاستناد، وهو حر تماماً في الانزلاق في الاتجاه الموازي لذلك السطح. أما المسند المبين في الشكل رقم (١-٣b) فهو من نوع المفصل الثابت hinge أو pin وبإمكانه

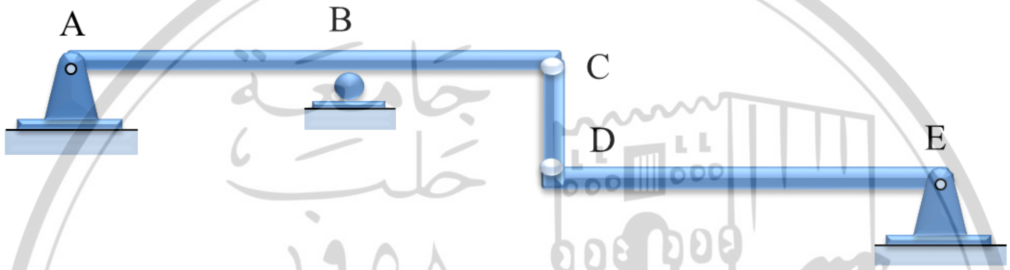
تزويد المنشأ برد فعل في أي اتجاه (ضمن مستوى المنشأ) يمكن تحليله إلى مركبتي رد فعل مستقلتين فمثلاً مركبة أفقية وأخرى عمودية. هذا وإن الأعضاء members التي تركز على مساند من نوع المنزلقة أو المفصل تتمتع بحرية كاملة للدوران rotation حول نقاط الاستناد. وأخيراً فإن المسند المبين في الشكل رقم (١-٣c) هو المسمى بالموثوق fixed وهو يزود المنشأ بقوة رد فعل في أي اتجاه (ضمن مستوى المنشأ) بالإضافة إلى رد فعل عزمي أو مزدوجة moment reaction, couple وهذا العزم يمنع الأعضاء من حرية الدوران فلهذا المسند إذن ثلاثة مركبات مستقلة لردود الفعل، أفقية وعمودية وعزم .



الشكل رقم (١-٣) أشكال وأنواع المساند الخارجية

لندرس المنشأ المبين في الشكل رقم (١-٤). إن لهذا المنشأ خمسة مركبات لردود الفعل وهنالك بالإضافة إلى معادلات التوازن الثلاثة معادلتين شرطيتين يسمح بهما المفصلين D و C. فالمنشأ إذاً مقرر كما أنه مستقر. إن حذف أي من المفصلين D وC أو كلاهما يذهب بإحدى المعادلتين الشرطيتين أو بكلاهما فيصبح المنشأ والحالة هذه غير مقرر من الدرجة الأولى أو الثانية. وعندما يكون المنشأ غير مقرر تشترك أكثر من مركبة رد فعل واحدة في منع حدوث أية حركة من الحركات.

وبالمقابل فإن حذف أي مركبة من مركبات ردود الفعل الموجودة يجعل المنشأ غير مستقر إذ أن عدد المركبات المتبقية يصبح أقل من عدد المعادلات، وبعبارة أخرى لا يوجد في المنشآت المقررة أية من مركبات ردود فعل فائضة redundant. لنحذف مثلاً المنزلقة التي تزود المنشأ برد فعل عمودي في النقطة B فنرى أن جزأيْ المنشأ إلى يمين ويسار المفصلين قد أصبحا قادرين على الدوران حول المساند الجانبية A وE، كما أن حذف المركبة الأفقية لردود الفعل في A أو E يسمح لجزء المنشأ الأيسر أو الأيمن بالدوران أو الحركة العمودية.



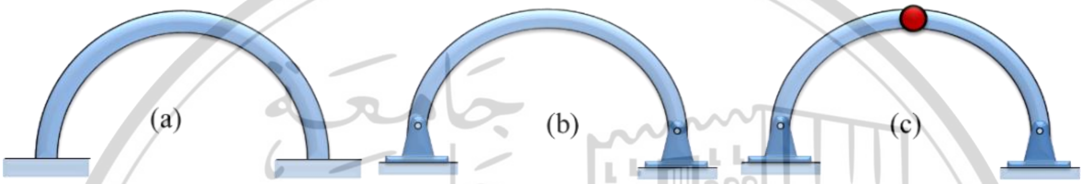
الشكل رقم (١–٤) المنشآت المقررة وغير المستقرة

وكمثال آخر لننظر في المنشأ المبين في الشكل رقم (١–a٥)، إن له تسعة مركبات رد فعل مختلفة فهو لا مقرر من الدرجة السادسة. ولذا يمكننا أن نزيل أية ستة من مركبات ردود الفعل الفائضة بحيث يبقى المنشأ مستقراً ولكن يصبح مقرراً كما في الشكل رقم (١–b٥).

الشكل رقم (١–٥) المنشآت المقررة وغير المقررة

إن القوس المبين في الشكل رقم (١–a٦) ذو مسندين موثوقين فله إذاً ستة مركبات مختلفة لردود الفعل وهو بالتالي غير مقرر من الدرجة الثالثة (يحتوي على ثلاث مركبات فائضة). لنحذف عزمي الوثاقة fixed end moments من المسندين فيتبقى أربعة مركبات لردود الفعل كما هو مبين في الشكل رقم (١–b٦) وهي مركبة عمودية ومركبة

أفقية في كل مسند ويصبح القوس غير مقرر من الدرجة الأولى. فإذا أدخلنا الآن مفصلاً hinge في أية نقطة داخل القوس كما في الشكل رقم (١-٦c) أصبح لدينا معادلة شرطية جديدة إذ أن عزم القوى المطبقة على أي من جانبي القوس حول المفصل يساوي الصفر، وبهذا يمكن حساب مركبات ردود الفعل الأربعة من معادلات التوازن والمعادلات الشرطية إذ أصبح القوس مقرراً كما أنه لا يزال مستقراً، وأخيراً فإن إضافة أي مفصل جديد على القوس الآن تجعل منه منشأ غير مستقر لأن ذلك يجعل مجموع عدد المعادلات خمسة فهي الآن تزيد عن عدد مركبات ردود الفعل.



الشكل رقم (١-٦) المنشآت المقررة وغير المقررة

١-٢-٢ المنشآت المقررة داخلياً والاستقرار الداخلي: Internal Determinateness Structures and Internal Stability

عند الكلام عن التقرير الداخلي لمنشأ ما نفترض أن كافة مركبات ردود الفعل الخارجية قد حُسبت بطريقة ما. ومن ثم نحصر اهتمامنا في موضوع إيجاد جميع القوى أو الجهود الداخلية في أعضاء المنشأ. وعليه يكون المنشأ مقرراً داخلياً إذا كان بالإمكان إيجاد جميع القوى الداخلية لكافة أعضائه باستعمال معادلات التوازن فقط.

أ-المنشآت الشبكية: Trusses

في المنشآت الشبكية يوجد معادلتا توازن فقط لكل عقدة joint وهي:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$$

حيث إن العقدة في هذه المنشآت هي عبارة عن مفصلhinge كامل وبالتالي ليست لها مقدرة على مقاومة أية عزوم. فيمكننا إذاً كتابة المعادلة التالية للمنشأ الشبكي:

$$(1\text{-}2) \qquad 2j=b+r \qquad\qquad b=2j-r$$

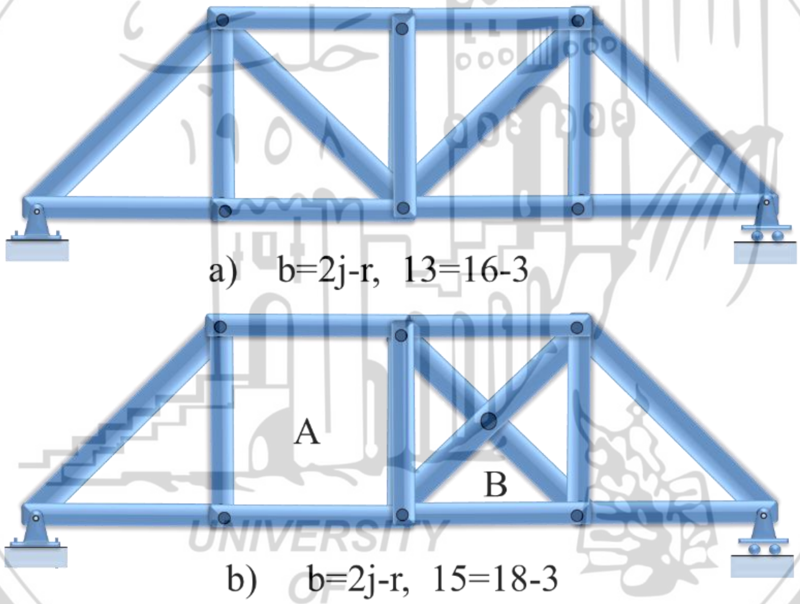
حيث: j = عدد العقد المفصلية Joints

b = عدد القضبان أو الأعضاء bars

r =3 والتي تمثل عدد معادلات التوازن في المنشآت الشبكية المستوية، وفي بعض الحالات تصبح اكثر من ثلاثة في حال إضافة المعادلات الشرطية.

إن الكمية (2j) تمثل مجموع عدد معادلات التوازن الآنية simultaneous التي يمكن كتابتها للمنشأ كاملا لتقييم مركبات ردود الفعل وجهود كافة القضبان البالغ مجموعها (b+r).

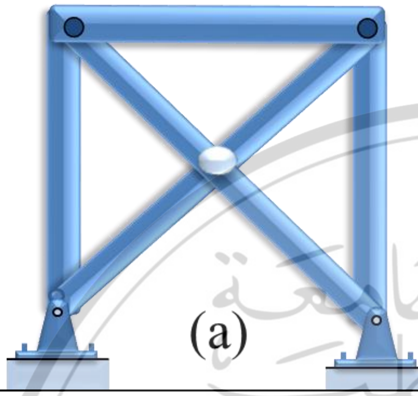
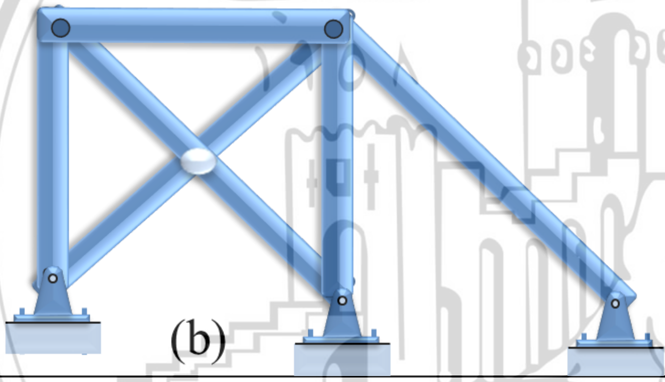
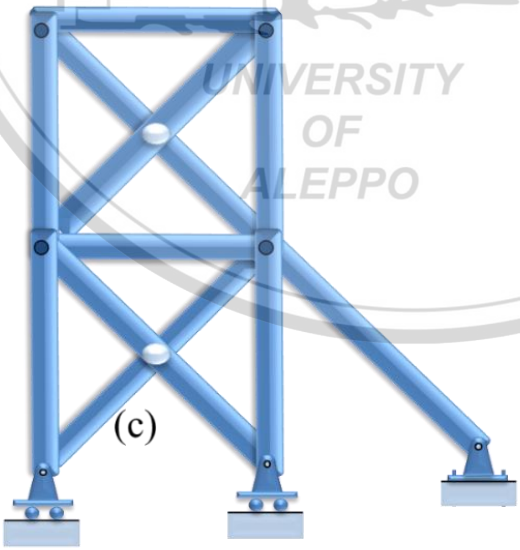
إن تحقيق المعادلة (2-1) شرط ضروري لكي يكون المنشأ الشبكي مستقراً ومقرراً داخليا ولكن هذا الشرط غير كافٍ. فمثلاً إن كلاً من المنشأين الشبكيين المبينين في الشكل رقم (١–٧) يحقق المعادلة (2-1) إلا أن المنشأ في الشكل (a) مستقر ومقرر بينما في الشكل (b) غير مستقر داخلياً فهو ينهار لأن الخلية (A) لا تستطيع مقاومة قوى القص، وبنفس الوقت فإنه غير مقرر داخلياً إذ لا يمكن إيجاد الجهود في القضيبين المتقاطعين في الخلية (B) من معادلات التوازن فقط.

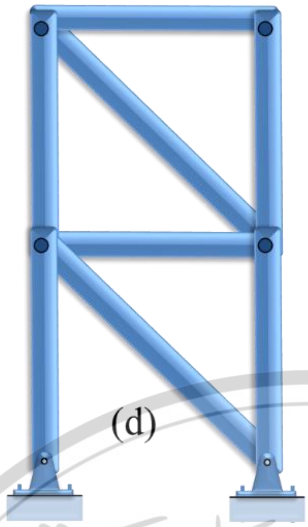
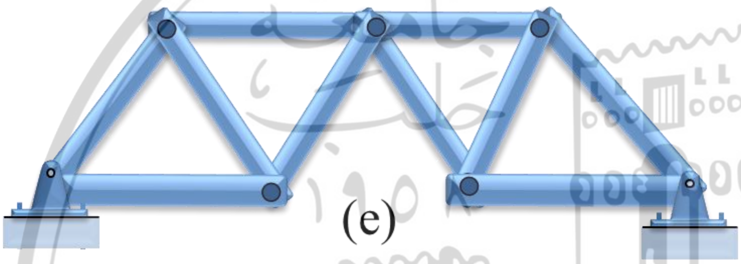
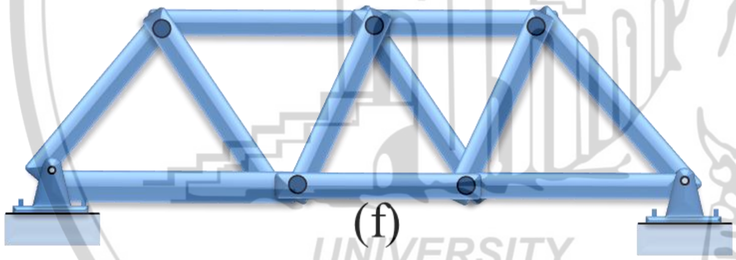
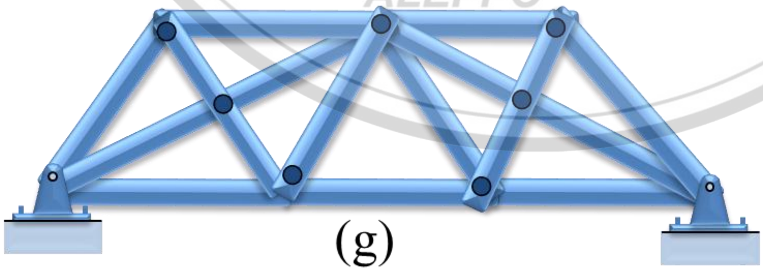


الشكل رقم (١–٧) تقرير واستقرار الجمل الشبكية

إن التحقق من كون المنشأ الشبكي مستقراً ومقرراً داخلياً يمكن أن يتم بالملاحظة inspection في معظم الأحوال، وبالرغم من فائدة استعمال المعادلة رقم (2-1) في بعض الحالات إلا أن هذه المعادلة وحدها لا تكفي ويتوجب على المهندس الاعتماد على المنطق الهندسي، وهنا نستطيع القول بأن الجائز الشبكي يكون مستقرا اذا كانت الخلايا الداخلية التي تكونها عناصر الجائز الشبكي مثلثية، عندها يكون الجائز الشبكي مستقرا، إن عدم تحقيق المعادلة (2-1) لمنشأ شبكي ما، يعني أن المنشأ غير مستقر داخلياً أو غير مقرر داخلياً أو كلا الأمرين معاً.

فعندما تكون المتراجحة **b<2J-r** يكون الشبكي غير مستقر داخلياً وعندما تكون المتراجحة **b>2J- r** يكون الشبكي غير مقرر بدرجة تساوي الفرق بين[b-(2J-r)]. ويبين الشكل رقم (١–٨) أمثلة عديدة استخدمنا فيها المعادلة رقم (2-1) لتبيان وضعية الشبكي من ناحية الاستقرار والتقرير الداخلي.

$b=2j-r$ $7=10-3$ مستقر ومقرر داخلياً غير مقرر خارجياً من الدرجة الأولى	
$b=2j-r$ $8=12-4$ مستقر ومقرر داخلياً غير مقرر خارجياً من الدرجة الثانية	
$b=2j-r$ $15\neq 18-4=14$ مستقر ومقرر خارجيا غير مقرر داخلياً من الدرجة الأولى	

$b=2j-r$ $8=12-4$ مستقر مقرر داخلياً مقرر خارجياً	
$b=2j-r$ 10=14-4 مستقر ومقرر داخلياً مقرر خارجياً	
$b=2j-r$ 11=14-3 مستقر ومقرر داخلياً غير مقرر خارجياً من الدرجة الأولى	
$b=2j-r$ $17\neq18-3=15$ مستقر ومقرر خارجياً غير مقرر داخلياً من الدرجة الثانية	

الشكل رقم (١-٨) الجمل الشبكية المقررة وغير المقررة

ب – المنشآت الصلبة: Rigid Structures

في الإطارات الصلبة يسهل تعيين درجة عدم التقرير الداخلي بالملاحظة إذ يمكن عمل عدّة مقاطع داخلية في المنشأ بحيث نحذف كافة القوى الداخلية الفائضة مع إبقاء المنشأ مستقراً، وحيث أن كل مقطع من هذه المقاطع يتعرض عموماً لثلاث قوى داخلية (قوى محورية وقوى قاطعة وعزم انعطاف)، فإن درجة عدم التقرير الداخلي للمنشأ تكون مساوية لثلاثة أضعاف عدد المقاطع اللازمة لجعل المنشأ مقرراً داخلياً. لنأخذ الإطار المبين في الشكل رقم (١–١٠) ولنفرض أن مركبات ردود الفعل الخارجية معلومة فنرى أننا بحاجة لمقطعين داخليين لجعل المنشأ مقرراً داخلياً فهو إذاً غير مقرر داخلياً من الدرجة السادسة. وبالإمكان أيضاً الاستعانة بالمعادلة التالية لمعرفة درجة عدم التقرير الداخلي:

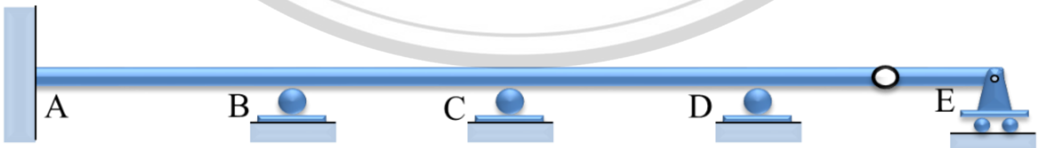
$$D=3n \qquad (1\text{-}3)$$

حيث تعبر الحدود:

D = درجة عدم التقرير الداخلي

n = عدد المساحات المغلقة في الإطار أي المحاطة بأعضاء من كافة جهاتها (المساحات المجاورة للأساسات لا تحتسب).

لنأخذ على سبيل المثال الجائز المستمر continuous beam ABCDE المبين في الشكل رقم (١–٩) ولنفرض أن مركبات ردود الفعل الخارجية معلومة فنرى أنه في كل فتحة span مستقلة يمكننا حساب العزوم moments وقوى القص shear والقوى المحورية axial باستخدام معادلات التوازن الثلاثة فقط وبالتالي يكون الجائز مقررا داخلياً وغير مقرر خارجيا من الدرجة الثالثة.



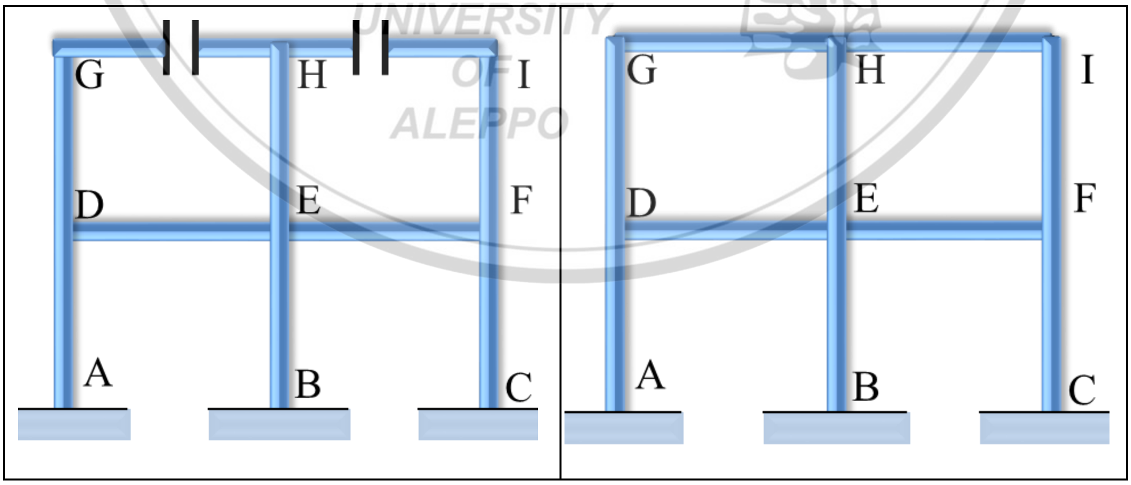
الشكل رقم (١–٩) الجمل غير المقررة

وكمثال آخر لنلاحظ الإطار المبين في الشكل رقم (١–١٠) ولنفرض أن كافة مركبات ردود الفعل في النقاط A،B، C معلومة فيمكن حساب الجهود الداخلية للأعضاء DA،EB، FC في النقاط D،E، F باستعمال معادلات التوازن الثلاثة لكل عضو.

لنعزل العقدة rigid joint D ونضع عليها الجهود الداخلية المطبقة من الأعضاء التي تلتقي فيها. وهي DA،DE، DG فنحصل على مخطط الجسم الحر Free body Diagram للعقدة D تحت تأثير ست مركبات قوى مجهولة تابعة للعضوين DG و DE وثلاث مركبات قوى معلومة تابعة للعضو DA، فيمكن تقييم ثلاثة من المجاهيل بتطبيق معادلات التوازن الثلاثة وتبقى ثلاثة المجاهيل التي يمكن ايجادها باستخدام طرائق تحليل الإنشاءات للجمل غير المقررة.

$$D = 3n = 3x2 = 6$$

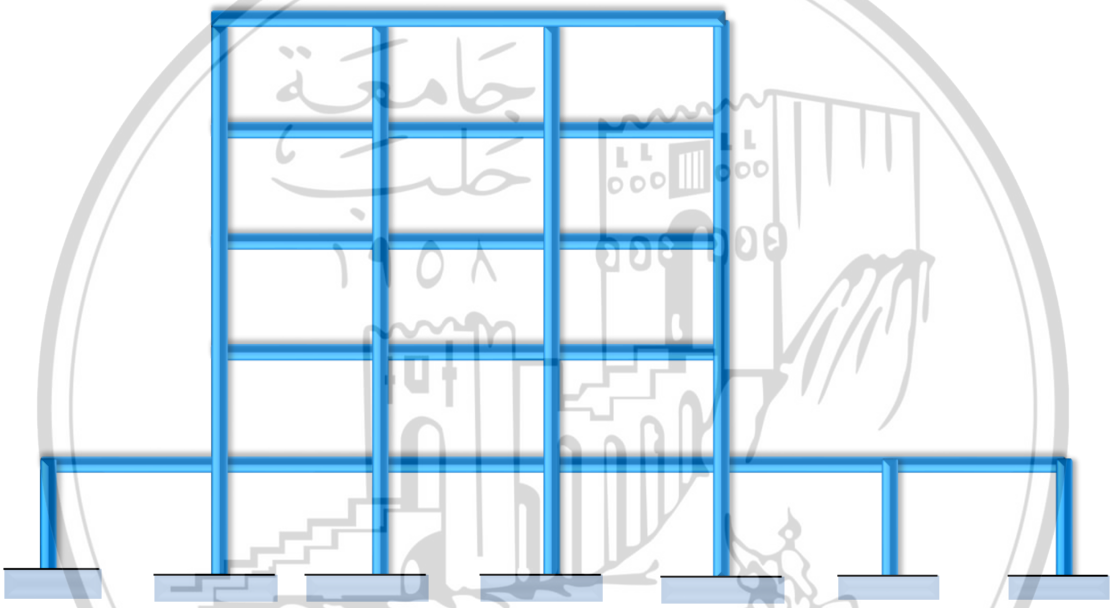
فهو غير مقرر داخليا من الدرجة السادسة وغير مقرر خارجيا من الدرجة السادسة، أي أن العقدة D تساهم بثلاث درجات في عدم التقرير الداخلي للإطار. لننتقل إلى العقدة E ولنأخذها كجسم متوازن حر تحت تأثير ست مركبات قوى مجهولة تابعة لـ EH،EF باعتبار أن مركبات القوى التابعة لـEB ،ED معلومة الآن، فيمكن تقييم ثلاثة من المركبات المجهولة بتطبيق معادلات التوازن الثلاثة ولتكن التابعة لـEH فتبقى ثلاث مركبات قوى مجهولة تابعة لـEF وهكذا فإن العقدة E قد ساهمت بثلاث درجات أخرى في عدم التقرير الداخلي للإطار. نعزل الآن العقدة F كجسم متوازن حر فنراها تحت تأثير ثلاث مركبات قوى مجهولة تابعة لـFI يمكن تقييمها بمعادلات التوازن الثلاث، بجانب ستة مركبات قوى معلومة تابعة لـFE ،FC أي أن العقدة F لا تساهم على الإطلاق في عدم التقرير الداخلي للإطار.



الشكل رقم (١-١٠) الجمل غير المقررة

وكذلك يتبين بعد تطبيق نفس المنطق أنّ بقيّة العقد G،H ،I في أعلى الإطار لا تساهم أيضاً في عدم التقرير الداخلي للإطار وينتج بعد جمع عدد الدرجات أنّ الإطار غير مقرر داخلياً من الدرجة السادسة internally indeterminate to the sixth degree وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها باستعمال المعادلة (1-3).

وكمثال أخير لنأخذ الإطار المبين في الشكل رقم (١-١١) فنرى أنه غير مقرر داخلياً للدرجة (٣٦) كما أنه هنالك (١٨) مركبة رد فعل خارجية فائضة فهو إذاً غير مقر خارجياً للدرجة (١٨).



الشكل رقم (١-١١) الجمل غير المقررة

١-٢-٣ المنشآت المقررة مجملاً: Combined External and Internal Determinateness

قد نكون لاحظنا حتى الآن أن الفصل التام بين التقرير الداخلي والخارجي لمنشأ ما، هو أمر أكاديمي أكثر من كونه أمرا عمليا. ففي الحالة العامة يكون المنشأ غير مقرر داخلياً وخارجياً ولا يمكننا حساب مركبات ردود الفعل الخارجية والقوى الداخلية في الأعضاء بشكل مستقل، بدون اعتماد أحدهما على الآخر وبالتالي يكون من المفيد أن ندرس الآن موضوع التقرير الإجمالي:

أ-المنشآت الشبكية: Trusses Structures

في حالة المنشآت الشبكية يمكننا استخدام المعادلة (1-2) كما يلي:

$$2J=b+r \qquad (1\text{-}4)$$

بحيث تمثل r في هذه الحالة عدد مركبات ردود الفعل الخارجية الموجودة فعلاً وليس العدد اللازم للاستقرار فقط كما كان الحال سابقاً في المعادلة.(2-1)

فالمنشآت الشبكية الواردة في الشكل رقم (١–٨) تصبح بالنسبة لموضوع التقرير الإجمالي:

a	$B=2J-r$ $7\neq 10-4=6$	غير مقرر من الدرجة الأولى
b	$8\neq 12-6=6$	غير مقرر من الدرجة الثانية
c	$15\neq 18-4=14$	غير مقرر من الدرجة الأولى
d	$8=12-4=8$	مقرر
e	$10=14-4=10$	مقرر
f	$11\neq 14-4=10$	غير مقرر من الدرجة الأولى
g	$17\neq 18-3=15$	غير مقرر من الدرجة الثانية

ب–المنشآت الصلبة: Rigid Structures

لمعرفة التقرير الإجمالي (أو عدمه) في حالة المنشآت الصلبة يمكن تعديل المعادلة (3-1) بأن نضيف درجة عدم التقرير الخارجي (r-c) إلى الطرف الأيمن فتصبح:

$$D=3n+r-c \qquad (1\text{-}5)$$

حيث:

r = عدد مركبات ردود الفعل الخارجية الموجودة.

c = مجموع عدد معادلات التوازن والمعادلات الشرطية.

فللجائز المبين في الشكل رقم (١–٩) نكتب: $D=3n+r-c$

$$D=0+7-4=3$$

أي أنها غير مقررة مجملاً من الدرجة الثالثة.

وللإطار المبين في الشكل رقم (١١-١) نكتب: D=3n+r-c، $D=3\times2+9-3=12$ فهو لا مقرر مجملاً للدرجة الثانية عشرة.

وللإطار المبين في الشكل رقم (١١-١) نكتب:

D=3n+r-c $D=3\times12+21-3=54$ فهو لا مقرر مجملاً للدرجة الرابعة والخمسين.

كما أنه يمكن إتباع طريقة المقاطع المذكورة في الفقرة (١-٢-١-ب) لتعيين درجة عدم التقرير الإجمالي آخذين بعين الاعتبار، في هذه الحالة، أن مركبات ردود الفعل الخارجية الفائضة غير معلومة وبالتالي فنحن بحاجة لعمل مقاطع تكفي لجعل المنشأ مقررا مجملاً. فالإطار المبين في الشكل رقم (١٠-١) مثلاً يصبح بحاجة إلى أربعة مقاطع لجعله مقررا مجملاً فهو إذاً غير مقرر مجملاً من الدرجة الثانية عشر.

١-٣ الافتراضات المستخدمة في تحليل الإنشاءات: Assumptions

١.مادة المنشأ متجانسة homogeneous ومتماثلة الخواص isotropic.

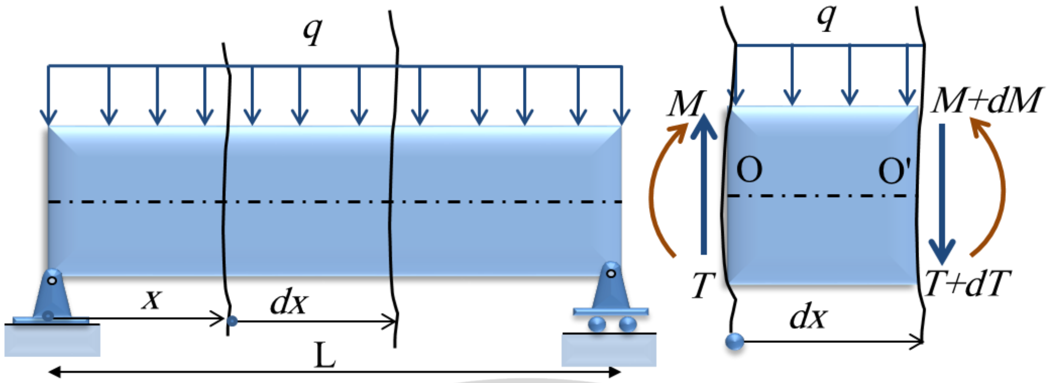
٢.مادة المنشأ مرنة وتخضع لقانون هوك Hook، كما أن جميع الجهود stresses تبقى ضمن الحد المرن elastic limit.

٣.الانتقالات displacements لكافة نقاط المنشأ صغيرة لدرجة يمكن معها إجراء الحل على أساس شكل المنشأ الأصلي قبل التحميل.

١-٤العلاقات بين الحمولة الخارجية والقوى القاطعة وعزوم الانعطاف. Relationship between External loads, shear Forces and Bending moments

لدينا جائز يخضع لتأثير حمولات خارجية منتظمة شدتها q لنوجد المعادلات التي تنتج عن توازن جزء من هذا الجائز واقع بين مقطعين عموديين على محوره ويبعدان مسافة صغيرة مقدارها dx كما هو موضح في الشكل رقم (١-١٢)

حيث تمثل q الحمولة المنتظمة على الجائز و T تمثل القوة القاطعة و M تمثل عزم الانعطاف و dM , dT تمثلان الزيادة في القوة القاطعة وعزم الانعطاف مع ازدياد المسافة X بمقدار dx على طول محور الجائز، باستخدام معادلة التوازن بالاتجاه الشاقولي:



الشكل رقم(١-١٢) العلاقة بين القوى الداخلية والقوى الخارجية المؤثرة على الجائز

$$\sum F_y = 0 \to T - (T + dT) - qdx = 0 \to q = \frac{dT}{dx} \qquad (1-6)$$

$$T = \int qdx \quad \text{أو}$$

يمكننا الحصول على القوة القاطعة بمكاملة الحمولة المؤثرة على الجائز (مخطط القوة القاطعة يزيد بمقدار درجة عن مخطط الحمولة المؤثرة)

باستخدام معادلة توازن العزوم حول النقطة o' نحصل على العلاقة التالية:

$$\sum M_{o'} = 0 \to Tdx + M - (M + dM) - \frac{qdx^2}{2} = 0$$

بعد إهمال القيم المتناهية في الصغر من الدرجة الثانية نحصل على العلاقة:

$$T = \frac{dM}{dx} \quad \text{أو} \quad M = \int Tdx \qquad (1-7)$$

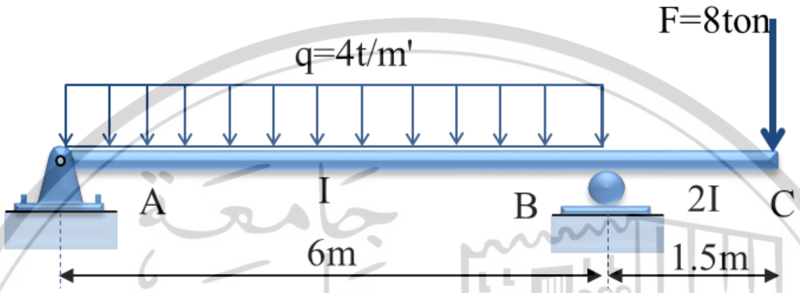
يمكننا الحصول على عزم الانعطاف بمكاملة القوة القاطعة للمجال المدروس من الجائز (مخطط عزم الانعطاف يزيد بمقدار درجة عن مخطط القوة القاطعة).

١-٥ مبدأ تنضد الآثار أو مبدأ التجميع Superposition Method:

يعتمد مبدأ تنضد الآثار أو (ما يُسمى مبدأ التجميع) على تجزئة الحمولات المؤثرة على الجائز في الحالة المرنة واستنتاج الأثر الناتج عن كل حمولة، ثم يقوم بجمع الآثار الناتجة ليحصل على الأثر المحصل الناتج عن مجموع الحمولات إذا كانت مادة المنشأة تحقق الشروط الواردة في الفقرة (١-٣).

فالأثر: إما أن يكون رد فعل أو قوة قاطعة أو عزم انعطاف أو انتقال أو دوران لذلك يعتمد هذا المبدأ على تبسيط المسألة المعقدة ليحولها إلى عدة مسائل بسيطة وهذا ما سنوضحه من خلال المثال التالي:

لدينا الجائز المبين بالشكل رقم (١-١٣)، والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ورسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف في الحالتين التاليتين:



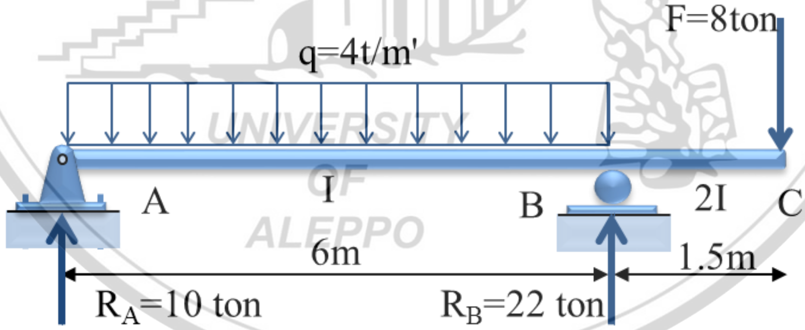
الشكل رقم (١-١٣)

١.بأخذ جميع الحمولات المؤثرة على الجائز

٢.بأخذ الحمولات مجزأة (تنضد الآثار)

١-٥-١ إيجاد ردود الأفعال: Reactions

أولاً: إيجاد ردود الأفعال بأخذ جميع الحمولات المؤثرة على الجائز Reactions



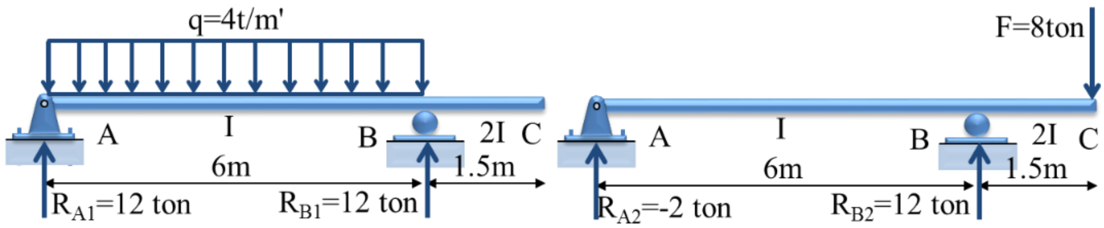
يُمكننا إيجاد ردود أفعاله باستخدام معادلات التوازن مباشرةً .

$$\Sigma MA = 0 \Rightarrow 8 \times 7.5 + 4 \times 6 \times 3 - 6R_B = 0 \rightarrow R_B = 22\ Ton$$
$$\Sigma FY = 0 \Rightarrow R_A + R_B - 24 - 8 = 0 \rightarrow R_A = 32 - 22 = 10\ Ton$$

ثانيا: إيجاد ردود الأفعال باستخدام مبدأ تنضد الآثار Reactions

باستخدام مبدأ تنضد الآثار يُمكننا تجزئة هذا الجائز إلى جائزين؛ جائز أول يخضع لتأثير الحمولة الموزعة بانتظام فقط، وجائز ثاني يخضع لتأثير الحمولة المركزة

فقط وفي كلتا الحالتين يجب أن نحافظ على شكل الجائز والمساند.



$$R_A=R_{A1}+R_{A2}=12-2=10t$$
$$R_B=R_{B1}+R_{B2}=12+10=22t$$

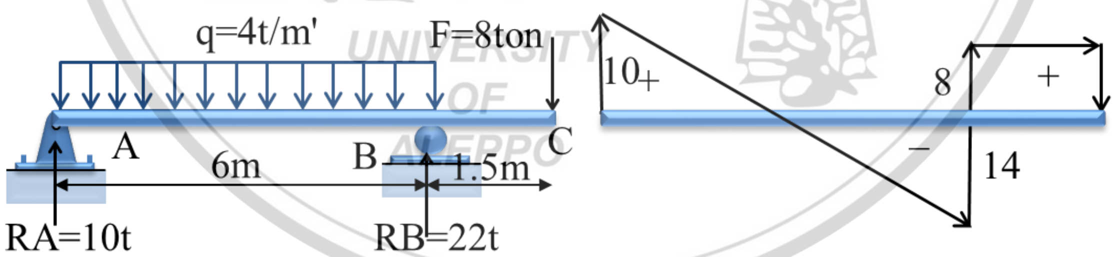
نلاحظ من الحالتين (الأولى والثانية): أنه تتساوى ردود الأفعال الناتجة عن استخدام معادلات التوازن لكامل الجائز مباشرة أو باستخدام مبدأ التنضد.

نتابع حل هذه المسألة وذلك برسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف.

١-٥-٢رسم مخطط القوى القاطعة: Shear Force diagram

<u>أولا: بأخذ تأثير جميع الحمولات المؤثرة على الجائز</u>

إن مخطط القوى القاطعة يُمكن رسمه مباشرة بالاعتماد على ردود الأفعال والحمولات المطبقة على الجائز حيث نبدأ من المسند الأيسر بتتبع أثر وشدة واتجاه الحمولات المركزة ابتداءً من رد فعل المسند الأيسر وانتهاء بآخر نقطة واقعة على يمين الجائز.



نبدأ من رد فعل المسند الأيسر والذي تساوي شدته (10 طن) نحو الأعلى وبما أن المجال AB يخضع لتأثير حمولة موزعة بانتظام فإن مخطط القوى القاطعة يكون عبارة عن مستقيم من الدرجة الأولى ذو ميل موجب وتكون قيمتها في نهاية المجال تساوي:

$$T_B - T_A = -\int q$$
$$T_B = T_A - 24$$
$$T_B = 10 - 24 = -14t$$

ويكون الطول الكلي لقفزة رد الفعل تساوي 22 إلى الأعلى وبالتالي تستمر بالصعود نحو الأعلى بمقدار (8 طن)، نتابع الرسم باتجاه النهاية الحرة يجب أن نغلق مخطط القوى القاطعة بمقدار الحمولة المركزة (8 طن).

إيجاد نقطة انعدام القوة القاطعة.

يتم إيجاد نقطة انعدام القوة القاطعة باستخدام إحدى الطريقتين التاليتين:

a)بالاعتماد على تشابه مثلثي القوة القاطعة يمكننا أن نكتب العلاقة التالية:

$$\frac{10}{x} = \frac{14}{(6-x)} \Rightarrow 14x = 60 - 10x$$

$$24x = 60 \Rightarrow x = 60/24 = 2.5\,m$$

b)بالاعتماد على معادلة القوة القاطعة لهذا المجال:

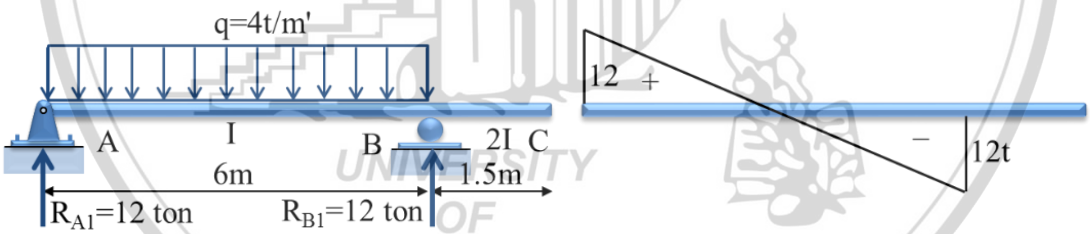
$$T = 10 - 4x$$

$$T = 0 \Rightarrow 4x = 10 \Rightarrow x = 10/4 = 2.5\,m$$

ثانيا: رسم مخطط القوة القاطعة بالاعتماد على مبدأ تنضد الآثار:

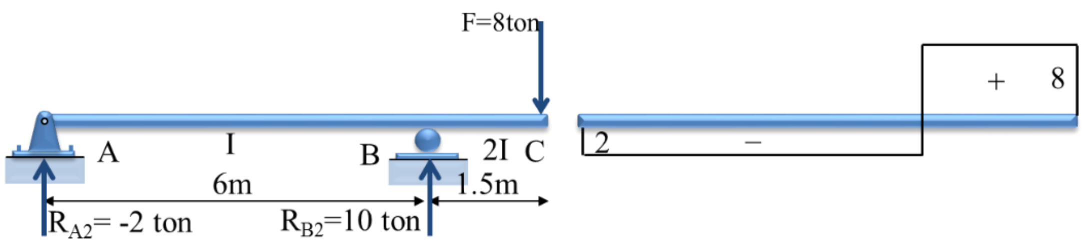
نأخذ حالتي تحميل:

حالة التحميل الأولى: الجائز يخضع لتأثير حمولة موزعة بانتظام في الفتحة AB



حالة التحميل الثانية: الجائز يخضع لتأثير الحمولة المركزة التي تؤثر في النهاية الحرة C.

فلو جمعنا المخططين لحصلنا على المخطط الإجمالي الذي حصلنا عليه من الخطوة السابقة.



لنتأكد من نقطة انعدام القوة القاطعة، إن مخطط القوة القاطعة في المجال AB الناتجة عن الحمولة المركزة هو مخطط ثابت وقيمته تساوي (-2) وان مخطط القوة القاطعة الناتجة عن الحمولة الموزعة بانتظام هو مخطط متغير القيمة.

لنفتش عن نقطة انعدام القوة القاطعة في هذا المجال، لذلك نقوم بالبحث عن إحداثيات النقطة التي تكون فيها قيمة القوة القاطعة **T=+2** حيث نجمعها مع المخطط الأول (-2) فتنعدم هذه المحصلة.

حالة التحميل الأولى نكتب معادلة القوة القاطعة:

$$T = 12 - 4x = 2 \Rightarrow -4x = -10 \Rightarrow x = 2.5$$

١-٥-٣ رسم مخطط عزم الانعطاف: Bending Moment Diagram

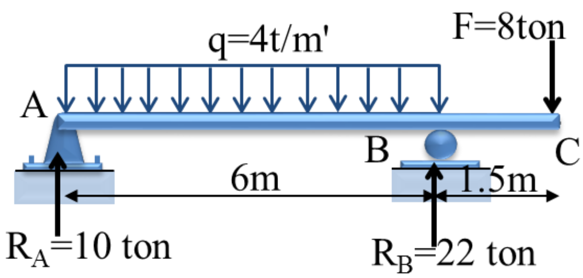
يمكن رسم مخطط عزم الانعطاف مباشرة بالاعتماد على مخطط القوى القاطعة. تنعدم قيمة عزم الانعطاف في كل من المساند البسيطة الخارجية والنهاية الحرة للظفر "ما لم تخضع لتأثير مزدوجة عزم"، وتكون قيمة عزم الانعطاف عند المسند B تساوي إلى العزم الناتج عن الظفر وتساوي إلى $-8\times 1.5 = -12$ t

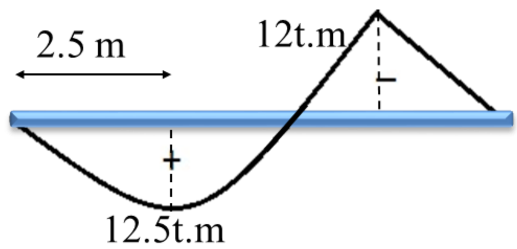
أما طبيعة المخطط في المجال AB فهو عبارة عن منحني من الدرجة الثانية ذو ميل موجب من المسند A حتى نقطة انعدام القوة القاطعة (حيث تكون قيمة العزم أعظميّة) وميل سالب من نقطة انعدام القوة القاطعة حتى المسند B.

أما مخطط عزم الانعطاف في المجال BC فهو عبارة من مستقيم من الدرجة الأولى ذو ميل موجب.

يمكن إيجاد قيمة عزم الانعطاف في أي نقطة بالاعتماد على مخطط القوى القاطعة انطلاقا من العلاقة بين القوى القاطعة وعزم الانعطاف.

$$\Delta M = M_2 - M_1 = \int T dx$$





وإن قيمة التكامل تعبر عن مساحة مخطط القوة القاطعة بين هاتين النقطتين، لنطبق هذه العلاقة بين المسند A ومكان العزم الأعظمي مع الأخذ بعين الاعتبار أن قيمة $M_A = 0$

$$M_{max} - M_A = \frac{10 \times 2.5}{2} = 12.5t.m \quad , \quad M_{max} = 12.5t.m$$

كذلك يمكن إيجاد قيمة العزم العظمى بالاعتماد على معادلة عزم الانعطاف.

$$M = 10x - 4x\frac{x}{2} = 10x - 2x^2$$

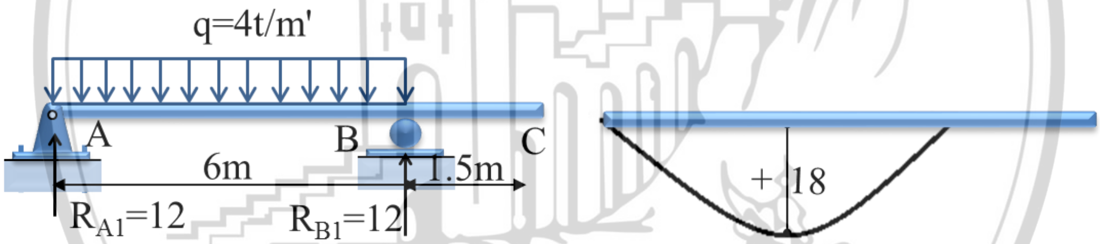
$$X = 2.5 \Rightarrow M_{max} = 10 * \ 2.5 - 2 * \ 2.5^2 = 12.5 \ t.m$$

أما نقطة انعدام عزم الانعطاف $M = 0 \ \Rightarrow 10x - 2x^2 = 0 \Rightarrow X = 5$

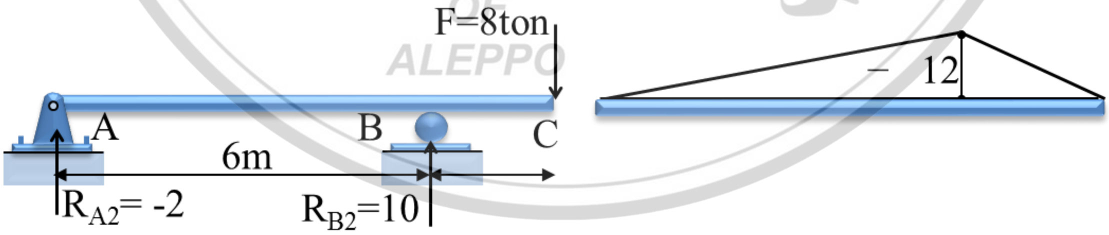
ثانيا: رسم مخطط عزم الانعطاف بالاعتماد على مبدأ تنضد الآثار.

نأخذ حالتي تحميل:

حالة التحميل الأولى: الجائز يخضع لتأثير حمولة موزعة بانتظام في الفتحة AB



حالة التحميل الثانية: الجائز يخضع لتأثير حمولة مركزة تؤثر في النهاية الحرة C



لنبحث عن قيم ومواقع النقاط التي تم إيجادها في المرحلة السابقة:

a.إيجاد قيمة العزم الأعظمي عندما تكون: $x = 2.5$

لنكتب معادلات العزم للمجال AB لحالتي التحميل الأولى والثانية:

حالة التحميل الأولى:

$$M_{AB1} = 12x - 2x^2$$
$$X = 2.5 \Rightarrow M = 30 - 26.25 = 17.5$$

حالة التحميل الثانية:

$$MAB2 = -2x \quad , \qquad X = 2.5 \Rightarrow M = -5$$

وبالتالي تكون قيمة العزم الأعظمي تساوي إلى:

$$M\_max = 17.5 - 5 = 12.5 \quad t.m$$

b.إيجاد نقطة انعدام العزم: تنعدم قيمة عزم الانعطاف عندما ينعدم مجموع العزمين لحالتي التحميل الأولى والثانية

$$M_{AB1} + M_{AB2} = 0 \Rightarrow 12x - 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$$
$$10x - 2x\text{^}2 = 0 \Rightarrow X = 2.5$$

c.إيجاد قيمة العزم في منتصف الفتحة AB

لنعوض إحداثيات المنتصف (X=3) في معادلتي العزم لحالتي التحميل الأولى والثانية:

$$M_{AB2} = -6$$
$$MAB1 = 12 \times 3 - 2 \times 3\text{^}2 = 36 - 18 = 18$$
$$M = 18 - 6 = 12\, t.m$$

من خلال هذا المثال العملي يمكننا أن نستنتج أنه يمكننا الاعتماد على طريقة تنضد الآثار من أجل حساب معظم الحالات المعقدة، وذلك بتجزئة الحمولات المؤثرة على الجائز إلى عدّة أجزاء، بحيث تكون ذات مساحات ومواقع مراكز ثقل معروفة.

الفصل الثاني

حساب التشوهات في الجمل المقررة

Calculating of Deflections in determinate Structures

٢–١ مقدمة: Preface

يعبر التشوه deflection عن الانتقال أو الإزاحة displacement التي تتعرض له نقاط المنشأ نتيجة تطبيق الحمولات عليه. وتتضافر على تكوين التشوه مجموعة القوى العرضية transvers والقوى المحورية axial forces حيث أنها تسبب تشوهات انعطاف وقص وفتل وإجهادات محوريةbending ,shear, torsion, and axial deformations .

إن حساب قيمة التشوه ضروري وهام جداً في تحليل وتصميم المنشآت. فهو الأساس في حل المنشآت الهامة التي توجب التأكد من عدم تجاوز التشوه حدوداً مقبولة حتى إن الكثير من قوانين البناء تُحدد للسهم قيمة أعظميّة لا يجب تجاوزها في نقاطٍ معينة من المنشأ. وفي بعض الحالات الخاصة يكون حساب التشوهات ضرورياً لدراسة شكل المنشأ أثناء بنائه كما هي الحال في بناء الجسور بطريقة الظفر cantilever method حيث يكون الإنشاء من الطرفين بشكل ظفرين يلتقيان في منتصف المجاز فيتوجب حساب التشوه لكل منهما في كل مرحلة من مراحل البناء وتصحيح شكلهما حتى يتم الالتقاء. وفي المنشآت المتعرضة لحمولات متحركة dynamic loads يكون حساب التشوهات ضرورياً كمقدمة لحساب الجهود.

وكذلك نستفيد من حساب التشوهات في تقرير الجمل الإنشائية غير المقررة بالاستفادة من النقاط ذات الانتقالات المعروفة لتمكن بواسطتها من معرفة ردود الأفعال أو القوى الفائضة.

هنالك طرائق عديدة لحساب التشوهات لا يمكن تفضيل إحداها على الأخرى بصورة عامة وإنما نستخدم الأنسب والأسهل منها تبعاً للحالة الخاصة التي نريد حساب التشوه لها. ويمكننا تصنيف هذه الطرائق في ثلاثة أنواع أساسية:

١.الطرائق المعتمدة على تكامل المعادلة التفاضلية للخط المرن: Integration of the differential equation of elastic curve

وهذا التكامل يمكن إنجازه بالطريقة الرياضية البحتة successive integration أو بطرائق مساعدة أخرى كطريقة عزم المساحة moment-area method وطريقة الجائز البديل conjugate beam.

٢.طرائق الطاقة Energy Methods أو طرائق القوة Force Methods، إن الطاقة المختزنة في المنشأ تخضع لقوانين تمكننا من حساب التشوهات في مختلف المنشآت ومن هذه الطرائق يمكننا ذكر طريقة العمل الافتراضي وطريقة كاستليانو وطرائق أخرى.

٣.الطرائق البيانية Graphical Methods كما في طريقة ويليوت – موهر williot-Mohr.

٢–٢ المعادلة التفاضلية للخط المرن Differential Equation of the Elastic Curve

يُفترض في اشتقاق المعادلة التفاضلية للخط المرن ما يلي:

١.إن السطوح المستوية للمقاطع العرضانية عبر الجائز قبل الانحناء Transverse plane section تبقى مستوية بعد الانحناء.

٢.إن مقاطع الجوائز متناظرة لمستوى التحميل loading plane أي أن الحمولات تطبق ضمن مستوى تناظر المقطع.

يبين الشكل رقم(٢–a١) جائز في وضعه المتشوه deflected shape، وقد رُسمت محاور الإحداثيات بحيث ينطبق المحور X مع محور الجائز قبل الانتقال وبحيث أن إحداثي Yيعادل القيمة العددية للسهم وقد جرى اختيار اتجاه المحاور بشكل كيفي على أن يراعى هذا الاتجاه في كافة الحسابات التي تليه.

إن محور الجائز بعد الانتقال يُسمّى بالخط المرن أو المنحنى المرن elastic curve ومن طبيعة هذا المنحنى أن يكون مستمراً continuous دوماً إذ لا يُمكن حدوث تغيرات فجائية أو انقطاع discontinuity على مساره ولا على اتجاهات المماس tangent.

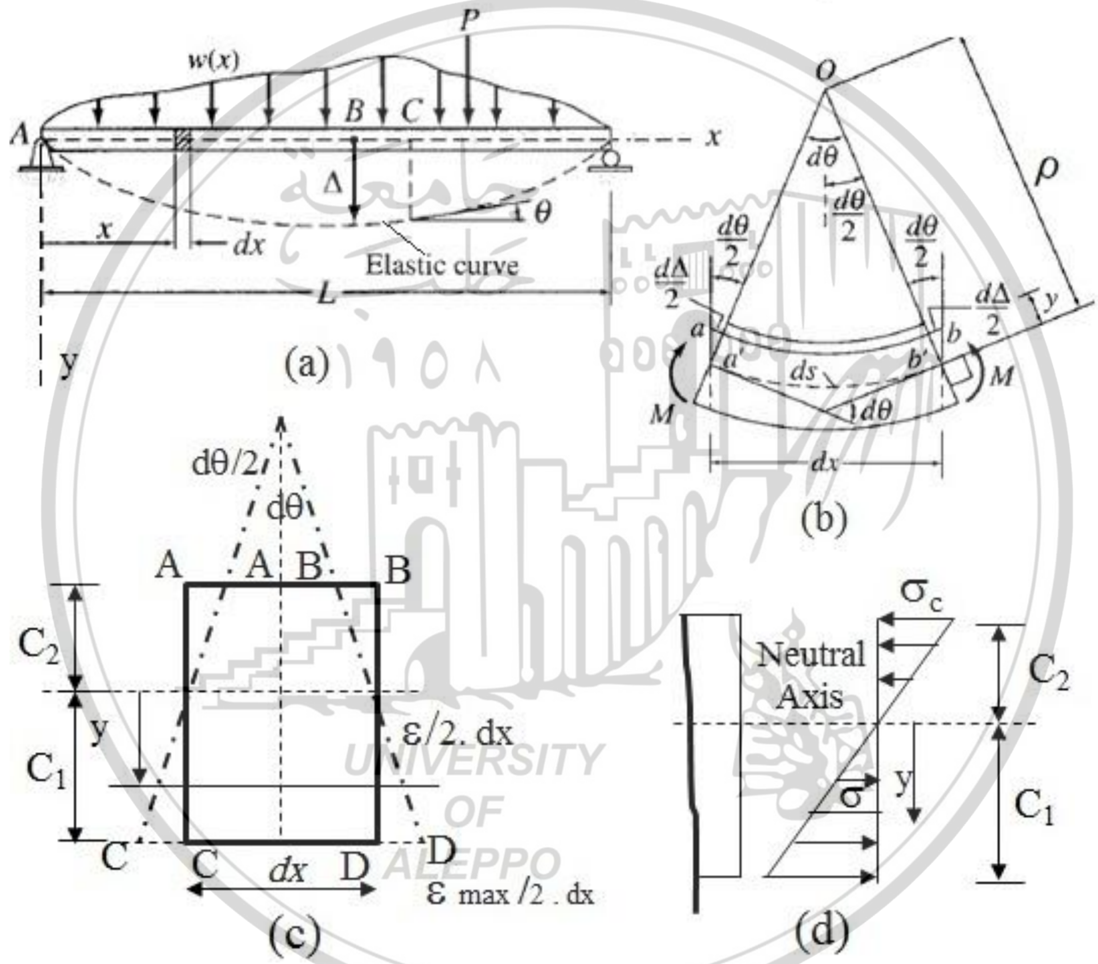
أما الشكل رقم(٢–b١) فيبين العلاقة بين الميول لنقطتين متقاربتين على الخط المرن والمسافة بينهما.

بما أن سطوح المقاطع المستوية قبل الانعطاف تبقى مستوية بعده، فإنه من تشابه المثلثات المبينة في الشكل رقم(٢–c١) يمكننا كتابة المساواة التالية:

$$\frac{\frac{\varepsilon}{2}dx}{y} = \frac{\frac{dx}{2}}{\rho} \qquad (2-1)$$

حيث يمثل ρ نصف قطر الانحناء الموضعي instantaneous radius curvature للخط المرن و ε تمثل الانفعال strain في الألياف الواقعة على مسافة y من المحور السليم Neutral Axis.

ومن قانون هوك نكتب $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ حيث تمثل σ الإجهاد stress في المقطع المدروس و E تمثل عامل المرونة الطولي Modulus of Elasticity.



الشكل رقم(٢-١) الخط المرن

وبتعويض قيمة الانفعال ε في المعادلة $(1-2)$ نحصل على:

$$\frac{\sigma}{yE} = \frac{1}{\rho} \qquad (2-2)$$

بتعويض قيمة الإجهاد الناظمي σ الوارد في العلاقة (2-2) بعلاقة الإجهاد الناظمي الناتج عن الانعطاف وهي $\sigma = \frac{M.y}{I}$ تصبح العلاقة (2-2) على النحو التالي:

$$(2-3) \qquad \frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho}$$

إن الحد $\frac{1}{\rho}$ نطلق عليه الانحناء curvature وهو يساوي حسابيا معدل التغير في ميل المماس للخط المرن والذي يمكن التعبير عنه رياضيا بالعلاقة التالية:

$$(2-4) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + (\frac{dy}{dx})^2\right]^{3/2}}$$

وفي حالة الانتقالات الصغيرة يكون مربع التفاضل $\frac{dy}{dx}$ صغيراً لدرجة تسمح لنا بإهماله من العلاقة $(2-4)$ والتي يمكن التعبير عنها بالعلاقة التالية:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

بالرجوع إلى الشكل رقم(٢-١a) نلاحظ أن ميل المماس للخط المرن يتناقص مع ازدياد قيمة X (عندما يكون مركز الانحناء فوق الجائز) وهذا الانحناء السالب يترافق مع وجود عزم انعطاف موجب في الجائز positive moment وبعبارة أخرى فإن إشارة الانحناء curvature sign تكون دوماً معاكسة لإشارة العزم أي أن العزوم الموجبة تسبب انحناءً سالباً بالنسبة لنظام الإحداثيات المبين ونتيجة لذلك فان العلاقة السابقة تصبح على النحو التالي:

$$(2-5) \qquad \frac{d2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

تعبر العلاقة رقم (2-5) عن المعادلة التفاضلية للخط المرن حيث يمكن الانطلاق منها للوصول إلى كافة المعلومات الأخرى المتعلقة بالجائز.

ويجب أن نلاحظ هنا أن استخدامنا لقانون هوك في الاشتقاق يفترض أن مادة الجائز مرنة تماماً. كما يجب أن نلاحظ أيضاً أننا لم ندخل في حسابنا سوى التشوه الناتج عن العزم فقط وقد أهملنا التشوهات الأخرى الناتجة عن القص deformation shear deformation باعتبار أنها صغيرة لدرجة تُمكننا من تجاهلها.

ويبين الشكل رقم(٢-٢) اصطلاح الإشارات لمختلف القيم المتعلقة بالجائز.

٢-٢-١العلاقة بين القوى الداخلية ومعادلة الخط المرن: Relation Between Internal Forces & Elastic Curve

إذا أجرينا التفاضل بالتوالي على معادلة الخط المرن آخذين بعين الاعتبار العلاقات التي تربط بين الحمولات الخارجية والقوى القاطعة وعزوم الانعطاف الواردة في العلاقتين (2-1) و (2-2) فإننا نحصل على العلاقات التالية:

Positive Reaction	R	ردود الأفعال الموجبة (نحو الأعلى)
Positive Load	P	الحمولة الموجبة (نحو الأسفل)
Positive Shear Force	T T	القوة القاطعة الموجبة (مع عقارب الساعة)
Positive Axial Force	N N	القوة المحورية الموجبة (شد)
Positive Bending Moment	M M	عزم الانعطاف الموجب (شد ألياف سفلية)
Positive curvature	ρ	الانحناء الموجب (نحو الأسفل)
Positive Slope	dy dx y'	ميل المماس الموجب (مع عقارب الساعة)
Positive Deflection	y	السهم الموجب (نحو الأسفل)

الشكل رقم(٢-٢) اصطلاح الإشارات الموجبة للقوى والقوى الداخلية والخط المرن

	$y = f(x)$	$\frac{dy}{dx} = \theta$
(2 − 6)	$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$	$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{V}{EI}$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{q}{EI}$$

نستنتج مما سبق، أنه إذا عرفنا معادلة الخط المرن للجائز y=f(x) وإذا عرفنا الصلابة الانعطافية لها flexural rigidity (EI) أمكننا الحصول على قيم ميل المماس، والعزم، والقوة القاطعة، والحمولة في أية نقطة من نقاط محور الجائز بإجراء التفاضل على التوالي successive differentiation، ومن ناحية أخرى إذا عرفنا أية معادلة تفاضلية من معادلات الجائز أمكننا الحصول على كافة المعلومات المتبقية للجائز إما بالتفاضل أو بالتكامل.

٢-٢-٢حل المعادلة التفاضلية للخط المرن : Differential Equation Solving

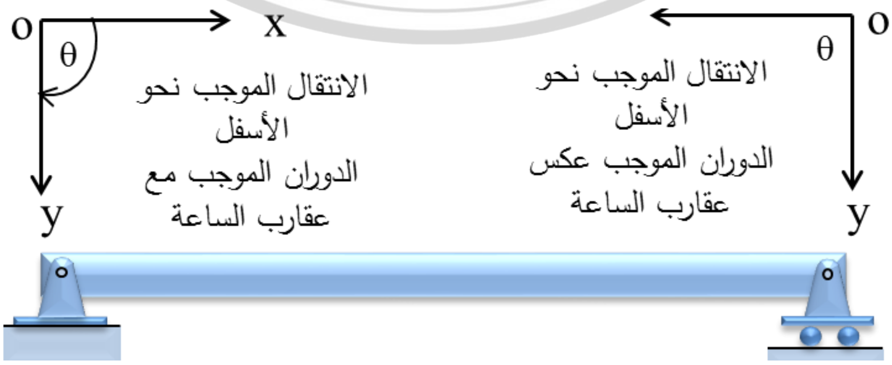
يتم البدء في إيجاد المعادلة التفاضلية للخط المرن بالاعتماد على معادلة عزم الانعطاف وإجراء التكامل للحصول على معادلة الدوران (الميل) والانتقال (الخط المرن)، وفي هذه الحالة يستوجب الحل وجود اثنين من الشروط الحدية boundary conditions لكل مجال لمعرفة قيمة ثوابت التكامل integration constants.

كما يمكن البدء من معادلة الحمولة وإجراء التكامل أربع مرات على التوالي للحصول على معادلات القوى القاطعة وعزم الانعطاف والدوران والانتقال، وفي هذه الحالة يجب الاعتماد على الشروط الحدية لإيجاد ثوابت التكامل.

$$T = -\int q.dx + T_0 \quad , \quad M = \int T.dx + M_0$$

$$y'' = -\frac{M}{EI}$$

$$y' = -\int \frac{M}{EI}dx + y'_0 \quad , \quad y = -\int y'.dx + y_0$$



الشكل رقم (٢-٣) الاصطلاح الموجب في المعادلة التفاضلية للخط المرن

الإجراءات المتبعة في التحليل: Analyzing Procedures

لإيجاد معادلة الخط المرن نتبع ما يلي:

١.نكتب معادلة عزم الانعطاف متقيدين بعدد المجالات الموجودة، حيث تتحدد المجالات بما يلي:

a) في حال وجود تغير مفاجئ في الحمولة

b) في حال وجود تغير مفاجئ في محور الجائز

c) في حال وجود تغير مفاجئ في عزم عطالة الجائز

d) في حال وجود تغير مفاجئ في نوعية المادة التي يتكون منها الجائز

e) في حال وجود مفصل.

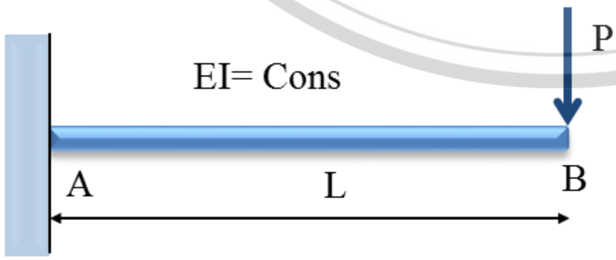
٢.نكامل معادلة عزم الانعطاف للمرة الأولى لنحصل على معادلة الدوران مع إضافة ثابت التكامل C_1 والذي يعبر عن الدوران في بداية المجال (y'_0) .

٣.نكامل معادلة الدوران لنحصل على معادلة الانتقال مع إضافة ثابت التكامل C_2 والذي يعبر عن الانتقال في بداية المجال (y_0).

٤.نوجد ثوابت التكامل بالاعتماد على شروط النهايات الحدية لكل مجال.

يكون الانتقال الموجب دائما نحو الأسفل كما هو موضح في الشكل رقم (٢-٣) ويكون الدوران الموجب تابعا لاتجاه المحور X كما هو موضح في الشكل رقم(٢-٣)

٢-٢-٣ تطبيقات وأمثلة محلولة: Examples



مثال (١): جائز ظفري يخضع لتأثير حمولة مركزة في النهاية الحرة B طوله L وصلابته الانعطافية EI والمطلوب:

١-أوجد معادلتي الدوران والانتقال.

٢–احسب قيمة الانتقال والدوران في النهاية الحرة B باستخدام المعادلة التفاضلية للخط المرن.

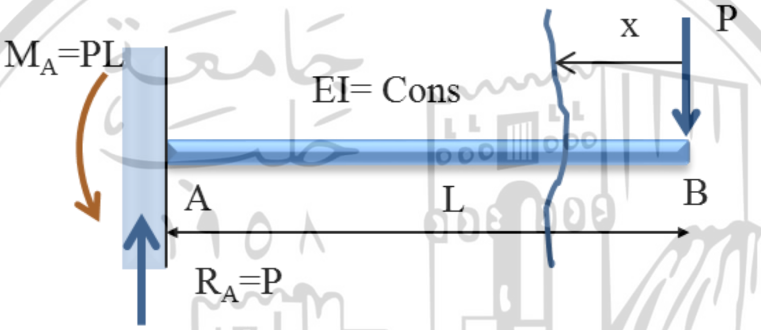
١–إيجاد معادلتي الدوران والانتقال

a) نكتب معادلة عزم الانعطاف:

$$M = -PX \qquad EIy'' = -\ \mathrm{M} \qquad EIy'' = PX$$

$$E.I.y' = \frac{PX^2}{2} + C_1$$

$$E.I.y = \frac{PX^3}{6} + C_1.X + C_2$$



b) نوجد ثوابت التكامل:

لإيجاد ثوابت التكامل نعتمد على شروط النهايات الموافقة للحركة في بداية ونهاية كل مجال، بما أن بداية المجال هي نهاية حرة فإنها تخضع لانتقال ودوران غير معلومين، أما نهاية المجال فهي مسند موثوق الذي تنعدم فيه قيمتي الدوران والانتقال وبذلك نستطع أن نكتب شرطي الحركة في الوثاقة، عندما X=L فإن قيمة y'=0، نعوض هذه القيم في معادلة الدوران y' فنحصل على قيمة

$$C_1 = -\frac{PL^2}{2}$$

وكذلك عندما X=L فإن y=0، نعوض هذه القيم في معادلة الانتقال y فنحصل على قيمة C_2:

$$0 = \frac{PL^3}{6} - \frac{PL^3}{2} + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{PL^3}{3}$$

نعوض قيم ثوابت التكامل في المعادلة التفاضلية للخط المرن لنحصل على معادلتي الدوران والانتقال

$$E.I.y' = \frac{PX^2}{2} - \frac{PL^2}{2}$$

$$E.I.y = \frac{PX^3}{6} - \frac{PL^2}{2}.X + \frac{PL^3}{3}$$

لحساب الدوران والانتقال في النهاية الحرة B نعوض إحداثيات النهاية الحرة في معادلتي الدوران والانتقال وهي عندما X=0 نجد أن:

$$y'_B = -\frac{PL^2}{2E.I}$$ مع عقارب الساعة

$$y_B = +\frac{PL^3}{3E.I}$$ نحو الأسفل

لو اخترنا اتجاه المحور X من اليسار فإنه تختلف قيم ثوابت التكامل وشكل المعادلة التفاضلية للخط المرن، لكن قيم الدوران والانتقال لا تختلف.

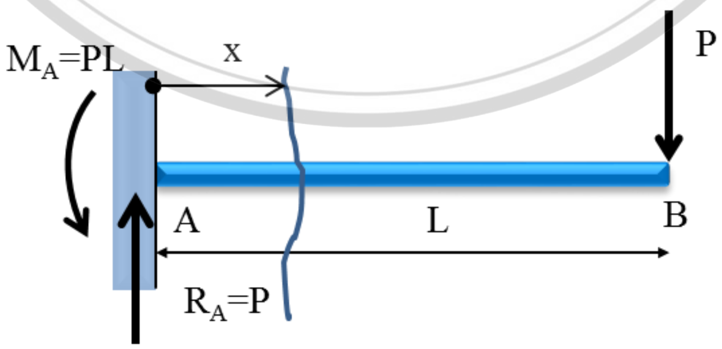
نكتب معادلة عزم الانعطاف بأسلوبين:

الأسلوب **الأول** هو أن نأخذ القوى الموجودة يمين المقطع (ولا نحتاج هنا إلى قيم ردود الأفعال) فتكون المسافة بين المقطع والقوة (L-X) ومعادلة عزم الانعطاف في هذه الحالة هي:

$$M= - P\ (L-X)$$

أو أن نأخذ القوى الموجودة يسار المقطع (ونحتاج هنا إلى قيم ردود الأفعال) فتكون المسافة بين المقطع وردود الأفعال تساوي (X) ومعادلة عزم الانعطاف في هذه الحالة هي:

$$M=PX-PL$$



حيث نحصل على نفس المعادلة لعزم الانعطاف سواء أخذنا القوى الموجودة يمين المقطع أو يساره مع الانتباه للمسافة بين المقطع والقوى، مع الأخذ بعين الاعتبار موقع واتجاه المحور X

$$E.I.y'' = -M \quad , \quad E.I.y'' = P(L-X) = PL - PX$$

$$E.I.y' = P.L.X - \frac{PX^2}{2} + C_1$$

$$E.I.y = \frac{PLX^2}{2} - \frac{PX^3}{6} + C_1.X + C_2$$

لإيجاد ثوابت التكامل نحدد شروط النهايات وهي

عندما X=0 فإن قيمة y'=0، نعوض هذه القيم في معادلة الدوران y' فنحصل على قيمة $C_1=0$

وكذلك عندما X=0 فإن y=0، نعوض هذه القيم في معادلة الانتقال y فنحصل على قيمة $C_2=0$

نعوض قيم ثوابت التكامل في المعادلة التفاضلية للخط المرن لنحصل على معادلتي الدوران والانتقال

$$E.I.y' = P.L.X - \frac{PX^2}{2}$$

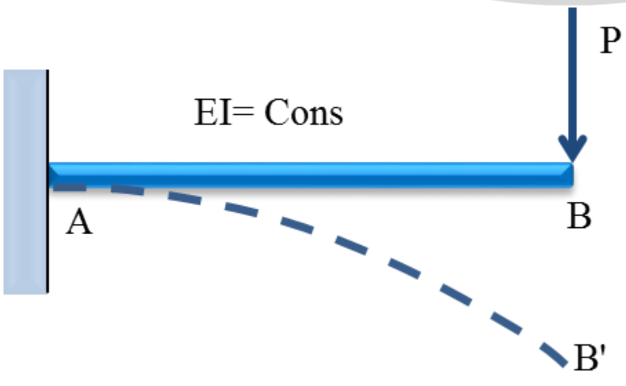
$$E.I.y = \frac{PLX^2}{2} - \frac{PX^3}{6}$$

٢-حساب الدوران والانتقال في النهاية الحرة B.

لحساب الدوران والانتقال في النهاية الحرة B نعوض إحداثيات النهاية الحرة في معادلتي الدوران والانتقال وهي عندما $X=L$ نجد أن:

$y'_B = \frac{PL^2}{2E.I}$ مع عقارب الساعة $\qquad$ $y_B = +\frac{PL^3}{3E.I}$ نحو الأسفل

٣-رسم الخط المرن:



تنعدم قيمة الانتقال والدوران في الوثاقة، أما في النهاية الحرة فإن قيمة الدوران موجبة (أي تدور النهاية الحرة مع عقارب الساعة)، والانتقال

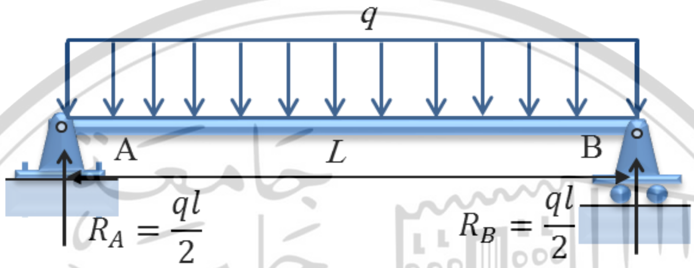
الموجب (نحو الأسفل).

<u>مثال (٢):</u>

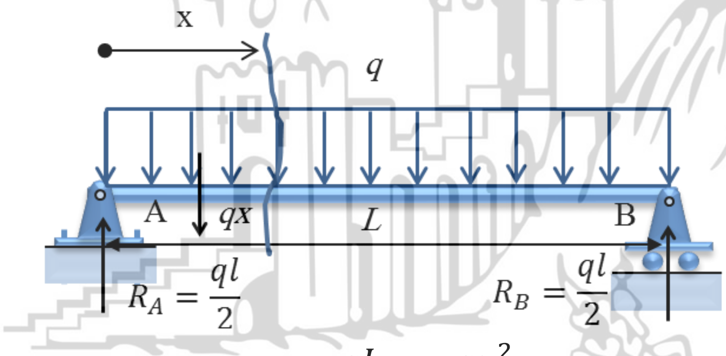
جائز بسيط يخضع لتأثير حمولة موزعة بانتظام شدتها q والمطلوب:

١.احسب قيمة الدوران في المسندين A , B بطريقة باستخدام المعادلة التفاضلية للخط المرن .

٢.احسب قيمة الدوران والانتقال في المنتصف.



١–نحسب قيم ردود الأفعال ونكتب معادلات عزم الانعطاف



$$M = \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

$$E.I.y'' = -M \quad , \quad E.I.y'' = -\frac{qL}{2}x + \frac{qx^2}{2}$$

$$E.I.y' = -\frac{qL}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$E.I.y = -\frac{qL}{2}\frac{x^3}{6} + \frac{qx^4}{24} + C_1.X + C_2$$

٢–إيجاد ثوابت التكامل

لإيجاد ثوابت التكامل نحدد شروط النهايات وهي:

عندما X=0 فإن قيمة y=0، نعوض هذه القيم في معادلة الانتقال y فنحصل على قيمة C_2=0، وكذلك عندما X=L فإن قيمة y=0، نعوض هذه القيم في معادلة الانتقال y فنحصل على:

$$0 = -\frac{qL}{2}\frac{L^3}{6} + \frac{qL^4}{24} + C_1.L \rightarrow C_1 = \frac{qL^3}{24}$$

نعوض قيم ثوابت التكامل في المعادلة التفاضلية للخط المرن نحصل على معادلتي الدوران والانتقال.

$$E.I.y' = -\frac{qL}{4}x^2 + \frac{qx^3}{6} + \frac{qL^3}{24}$$

$$E.I.y = -\frac{qL}{12}x^3 + \frac{qx^4}{24} + \frac{qL^3}{24}.X$$

١-حساب قيمة الدوران في المسندين A،B

لحساب قيمة الدوران في المسندين B, A نعوض إحداثيات المسند A في معادلة الدوران وهي عندما X=0 نجد أن:

$$E.I.y'_A = \frac{qL^3}{24}$$ مع عقارب الساعة

ونعوض إحداثيات المسند B في معادلة الدوران وهي عندما X=L نجد أن:

$$E.I.y'_B = -\frac{qL^3}{24}$$ عكس عقارب الساعة

والنتيجة:

تكون قيمة دوران المقاطع المتناظرة في الجوائز المتناظرة، متناظرة عكسياً (متساوية في القيمة ومختلفة في الإشارة).

٢-حساب الانتقال والدوران في المنتصف:

لحساب قيمة الدوران والانتقال في المنتصف نعوض إحداثيات المنتصف (*X=L/2*) في معادلتي الدوران والانتقال.

$$E.I.y'_m = -\frac{qL}{4}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{q}{6}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{qL^3}{24}$$

$$E.I.y_m = -\frac{qL}{12}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{q}{24}\left(\frac{L}{2}\right)^4 + \frac{qL^3}{24}.\left(\frac{L}{2}\right)$$

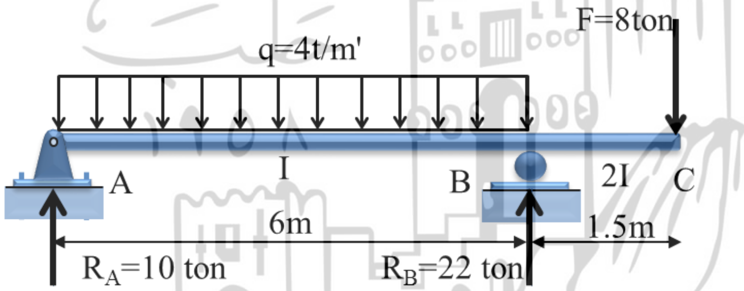
$$E.I.y'_m = 0 \quad , \quad E.I.y_m = \frac{5\,ql^4}{384\,EI}$$

نتيجة: ينعدم الدوران عند محور التناظر للجوائز المتناظرة.

مثال (٣):

جائز بسيط AB عطالته I ينتهي بظفر BC عطالته 2I يتعرض لتأثير حمولة مركزة في نهايته الحرة (C)شدتها 8 t.m وحمولة موزعة بانتظام في المجال AB شدتها 4 t/m'.

والمطلوب: حساب الانتقال والدوران في النهاية الحرة (C).



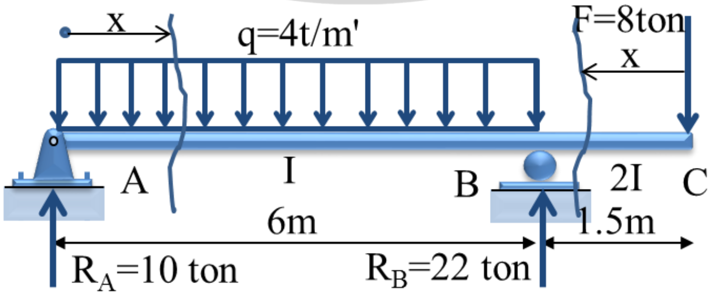
الحل: لإيجاد قيمة الانتقال والدوران في النقطة (C) نكتب معادلتي عزم الانعطاف في المجالين AB وBC.

المجال AB: $6 \geq X_1 \geq 0$

$$M_1 = 10x - 2x^2, \quad E.I.y''_1 = -10x + 2x^2$$

$$E.I.y'_1 = -\frac{10x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + C_1$$

$$E.I.y_1 = -\frac{10x^3}{6} + \frac{2x^4}{12} + C_1.x + C_2$$



المجال BC: $1.5 \geq X_2 \geq 0$

$$M_2 = -8x\ ,\quad E.2I.y''_2 = 8x$$

$$E.2I.y'_2 = \frac{8x^2}{2} + C_3$$

$$E.2I.y_2 = \frac{8x^3}{6} + C_3.x + C_4$$

إيجاد ثوابت التكامل في المجال AB: عندما $X_1=0$ فإن قيمة $y_1=0$، نعوض هذه القيم في معادلة الانتقال y_1 فنحصل على قيمة $C_2=0$، وكذلك عندما $X_1=6$ فإن قيمة $y_1=0$، نعوض هذه القيم في معادلة الانتقال y_1 فنحصل على:

$$0 = -\frac{10 \times 6^3}{6} + \frac{2 \times 6^4}{12} + 6C_1\ ,\quad C_1 = 24$$

إيجاد ثوابت التكامل في المجال BC:

عندما $X_2=1.5$ فإن قيمة $y_2=0$، نعوض هذه القيم في معادلة الانتقال y_2 فنحصل على:

$$(2-7)\qquad 0 = \frac{8 \times 1.5^3}{6} + 1.5\,C_3 + C_4$$

وكذلك عندما $X_2=1.5$ و$X1=6$ فإن قيمة $y'_2= - y'_1$، لأن المقطع B هو مقطع مشترك بين المجالين، حيث تتساوى قيمة الدوران من المجال الأول والثاني، أما الإشارة السالبة فهي ناتجة عن تعاكس اتجاه المحور X للمجالين الأول والثاني. نعوض هذه القيم في معادلتي الدوران y'_2 وy'_1 فنحصل على:

$$E.I.y'_1 = -\frac{10 \times 6^2}{2} + \frac{2 \times 6^3}{3} + 24 \rightarrow \quad y'_1 = -\frac{12}{EI}$$

$$E.2I.y'_2 = \frac{8 \times 1.5^2}{2} + C_3 \rightarrow y'_2 = \frac{9 + C_3}{2EI}$$

$$\frac{12}{EI} = \frac{9 + C_3}{2EI} \rightarrow C_3 = 15$$

نعوض قيمة C_3 في العلاقة رقم $(2-7)$ فنحصل على قيمة $C_4 = -27$

نعوض قيم ثوابت التكامل في علاقات الخط المرن للمجالين

$$E.I.y'_1 = -\frac{10x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + 24$$

$$E.I.y_1 = -\frac{10x^3}{6} + \frac{2x^4}{12} + \ 24.x$$

$$(2-8)\ \ E.2I.y'_2 = \frac{8x^2}{2} + \ 15 \quad , \ E.2I.y_2 = \frac{8x^3}{6} + \ 15.x - 27$$

لحساب الانتقال والدوران في النهاية الحرة C نعوض إحداثي C وهو عندما x=0 في العلاقتين (8 – 2) للمجال الثاني:

$$y'_c = +\frac{15}{2EI} = \frac{7.5}{EI}$$ عكس عقارب الساعة

$$y_c = \frac{-27}{2EI} = -\frac{13.5}{EI}$$ الإنتقال نحو الأعلى

٢–٣ طريقة الجائز البديل: Conjugate Beam Method

يمكننا تبسيط طريقة حساب الانتقالات والدورانات والاستعاضة عن التكاملات الرياضية وإيجاد ثوابتها بالاعتماد على طرائق بديلة أقل صعوبة حيث يُمكن إيجاد التكامل بيانياً بالاعتماد على مخططات عزوم الانعطاف للجوائز التي تمكننا من الحصول على قيمة الانتقالات والدورانات.

تعتمد هذه الطريقة على جملة محاور إحداثية موجبة يكون فيه اتجاه المحور الأفقي X نحو اليمين والمحور الشاقولي Y نحو الأسفل لذلك فالانتقال الموجب نحو الأسفل والدوران الموجب مع عقارب الساعة وهو اتجاه الدوران من المحور X باتجاه المحور Y كما هو مبين في الشكل رقم (٢–٣).

بمقارنة المعادلتين التفاضليتين الخاصتين بالقوى الداخلية والانتقالات نحصل على

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -q$$

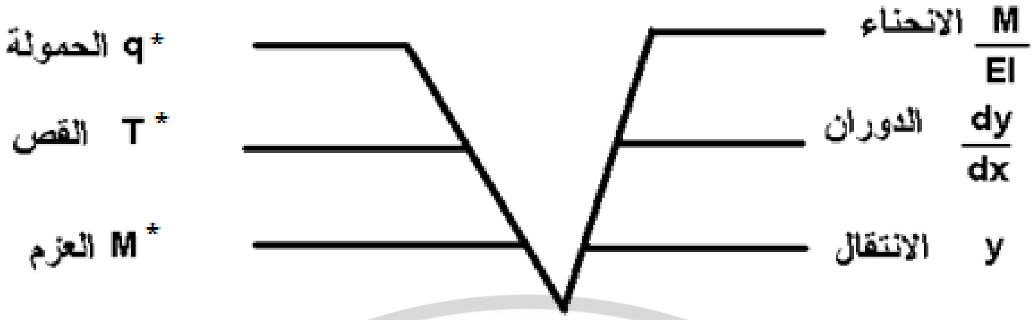
$$\frac{d2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = -\frac{M}{EI}$$

لنفرض أن مخطط العزم مقسوماً على EI $\left(\frac{M}{EI}\right)$ هو حمولة وهمية خارجية q*=$\left(\frac{M}{EI}\right)$ فإذا كاملنا $\left(\frac{M}{EI}\right)$ نحصل على معادلة الدوران

$$-\int \frac{M}{EI} dX = \frac{dy}{dx} \ , \ \ -\int q^* . dx = T^*$$

بمكاملة هذه العلاقة للمرة الثانية:

$$\int T^* dx = M^* \quad , \qquad \int \frac{dy}{dx} = y$$



الشكل رقم (٢–٤) مطابقة العلاقات بين القوى الداخلية والانتقالات

فلو فرضنا أن مخطط عزم الانعطاف M مقسوماً على EI عبارة عن حمولة وهمية خارجية $\mathbf{q}^*$ أو ما يسمى بالحمولة الوهمية

$$\frac{M}{EI} = q^*$$

بإيجاد القوة القاطعة الناتجة عن هذه الحمولة الوهمية تكافئ إيجاد الدوران في الجائز الأصلي:

$$T^* c \; = \frac{dy}{dx}$$

وإذا أوجدنا عزم الانعطاف الناتج عن هذه الحمولة الوهمية تكافئ إيجاد الانتقال في الجائز الأصلي: $M^* \; = y$

وبما أن اتجاه المحور الشاقولي الموجب يكون نحو الأسفل؛ فان اتجاه التحميل الموجب أيضا يكون نحو الأسفل الناتج عن مخطط عزم الانعطاف الموجب.

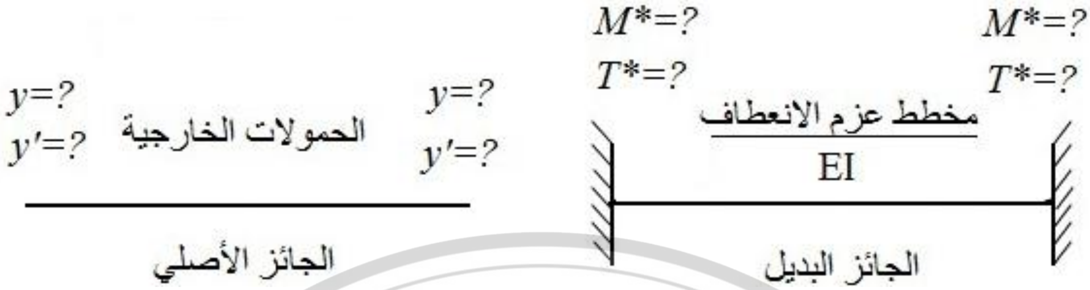
٢–٣–١ إيجاد شروط النهايات (الشروط الحدية): Boundary Conditions

يُمكننا إيجاد الشروط الحدية بالاعتماد على حركة المساند، حيث يُمكننا التعبير عن ذلك بالأشكال التالية:

I.النهاية الحرّة Free end:

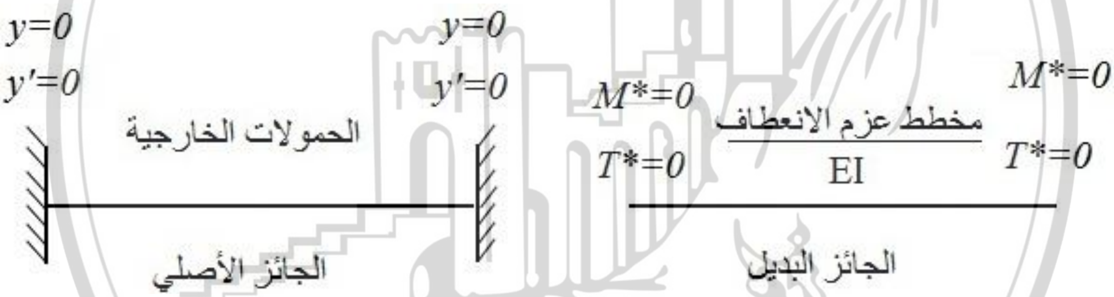
تحتوي النهاية الحرة في الجائز الأصلي على قيمة للانتقال **y**، وقيمة للدوران **y'**، ما هو المسند في الجائز البديل الذي يحتوي على قيمة للعزم M* وقيمة للقوة القاطعة T*، (هي الوثاقة)، لذلك تكون طبيعة الاستناد في الجائز البديل التي تقابل النهاية الحرة

هي الوثاقة، أي تتحول النهاية الحرة في الجائز الأصلي إلى مسند موثوق في الجائز البديل.

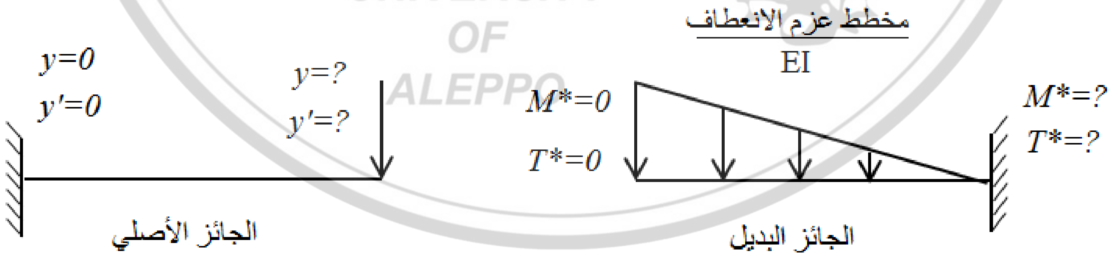


II.الوثاقة Fixed support:

تكون قيمة كل من الانتقال والدوران معدومة في الوثاقة. ماهي طبيعة الاستناد للجائز البديل الذي تكون فيه قيمة كل من عزم الانعطاف والقوة القاطعة الوهمية معدومة؟ (النهاية الحرة) لذلك تكون طبيعة الاستناد في الجائز البديل التي تقابل المسند الموثوق هي نـهاية حرّة، أي أن الوثاقة في الجائز الأصلي تتحول إلى نهاية حرة في الجائز البديل



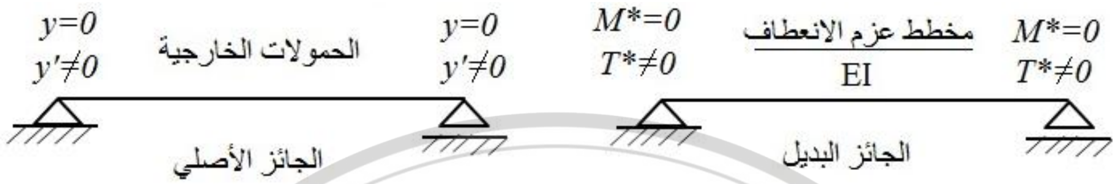
لذلك يمكننا رسم الجائز البديل للظفر على الشكل التالي:



III.المسند البسيط الخارجي (المنزلق والثابت) External Pinned and Rolled Supports

تحتوي المساند البسيطة في الجائز الأصلي على قيمة للدوران **y'**، وتنعدم فيها الانتقالات **y**, لذلك يجب أن تكون طبيعة الاستناد في الجائز البديل تتناسب مع شروط

الانتقالات في الجائز الأصلي، حيث تنعدم فيه قيمة العزم ولا تنعدم فيه قيمة القوة القاطعة، لذلك تكون طبيعة الاستناد في هذه الحالة هي نفسها في الجائز الأصلي.
أي المسند البسيط الخارجي في الجائز الأصلي يبقى كما هو في الجائز البديل بدون أي تغيير.

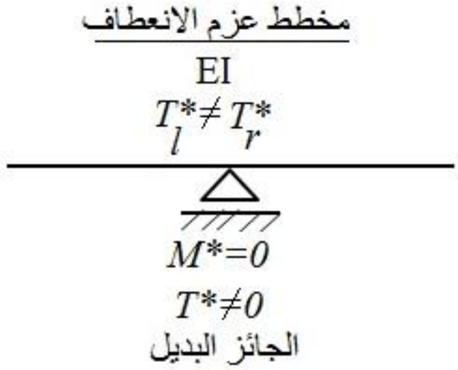


IV.المسند البسيط الداخلي Internal Pinned and Rolled Supports

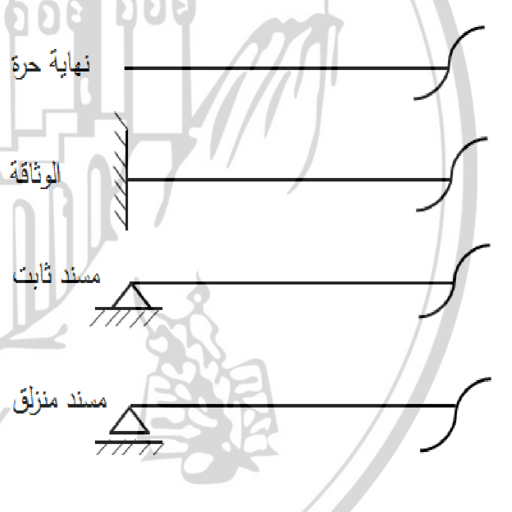
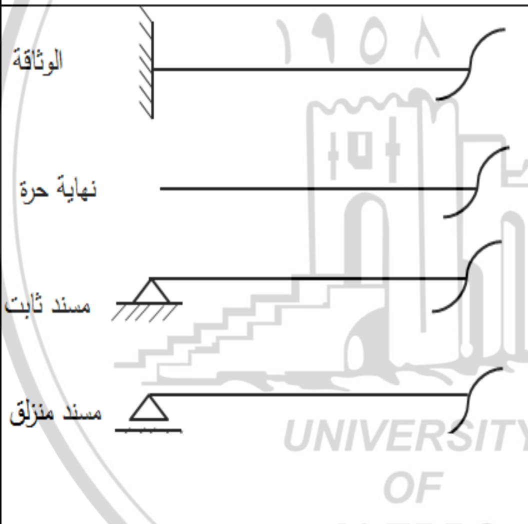
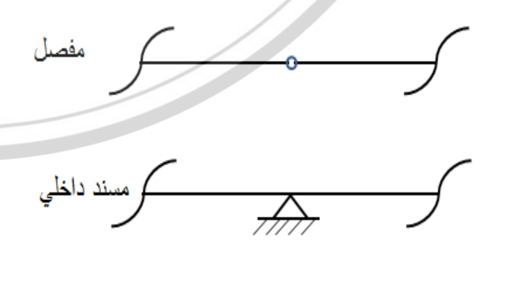
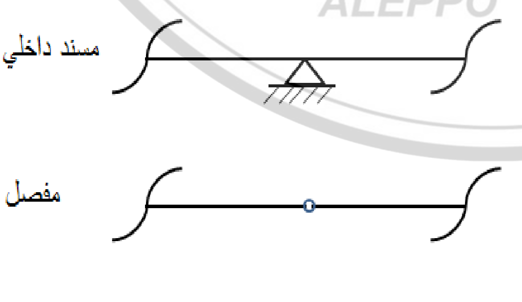
مسند بسيط ينتهي بظفر، تحتوي المساند البسيطة الداخلية في الجائز الأصلي على قيمة للدوران**y'**، وتنعدم فيها الانتقالات **y** لذلك يجب أن تكون طبيعة الاستناد في الجائز البديل تتناسب مع شروط الانتقالات في الجائز الأصلي، حيث تنعدم فيه قيمة العزم ولا تنعدم فيه قيمة القوة القاطعة، لذلك تكون طبيعة الاستناد في هذه الحالة عبارة عن مفصل داخلي، أي المسند البسيط الداخلي في الجائز الأصلي يتحول الى مفصل داخلي في الجائز البديل.

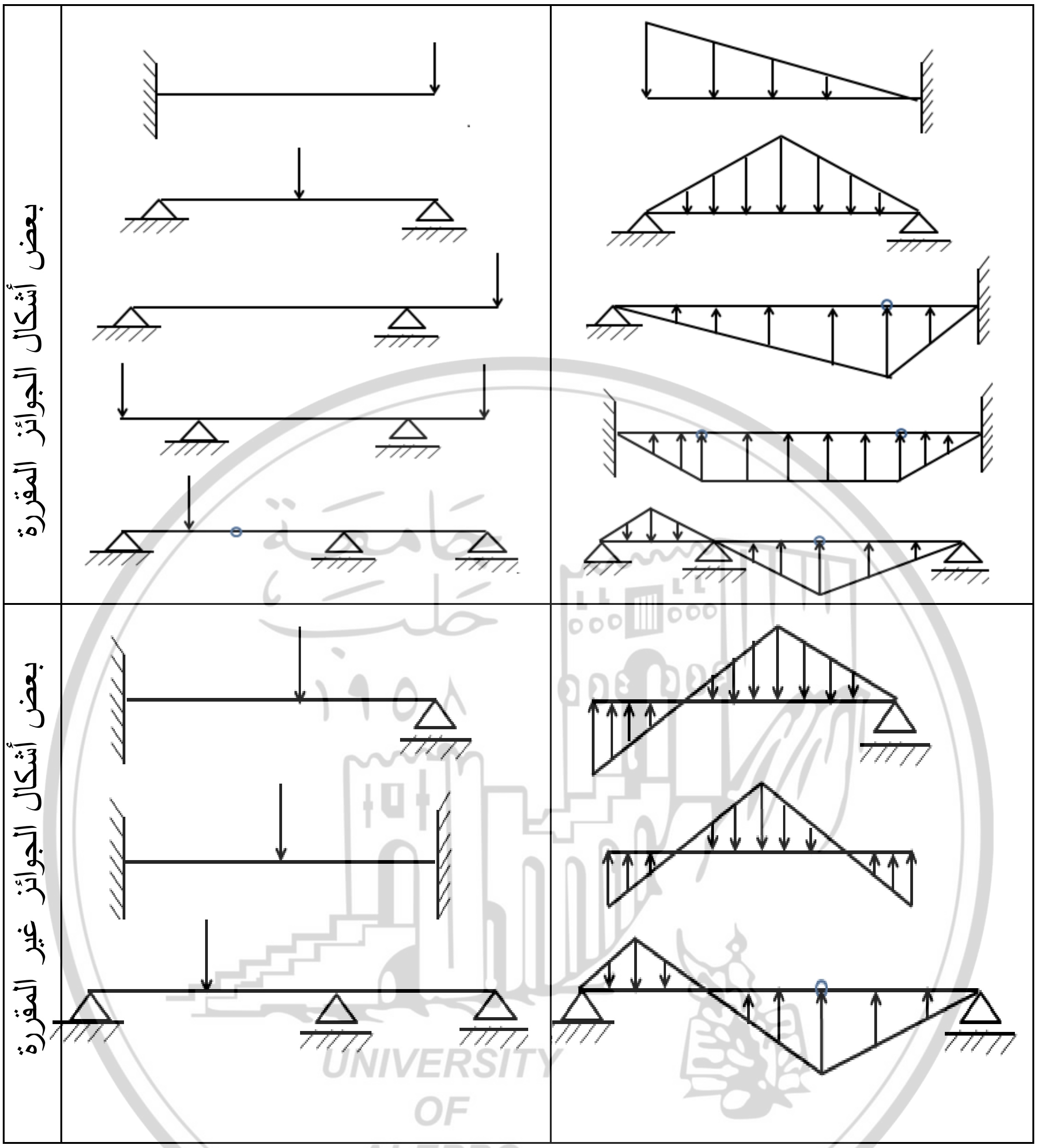
V.المفصل الداخلي Internal Hinge:

يعاني هذا المفصل من انتقال إضافة للدوران، لكن الدوران يمين المفصل لا يساوي إلى الدوران يسار المفصل؛ لذلك يجب أن نبحث عن طبيعة استناد مناسبة للجائز البديل بحيث تكون فيه قيمة معينة لعزم الانعطاف، وقيمة معينة للقوة القاطعة لليمين تختلف عنها في اليسار، وبذلك تكون طبيعة الاستناد في الجائز البديل المقابل للمفصل هو مسند داخلي.



لذلك يمكننا تنظيم الحالات السابقة كما هو مبين في الشكل رقم (٢-٥).

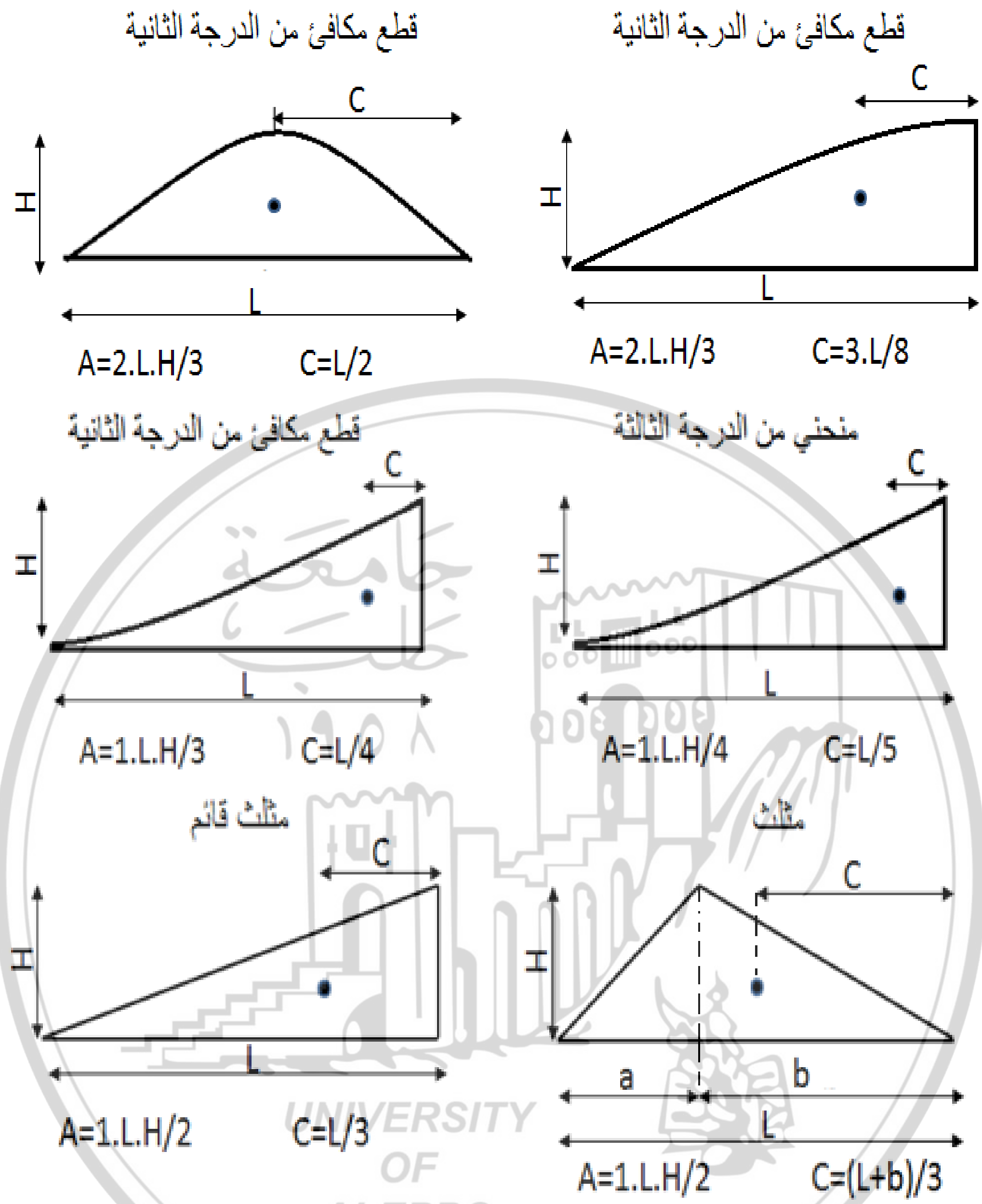
الشروط الهندسية للجائز البديل	الشروط الهندسية للجائز الأصلي	الحدود
القوة القاطعة: T* عزم الانعطاف: M*	الميل أو الدوران: y' الانتقال: y	
		الشروط الحدية
		شروط الاستمرار



الشكل رقم (٢-٥) بعض الحالات المختلفة للجائز البديل

من ملاحظتنا للأشكال السابقة نجد أن الجائز البديل للجوائز المقررة هو جائزاً مقرراً، أما بالنسبة للجمل غير المقررة فيكون الجائز البديل غير مستقر.

ويُمكننا إعطاء بعض المساحات ومراكز الثقل لبعض الأشكال الهندسية التي تصادفنا في معظم الحالات التطبيقية.



الشكل رقم (٢-٦) مساحات ومراكز ثقل بعض الأشكال شائعة الاستعمال

٢-٣-٢ الإجراءات المتبعة في التحليل: Analyzing Procedures

لإيجاد الانتقال أو الدوران بطريقة الجائز البديل نتبع ما يلي:

١) نرسم مخطط عزم الانعطاف الناتج عن القوى الخارجية للجائز الأصلي

٢) نرسم الجائز البديل للجائز الأصلي

٣) نعتبر مخطط عزم الانعطاف مقسوما على EI حمولة وهمية (مرنة) نحمله على الجائز البديل، فإذا كان مخطط عزم الانعطاف موجبا يكون اتجاه الحمولة

المرنة نحو الأسفل.

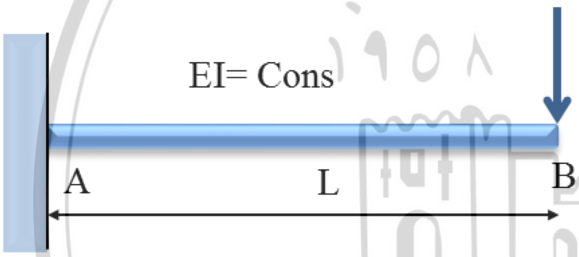
٤) إن القوة القاطعة T^* في أي نقطة من نقاط الجائز البديل يساوي ميل المماس (الدوران) في الجائز الحقيقي

٥) إن عزم الانعطاف M^* في أي نقطة من نقاط الجائز البديل يساوي الانتقال في الجائز الحقيقي

٢-٣-٣ **أمثلة عملية:** Examples

<u>مثال (١)</u>

جائز ظفري يخضع لتأثير حمولة مركزة في النهاية الحرة B طوله L وصلابته الانعطافية EI والمطلوب:



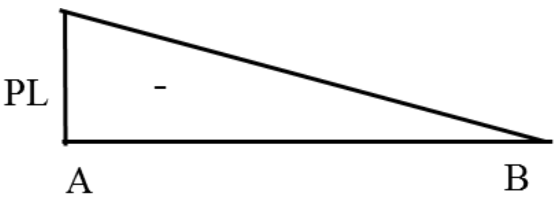
١. حسب قيمة الانتقال والدوران في النهاية الحرة B بطريقة الجائز البديل.

٢. أوجد معادلتي الدوران والانتقال.

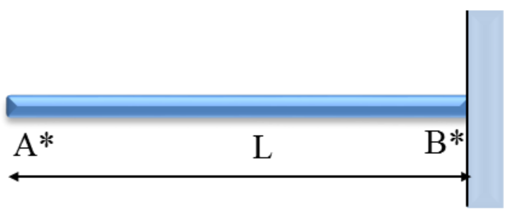
a. نرسم مخطط عزم الانعطاف (تنعدم قيمة عزم الانعطاف في النهاية الحرة لعدم وجود مزدوجة عزم فيه وتكون قيمة عزم الانعطاف في الوثاقة تساوي إلى قيمة عزم الوثاقة).

b. نرسم الجائز البديل للجائز الأصلي.

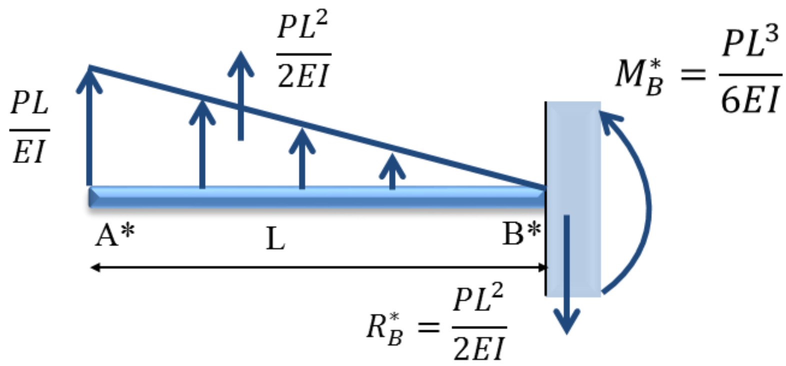
c. نحمل الجائز البديل بمخطط عزم الانعطاف مقسوماً على الصلابة الانعطافية EI (اتجاه التحميل نحو الأعلى لأن مخطط عزم الانعطاف سالب) نفرض إن انتقال النهاية الحرة نحو الأسفل والدوران مع عقارب الساعة، لذلك نفرض اتجاه M^*_B و T^*_B موجبة أيضاً.



<u>**مخطط عزم الانعطاف**</u>



<u>**الجائز البديل**</u>

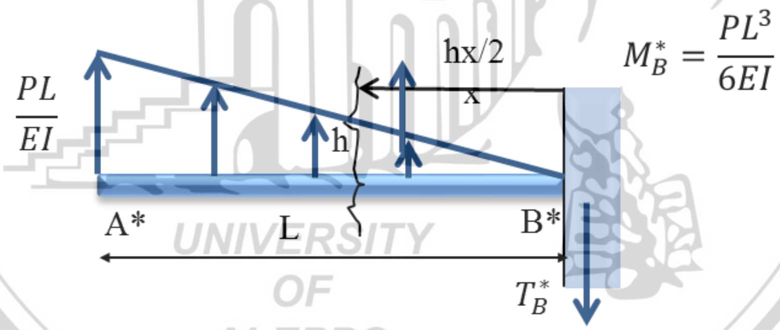


$$\Sigma\, Fy = 0 \quad \Rightarrow TB^* - pl2/2EI = 0 \Rightarrow TB^* = pl2/2EI = y'_B$$

$$\Sigma\, MB^* = 0 \Rightarrow pl2/2EI \cdot 2l/3 - MB^* = 0$$

$$MB^* = pl^3/3EI = y_B$$

لكتابة معادلة الدوران في الجائز الأصلي يمكننا كتابة معادلة القوى القاطعة في الجائز البديل التي تعبر عن معادلة الدوران، لذلك نأخذ مقطعاً يبعد بمقدار (X) عن النهاية الحرة B، من تشابه المثلثات يمكننا إيجاد قيمة (h) التي تعبر عن ارتفاع المثلث h على بعد (X).



$$\frac{p.L}{E.I.h} = \frac{L}{x} \Rightarrow h = \frac{p.x}{E.I}$$

$$T_X^* = T_B^* - \frac{h.x}{2} = \frac{pL^2}{2EI} - \frac{px^2}{2EI} = \mathrm{y'x}$$

وتعبر هذه العلاقة عن معادلة الدوران في الجائز الأصلي، أما لكتابة معادلة الانتقال في الجائز الأصلي نكتب معادلة عزم الانعطاف في الجائز البديل:

$$MX^* = MB^* - TB^*X + \frac{hX}{2} \cdot \frac{X}{3}$$

$$MX^* = \frac{pL^3}{3EI} - \frac{pL^2}{2EI}X + \frac{PX}{EI}\frac{X^2}{6} = y_x$$

وتعبر هذه العلاقة عن معادلة الانتقال في الجائز الأصلي

مثال (٢):

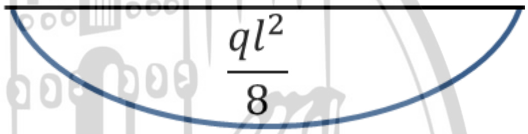
جائز بسيط يخضع لتأثير حمولة موزعة بانتظام شدتها q كما هو مبين في الشكل والمطلوب:

١. احسب قيمة الدوران في المسندين A , B بطريقة الجائز البديل .

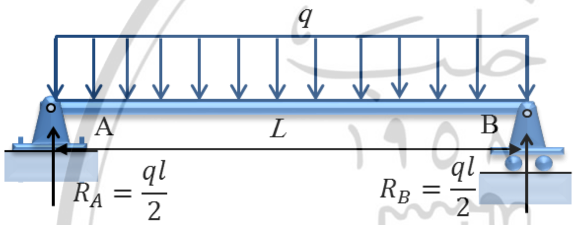
٢. احسب قيمة الدوران والانتقال في المنتصف.

الحل:

a) نوجد ردود الأفعال ونرسم مخطط عزم الانعطاف



مخطط عزم الانعطاف

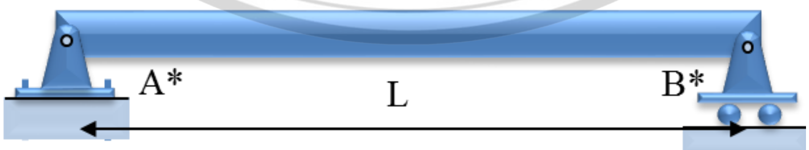


قيم ردود الأفعال

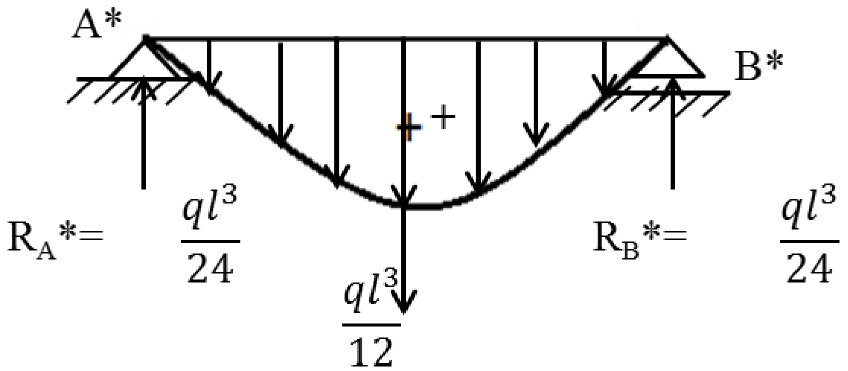
ملاحظة: حول رسم مخطط عزم الانعطاف بشكل مباشر، تنعدم قيمة عزم الانعطاف في المساند البسيطة الخارجية ما لم تخضع لتأثير مزدوجة عزم، ويكون عزم الانعطاف أعظمي في المنتصف ويساوي $\frac{ql^2}{8}$ لأن الجائز متناظر

b) نرسم الجائز البديل للجائز الأصلي

c) نحمل مخطط عزم الانعطاف مقسوماً على EI على الجائز البديل، ونعتبره حمولة وهمية خارجية (اتجاه التحميل للأسفل) مساحة مخطط عزم الانعطاف مقسوماً على EI



$$F^* = \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8EI} \cdot l = \frac{ql^3}{12EI}$$



بما أن الجائز البديل متناظر فان ردود الأفعال متناظرة:

$$RA^* = RB^* = \frac{ql^3}{24EI}$$

الدوران في A (اتجاه دوران رد الفعل حول الجائز، مع عقارب الساعة)

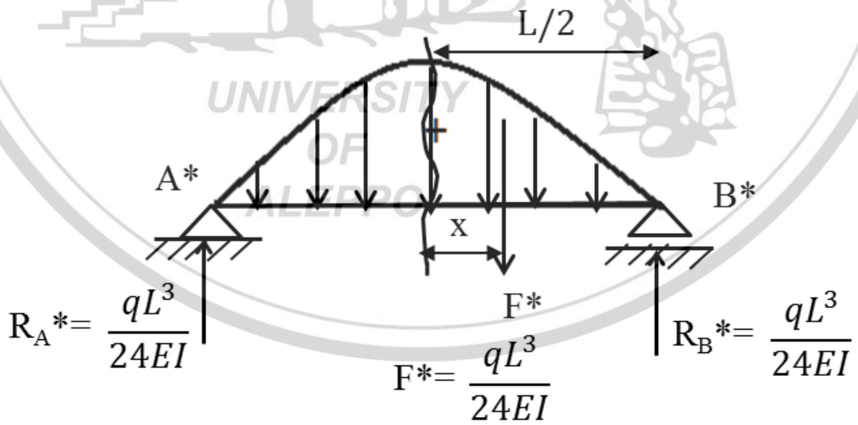
$$RA^* = y'_A = \frac{ql^3}{24EI}$$

والدوران في B (اتجاه دوران رد الفعل حول الجائز أي: عكس عقارب الساعة)

$$RB^* = y'_B = -\frac{ql^3}{24EI}$$

d) حساب الانتقال والدوران في المنتصف:

لحساب الانتقال والدوران في منتصف الجائز الأصلي نوجد قيمة عزم الانعطاف والقوة القاطعة في منتصف الجائز البديل.



$$x = \frac{3}{8}\left(\frac{L}{2}\right)$$

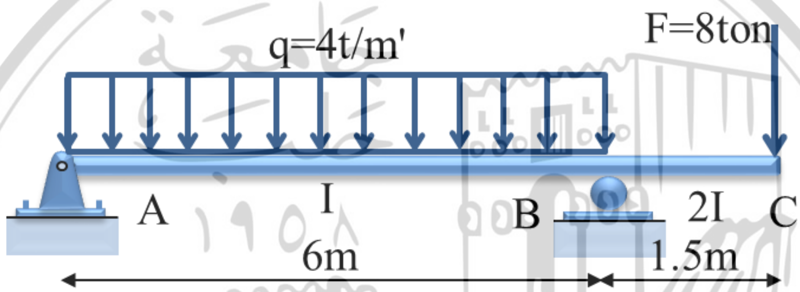
$$T^*{}_m = y'{}_m = \frac{ql^3}{24EI} - \frac{ql^3}{24EI} = 0$$

نتيجة: ينعدم الدوران عند محور التناظر في الجوائز المتناظرة، وبالتالي تكون قيمة الانتقال أعظمية.

$$M^*{}_m = y_m = \frac{ql^3}{24EI}\frac{l}{2} - \frac{ql^3}{24EI}\cdot\frac{3}{8}\left(\frac{l}{2}\right)$$

$$y_m = \frac{ql^4}{48EI} - \frac{ql^4}{128EI} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

مثال (٣): جائز بسيط AB عطالته I ينتهي بظفر BC عطالته 2I يتعرض لتأثير حمولة مركزة في نهايته الحرة (C) شدتها 8 ton وحمولة موزعة بانتظام في المجال AB شدتها 4 t/m'.



والمطلوب: حساب الانتقال والدوران في (C).

يُمكن إيجاد قيمة الانتقال والدوران في (C) بطريقتين:

الطريقة الأولى: بالاعتماد على طريقة التنضد.

الطريقة الثانية: بالاعتماد على كامل الجائز وإجراء عملية التكامل لإيجاد مساحة ومركز ثقل مخطط عزم الانعطاف للجزء AB.

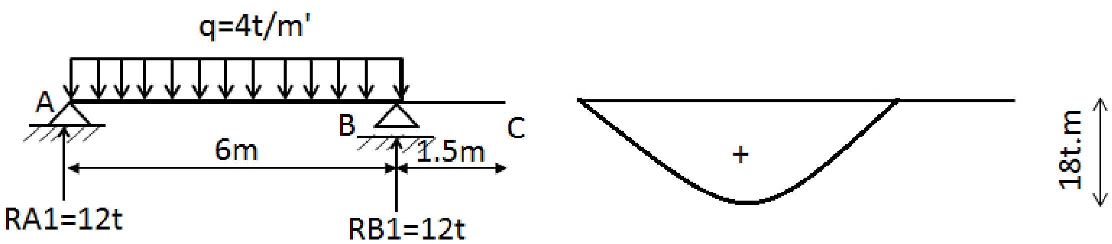
الطريقة الأولى:

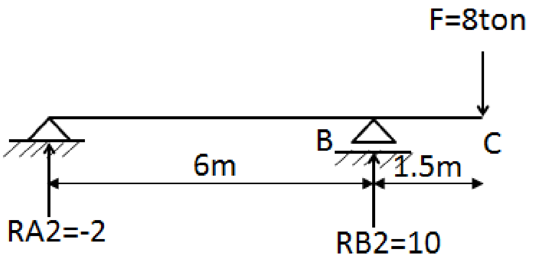
استخدام مبدأ تنضد الآثار أو تجميع الآثار.

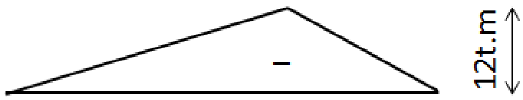
a) رسم مخطط عزم الانعطاف لكل حمولة بشكل مستقل.

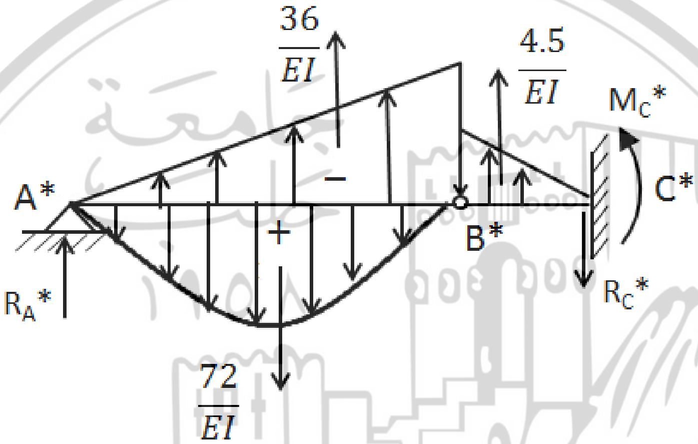
b) نرسم الجائز المرافق للجائز الأصلي.

c) نحمل هذا الجائز بمخطط عزم الانعطاف مقسوماً على EI.









حساب المساحات ومراكز الثقل:

١–المجال A*B* مساحة المثلث

$$-\frac{12}{EI}\times\frac{6}{2}=-\frac{36}{EI}$$ نحو الأعلى

ويبعد مركز ثقله بمقدار 2m عن المفصل B*

مساحة القطع المكافئ

$$+\frac{2}{3}\cdot\frac{18}{EI}\times 6=\frac{72}{EI}$$ نحو الأسفل

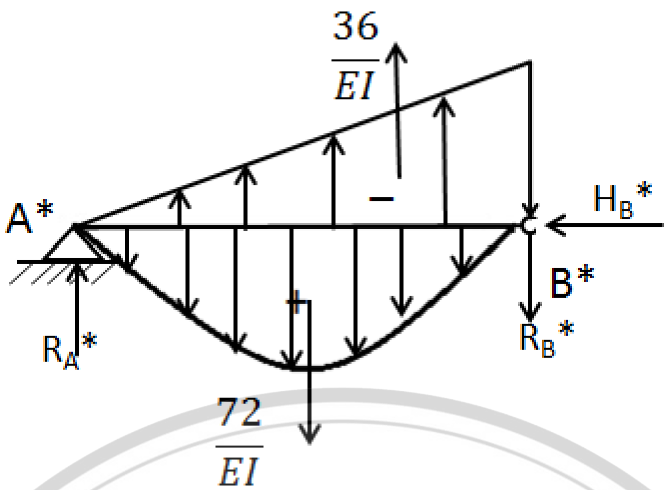
ويبعد مركز ثقله بمقدار 3m عن المفصل B*

٢–المجال B*C*

مساحة المثلث:

$$-\frac{12}{2EI}\times\frac{1.5}{2}=-\frac{36}{EI}$$ نحو الأعلى

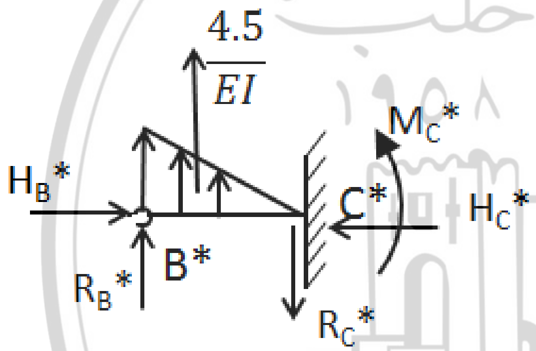
ويبعد مركز ثقله بمقدار 0.5m عن المفصل B*، لنفصل الجزء الأيسر A*B*



$$\Sigma MB^* = 0 \Rightarrow 6\,RA^* + \frac{36}{EI} \times 2 - \frac{72}{EI} \times 3 = 0 \rightarrow \; RA^* = \frac{24}{\text{EI}}$$

$$\Sigma FY = 0 \Rightarrow RA^* - RB^* + \frac{36}{EI} - \frac{72}{EI} = 0 \; \rightarrow RB^* = -\frac{12}{EI}$$

لنفصل الجزء الأيمن B*C* ونعتمد على معادلات التوازن في إيجاد ردود الأفعال للنهاية الحرة C.



$$\Sigma FY = 0 \Rightarrow RB^* + 4.5 - RC^* = 0$$

$$\Rightarrow RC^* = \frac{-12}{EI} + \frac{4.5}{EI}$$

$$RC^* = \frac{-7.5}{\text{EI}} = TC^* = y'c$$

وهي قيمة الدوران في النهاية الحرة (C) والإشارة السالبة تدل على أن الدوران عكس عقارب الساعة.

$$\Sigma MC^* = 0 \Rightarrow \frac{12}{EI} \times 1.5 - \frac{4.5}{EI} \times 1 + MC^* = 0$$

$$MC^* = \frac{-18}{EI} + \frac{4.5}{EI} = \frac{-13.5}{EI} = yc$$

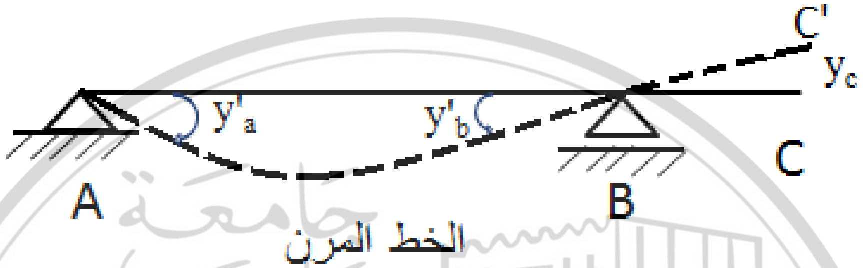
وهي قيمة الانتقال في النهاية الحرة (C) والإشارة السالبة تدل على أن الانتقال نحو الأعلى

رسم الخط المرن بالاعتماد على القيم المحسوبة، من المسألة نجد أن:

١. الدوران في A موجب أي أن النقطة A تدور مع عقارب الساعة إضافة أنها معدومة الانتقال.

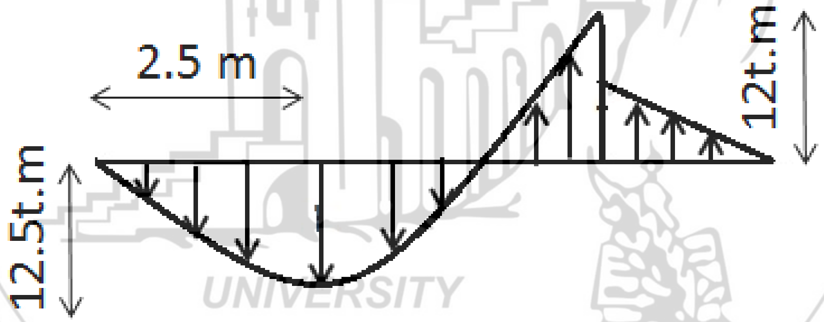
٢. الدوران في B سالب عكس عقارب الساعة،

٣. أما النهاية الحرة (C) فإنها تدور عكس عقارب الساعة، وتنتقل نحو الأعلى لذلك يمكننا رسم الخط المرن بالاعتماد على المعطيات السابقة.



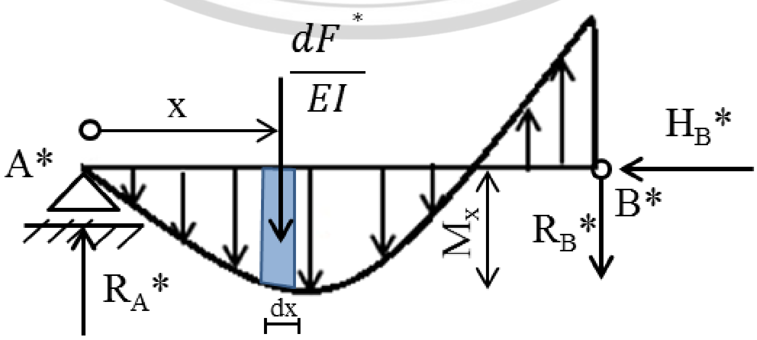
الطريقة الثانية:

بالاعتماد على كامل الجائز وإجراء عملية التكامل لحساب مساحة ومركز ثقل الجزء المحصور بين المسندين A و B لمخطط عزم الانعطاف.



نأخذ شريحة تبعد بمقدار (X) عن المسند A^* (وهو نفس الإحداثي المكتوب بدلالته معادلة عزم الانعطاف) كما هو مبين في الشكل التالي.

$$6 \geq x \geq 0 \quad M = 10x - 2x^2$$



مساحة هذه الشريحة $dF^* = M_x \cdot d_x$

وبالتالي تكون مساحة الشكل الكلية:

$$\frac{F^*}{EI} = \int_0^6 \frac{M_x \cdot d_x}{EI}$$

حيث تكون مساحة الشريحة موجبة دائماً (اتجاه التحميل نحو الأسفل).

$$\Sigma MB^* = 0 \Rightarrow RA^* \cdot 6 - \int_0^6 \frac{dF^*}{EI}(6-x) = 0$$

$$6RA^* - \frac{1}{EI}\int_0^6 M_x \cdot d_x . (6-x) = 0$$

$$6RA^* - \frac{1}{EI}\int_0^6 (10x - 2x^2)(6-x)dx = 0$$

$$6RA^* = \frac{1}{EI}\int_0^6 (60x - 10x^2 - 12x^2 + 2x^3)dx$$

$$6\,RA^* = \frac{1}{EI}\left[60\frac{x^2}{2} - 22\frac{x^3}{3} + \frac{2x^4}{4}\right]_0^6$$

$$6RA^* = 30 \times 36 - 22\frac{6^3}{3} + 2\frac{6^4}{4}$$

$$RA^* = \frac{+180 - 264 + 108}{EI} = \frac{+24}{EI} = y'_A$$

$$\Sigma\, Fy = 0 \Rightarrow RA^* + RB^* - \int_0^6 \frac{dF^*}{EI} = 0$$

$$\frac{24}{EI} + RB^* - \int_0^6 \frac{M_x \cdot d_x}{EI} = 0$$

$$RB^* = \frac{1}{EI}\int_0^6 (10x - 2x^2)dx - \frac{24}{EI}$$

$$RB^* = \frac{1}{EI}\left[\frac{10\,x^2}{2} - \frac{2\,x^3}{3}\right]_0^6 - \frac{24}{EI}$$

$$RB^* = \frac{1}{EI}[180 - 144] - \frac{24}{EI} = \frac{12}{EI}$$

أما الجزء الأيمن فيتم حسابه كما مر معنا في المرحلة السابقة.

٢-٤ طريقة عزم المساحة Moment Area Method:

الغاية من هذه النظرية: حساب الانتقال والدوران في الجوائز المقررة أو حساب المجاهيل الفائضة في الجمل غير المقررة؛ وتعتمد هذه النظرية على جملة المحاور الإحداثية الواردة في الجائز البديل، تتألف هذه النظرية من علاقتين.

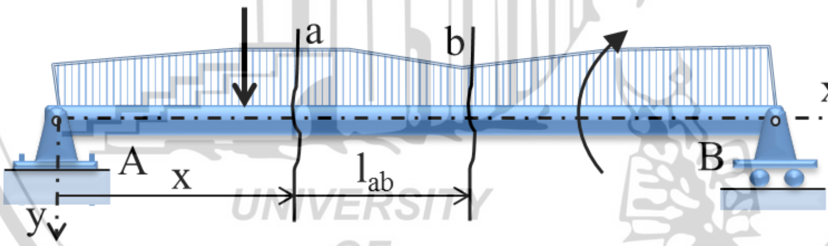
٢-٤-١ العلاقة الأولى :(علاقة الدوران النسبي): Rotation Equation

نص العلاقة الأولى: الدوران النسبي بين مقطعين يساوي إلى مساحة مخطط عزم الانعطاف بين هذين المقطعين مقسوما على الصلابة الانعطافية EI مسبوقا بإشارة سالبة، مع أخذ إشارة المخطط بعين الاعتبار.

الاستنتاج النظري لهذه العلاقة:

لدينا الجائز AB المبين في الشكل (٢-٧) لنوجد قيمة الدوران والانتقال في مقطعين الأول a يبعد بمقدار x عن المسند A، والمقطع الثاني b يبعد بمقدار ($x + l_{ab}$).

لنوجد قيمة الانتقال والدوران باستخدام نظرية الجائز البديل، نرسم مخطط عزم الانعطاف لهذا الجائز، ونأخذ الجزء الواقع بين هذين المقطعين والموضح في الشكل رقم (٢-٨).



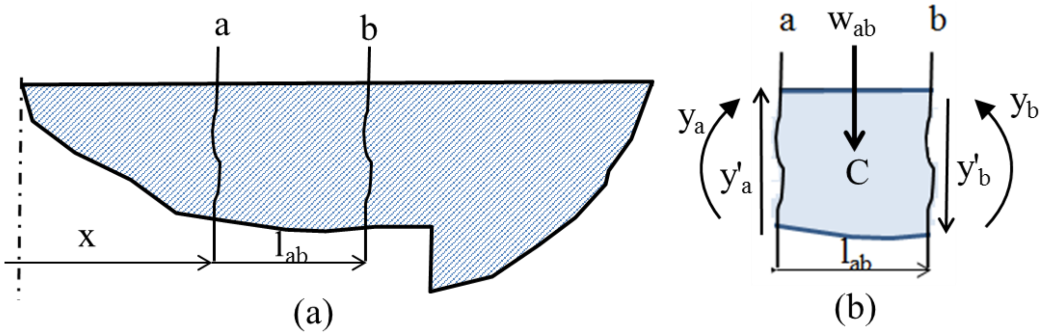
الشكل رقم (٢-٧)

بفرض أن (w_{ab}) تعبر عن مساحة مخطط عزم الانعطاف للمساحة الواقعة بين المقطعين a وb مقسومة على الصلابة الانعطافيةEI، وأن مركز ثقلها هو(C)، بتطبيق معادلة التوازن الأولى.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow y'_a - y'_b - w_{ab} = 0$$

$$(2-9) \qquad \boldsymbol{y'_b - y'_a = -w_{ab}}$$

وتعبر هذه المتراجحة عن العلاقة الأولى لعزم المساحة والتي يمكن صياغتها على النحو التالي:



الشكل رقم (٢-٨)

النتيجة: الدوران النسبي بين مقطعين من الجائز يساوي إلى مساحة مخطط عزم الانعطاف بين هذين المقطعين مقسوماً على الصلابة الانعطافية EI مسبوقاً بإشارة سالبة. أو بتعبير آخر: دوران المقطع اليميني مطروحاً منه دوران المقطع اليساري يساوي إلى مساحة مخطط عزم الانعطاف بين هذين المقطعين مقسوماً على الصلابة الانعطافية EI مسبوقاً بإشارة سالبة مع أخذ إشارة مخطط عزم الانعطاف بعين الاعتبار.

٢-٤-٢ العلاقة الثانية :(علاقة الانتقال النسبي) Displacement Equation

نص العلاقة الثانية: الانتقال النسبي بين مقطعين يساوي إلى دوران المقطع الأيسر مضروباً بالمسافة بين المقطعين مطروحاً منه مساحة مخطط عزم الانعطاف بين هذين المقطعين مقسوماً على EI في بعد مركز ثقله عن المقطع الأيمن.

الاستنتاج النظري لهذه العلاقة:

بأخذ مجموع العزوم حول النقطة b من الشكل (٢-٨) نجد:

$$\Sigma Mb = 0 \Rightarrow y_a + y'_a \cdot l_{ab} - w_{ab} \cdot C_b - y_b = 0$$

$$(2-10) \qquad \boldsymbol{y_b - y_a = y'_a \cdot l_{ab} - w_{ab} \cdot C_b}$$

النتيجة: الانتقال النسبي بين مقطعين أو انتقال المقطع الأيمن مطروحاً منه انتقال المقطع الأيسر يساوي إلى دوران المقطع الأيسر مضروباً بالمسافة بين المقطعين مطروحاً منه مساحة مخطط عزم الانعطاف بين هذين المقطعين مقسوماً على الصلابة الانعطافية EI مضروبا ببعد مركز ثقله عن المقطع الأيمن، مع الأخذ بعين الاعتبار إشارة مخطط عزم الانعطاف.

٢-٤-٣ إجراءات التحليل: Analyzing Procedures

لإيجاد الانتقال والدوران لمقطع باستخدام علاقة عزم المساحة نتبع الخطوات التالية:

١. نرسم مخطط عزم الانعطاف لكامل الجائز، وإذا كان هذا المخطط معقداً يمكننا أن نلجأ إلى طريقة تنضد الآثار.

٢. نبدأ أولاً من مقاطع معروفة الدوران أو الانتقال أو كليهما معا (نبدأ أولاً من المساند).

٣. في حال تطبيق العلاقة الأولى أو الثانية يجب أن تحتوي كل علاقة من هاتين العلاقتين على مجهول واحد.

٤. يجب تطبيق هذه المعادلات في المجالات المستمرة، أما في حال وجود انقطاع في الخط المرن (وجود مفصل أو تغير في مسار محور الجائز) فنجزئ المعادلة.

٢-٤-٤ أمثلة عملية محلولة: Examples

مثال (١): جائز ظفري يخضع لتأثير حمولة مركزة في النهاية الحرة B طوله L وصلابته الانعطافية EI والمطلوب:

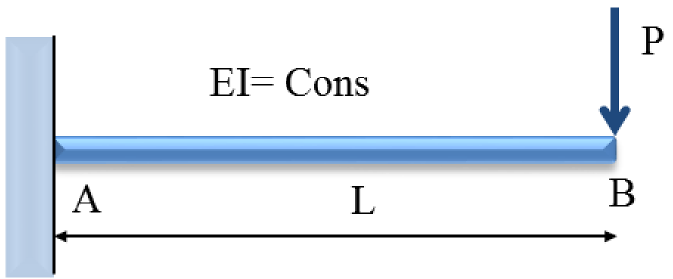
١-حسب قيمة الانتقال والدوران في النهاية الحرة B بطريقة عزم المساحة.

٢ -أوجد معادلتي الدوران والانتقال.

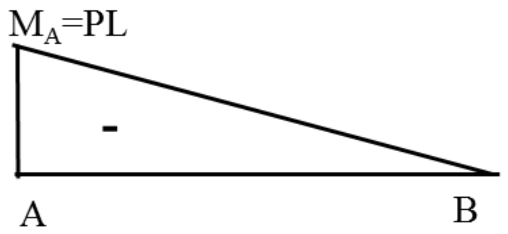
أولاً: حساب الدوران في B

لحساب الدوران في B نرسم مخطط عزم الانعطاف ونحسب مساحته

$$W_{AB} = -\frac{pl \cdot l}{2EI} = -\frac{pl^2}{2EI}$$



مخطط عزم الانعطاف



$$y'_B - y'_A = -W_{AB}$$

بما أن A وثاقة فإن $y'_A = 0$

$$y'_B = -\left[-\frac{pl^2}{2EI}\right] = \frac{pl^2}{2EI}$$

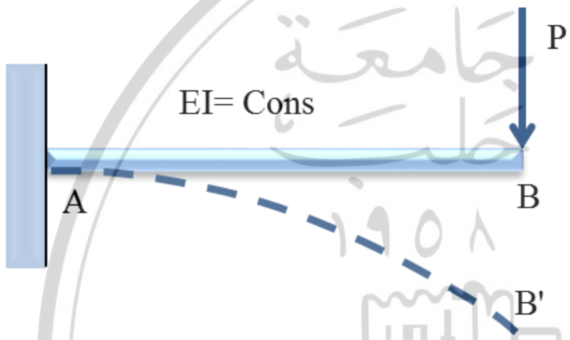
ثانياً: حساب الانتقال الشاقولي في B

$$y_b - y_a = y'_a \cdot l_{ab} - w_{ab} \cdot C_b$$

بما أن المسند A هو مسند موثوق فإن: $y_a = y'_a = 0$

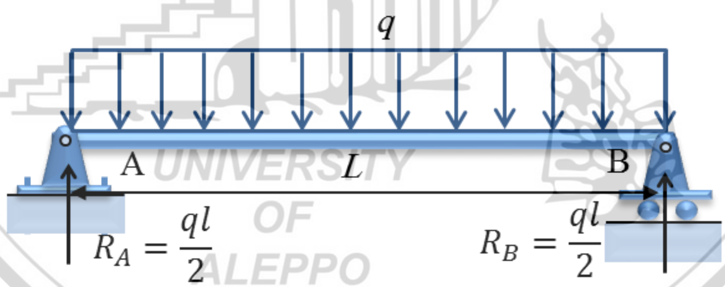
$$y_b = -\left[-\frac{pl^2}{2EI}\frac{2l}{3}\right] = \frac{pl^3}{3\,EI}$$

رسم الخط المرن: تنعدم قيمة الانتقال والدوران في الوثاقة، أما في النهاية الحرة فإن قيمة الدوران موجبة (أي تدور النهاية الحرة مع عقارب الساعة)، والانتقال الموجب (نحو الأسفل).



مثال (٢):

جائز بسيط يخضع لتأثير حمولة موزعة بانتظام شدتها q كما هو مبين في الشكل

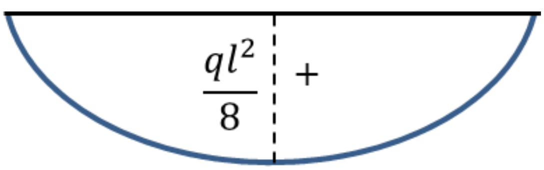


والمطلوب:

١) احسب قيمة الدوران في المسندين A , B بطريقة عزم المساحة .

٢) احسب قيمة الدوران والانتقال في المنتصف.

نرسم مخطط عزم الانعطاف



a) حساب الدوران في المساند A, B

لا يمكننا تطبيق معادلة الدوران مباشرة بين المسندين B، Aلأنها تحتوي على مجهولين.

$$y'_B - y'_A = -W_{AB}$$

وبما أن قيمة الانتقال في المساند معلومة فنطبق العلاقة الثانية لعزم المساحة

$$y_b - y_a = y'_a \cdot l_{ab} - w_{ab} \cdot C_b$$

بما أن المساند لا تعاني من انتقال شاقولي فإن

$$y_b = y_a = 0$$

وتصبح المعادلة

$$y'_a \cdot l_{ab} = w_{ab} \cdot C_b$$

حيث:

$$w_{ab} = \frac{2}{3}\frac{ql^2}{8}\frac{.l}{EI} = \frac{ql^3}{12\,EI} \quad , \quad C_b = \frac{l}{2}$$

$$y'_a = \frac{ql^3}{12\,EI}\frac{l}{2} \Rightarrow y'_a = \frac{ql^3}{24\,EI}$$

بعد إيجاد قيمة الدوران y'_a في المسند A يمكننا استخدام العلاقة الأولى لعزم المساحة لإيجاد الدوران فيB:

$$y'_B - y'_A = -W_{AB}$$

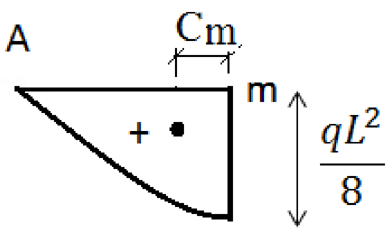
$$y'_B = y'_A - W_{AB} = \frac{ql^3}{24\,EI} - \frac{ql^3}{12\,EI} = -\frac{ql^3}{24\,EI}$$

والنتيجة:

قيمة دوران المقاطع المتناظرة في الجوائز المتناظرة تكون متناظرة عكسياً (متساوية في القيمة ومختلفة في الإشارة).

b) حساب الانتقال والدوران في المنتصف:

بما أن قيمة y'_B و y'_A معلومتان، نأخذ مقطعين أحدهما في A أو B والآخر في منتصف الجائز m



لنكتب العلاقة الأولى لعزم المساحة بين المقطعين A و m

$$y'_m - y'_A = -W_{Am}$$

$$W_{Am} = \frac{2}{3}\frac{ql^2}{8}\frac{l}{2\,EI} = \frac{ql^3}{24\,EI}$$

$$C_m = \frac{3(l/2)}{8} = \frac{3\,l}{16}$$

$$y'_m = y'_A - W_{Am} = \frac{ql^3}{24\,EI} - \frac{ql^3}{24\,EI} = 0$$

النتيجة: تنعدم قيمة الدوران عند محور التناظر للجوائز المتناظرة.

أما من أجل حساب الانتقال في المنتصف فنطبق العلاقة الثانية لعزم المساحة:

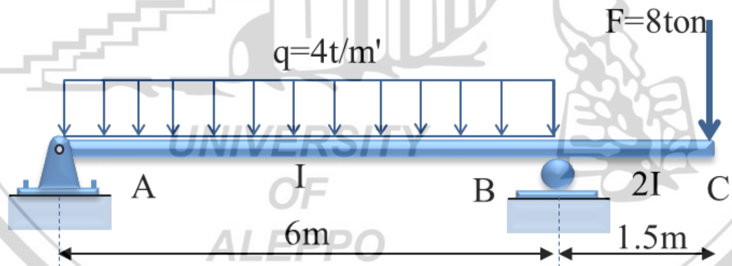
$$y_m - y_a = y'_a \cdot l_{am} - w_{am} \cdot C_m$$

$$y_a = 0 \Rightarrow y_d = \frac{ql^3}{24\,EI}\frac{l}{2} - \frac{ql^3}{24EI}\frac{3l}{16} = \frac{ql^4}{48\,EI} - \frac{3\,ql^4}{384\,EI} = \frac{5\,ql^4}{384\,EI}$$

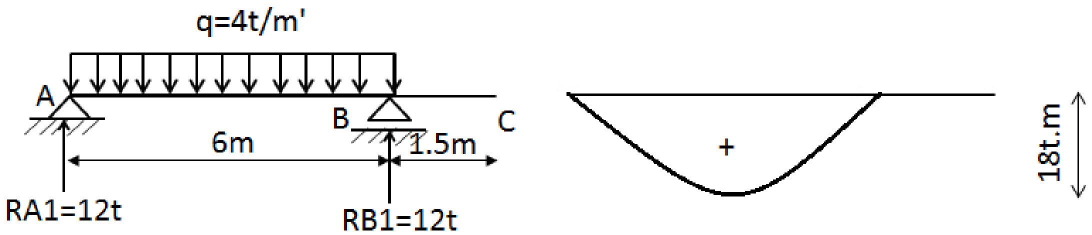
مثال (٣):

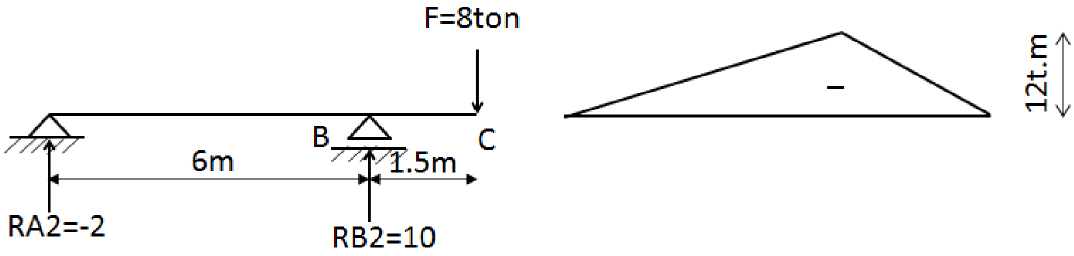
جائز بسيط AB عطالته I ينتهي بظفر BC عطالته 2I يتعرض لتأثير حمولة مركزة في نهايته الحرة (C)شدتها 8 t.m وحمولة موزعة بانتظام في المجال AB شدتها 4 t/m'.

والمطلوب: حساب الانتقال والدوران في النهاية الحرة (C).



لإيجاد نقطة الانتقال والدوران في النقطة (C) نرسم مخطط عزم الانعطاف ونقسمه على EI بالاعتماد على مبدأ تنضد الآثار.



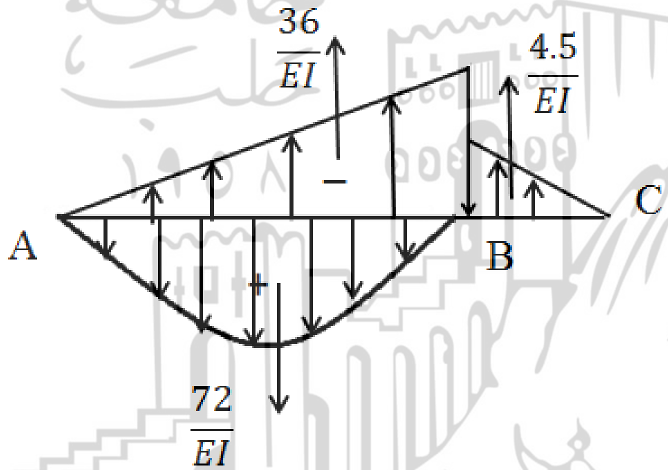


حساب المساحات ومواقع مراكز الثقل:

$$W_{AB1} = -\frac{36}{EI} \quad , \quad C_{1B} = 2 \qquad C_{1c} = 3.5$$

$$W_{AB2} = +\frac{72}{EI} \quad , \quad C_{2B} = 3 \qquad C_{2c} = 4.5$$

$$W_{BC} = -\frac{4.5}{EI} \quad C_c = 1$$



لإيجاد قيمة دوران المقطع (C) نأخذ مقطعاً عند C وB، ونطبق العلاقة الأولى لعزم المساحة:

$$y'_C - y'_B = -W_{BC}$$

تحتوي هذه العلاقة على مجهولين هما: y'_C و y'_B

باستخدام العلاقة الثانية لعزم المساحة:

$$y_c - y_B = y'_B \cdot l_{BC} - w_{BC} \cdot C_C$$

تحتوي هذه العلاقة على مجهولين أيضاً هما: y_c و y'_B

وبذلك أصبحت هاتان العلاقتان تحتويان على ثلاثة مجاهيل هم: y_c و y'_c و y'_b

لذلك يجب أن نبدأ من المسندين A و B لأن انتقالهما معدوم أي : y_a=y_b=0

لذلك نطبق العلاقة الثانية: بين المقطعين A و B

$$y_B - y_A = y'_A \cdot l_{AB} - w_{AB} \cdot C_B$$

$$W_{AB}.C_B = W_{AB1} \times C_{1B} + W_{AB2} + C_{2B}$$

$$0-0=y'_A\cdot 6-\left[-\frac{36}{EI}\times 2+\frac{72}{EI}\times 3\right]$$

$$y'_A=\frac{-12+36}{EI}=\frac{24}{EI}$$

بعد إيجاد قيمة الدوران y'_A يمكننا تطبيق العلاقة الأولى بين المقطعين C و A مباشرة لإيجاد قيمة الدوران في المقطع C :

$$y'_C-y'_A=-W_{AC}$$

$$y'_C=y'_A-[w_{AB1}+w_{AB2}+w_{BC}]$$

$$y'_C=\frac{24}{EI}-\left[\frac{-36+72-4.5}{EI}\right]=\frac{-7.5}{EI}$$

حساب الانتقال الشاقولي في المقطع C:

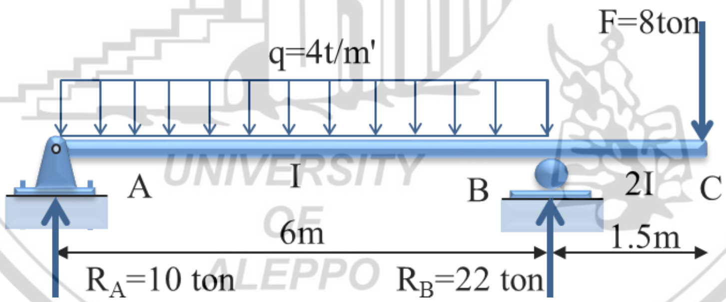
$$y_C-y_A=y'_A\cdot l_{AC}-w_{AC}\cdot C_C$$

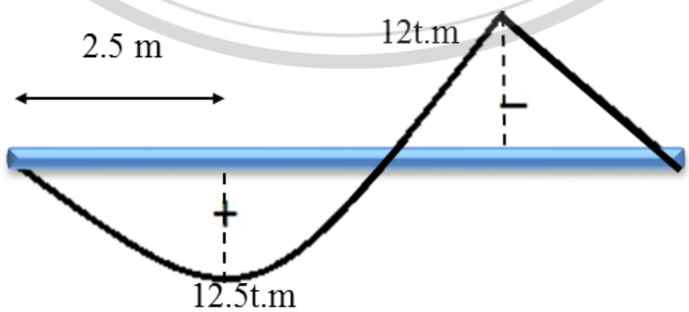
$$y_C=y'_A\cdot l_{AC}-[w_{AB1}\times C_C+w_{AB2}\times C_C+w_{BC}\times C_C]$$

$$y_C=\frac{24}{EI}(6+1.5)-[\frac{-36}{EI}\times 3.5+\frac{72}{EI}\times 4.5-\frac{4.5}{EI}\times 1]$$

$$Yc=\frac{180}{EI}-\left[-\frac{126}{EI}+\frac{324}{EI}-\frac{4.5}{EI}\right]=\frac{-13.5}{EI}$$

يمكن إيجاد مساحة وموقع مركز ثقل المخطط بين المقطعين A وB بإجراء التكامل لمعادلة عزم الانعطاف لهذا المجال.





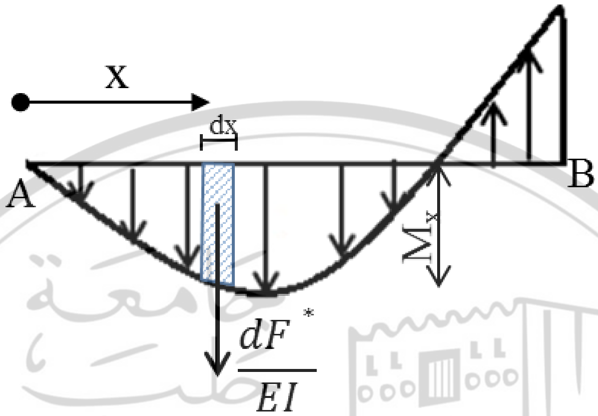
مساحة هذه الشريحة $dF^*=M_x\cdot d_x$

وبالتالي تكون مساحة الشكل الكلية:

$$M = 10x - 2x^2$$

$$\frac{F^*}{EI} = \int_0^6 \frac{dF^*}{EI} = \int_0^6 \frac{M_x \cdot d_x}{EI}$$

$$F^* = \int_0^6 (10x - 2x^2)dx$$



$$F^* = \left[10\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3}\right]_0^6 = 180 - 144 = 36$$

$$C_A = \int_0^6 \frac{dF^*}{dF^*}(x) = \int_0^6 \frac{(10x - 2x^2)(x)dx}{(10x - 2x^2)dx}$$

$$C_A = \int_0^6 \frac{(10x^2 - 2x^3)dx}{(10x - 2x^2)dx} = \frac{\left[10\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4}\right]_0^6}{36} = \frac{720 - 648}{36} = 2$$

يمكننا التأكد من أن المساحة الناتجة عن التكامل تساوي إلى مجموع مساحة المثلث والقطع المكافئ الناتجتين عن استخدام مبدأ تنضد الآثار في المجال AB في الطريقة السابقة:

$F^* =$ مساحة المثلث – مساحةالقطع المكافئ $= 72 - 36 = 36$

وكذلك موقع مركز الثقل والذي يساوي:

$$C_A = \frac{\text{مجموع العزوم الستاتيكية للمساحات الواقعة في المجال AB بالنسبة للمسند A}}{\text{مجموع المساحات الواقعة في المجال AB}}$$

$$C_A == \frac{72 \times 3 - 36 \times 4}{36} = \frac{216 - 144}{36} = 2$$

الفصل الثالث

طريقة القوى الوهمية في تحليل الجمل غير المقررة

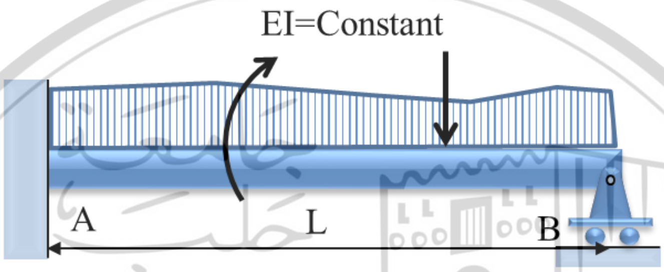
Indeterminate Structures - Virtual Force Method

٣-١مقدمة: Preface

تحتوي الجمل غير المقررة على ردود أفعال فائضة (مجاهيل) لا يمكن إيجادها بالاعتماد على معادلات التوازن، لذلك سوف نعتمد على نظرية القوى الوهمية (الجائز البديل) بالاستفادة من قيم الانتقالات والدورانات لنقاط معينة في إيجاد المجاهيل الفائضة.

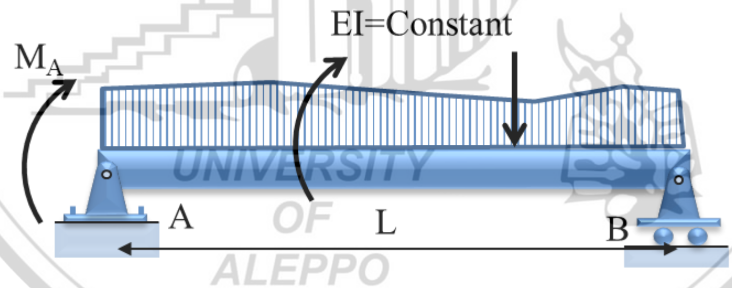
٣-٢: الجائز الموثوق والمسنود Fixed End Beam

٣-٢-١ جائز موثوق ومسنود يتعرض لتأثير حمولات خارجية فقط.



الشكل (٣-١) الجائز الموثوق والمسنود

هذا الجائز غير مقرر من الدرجة الأولى لذلك نقرر هذا الجائز بحذف الممانعة الفائضة (الممانعة الدورانية)، وتعويض بدلاً منها برد فعلها لذلك سوف نستبدل الوثاقة بمسند ثابت وعزم موجب MA (شد ألياف سفلية) كما هو مبين في الشكل رقم (٣-٢)



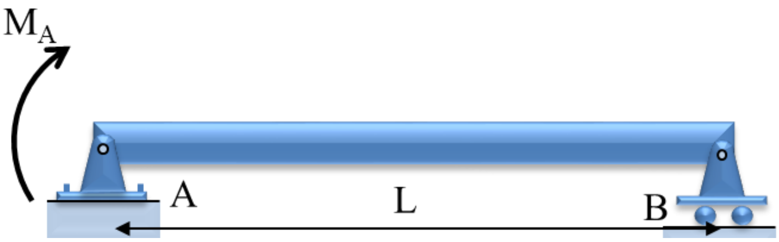
الشكل رقم (٣-٢)

نعتمد على نظرية الجائز البديل في إيجاد عزم الوثاقة الفائض (MA) باستخدام مبدأ تنضد الآثار في تحليل هذا الجائز الذي يتم تقسيمه إلى جائزين.

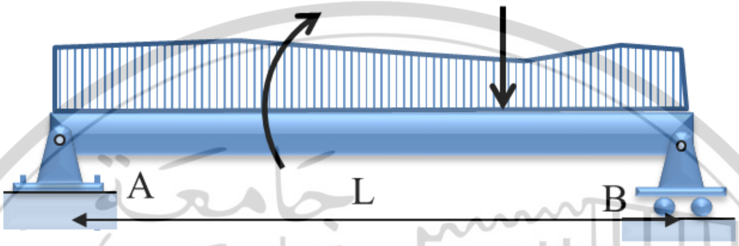
جائز أول: يتعرض لتأثير مزدوجة عزم MA تؤثر في المسند A كما هو مبين في الشكل رقم (٣-٣).

وجائز ثاني: يتعرض لتأثير الحمولات الخارجية فقط كما هو مبين في الشكل رقم (٣-٤).

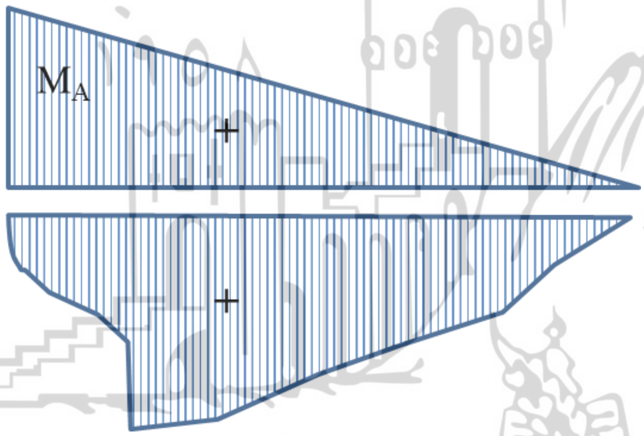
نرسم مخطط عزم الانعطاف لكل جائز هو مبين في الشكل رقم (٣-٥).



الشكل رقم (٣-٣)



الشكل رقم (٣-٤)



الشكل رقم (٣-٥)

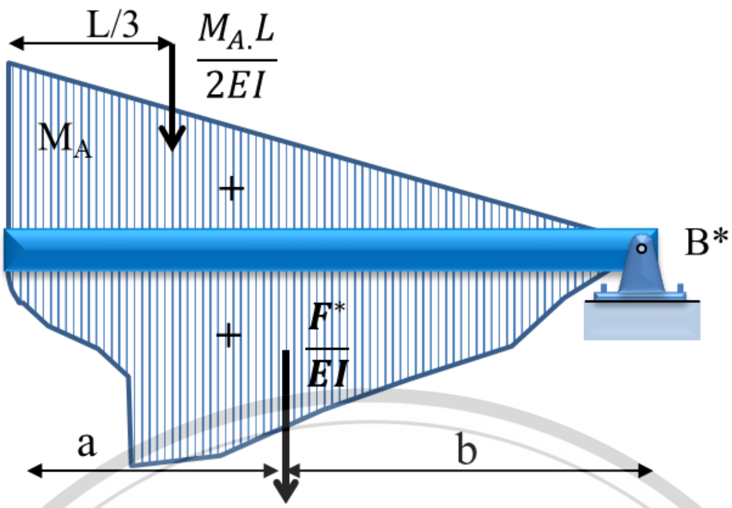
ونرسم الجائز البديل للجائز الأصلي ونحمله بمخطط عزم الانعطاف مقسوماً على EI والموضح في الشكل رقم (٣-٦).

$$\Sigma MB^{*} = 0 \Rightarrow \frac{MA\, l}{2EI}\frac{2l}{3} + \frac{F^{*}}{EI} \times b = 0$$

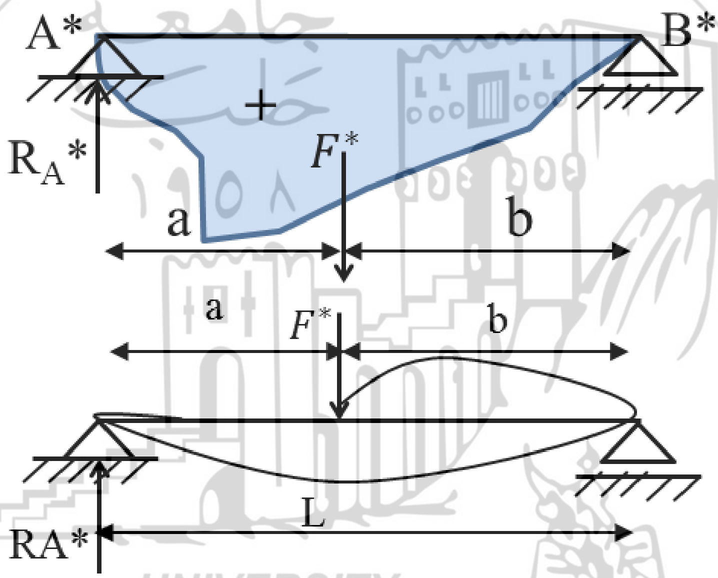
بحذف EI وبالتقسيم علىL نجد أن:

$$\frac{MA\, l}{3} = -\frac{F^{*} \cdot b}{l}$$

لكن الحد $\frac{F^{*} \cdot b}{l}$ يعبر عن رد الفعل RA^{*} لجائز بسيط محمل بمخطط عزم الانعطاف الناتج عن الحمولات الخارجية فقط والموضح في الشكل رقم (٣-٧).



الشكل رقم (٣-٦)



الشكل رقم (٣-٧)

لذلك يمكننا كتابة العلاقة السابقة على الشكل:

$$(3-1) \qquad MA = \frac{-3}{l} RA^*$$

بعد أن أوجدنا قيمة عزم الوثاقة MA أصبح هذا الجائز مقرراً حيث يمكننا إيجاد ردود أفعاله باستخدام معادلات التوازن ورسم مخططات القوى الداخلية.

<u>إجراءات التحليل</u>:Analyzing Procedures

لإيجاد عزم الوثاقة لجائز موثوق ومسنود يتعرض لتأثير الحمولات الخارجية فقط نتبع ما يلي:

١. نرسم جائزا بسيطا محملا بالحمولات الخارجية فقط.

٢. نرسم مخطط عزم الانعطاف لهذا الجائز البسيط المعرض لتأثير الحمولات الخارجية فقط.

- إذا كان مخطط عزم الانعطاف الناتج عن الحمولات الخارجية فقط معقداً يمكننا الاعتماد على مبدأ تنضد الآثار أو إجراء عملية التكامل.

٣. نعتبر مخطط عزم الانعطاف الناتج عن الحمولات الخارجية عبارة عن حمولة وهمية خارجية محملة على جائز بسيط .

- إذا كان مخطط عزم الانعطاف موجبا فهذا يعني أن اتجاه التحميل نحو الأسفل.

٤. نوجد رد الفعل الناتج عن الحمولة المرنة حيث نفرضه موجباً باتجاه الأعلى.

٥. نعوض قيمة رد الفعل المرن RA^* بإشارته في العلاقة فنحصل على قيمة عزم الوثاقة في المسند A.

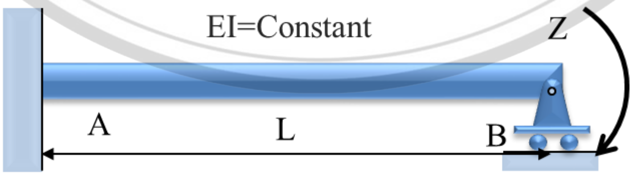
$$MA = \frac{-3}{l} RA^*$$

أمثلة عملية:Examples

مثال (١): جائز موثوق ومسنود يتعرض لتأثير مزدوجة عزم Z تؤثر في المسند B. المطلوب:

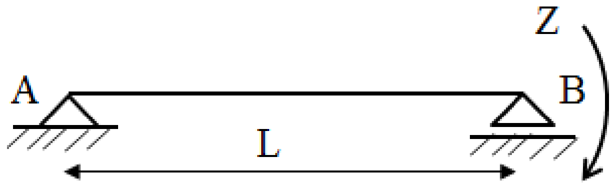
١. حساب عزم الوثاقة في A،

٢. رسم مخطط القوى القاطعة وعزم الانعطاف.



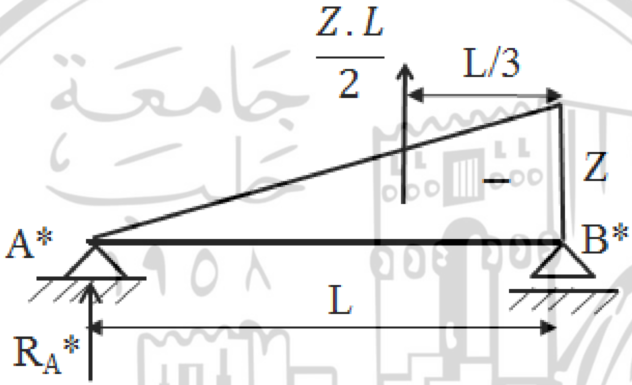
الحل:

– نرسم جائزا مقررا ونحمله بالحمولات الخارجية فقط.



– نرسم مخطط عزم الانعطاف لهذا الجائز.

– نعتبر مخطط عزم الانعطاف حمولة وهمية خارجية محملة على جائز بسيط.



$$\Sigma MB^* = 0 \Rightarrow RA^* \cdot l + \frac{Zl}{2}\frac{l}{3} = 0$$

$$RA^* = -\frac{zl}{6}$$

– نعوض قيمة RA^* في علاقة الجائز الموثوق والمسنود .

$$MA = \frac{-3}{l}RA^* = \frac{-3}{l}\left(\frac{-zl}{6}\right) = +\frac{Z}{2}$$

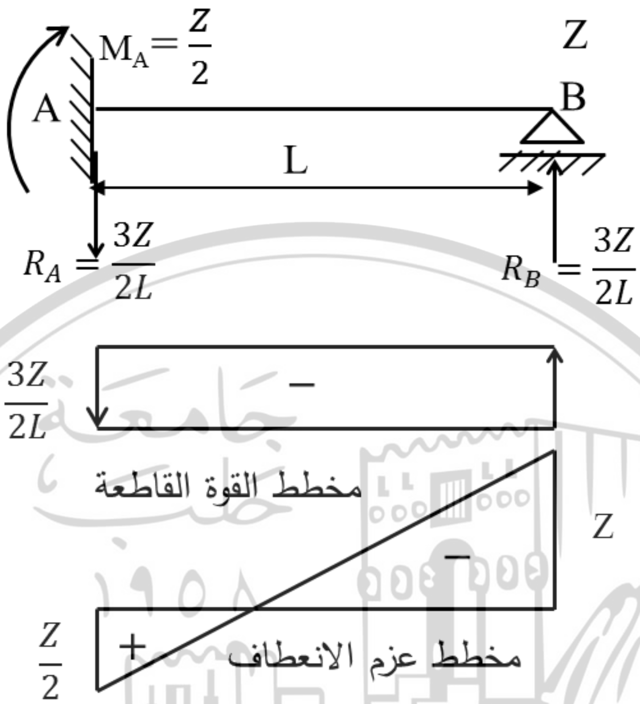
النتيجة:

قيمة عزم الوثاقة لجائز موثوق ومسنود يخضع لتأثير مزدوجة عزم تؤثر في المسند، يساوي إلى (1/2) العزم المطبق في المسند ويدور معه بنفس الاتجاه.

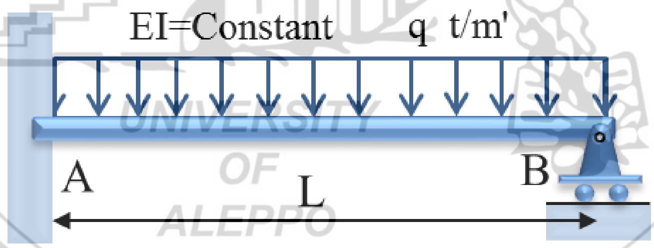
– إيجاد ردود الأفعال:

بما أن الجائز يخضع لتأثير مزدوجة عزم إضافة إلى عزم الوثاقة $\frac{Z}{2}$ وتدوران مع عقارب الساعة، ومحصلتهما تساوي $\frac{3Z}{2}$ لأن ردي الفعل يشكلان مزدوجة تعاكس اتجاه

العزم المحصل، وقيمتها تساوي إلى العزم المحصل مقسوماً على المسافة بين المسندين $\frac{3Z}{2l}$ لكل رد فعل.



مثال (٢): جائز موثوق ومسنود يتعرض لتأثير حمولة موزعة بانتظام شدتها q.
المطلوب: حساب عزم الوثاقة في A، ورسم مخطط القوى القاطعة وعزم الانعطاف.



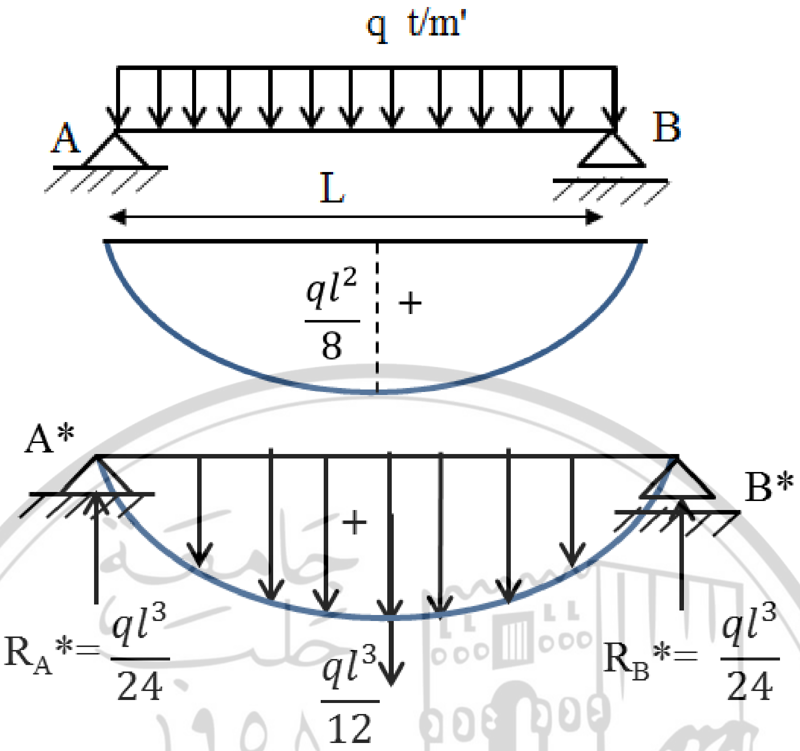
$$MA = -\frac{3}{l}RA^{*}$$

– نرسم جائزا مقررا ونحمله بالحمولات الخارجية فقط.

– نرسم مخطط عزم الانعطاف لهذا الجائز المقرر.

– نعتبر مخطط عزم الانعطاف حمولة وهمية خارجية محملة على جائز بسيط فتكون مساحة مخطط عزم الانعطاف.

$$S = \frac{2}{3}\frac{ql^2.l}{8} = \frac{ql^3}{12}$$



وبالتالي تكون قيمة عزم الوثاقة:

$$MA = -\frac{3}{l}\frac{ql^3}{24} = -\frac{ql^2}{8}$$ شد ألياف علوية

بعد إيجاد عزم الوثاقة MA أصبح الجائز مقرراً حيث يمكننا إيجاد ردود الأفعال ورسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف.

نكتب معادلة القوة القاطعة لإيجاد نقطة انعدامها.

$$T = -\frac{3\,ql}{8} + qx$$

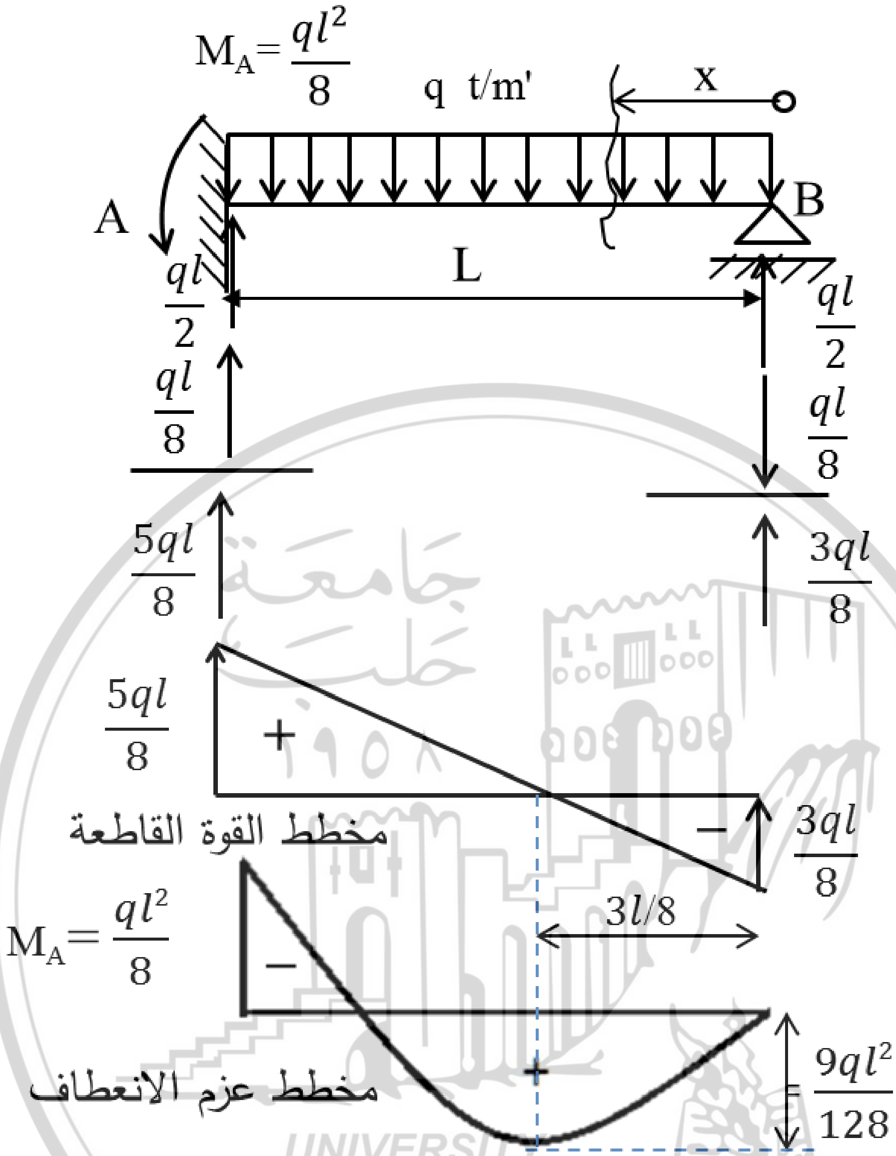
$$T = 0 \;\Rightarrow\; X = \frac{3\,l}{8}$$

لإيجاد قيمة العزم الأعظمي نكتب معادلة عزم الانعطاف.

$$M = \frac{3\,ql}{8}x - \frac{qx^2}{2}$$

$$Mmax = \frac{3\,ql}{8}\left(\frac{3\,l}{8}\right) - \frac{q}{2}\left(\frac{3\,l}{8}\right)^2$$

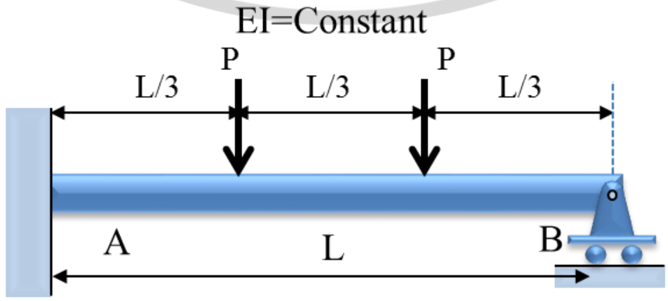
$$Mmax = \frac{9\,ql^2}{64} - \frac{9\,ql^2}{128} = \frac{9\,ql^2}{128}$$



<u>مثال (٣):</u>

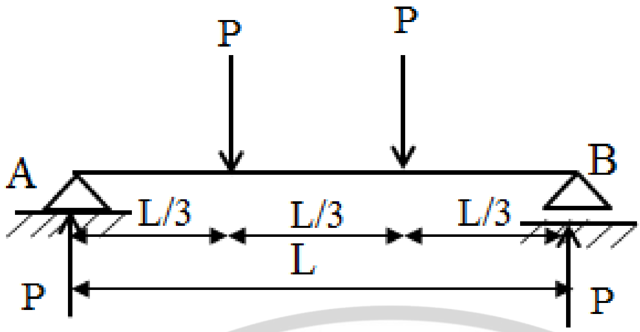
جائز موثوق ومسنود يتعرض لتأثير حمولتين مركزتين شدة الحمولة الواحدة P.

المطلوب: حساب عزم الوثاقة في A، وارسم مخطط القوى القاطعة وعزم الانعطاف.

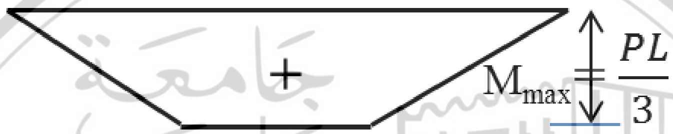


$$MA = -\frac{3}{l}RA^*$$

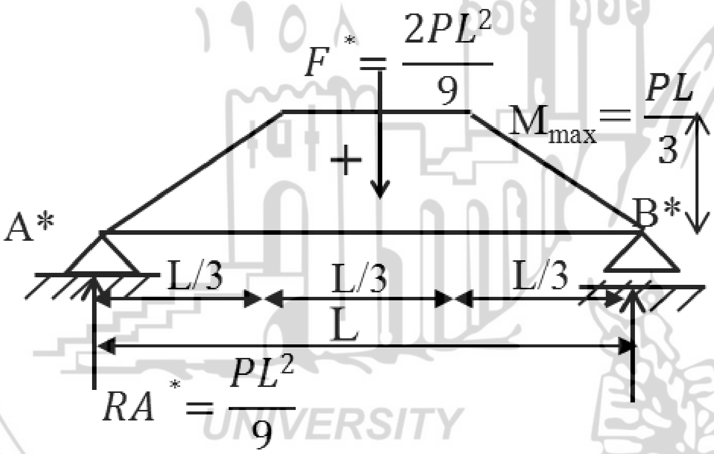
• نأخذ جائزا بسيطا ونحمله بالحمولات الخارجية فقط.



• نرسم مخطط الانعطاف.



• نحمل مخطط عزم الانعطاف على جائز بسيط.

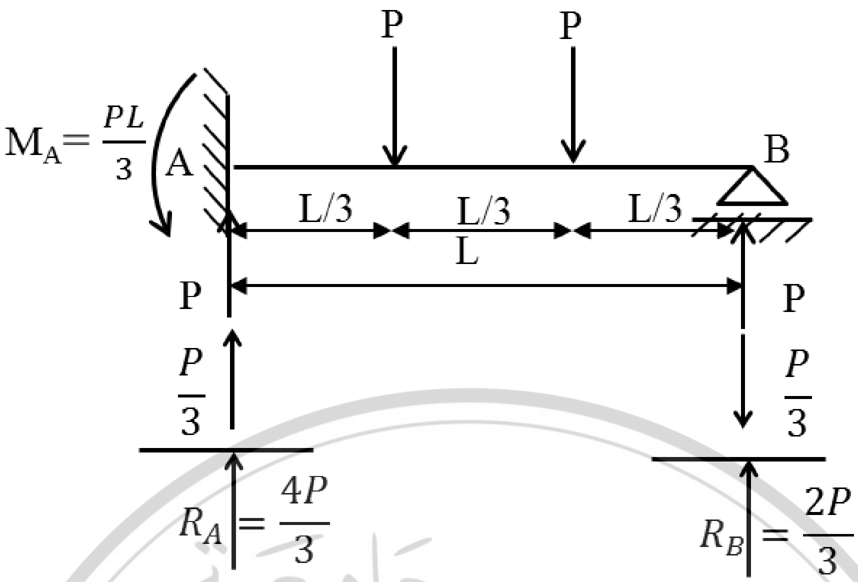


$$F^* = \left(\frac{l}{3} + l\right)\frac{pl}{3}\frac{1}{2}$$

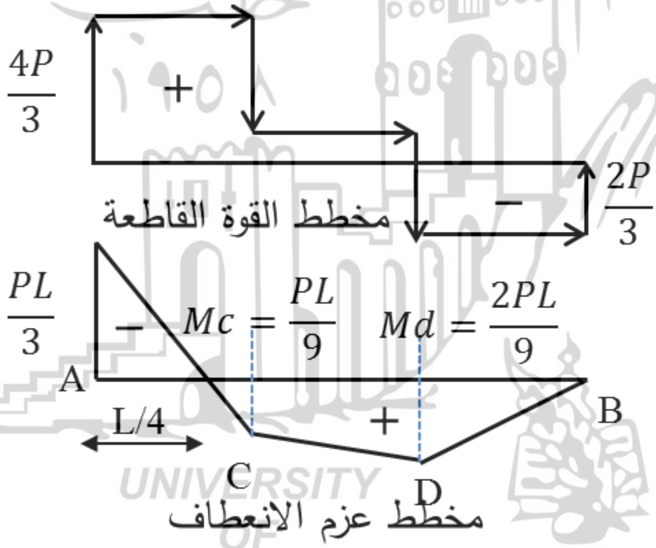
$$F^* = \frac{4\,l}{3} \cdot \frac{pl}{6} = \frac{4\,pl^2}{18} = \frac{2\,pl^2}{9}$$

$$MA = -\frac{3}{l} \cdot \frac{pl^2}{9} = -\frac{pl}{3}$$ شد ألياف علوية

• إيجاد ردود الأفعال. لإيجاد ردود الأفعال نستخدم مبدأ التجميع حيث نوجد ردود الأفعال الناتجة عن الحمولات الخارجية، ونوجد ردود الأفعال الناتجة عن عزوم الوثاقة.



• رسم مخططي القوى القاطعة وعزم الانعطاف.



$$M_c - M_A = \frac{4p}{3}\frac{l}{3} = \frac{4\,pl}{9}$$

$$M_c = \frac{4\,pl}{9} + M_A = \frac{4\,pl}{9} - \frac{pl}{3} = \frac{pl}{9}$$

$$M_B - M_d = -\frac{2p}{3} \cdot \frac{l}{3} = -\frac{2pl}{9}$$

$$M_d = M_B + \frac{2pl}{9} = 0 + \frac{2pl}{9} = +\frac{2pl}{9}$$

إيجاد نقطة انعدام عزم الانعطاف: يمكن إيجاد نقطة انعدام عزم الانعطاف في المجال AC بالاعتماد على تشابه المثلثات أو بالاعتماد على معادلة عزم الانعطاف لهذا المجال:

من معادلة عزم الانعطاف لهذا المجال نوجد نقطة انعدام العزم:

$$M = -\frac{Pl}{3} + \frac{4P}{3}x = 0 \rightarrow x = l/4$$

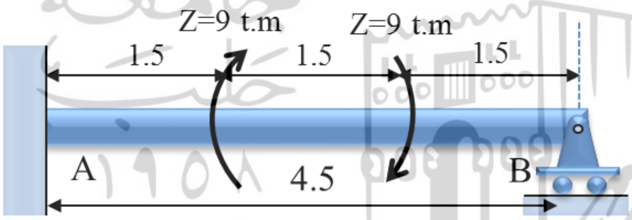
<u>مثال (٤):</u>

جائز موثوق ومسنود يتعرض لتأثير مزدوجتي عزم موضحتين في الشكل شدة المزدوجة الواحدة Z=9t.m والمطلوب:

١. قرر هذا الجائز.

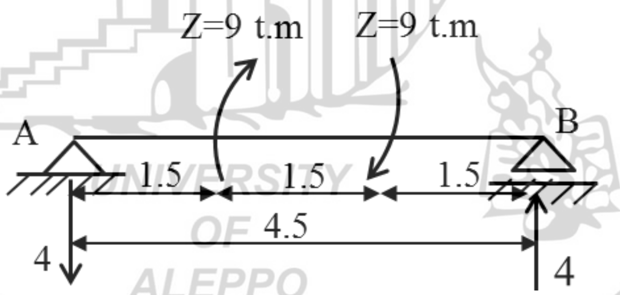
٢. ارسم مخطط القوى القاطعة وعزم الانعطاف.

٣. احسب قيمة الدوران في المسند B.



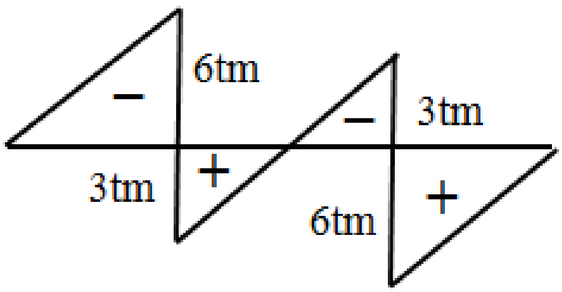
$$MA = -\frac{3}{l}RA^*$$

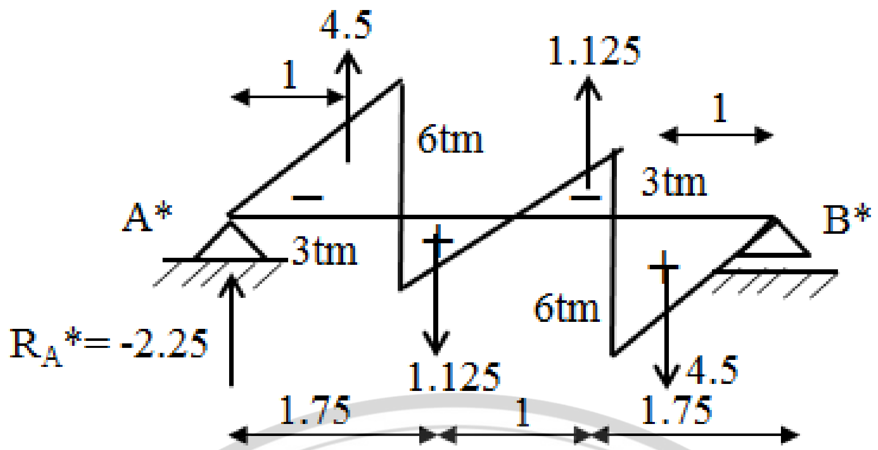
– نرسم جائزا بسيطا مقرراً ونحمله بالحمولات الخارجية.



– نرسم مخطط عزم الانعطاف ثم نحمل مخطط عزم الانعطاف على جائز بسيط.

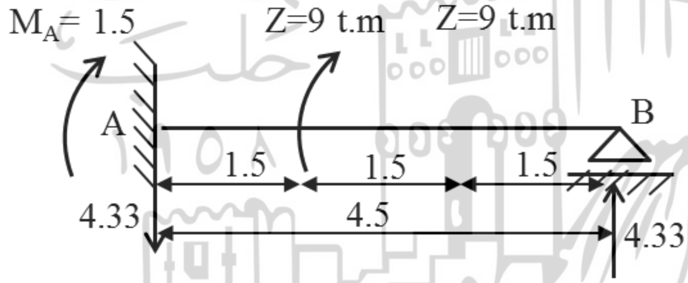
$$\Sigma MB^* = 0 \Rightarrow RA^* \times 4.5 + 4.5 \times 3.5 - 1.125 \times 2.75 + 1.125 \times 1.75 - 4.5 \times 1 = 0$$





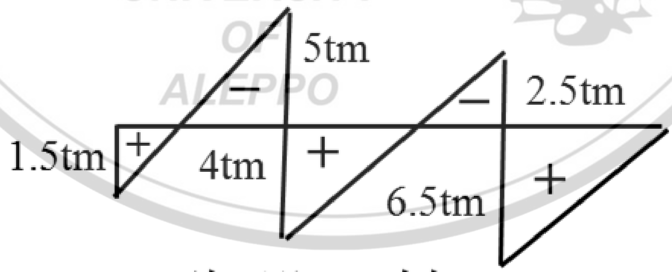
$$RA^{*} = -2.25$$

$$MA = -\frac{3}{4.5}(-2.25) = +1.5\ t.m$$



– رسم مخططي القوة القاطعة وعزم الانعطاف.

مخطط القوة القاطعة

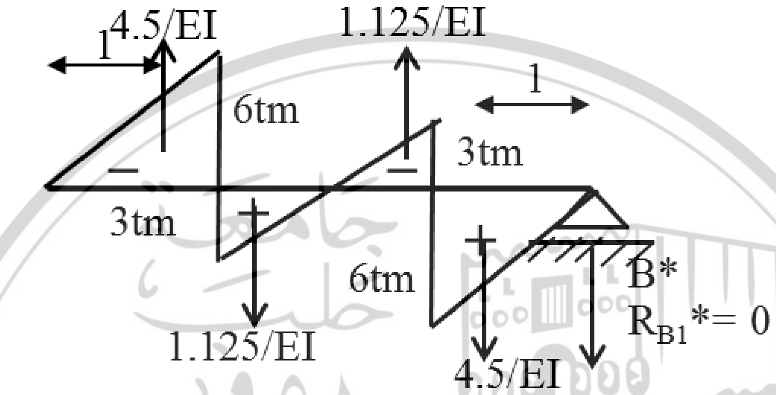


مخطط عزم الانعطاف

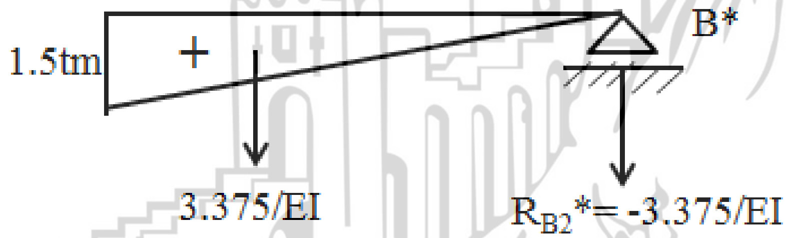
لحساب قيمة الدوران في B نعتمد على إحدى الطرائق التي مرت معنا في الفصول السابقة. لنختار **طريقة الجائز البديل**. نرسم الجائز البديل للجائز الأساسي ونحمله بمخطط عزم الانعطاف مقسوما على الصلابة الانعطافية.

تنويه: بما أننا رسمنا مخطط عزم الانعطاف للجملة المقررة والناتج عن تأثير الحمولات الخارجية وقمنا بحساب مساحتها ومواقع مراكز ثقلها، يفضل أن نعتمد على مبدأ تنضد الآثار في حساب قيمة الدوران ونستفيد من المساحات التي حسبناها في الطلب السابق أثناء تقرير الجائز.

نجزئ هذا الجائز الى جائزين، جائز أول يخضع لتأثير الحمولات الخارجية فقط،



وجائز ثاني يخضع لتأثير عزم الوثاقة



نحمل هذه الحمولات على الجائز البديل لنوجد قيمة الدوران في المسند B:

$$RB^* = RB^*{}_1 + RB^*{}_2 = 0 - \frac{3.375}{EI}$$

$$y'_B = -\frac{3.375}{EI}$$ عكس عقارب الساعة

<u>مثال (٥):</u>

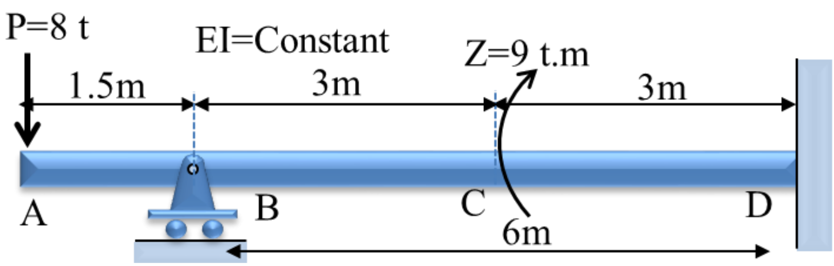
جائز موثوق ومسنود ينتهي بظفر يتعرض لتأثير حمولة مركزة في النهاية الحرة A شدتها (8 t) ومزدوجة عزم تؤثر في المقطع C شدتها (6t.m)، والمطلوب:

١. قرر هذا الجائز بالاعتماد على نظرية: (الجائز الموثوق والمسنود).

٢. ارسم مخطط القوى القاطعة وعزم الانعطاف.

٣. احسب قيمة الدوران والانتقال في المقطعين A و C

٤. ارسم الخط المرن

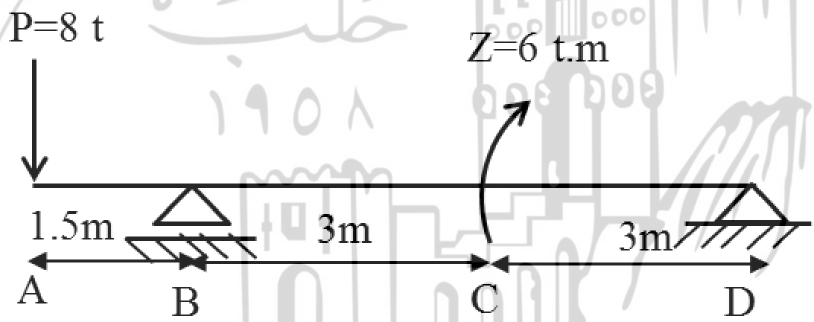


بما أن الجائز موثوق ومسنود فإننا نستخدم العلاقة التالية:

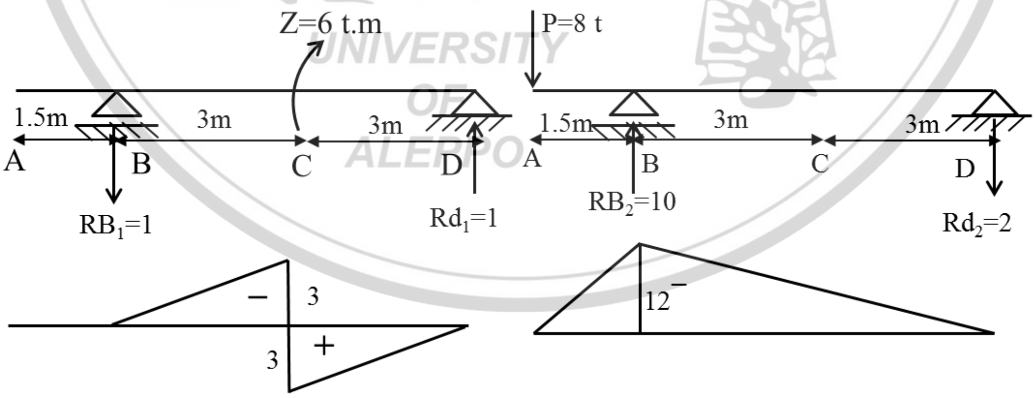
$$MD = -\frac{3}{l}RD^{*}$$

حيث تعبر L عن المسافة بين المسندين BD

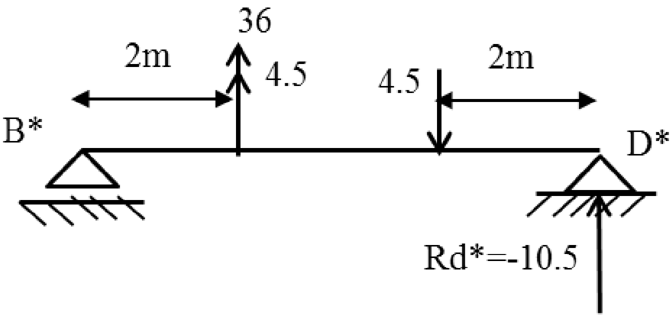
نقرر الجائز بحذف الوثاقة واستبدالها بمسند بسيط الذي يخضع لتأثير الحمولات الخارجية.



لسهولة الحل. نعتمد مبدأ تنضد الآثار، ونجزئ الحمولات ونرسم مخطط عزم الانعطاف.



نحمل مخطط عزم الانعطاف على جائز بسيط B*D* وللمنطقة الواقعة بين المسندين فقط.



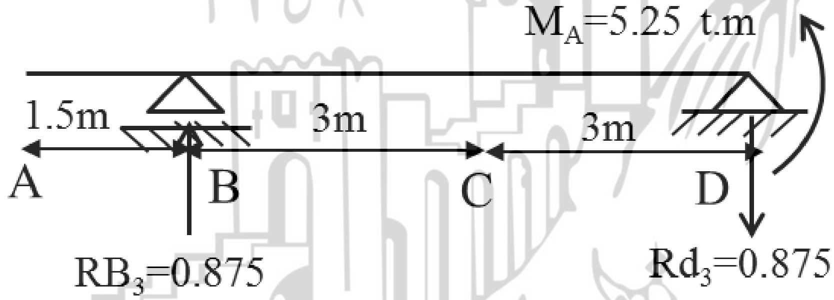
$$\Sigma\, MB^* = 0 \;\Rightarrow\; (36 + 4.5) \times 2 - 4.5 \times 4 + 6\, R_D^* = 0$$

$$R_D^* = -10.5$$

$$MD^* = -\frac{3}{6}(-\,10.5) = 5.25$$ شد ألياف سفلية

لإيجاد ردود الأفعال: لقد أوجدنا قيم ردود الأفعال الناتجة عن الحمولة المركزة ومزدوجة العزم، لذلك يجب علينا إيجاد رد الفعل الناتج عن عزم الوثاقة وتساوي:

$$\frac{5.25}{6} = 0.875$$



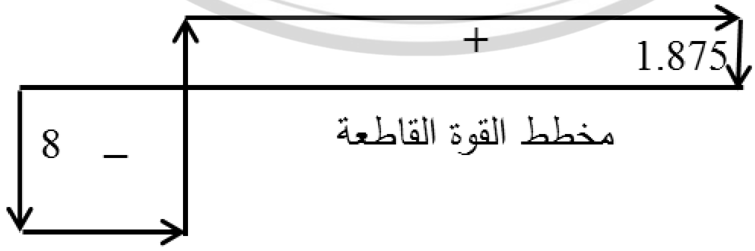
تصبح ردود الأفعال:

$$\uparrow RB = 10 - 1 + 0.875 = 9.875$$

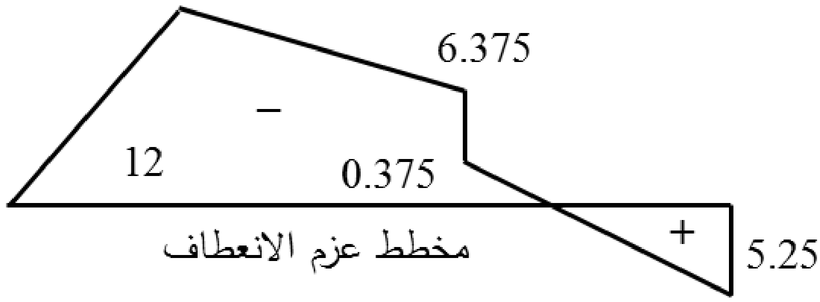
$$\downarrow Rd = -1 + 0.875 + 2 = 1.875$$

الطلب الثاني:

رسم مخططي القوى القاطعة وعزم الانعطاف



مخطط القوة القاطعة



مخطط عزم الانعطاف

نتيجة:

١-لا تؤثر مزدوجة العزم على طبيعة مخطط القوة القاطعة.

٢-تؤثر مزدوجة العزم على مخطط عزم الانعطاف بإحداث قفزة مفاجئة في المخطط ويكون طول هذه القفزة يساوي إلى شدة المزدوجة.

الطلب الثالث: حساب الانتقال والدوران في: A وC.

يتم حساب الانتقال والدوران في المقطعين A وC بالاعتماد على علاقة عزم المساحة باستخدام مبدأ تنضد الآثار، لأننا نعلم مخطط عزم الانعطاف الناتج عن الحمولات الخارجية بالإضافة إلى مساحته ومركز ثقله. نضيف لها مخطط عزم الانعطاف الناتج عن عزم الوثاقة. يمكننا رسم مخطط عزم الانعطاف لهذا الجائز على الشكل التالي:

أولا: المخططات الناتجة عن الحمولات الخارجية

ثانيا: المخططات الناتجة عن عزم الوثاقة

لحساب الانتقال والدوران في C نأخذ مقطعاً في الوثاقة D، ومقطعاً في C، ونطبق العلاقة الأولى لعزم المساحة من أجل حساب الدوران في المقطع C

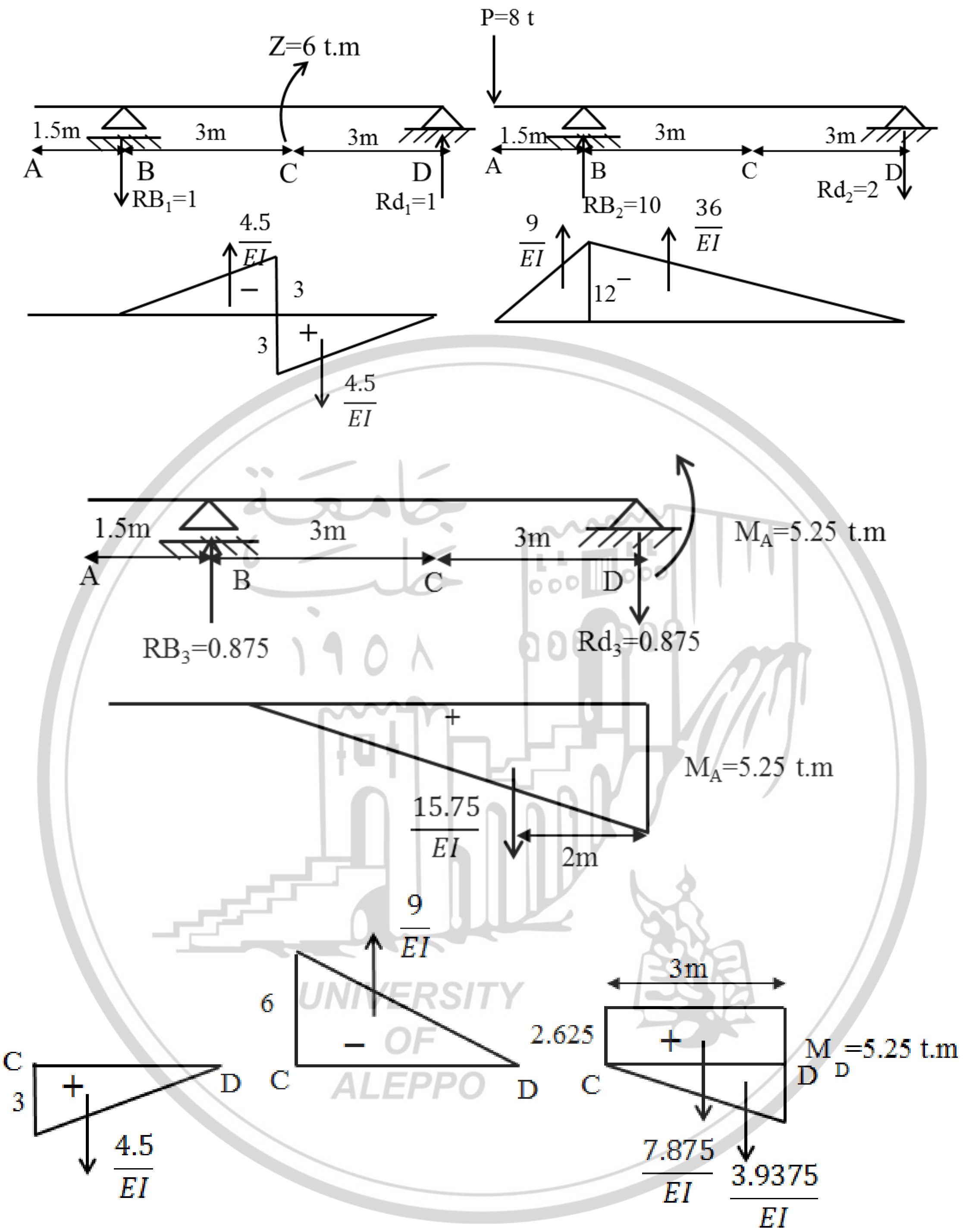
$$y'_d - y'_c = -w_{cd} \quad , \quad y'_d = 0$$

$$y'_c = \frac{4.5}{EI} - \frac{9}{EI} + \frac{7.875}{EI} + \frac{3.9375}{EI} = \frac{7.3125}{EI}$$

أما من أجل حساب الانتقال فنطبق العلاقة الثانية لعزم المساحة.

$$y_d - y_c = y'_c \cdot l_{cd} - w_{cd} \cdot C_d$$

$$-y_c = \frac{7.3125}{EI} * 3 + \frac{9}{EI} * 2 - \frac{4.5}{EI} * 2 - \frac{7.875}{EI} * 1.5 - \frac{3.9375}{EI} * 1$$



$$-y_c = \frac{21.9375}{EI} + \frac{18 - 9 - 11.8125 - 3.9375}{EI}$$

$$y_c = -\frac{21.9375}{EI} + \frac{6.75}{EI} = -\frac{15.1875}{EI}$$

لحساب الانتقال والدوران في A نأخذ مقطعاً في الوثاقة D، ومقطعاً في A،

ونطبق العلاقة الأولى لعزم المساحة من أجل حساب الدوران في المقطع A

$$y'_d - y'_A = -w_{Ad} \qquad y'_d = 0$$

$$y'_A = -\frac{36}{EI} - \frac{9}{EI} - \frac{4.5}{EI} + \frac{4.5}{EI} + \frac{15.75}{EI} = -\frac{29.25}{EI}$$

$$y_b - y_a = y'_a \cdot l_{ab} - w_{ab} \cdot C_b$$

$$0 - y_a = -\frac{29.25}{EI}1.5 - \left[-\frac{9}{EI}0.5\right] = \frac{39.375}{EI}$$

ويمكن حساب الانتقال بطريقة ثانية:

$$y_d - y_a = y'_a \cdot l_{ad} - w_{ad} \cdot C_d$$

$$0 - y_a = -\frac{29.25}{EI}7.5 - \left[-\frac{9}{EI}6.5 - \frac{36}{EI}4 - \frac{4.5}{EI}4 + \frac{4.5}{EI}2 + \frac{15.75}{EI}2\right]$$

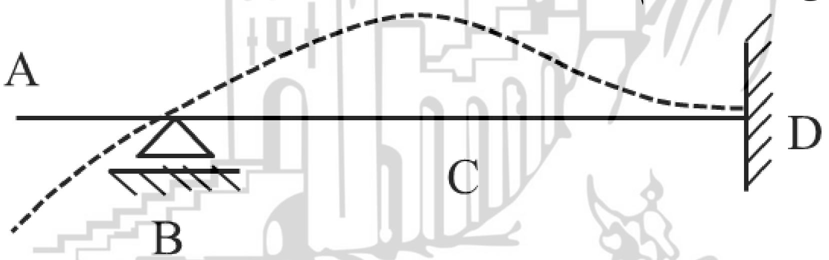
$$y_a = \frac{39.375}{EI}$$

رسم الخط المرن:

١. نرسم الجائز مع نقاط الاستناد.

٢. نحدد النقاط التي تم حساب انتقالها.

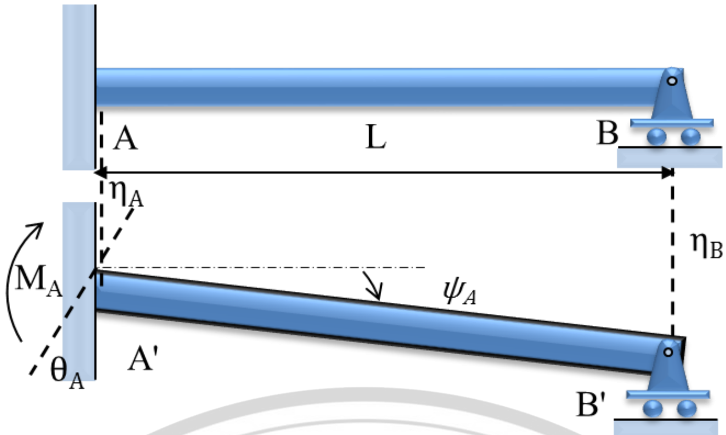
٣. نعتمد على مخطط عزم الانعطاف من أجل معرفة اتجاه التقعر.



٣-٢-٢ الحالة الثانية: في حال وجود حركة في المساند (انتقال ودوران)

بفرض أن مساند الجائز الموثوق والمسنود AB هي مساند غير ثابتة فالوثاقة A تتعرض لتأثير انتقال شاقولي موجب نحو الأسفل مقدار η_A ودوران موجب مقداره θ_A (مع عقارب الساعة) أما المسند B فإنه يتعرض لتأثير انتقال شاقولي موجب نحو الأسفل مقداره η_B كما هو مبين في الشكل رقم (٣-٨). لنوجد عزم الوثاقة في المسند A الناتج عن حركة المساند بفرض أن الصلابة الانعطافية لهذا الجائز تساوي EI، لذلك سوف نعتمد على نظرية الجائز البديل في إيجاد عزم الوثاقة.

حيث نفرض أن عزم الوثاقة موجب (شد ألياف سفلية)، ونحمل الجائز البديل بمخطط عزم الانعطاف الناتج عن عزم الوثاقة مقسوماً على EI،

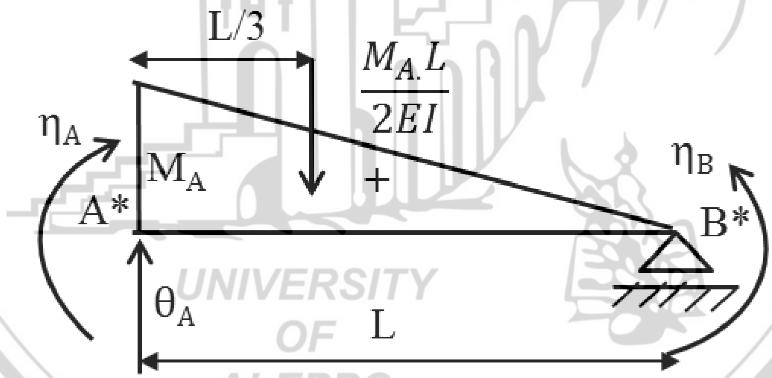


الشكل رقم (٣-٨)

نعوض الانتقال بمزدوجة عزم موجبة (شد ألياف سفلية) في الجائز البديل لأننا فرضنا الانتقال نحو الأسفل موجب في كل من A،B ، وكذلك نعوض الدوران بقوة قاطعة موجبة (دوران مع عقارب الساعة) كما هو مبين في الشكل رقم (٣-٩).

بتطبيق معادلة التوازن على هذا الجائز بأخذ مجموع العزوم في المقطع B نجد:

$$\Sigma MB^{*} = 0 \Rightarrow \eta_A + \theta_A . l - \eta_B - \frac{M_A . l}{2EI} \cdot \frac{2l}{3} = 0$$



الشكل رقم (٣-٩)

بالتقسيم على طول الجائز l

$$\frac{\eta_A - \eta_B}{l} + \theta_A - \frac{M_A . l}{3\,EI} = 0$$

$$\frac{MA . l}{3\,EI} = +\theta_A + \frac{\eta_A - \eta_B}{l} \Rightarrow M_A = \frac{3\,EI}{l}\left[\theta_A - \frac{\eta_B - \eta_A}{l}\right]$$

بفرض أن:

$$\frac{\eta_B - \eta_A}{l} = \psi_{AB}$$

لذلك يمكننا كتابة العلاقة السابقة على الشكل التالي:

$$(3-2) \qquad MA = \frac{3\,EI}{l}\,[\theta_A - \psi_{AB}]$$

وفي حال وجود حمولات خارجية مع وجود حركة في المساند تصبح العلاقة العامة للجائز الموثوق والمسنود هي:

$$(3-3) \qquad MA = -\frac{3}{l}RA^{*} + \frac{3\,EI}{l}\,[\theta_A - \psi_{BA}\,]$$

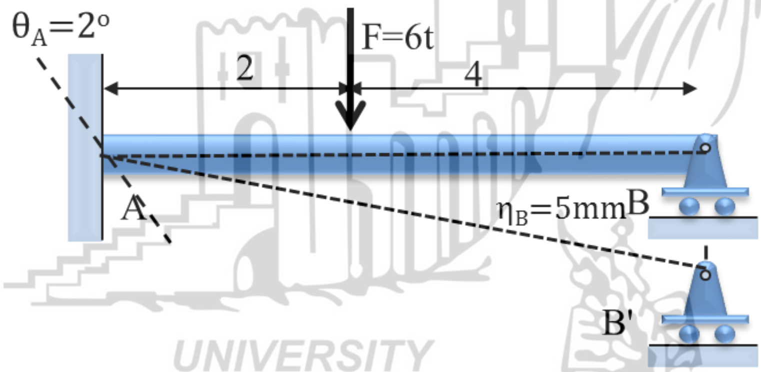
أمثلة وتطبيقات عملية: Examples

مثال: جائز موثوق في A ومسنود في B يتعرض لتأثير حمولة مركزة شدتها 6 Ton تعاني الوثاقة من دوران باتجاه عكس عقارب الساعة مقداره(2°)، والمسند B يعاني من انتقال شاقولي نحو الأسفل مقداره (5 mm)، والمطلوب:

١. حساب عزم الوثاقة في المسند A

٢. حساب الدوران في المسند B بالاعتماد على نظرية الجائز البديل

علما أن: قيمة الصلابة الانعطافية .(EI = 2000 t.m²)



الحل: بما أن الجائز موثوق ومسنود بمساند غير ثابتة ويخضع لتأثير حمولة خارجية فإن علاقة عزم الوثاقة (3-3) هي:

$$MA = -\frac{3}{l}RA^{*} + \frac{3\,EI}{l}\,[\theta_A - \psi_{BA}\,]$$

بما أن الوثاقة تعاني من دوران مقداره 2°يجب تحويل هذه القيمة إلى الراديان:

$$\theta_A = \frac{2\,\star\,\pi}{180} = 0.0349\,radian$$

وبما أنها تدور عكس عقارب الساعة فإنها تساوي $0.0349\,radian$ -

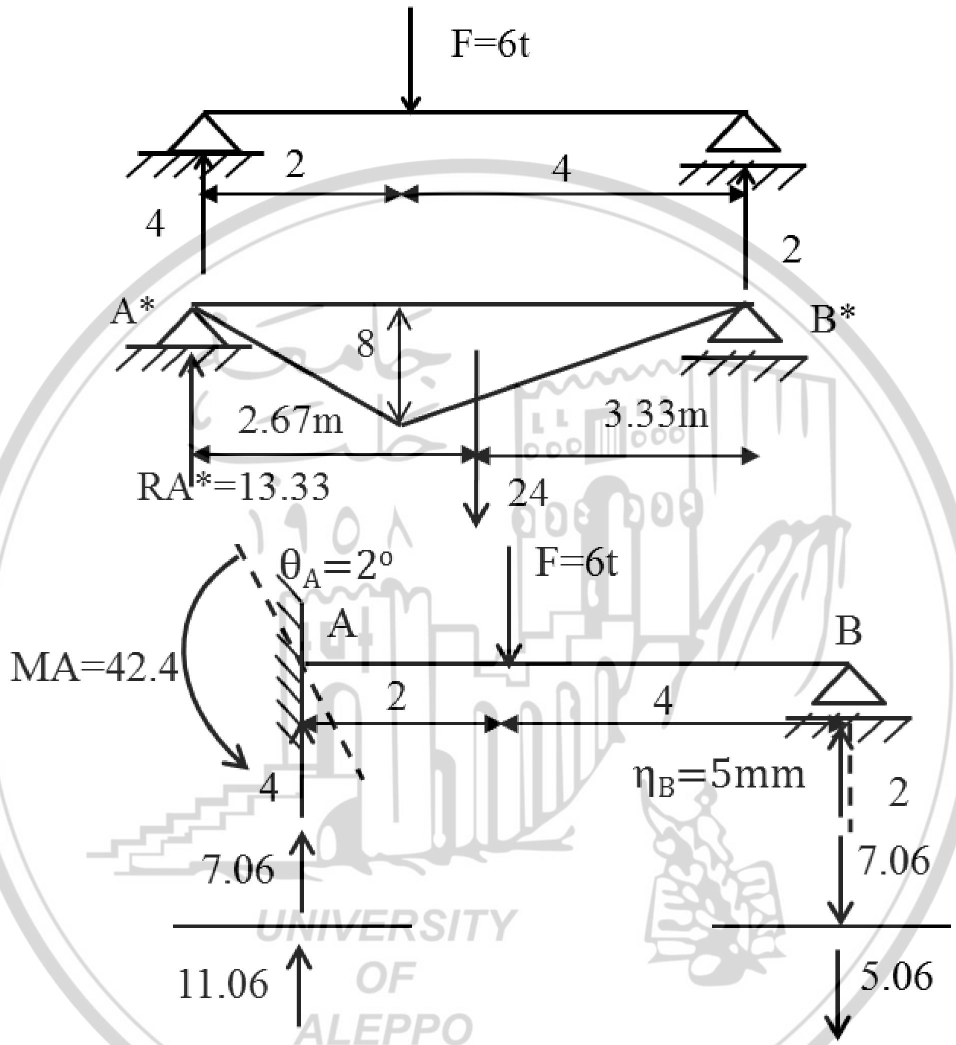
$$\psi_{AB} = \frac{\eta_B - \eta_A}{l} == \frac{5-0}{6000\;mm} \quad , \qquad \psi_{AB} = \frac{5}{6000}$$

إيجاد *RA

نعوض في العلاقة (3-3) الأساسية فنحصل على قيمة عزم الوثاقة.

$$MA = -\frac{3}{6}(13.33) + \frac{3 \times 2000}{6}\left[-0.0349 - \frac{5}{6000}\right]$$

$$MA = -6.67 - 35.73 = -42.4 \ \ t.m$$



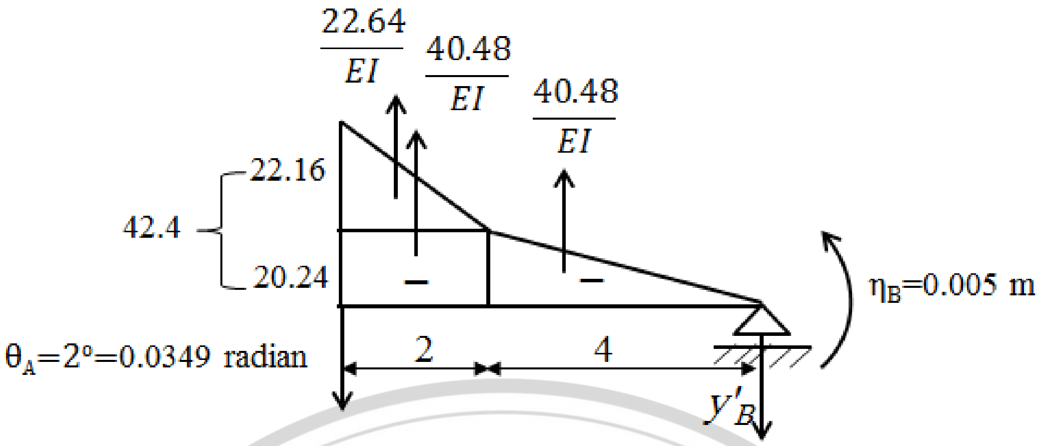
لحساب الدوران في المسند B، نرسم مخطط عزم الانعطاف فقط ونحسب المساحات ومراكز ثقل الأجزاء المشكلة لهذا المخطط.

$$\Sigma\, Fy = 0 \Rightarrow \frac{22.16}{EI} + \frac{40.48}{EI} + \frac{40.48}{EI} - 0.0349 - y'_B = 0$$

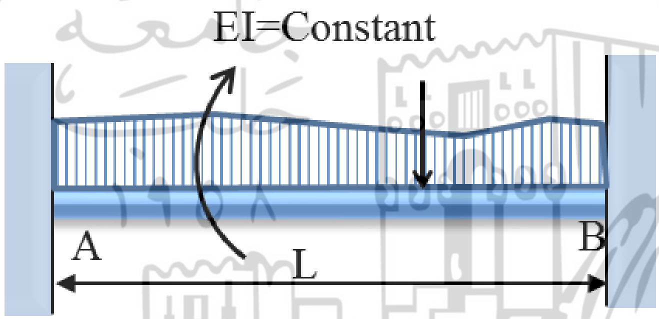
$$0.0515 - 0.0349 = y'_B$$

$$y'_B = 0.0166 \ \ radain$$

وهي قيمة الدوران في المسند B.



٣-٣ الجائز الموثوق من الطرفين Fixed Ends Beam



الشكل رقم (٣-١٠)

يعتبر الجائز الموثوق من الطرفين من الجوائز غير المقررة من الدرجة الثالثة لكنه نتيجة لتعرض الجائز بشكل عام لحمولات شاقولية واقعة في مستويه فإنه يعتبر غير مقررا خارجياً من الدرجة الثانية وسوف نعتبر أن المجاهيل الواجب إيجادها لتقرير هذا الجائز هي عزمي الوثاقة MB وMA. لذلك سوف نوجد عزمي الوثاقة MB و MA بالاعتماد على طريقة الجائز البديل .

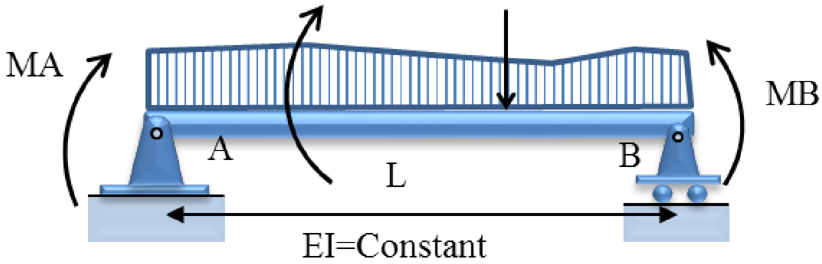
٣-٣-١ الحالة الأولى: المساند ثابتة والصلابة الانعطافية EI ثابتة

يمكن الاعتماد على مبدأ تنضد الآثار في ايجاد عزمي الوثاقة حيث نعتبر أن هذا الجائز يخضع لتأثير القوى والمزدوجات الخارجية ومزدوجتي عزوم الوثاقتين التالية:

١. الحمولات الخارجية.

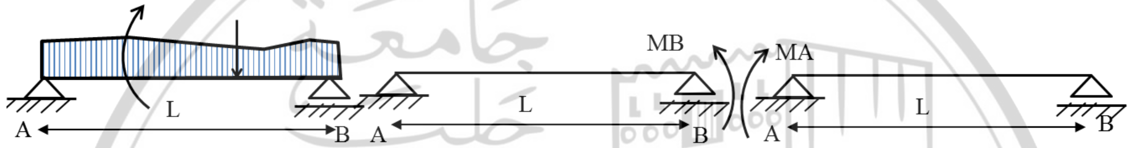
٢. عزم الوثاقة MA

٣. عزم الوثاقة MB



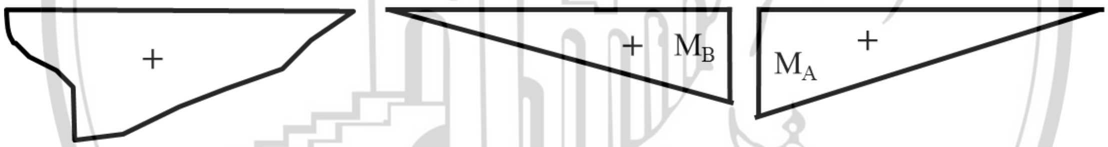
الشكل رقم (٣-١١)

نعتمد على مبدأ تنضد الآثار في رسم مخطط عزم الانعطاف لهذا الجائز، حيث نعزل الحمولات الخارجية وعزم الوثاقة MA وعزم الوثاقة MB بحيث نحصل على ثلاثة حالات تحميل والموضحة في الشكل رقم (٣-١٢).



الشكل رقم (٣-١٢)

لذلك فإنه يمكننا رسم مخططات عزم الانعطاف للحالات الثلاثة الواردة أعلاه على الشكل التالي:



يكون الجائز البديل هو جائز حر من الطرفين ومحملاً بحمولة مخطط عزم الانعطاف مقسوماً على EI كما هو موضح في الشكل رقم (٣-١٣).

بالاعتماد على معادلات التوازن.

$$\Sigma MB^* = 0 \Rightarrow \frac{MA.l}{2\,EI}\cdot\frac{2\,l}{3} + \frac{F^*}{EI}\cdot b + \frac{MB.l}{2\,EI}\frac{l}{3} = 0$$

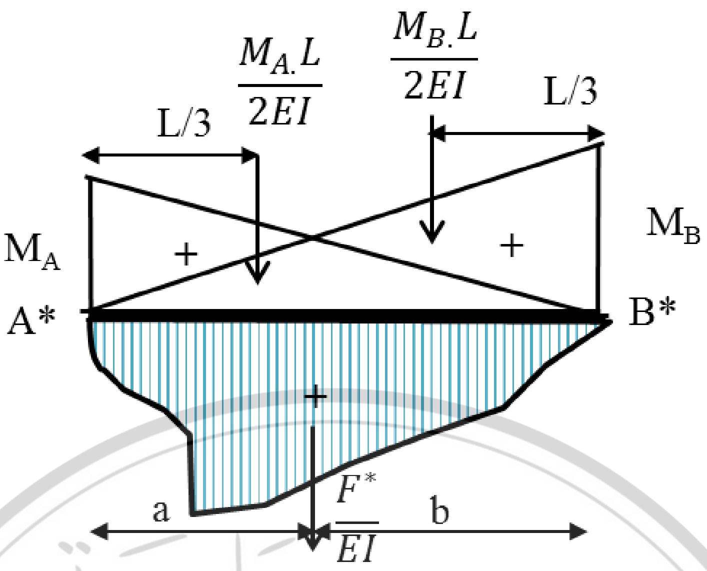
بالتقسيم على طول الجائز l وحذف الصلابة الانعطافية EI

$$(3-4)\quad \frac{2\,MA.l}{6} + \frac{F^*.b}{l} + \frac{MB\,l}{6} = 0$$

$$\Sigma\, MA^* = 0 \Rightarrow \frac{MA.l}{2\,EI}\cdot\frac{l}{3} + \frac{F^*.a}{EI} + \frac{MB.l}{2\,EI}\cdot\frac{2\,l}{3} = 0$$

بالتقسيم على طول الجائز l وحذف الصلابة الانعطافية EI

$$(3-5)\quad \frac{MA.l}{6} + \frac{F^*a}{l} + \frac{2\,MB.l}{6} = 0$$



الشكل رقم (٣-١٣)

بحل المعادلتين حلاً مشتركا نستنتج قيمة كل من عزمي الوثاقة MA و MB

نضرب العلاقة رقم (3-4) بـ (2−)

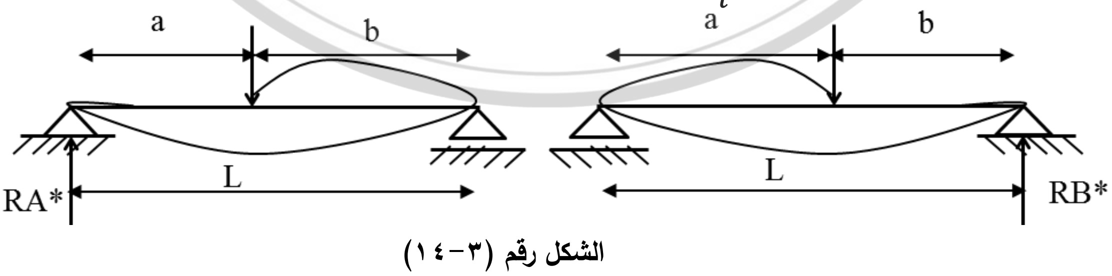
$$\frac{-4\ MAl}{6} - \frac{2\,F^*.b}{l} - \frac{2\,MBl}{6} = 0$$

ونجمعها مع العلاقة رقم (3-5) فنحصل على العلاقة التالية:

$$\frac{-3\ MA.l}{6} + \frac{F^*\,a}{l} - \frac{2\,F^*\,b}{l} = 0$$

$$MA = -\frac{2}{l}\left(\frac{2\ F^*\,b}{l} - \frac{F^*.a}{l}\right)$$

لكن الحدود الخاصة بالقوة F* تمثل ردود الفعل لجائز بسيط محمل بمخطط عزم الانعطاف (الحمولة الوهمية) حيث يمكننا الاستعاضة عن الحد $\frac{F^*\,b}{l}$ بـ RA^*، وكذلك يمكننا الاستعاضة عن الحد $\frac{F^*\,a}{l}$ بـ RB^* كما هو موضح بالشكل رقم (٣-١٤):



الشكل رقم (٣-١٤)

وبالتالي تصبح العلاقة السابقة على النحو التالي:

$$(3-6) \qquad MA = -\frac{2}{l}(2\,RA^* - RB^*)$$

وبنفس الأسلوب لو ضربنا العلاقة 2 بـ (−2) وجمعناها مع العلاقة (1) لنتجت علاقة عزم الوثاقة في B والتي تكون على النحو التالي:

$$(3-7) \quad MB = -\frac{2}{l}(2\,RB^{*} - RA^{*})$$

<u>إجراءات التحليل: Analyzing Procedures</u>

لإيجاد عزوم الوثاقة التامة لجائز موثوق من الطرفين نتبع مايلي:

١. نرسم جائزاً مقرراً مسنودا على مسندين بسيطين محملاً بالحمولات الخارجية فقط.

٢. نرسم مخطط عزم الانعطاف الناتج عن هذه الحمولات الخارجية.

تنويه: يمكن اللجوء إلى مبدأ تنضد الآثار إذا كان مخطط عزم الانعطاف معقداً.

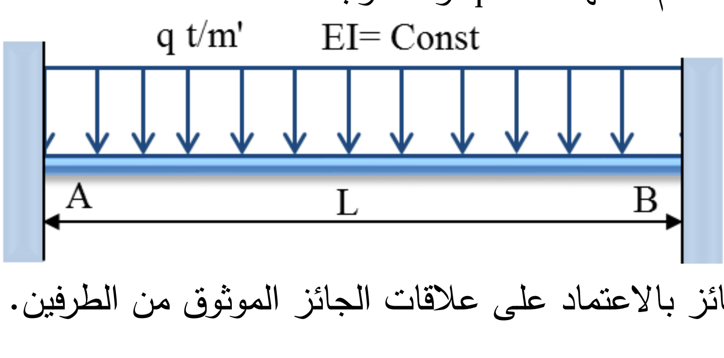
٣. نعتبر مخطط عزم الانعطاف هذا عبارة عن حمولة وهمية خارجية (الحمولة المرنة) محملاً على جائز بسيط $A^{*}B^{*}$، (إذا كان مخطط عزم الانعطاف موجباً يكون اتجاه التحميل نحو الأسفل).

٤. نوجد ردود الأفعال الناتجة عن الحمولات المرنة، حيث نفرض اتجاه ردي الفعل نحو الأعلى دائماً ثم نعوض قيمة رد الفعل الناتج بإشارته الجبرية في علاقتي حساب عزوم الوثاقة.

أمثلة وتطبيقات عملية:

مثال (١):

جائز موثوق من الطرفين طوله l وصلابته الانعطافية EI ثابتة، يتعرض لتأثير حمولة موزعة بانتظام شدتها q t/m' والمطلوب:

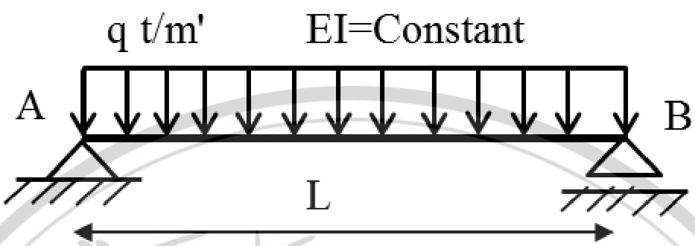


١. قرر هذا الجائز بالاعتماد على علاقات الجائز الموثوق من الطرفين.

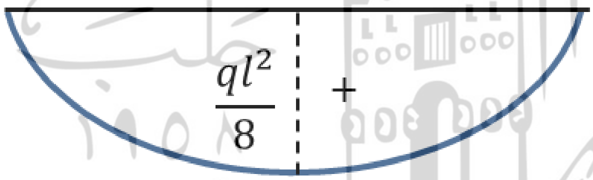
٢. ارسم مخططات القوى القاطعة وعزوم الانعطاف.

الحل:

– نرسم جائزاً مقرراً مسنودا على مسندين بسيطين محملاً بالحمولات الخارجية وهي الحمولات الموزعة بانتظام شدتها q.

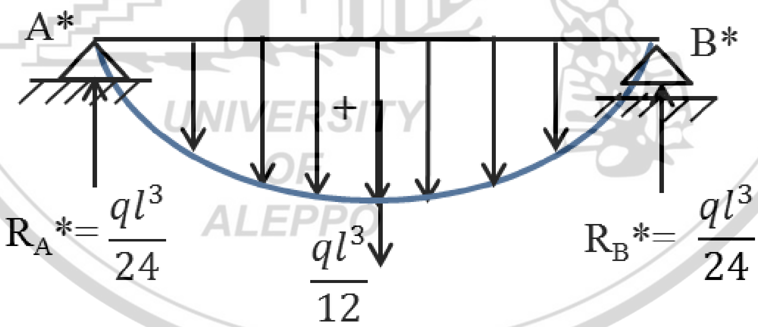


– نرسم مخطط عزم الانعطاف الناتج عن هذه الحمولات الخارجية.



– نعتبر مخطط عزم الانعطاف الناتج عن الحمولة الموزعة بانتظام حمولة وهمية خارجية على جائز بسيط، ونوجد ردود الأفعال الناتجة عن هذه الحمولة الوهمية.

تكون قيمة ردود الأفعال متساوية نتيجة التناظر.

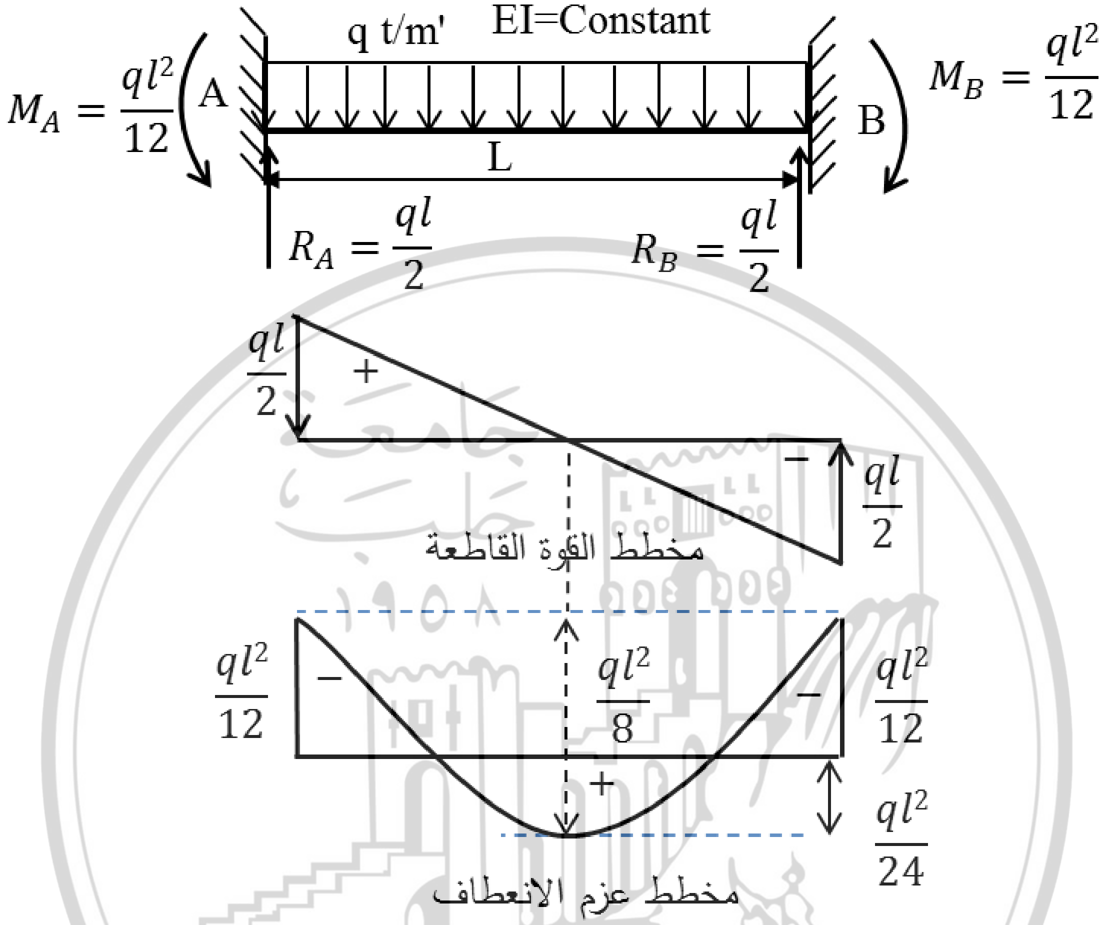


$$RA^* = RB^* = \frac{ql^3}{24}$$

– بالاعتماد على علاقتي الجائز الموثوق من الطرفين (3-6) و (3-7) نوجد قيمة عزمي الوثاقة في A،B.

$$MA = MB = -\frac{2}{l}\left(\frac{2\,ql^3}{24} - \frac{ql^3}{24}\right) = -\frac{ql^2}{12}$$

-نرسم الجائز الموثوق من الطرفين مع الحمولات الخارجية وعزمي الوثاقة ثم نرسم مخططي القوى القاطعة وعزم الانعطاف.



– إيجاد قيمة العزم الأعظمي (باعتبار أن الجائز متناظر تكون قيمة العزم الأعظمي M_m في المنتصف).

$$M_m - M_A = +\frac{1}{2}\frac{ql}{2}\cdot\frac{l}{2} = \frac{ql^2}{8}$$

$$M_m = M_A + \frac{ql^2}{8} = -\frac{ql_2}{12} + \frac{ql_2}{8} = \frac{ql^2}{24}$$

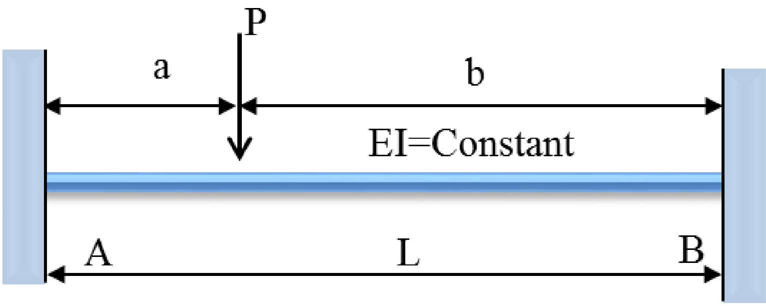
مثال (٢):

جائز موثوق من الطرفين وثاقة تامة يخضع لتأثير حمولة مركزة في المقطع (C) الذي يبعد بمقدار a عن المسند A و يبعد بمقدار b عن المسند B.والمطلوب:

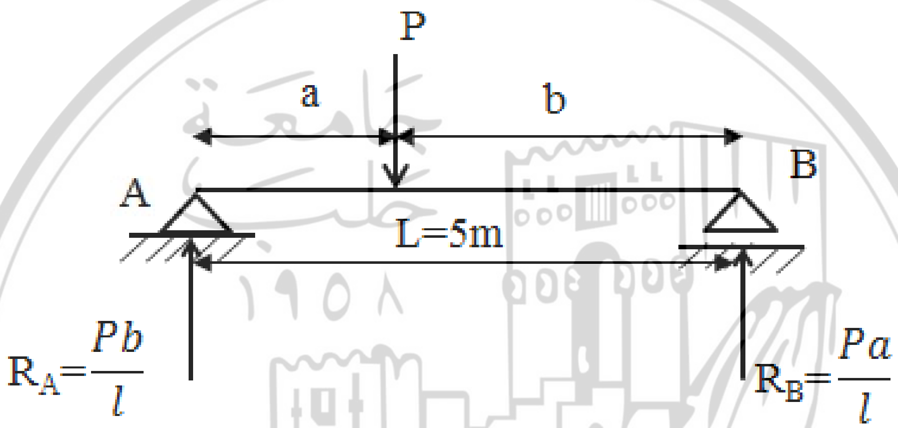
١. أوجد قيمة عزمي الوثاقة في A،B .

٢. ارسم مخطط القوى القاطعة وعزم الانعطاف باعتبار أن:

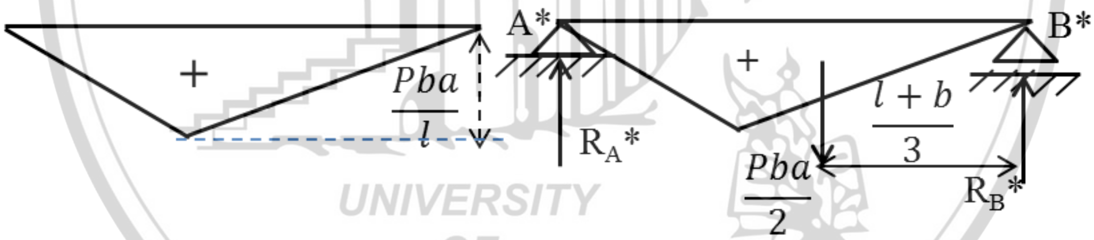
a = 2m , b =3m،p =10 Ton



– نرسم جائزا بسيطا ونحمله بالحمولات الخارجية فقط.



– نرسم مخطط عزم الانعطاف لهذا الجائز ونحمل هذا المخطط على جائز بسيط.



إيجاد ردود الأفعال الوهمية RA^* و RB^*

$$\Sigma MB^* = 0 \Rightarrow RA^*.l - \frac{P.a.b}{2}\frac{(l+b)}{3} = 0 \Rightarrow RA^* = \frac{P.ab}{6l}(l+b)$$

$$\Sigma MA^* = 0 \Rightarrow RB^*.l - \frac{P.a.b}{2}\frac{(l+a)}{3} \Rightarrow RB^* = \frac{P.a.b}{6\,l}(l+a)$$

$$MA = -\frac{2}{l}\left[\frac{2.P.a.b}{6\,l}(l+b) - \frac{Pa.b}{6\,l}(l+a)\right]$$

$$MA = -\frac{2}{l}\frac{P.a.b}{6\,l}[\,2\,l + 2\,b - l - a\,]$$

$$MA = -\frac{P.a.b}{3\,l^2}[\;l + 2\,b - a\,]$$

نعوض القيمة: a=*l* – b في العلاقة:

$$MA = -\frac{P.a.b}{3\,l^2}\,[\,l + 2\,b - \,(l - b) = -\frac{P.a.b}{3\,l^2}\,[\,l + 2\,b - l + b\,]$$

$$MA = -\frac{P.a.b}{3\,l^2}[\,3\,b\,] = -\,\frac{P.a.b^2}{l^2}$$

وبنفس الأسلوب يمكننا إيجاد عزم الوثاقة في B.

$$MB = -\frac{2}{l}\,[\,2\,\,\frac{P.a.b}{6\,l}(l + a) - \frac{P.a.b}{6\,l}(l + b)\,]$$

$$MB = \frac{-2}{l}\frac{P.a.b}{6\,l}\,[2(l + a) - (l + b)]$$

$$MB = -\frac{P.ab}{3\,l^2}[\,2\,l + 2\,a - l - b\,] = -\frac{P.a.b}{3\,l^2}\,(\,l + 2a - b)$$

باعتبار أن: b=*l*– a

$$MB = -\frac{P.a.b}{3\,l^2}[\,l + 2\,a - (l - a)] = -\frac{P.a.b}{3\,l^2}[\,3a\,] = -\,\frac{P.a^2\,.b}{l^2}$$

من أجل رسم المخططات لنفرض قيمة للأبعاد والحمولات حيث: $l = 5\ m$،

$a = 2\ m$، $b = 3\ m$، $p = 10\ Ton$

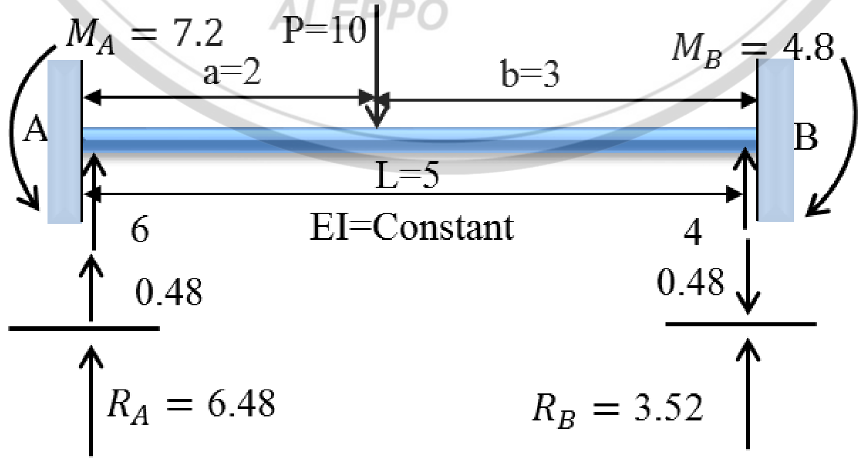
$$MA = -\frac{10.2.3^2}{25} = \frac{-180}{25} = -7.2\,t.m$$

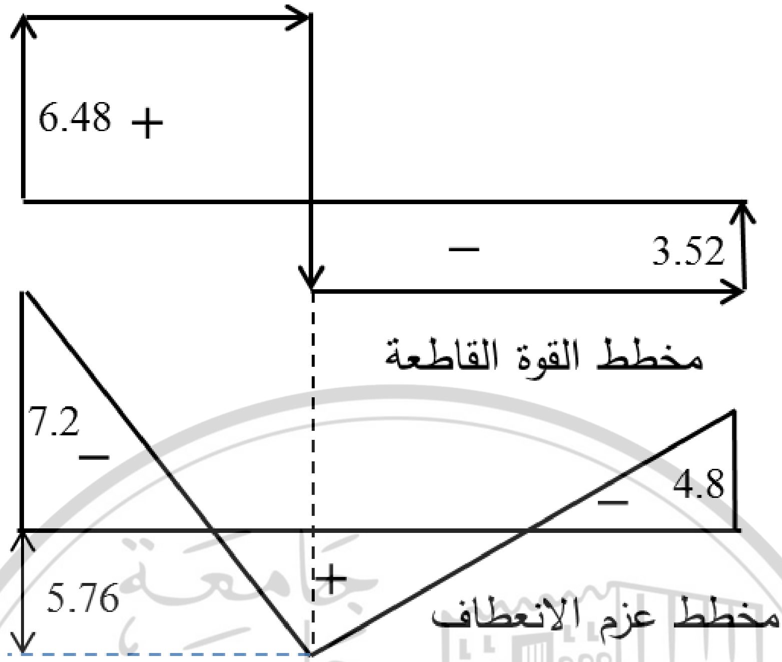
$$MB = -\frac{10.3.2^2}{25} = \frac{-120}{25} = -4.8\,t.m$$

إيجاد ردود الأفعال ورسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف:

يكون موقع العزم الأعظمي عند نقطة تقاطع مخطط القوى القاطعة مع محور الجائز (عند الحمولة المركزة)

$$M_{max} = -7.2 + 6.48 \times 2 = 5.76$$





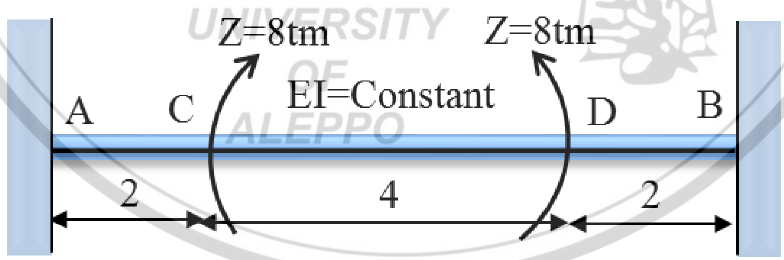
مثال (٣):

جائز موثوق من الطرفين وثاقة تامة يتعرض لتأثير مزدوجتي عزم متساويتين والمطلوب:

١. حساب عزمي الوثاقة

٢. رسم مخططي القوى القاطعة وعزم الانعطاف.

٣. إيجاد قيمة الدوران والانتقال في المقطع (C) ورسم الخط المرن للجائز.



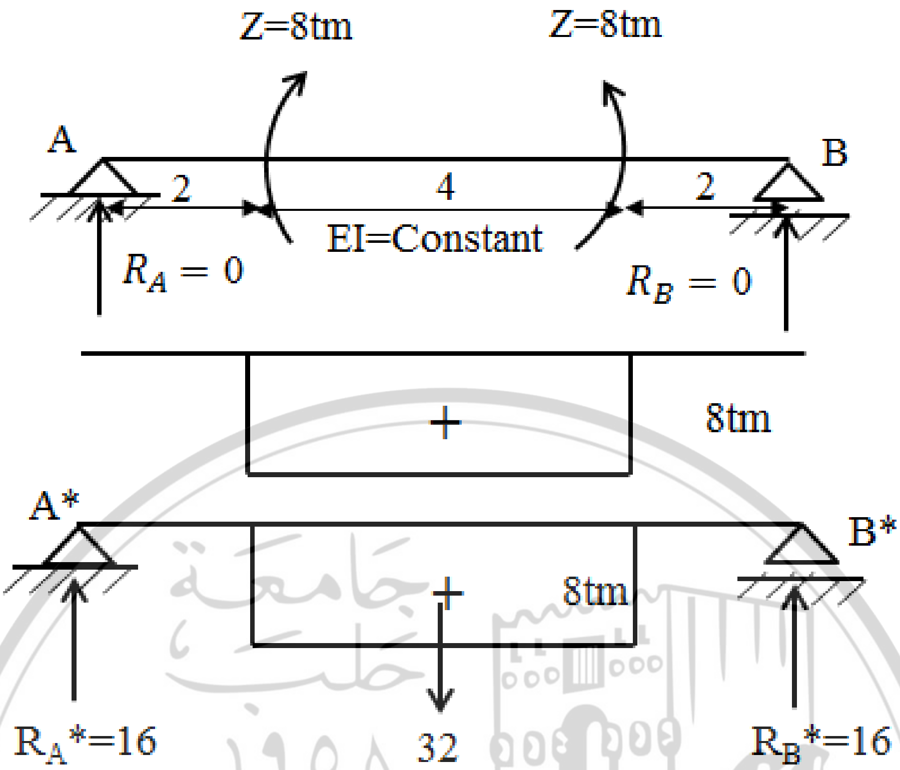
بما أن الجائز متناظر فإن:

$$MA = MB \quad , \quad RA^* = RB^*$$

$$MA = -\frac{2}{l}(\,2\,RA^* - RB^*) = -\frac{2}{l}RA^*$$

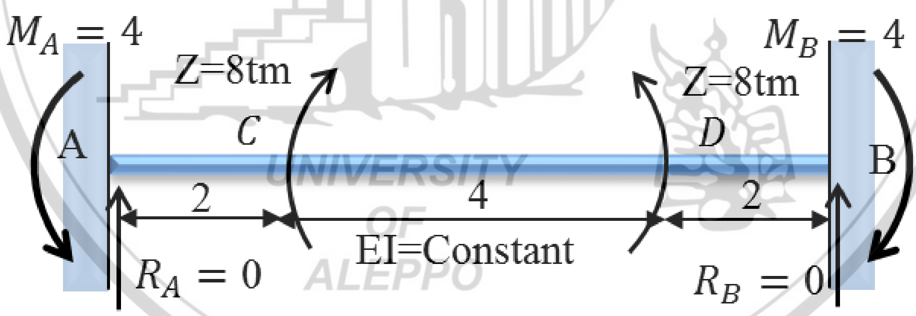
$$MA = -\frac{2}{8}\,16 = -4\;t.m$$

حيث تم حساب ردود الأفعال بالاعتماد على الأشكال الموضحة بالأسفل



– إيجاد ردود الأفعال: تكون قيمة ردود الأفعال معدومة لأن محصلة مزدوجات العزم معدومة.

– رسم مخططي القوى القاطعة وعزم الانعطاف:

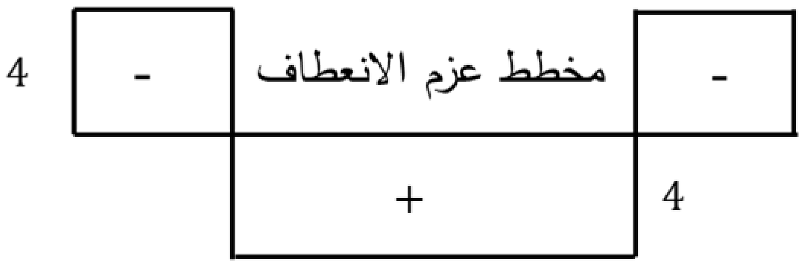


١. رسم مخطط القوى القاطعة: يكون مخطط القوى معدوماً نظراً لانعدام ردود الأفعال من جهة ولعدم وجود قوى شاقولية مؤثرة على الجائز من جهة أخرى.

$T=0$

مخطط القوة القاطعة

٢. رسم مخطط عزم الانعطاف.



٣. حساب الدوران في المقطع (C):

باستخدام العلاقة الأولى لعزم المساحة بين المقطعين A،C

$$y'_C - y'_A = -W_{AC} \Rightarrow y'_C = -\left[-\frac{4\times 2}{EI}\right] = \frac{8}{EI}$$

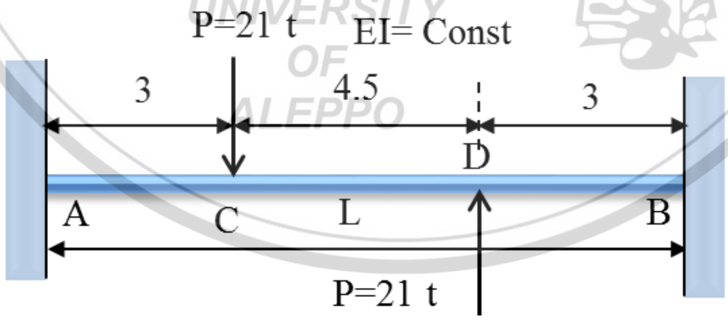
٤. حساب الانتقال في المقطع (C)

نستخدم العلاقة الثانية لعزم المساحة بين المقطعين C و A

$$y_C - y_A = y'_A . l_{AC} - W_{AC} . C_c$$

$$y_C = -\left[-\frac{8}{EI}\times 1\right] = \frac{8}{EI}$$

مثال (٤): جائز موثوق من الطرفين وثاقة تامة يخضع لتأثير الحمولات المركزة الموضحة في الشكل والمطلوب:



١. إيجاد عزمي الوثاقة.

٢. رسم مخطط القوى القاطعة وعزم الانعطاف.

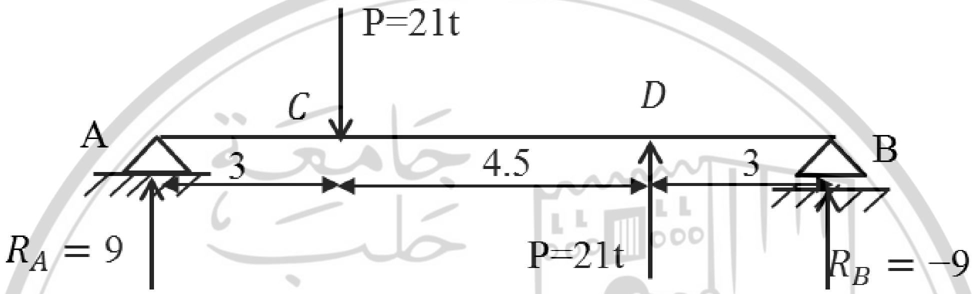
٣. حساب قيمة الدوران والانتقال في المقطعين C،D وقيمة الانتقال والدوران في المنتصف.

٤. رسم الخط المرن

يُعتبر هذا الجائز متناظرا عكسياً فإن: $MA = -MB$ و $RA^{*} = -RB^{*}$ ،
وبالتالي تصبح علاقة عزم الوثاقة للجائز الموثوق من الطرفين (6-3) على الشكل التالي

$$MA = -\frac{2}{l}(2\,RA^{*} - RB^{*}) = -\frac{2}{l}(2\,RA^{*} + RB^{*}) = -\frac{6}{l}RA^{*}$$

نرسم جائزا مقررا مسنودا على مسندين بسيطين في A , B ونحمله بالحمولات الخارجية



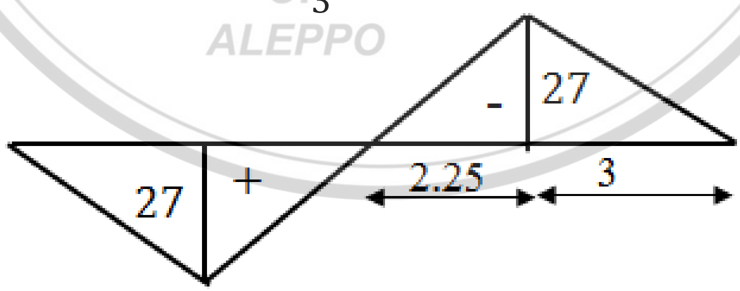
نوجد ردود الأفعال ونرسم مخطط عزم الانعطاف لهذا الجائز المقرر والمحمل بالحمولات الخارجية فقط.

نحمل مخطط عزم الانعطاف على جائز بسيط مسنود على مسندين بسيطين ثم نحسب مساحة الجزء الأيمن السالب من مخطط عزم الانعطاف والتي تساوي:

$$\frac{5.25 \times 27}{2} = 70.875$$

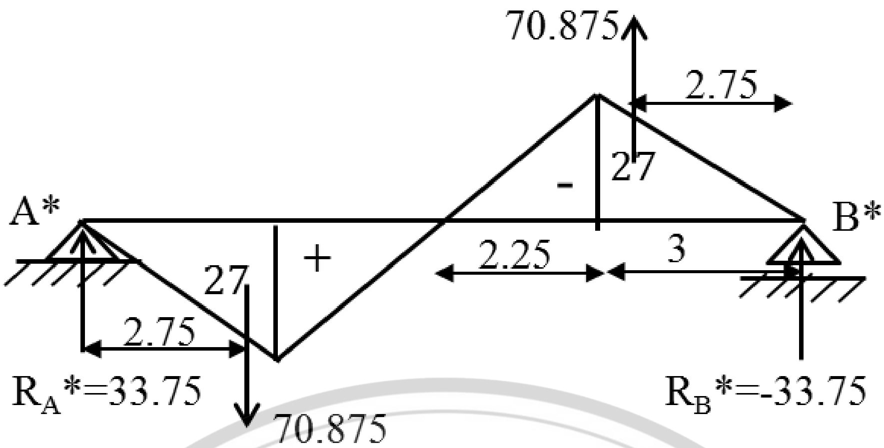
ويبعد مركز ثقلها عن المسند B^{*} بمقدار:

$$\frac{5.25 + 3}{3} = 2.75$$



يتم إيجاد ردود الأفعال بالاعتماد على معادلات التوازن وتعويضها في معادلتي الجائز الموثوق من الطرفين لنوجد قيمة كل من عزمي الوثاقة MA وMB.

$$MA = -\frac{6}{l} \cdot 33.75 = -\frac{6}{10.5} \times 33.75 = -19.28\ t.m$$



بعد إيجاد قيمة عزمي الوثاقة في المسندين B و A يمكننا إيجاد ردود الأفعال ورسم مخططات القوى القاطعة وعزوم الانعطاف للجائز المذكور.

-نوجد نقاط انعدام عزوم الانعطاف في المجال AC:

$$M = 12.67x - 19.26$$

$$M = 0 \Rightarrow x = \frac{19.26}{12.67} = 1.52$$

-حساب الدوران في المقطع (C):

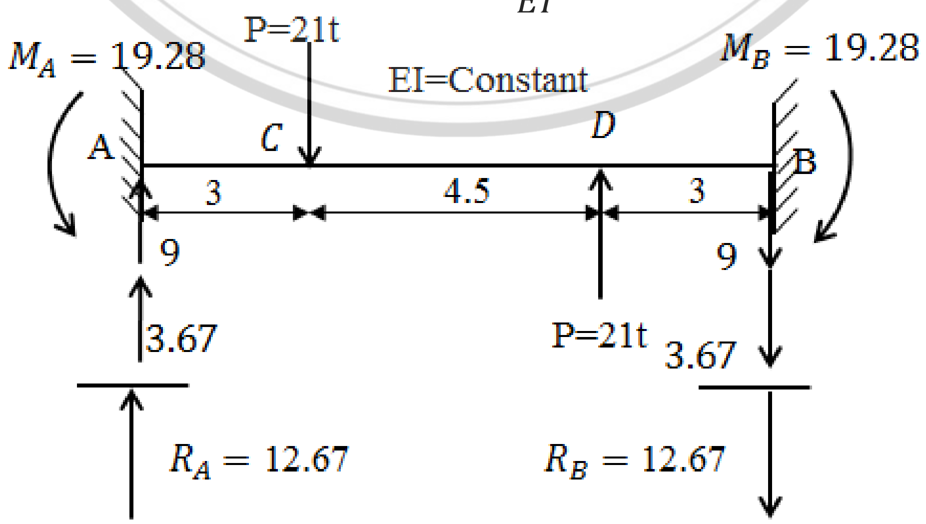
$$y'_C - y'_A = -W_{AC}$$

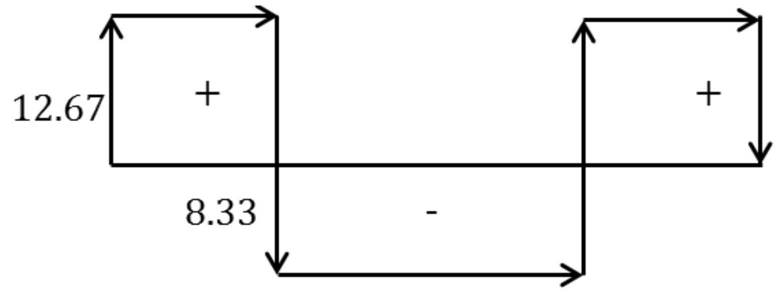
*لقد تم حساب المساحات ومواقع مراكز الثقل وتثبيتها على مخطط عزم الانعطاف

$$y'_C - y'_A = -\left[-\frac{19.28 \times 1.52}{2\,EI} + \frac{18.7 \times 1.48}{2\,EI}\right] = -\frac{0.81}{EI}$$

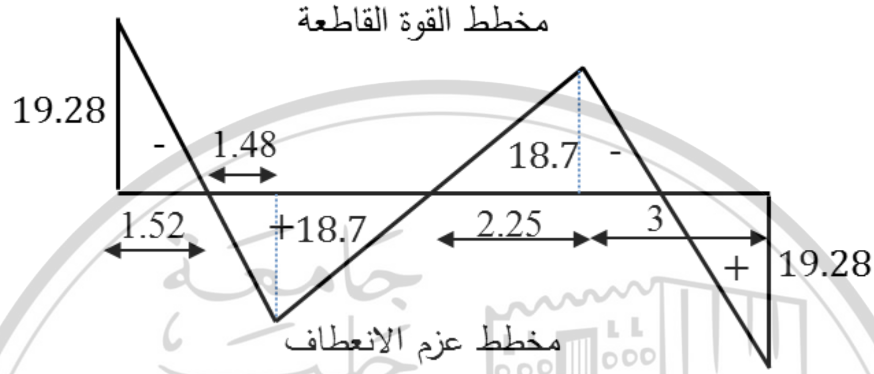
أما الدوران في المقطع D فهو متناظر مع الدوران في المقطع (C)

$$y'_D = +\frac{0.81}{EI}$$





مخطط القوة القاطعة



مخطط عزم الانعطاف

حساب الانتقال في المقطع (C):

$$y_C - y_A = y'_A \, . \, l_{AC} - W_{AC} . C_c$$

$$y_C = -\left[- \frac{19.28 * 1.52}{2\,EI}\left(1.52 * \frac{2}{3} + 1.48\right) + \frac{18.7 * 1.48}{2\,EI} * \frac{1}{3}\ 1.48 \right]$$

$$y_C = -\left[- \frac{36.55 + 6.83}{EI} \right] = \frac{29.72}{EI}$$

أما الانتقال في المقطع D فهو متناظر عكسياً مع الانتقال في المقطع (C) أي:

$$y_D = -\frac{29.72}{EI}$$

حساب قيمة الدوران في المنتصف:

$$y'_m - y'_A = -W_{Am} \Rightarrow y'_m = -\left[- \frac{14.65}{EI} + \frac{13.84}{EI} + \frac{21.04}{EI} \right]$$

$$= -\left[\frac{20.23}{EI} \right]$$

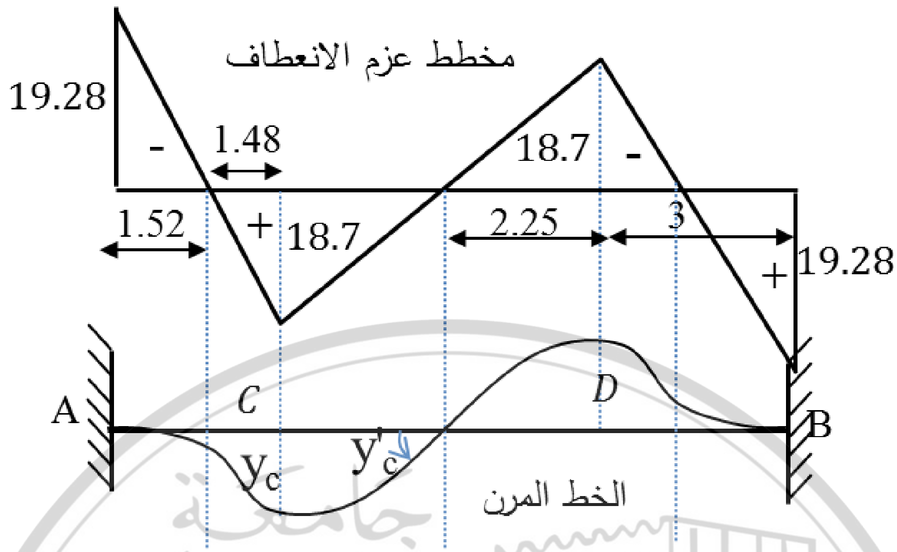
حساب قيمة الانتقال في المنتصف:

$$y_m - y_A = y'_A . l_{Am} - W_{Am} C_m$$

$$Y_M = -W_{AM} C_M$$

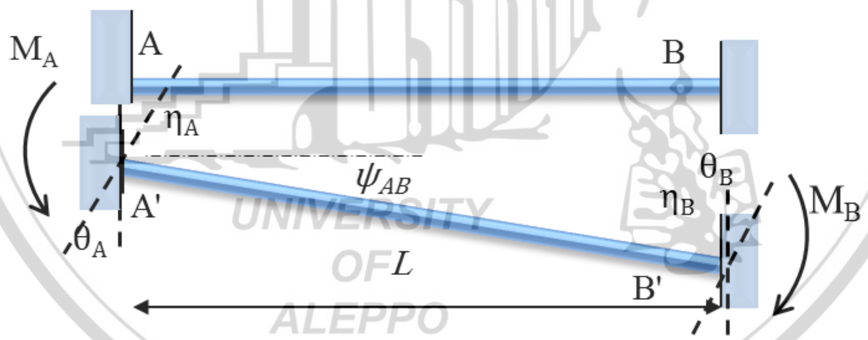
$$y_m = -\left[- \frac{14.65}{EI}\left(3 - \frac{1.52}{3} + 2.25\right) + \frac{13.84}{EI}\left(2.25 + \frac{1.48}{3}\right) + \frac{21.04}{EI} . \frac{2}{3}\ 2.25 \right] = 0$$

رسم الخط المرن بالمقارنة مع مخطط عزم الانعطاف:



٣-٣-٢ الحالة الثانية: الجائز الموثوق من الطرفين بوثاقات غير تامة (المساند غير ثابتة والصلابة الانعطافية ثابتة) .

تخضع مساند الجائز الموثوق من الطرفين لحركات انتقالية ودورانية بدون وجود حمولات خارجية، وتكون صلابته الانعطافية EI ثابتة على كامل طوله والموضحة في الشكل رقم (٣-١٥).

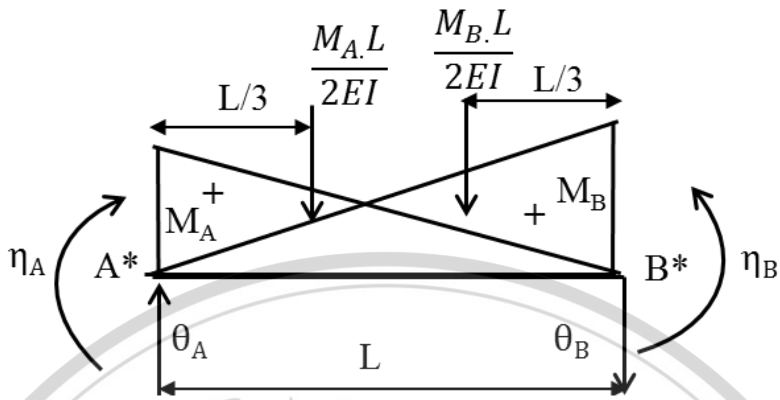


الشكل رقم (٣-١٥) مخطط توضيحي للجائز الموثوق من الطرفين

فلو فرضنا أن الوثاقتين A،B تخضعان لتأثير حركة انتقالية موجبة (نحو الأسفل) η_A،η_B ، وكذلك تخضعان لتأثير حركة دورانية موجبة (مع عقارب الساعة) θ_A،θ_B ، والذي يتولد عنهما عزوم وثاقة في كل من B و A .

بالاعتماد على نظرية الجائز البديل يمكننا استنتاج عزمي الوثاقة في كل من B، A بعد تعويض قيمة الانتقال في الوثاقات بعزوم في الجائز البديل والدورانات بقوى قاطعة؛ وكذلك تعويض حمولة مخططات عزم الانعطاف الناتجة عن عزوم الوثاقة في

كل من A ،B المتولدة عن حركة المساند (حيث يتم رسم مخطط عزم الانعطاف الناتج عن عزم الوثاقة في المسندين A و B) والموضح في الشكل رقم (٣-١٦).



الشكل رقم (٣-١٦)

من مخطط الجائز البديل يمكننا استخدام معادلات توازن العزوم في كل من A^* , B^* وإيجاد قيمة عزوم الوثاقات في المساند على النحو التالي :

$$\Sigma MB^* = 0$$

$$\eta_A + \theta_A . l - \frac{M_A . l}{2\,EI}\left(\frac{2\,l}{3}\right) - \frac{M_B\, .\, l}{2\,EI}\frac{l}{3} - \eta_B = 0$$

$$(3-8) \qquad \eta_A - \eta_B + \theta_A . l - \frac{2\,MA\, .\, l^2}{6\,EI} - \frac{MB\, .\, l^2}{6\,EI} = 0$$

$$\Sigma MA^* = 0 \Rightarrow \eta_A + \frac{MA\, .\, l}{2\,EI}\frac{l}{3} + \frac{MB\, .\, l}{2\,EI}\frac{2\,l}{3} + \theta_B . l - \eta_B = 0$$

$$(3-9) \qquad \eta_A - \eta_B + \theta_B . l + \frac{MA\, .\, l^2}{6\,EI} + \frac{2\,MB\, .\, l^2}{6\,EI} = 0$$

بحل المعادلتين $(3-8)$ و $(3-9)$ حلاً مشتركا نستنتج قيمة كل من عزمي الوثاقة MA و MB

حيث نضرب العلاقة رقم (3-8) بـ (2) ونجمعها مع العلاقة رقم (3-9) فنحصل على العلاقة التالية:

$$2\,(\eta_A - \eta_B) + 2\,\theta_A . l - \frac{4\,MA.\,l^2}{6\,EI} - \frac{2\,MB.\,l^2}{6\,EI} = 0$$

$$3\,(\eta_A - \eta_B) + \theta_B . l + 2\,\theta_A . l - \frac{3\,MA.\,l^2}{6\,EI} = 0$$

بتقسيم حدود المعادلة على المجاز l:

$$\frac{3\,(\,\eta_A - \eta_B)}{l} + \theta_B + 2\theta_A = \frac{MA\, .\, l}{2\,EI}$$

$$MA = \frac{2\,EI}{l}\left[2\,\theta_A + \theta_B - 3\,\frac{(\eta_B - \eta_A)}{l}\right]$$

بفرض الحد:

$$\psi_{AB} = \frac{\eta_B - \eta_A}{l}$$

$$(3-10) \qquad MA = \frac{2\,EI}{l}\left[2\theta_A + \theta_B - 3\psi_{AB}\right]$$

نضرب المعادلة رقم (3-9) بالعدد 2 ونجمعها مع المعادلة رقم (3-8).

$$2\,(\eta_A - \eta_B) + 2\theta_B\,.\,l + \frac{2\,MA.\,l^2}{6EI} + \frac{4\,MB.\,l^2}{6\,EI} = 0$$

$$3\,(\eta_A - \eta_B) + \theta_A\,.\,l + 2\,\theta_B\,.\,l + \frac{3\,MB.\,l^2}{6\,EI} = 0$$

بتقسيم حدود المعادلة على طول الجائز l، تصبح العلاقة السابقة:

$$\frac{3\,(\eta_A - \eta_B)}{l} + \theta_A + 2\theta_B + \frac{MB\,.\,l}{2\,EI} = 0$$

$$(3-11) \qquad MB = -\frac{2\,EI}{l}\left[2\theta_B + \theta_A - 3\psi_{AB}\right]$$

ملاحظة: تعبر العلاقتان (3-10) و (3-11) عن قيم عزوم الوثاقات الناتجة عن حركة المساند في الجائز الموثوق من الطرفين.

وفي حال وجود حمولات خارجية مع وجود حركة في المساند تصبح العلاقة العامة للجائز الموثوق من الطرفين هي:

$$(3-12) \qquad MA = -\frac{2}{l}(2\,RA^* - RB^*) + \frac{2\,EI}{l}\left[2\theta_A + \theta_B - 3\psi_{AB}\right]$$

$$(3-13) \quad MB = -\frac{2}{l}(2\,RB^* - RA^*) - \frac{2\,EI}{l}\left[2\,\theta_B + \theta_A - 3\psi_{AB}\right]$$

ملاحظة:

في حال وجود انتقالات ودورانات في الوثاقات إضافة للحمولات الخارجية فإنه يمكننا تقسيم المسألة إلى قسمين:

القسم الأول: يخضع لتأثير الحمولات الخارجية فقط.

القسم الثاني: يخضع لتأثير الانتقالات فقط

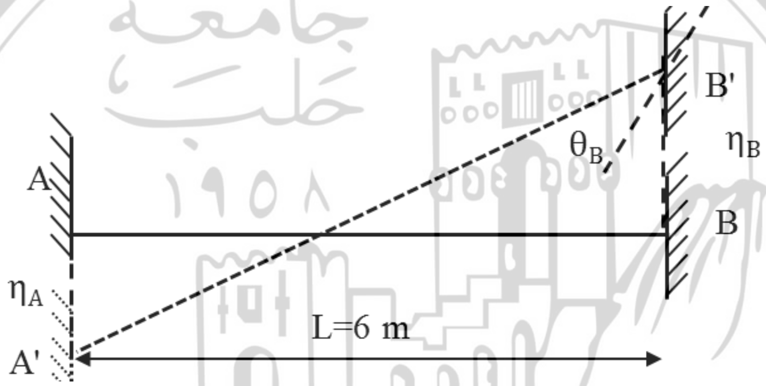
ويكون العزم المحصّل هو مجموع العزمين الناتجين عن الحمولات والانتقالات أو نلجأ لاستخدام الحالة العامة الواردة في العلاقتين (3-12) و (3-13)

مثال: جائز موثوق من الطرفين طوله L=6 meter، تعاني الوثاقة A من هبوط مقداره: 2 mm، وتخضع الوثاقة B لتأثير انتفاخ مقداره 3mm ودوران مقداره °2 درجة. والمطلوب:

١. حساب قيمة عزوم الوثاقة في: A،B .

٢. إيجاد ردود الأفعال ورسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف

إذا علمت أن قيمة الصلابة الانعطافية تساوي $EI = 1500\ t.m^2$.



الحل:

$$\eta_A = +2\ mm, \quad \eta_B = -3\ mm, \quad \theta_B = 2^\circ, \quad \theta_A = 0$$

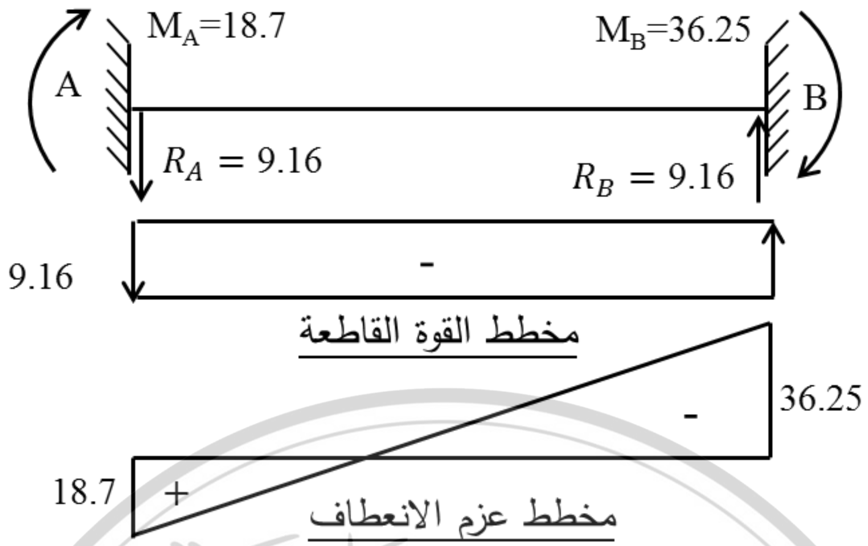
بتحويل زاوية دوران المسند (B) θ_B إلى الراديان .

$$\theta_B = \frac{2 \times \pi}{180} = 0.035 \quad radian$$

$$\psi_{AB} = \frac{\eta_B - \eta_A}{l} = \frac{-3-2}{6000} = -\frac{5}{6000}$$

$$MA = \frac{2 \times 1500}{6}\left[0 + 0.035 - 3\left(\frac{-5}{6000}\right)\right] = 18.7 \quad t.m$$

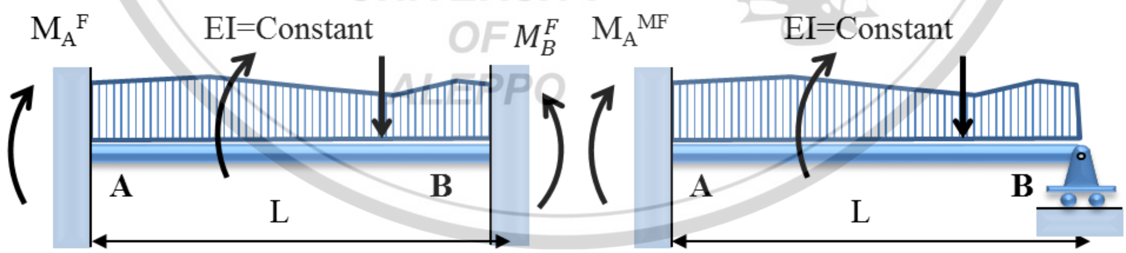
$$MB = \frac{-2 \times 1500}{6}\left(0.07 + 0 + \frac{15}{6000}\right) = -36.25 \quad t.m$$



٣-٤ العلاقة بين عزوم الوثاقات التامة في الجائز الموثوق من الطرفين، والجائز الموثوق والمسنود الناتجة عن الحمولات الخارجية فقط

يطلق في بعض الأحيان على مفهوم عزم الوثاقة في الجائز الموثوق والمسنود عزم الوثاقة المعدل، حيث يمكننا إيجاد عزم الوثاقة المعدل بالاعتماد على عزوم الوثاقة التامة لجائز موثوق من الطرفين له نفس مواصفات الجائز الأصلي من حيث الأطوال والحمولات والمساند، باستثناء أحد الوثاقات في الجائز الموثوق من الطرفين تحولت إلى مسند بسيط (حالة الجائز الموثوق والمسنود).

من العلاقات النظرية للجائز الموثوق والمسنود والجائز الموثوق من الطرفين وجدنا أن:



الشكل رقم (٣-١٧)

$$MA^{MF} = -\frac{3}{l} RA^* \ , \qquad M_A^F = -\frac{2}{l}\,(\,2\,RA^* - RB^*\,)$$

$$M_B^F = -\frac{2}{l}\,(\,2\,RB^* - RA^*\,)$$

بفرض أن: العزوم الموجبة هي العزوم التي تسبب شداً في الألياف السفلية كما هي موضحة في الشكل رقم (٣-١٧).

من علاقتي الجائز الموثوق من الطرفين لو قسمنا عزم الوثاقة في B على 2، وجمعناه مع عزم الوثاقة في A لنتج لدينا:

$$MA + \frac{MB}{2} = -\frac{2}{l}(2\,RA^{*} - RB^{*}) - \frac{1}{l}\;(2\,RB^{*} - RA^{*})$$

$$MA + \frac{MB}{2} = -\frac{4\,RA^{*}}{l} + \frac{2\,RB^{*}}{l} - \frac{2\,RB^{*}}{l} + \frac{RA^{*}}{l}$$

$$MA + \frac{MB}{2} = -\frac{3\,RA^{*}}{l} = MA^{MF}$$

العلاقة التي تربط بين عزوم الوثاقات التامة لجائز موثوق من الطرفين وعزم الوثاقة المعدل لجائز موثوق ومسنود هي:

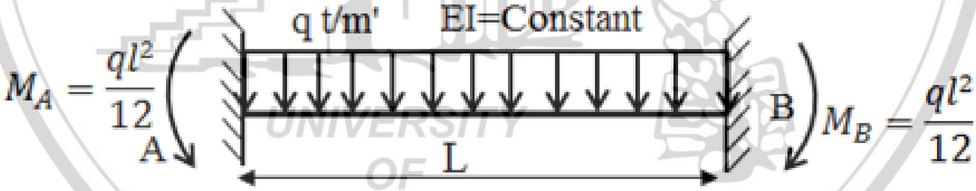
$$MA^{MF} = MA + \frac{MB}{2} \qquad (3-14)$$

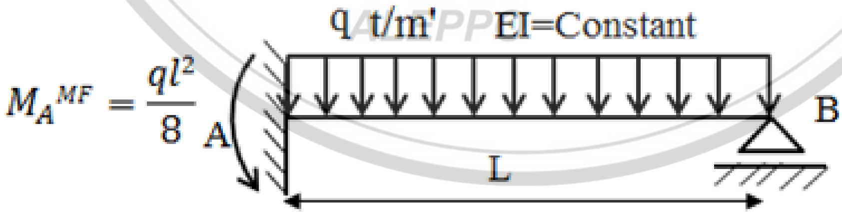
مثال: أوجد قيمة عزم الوثاقة المعدل لجائز موثوق ومسنود إذا علمت أن قيمة عزوم الوثاقة لجائز موثوق من الطرفين هي على الشكل التالي:

$$MA = MB = -\frac{ql_{2}}{12}$$

$$MA^{MF} = MA + \frac{MB}{2}$$

$$MA^{MF} = -\frac{ql^{2}}{12} + \left(-\frac{ql^{2}}{24}\right) = -\frac{ql^{2}}{8}$$





الفصل الرابع

معادلة العزوم الثلاثة (الجوائز المستمرة)

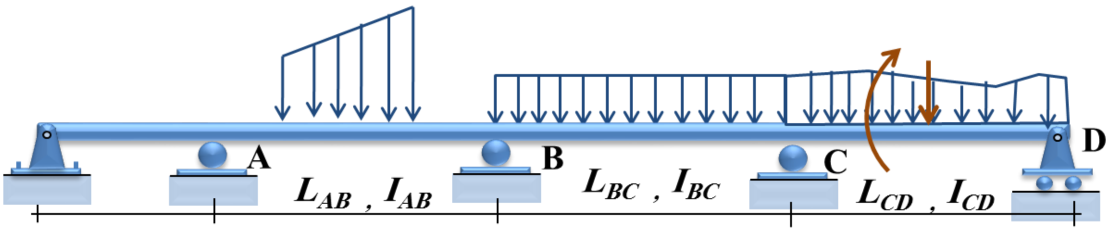
Three Moments Equation (Continuous Beams)

٤–١ مقدمة: Preface

الغاية من هذه النظرية هي إيجاد قيمة العزوم في المساند الداخلية للجوائز المستمرة أو في المساند الموثوقة.

لقد تم تقديم هذه النظرية من العالم Clapeyron in 1857, التي تؤمن وسيلة ملائمة لتحليل الجوائز المستمرة، تعتمد هذه النظرية على شرط التوافق في استمرارية ميل الخط المرن في المساند الداخلية للجوائز المستمرة، وتحتوي المعادلة على ثلاثة عزوم انعطاف لثلاثة مساند متجاورة التي كانت سببا مباشرا في تسمية هذه النظرية. وعند استخدام هذه النظرية في تحليل الجمل غير المقررة فإننا نعتبر أن العزوم في المساند الداخلية

والوثاقات هي مجاهيل فائضة، ويتم الاستعانة بنظرية العزوم الثلاثة في إيجاد العزوم المجهولة في تلك المساند الداخلية بتطبيق شرط التوافق.



الشكل رقم (٤-١)

بعد إيجاد قيمة العزوم في المساند الداخلية لهذه الجوائز المستمرة يمكننا فصل كل فتحة مع عزومها الداخلية وحمولاتها واعتبارها جائزا بسيطا مقرراً، حيث يمكن إيجاد ردود الأفعال ورسم مخططات القوى الداخلية وحساب الانتقال والدوران في كافة مقاطع هذا الجائز.

يوجد عدّة حالات لدراسة الجوائز المستمرة وسوف نقتصر في دراستنا الحالية على الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: المساند ثابتة لا تعاني من أي انتقال شاقولي.

الحالة الثانية: وجود انتقالات شاقولية في المساند. لذلك سوف نقوم بدراسة كل حالة بشكل منفرد.

٤-٢ الحالة الأولى: المساند ثابتة لا تعاني من أي انتقال شاقولي.

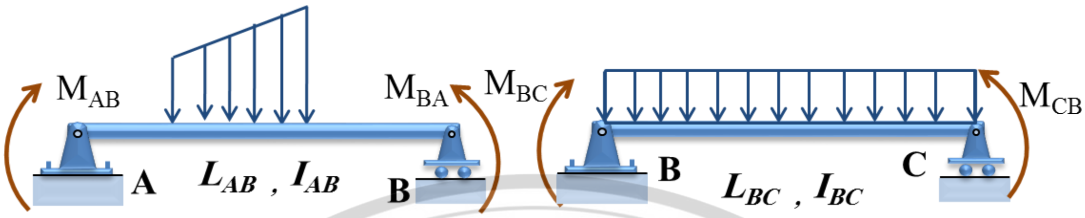
الجائز المستمر يتعرض لتأثير حمولات خارجية فقط مع مساند لا تعاني من أي انتقال شاقولي. بفرض أن عطالات وأطوال هذا الجائز موضحة على الشكل رقم (٤-١) المطلوب استنتاج علاقة العزوم الثلاثة الخاصة بالجوائز المستمرة.

العمل: نقوم بعزل الفتحتين الداخلتين AB ،BC حيث نقوم بتعويض قيمة عزوم الاستمرار في المسندين A،C بالاتجاه الموجب (شد ألياف سفلية) كما هو موضح في الشكل رقم (٤-٢).

نقوم بحساب الدوران في المسند الوسطي B من الفتحة AB، ثم نقوم بحساب الدوران في المسند الوسطي B من الفتحة BC وبنتيجة استمرارية الجائز عند المسند B تكون قيمة الدوران الناتجة عن الفتحتين متساوية.

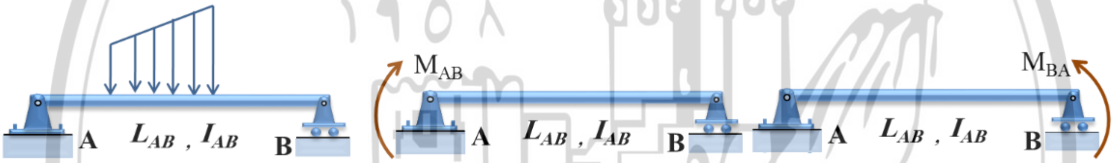
ونتيجة لهذا التساوي نستنتج علاقة العزوم الثلاثة للجوائز المستمرة.

العمل: نفصل كل فتحة بشكل منفرد ونعوض عزوم الاستمرار في المساند الداخلية،



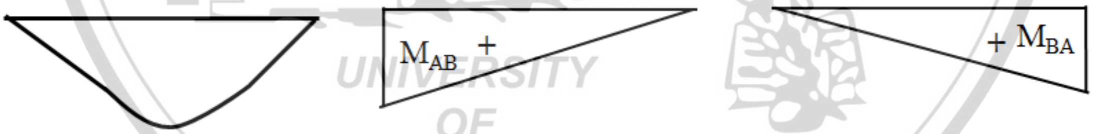
الشكل رقم (٤-٢)

لإيجاد قيمة الدوران في المسند B من الفتحة AB نستخدم نظرية الجائز البديل معتمدين على مبدأ تنضد الآثار ، وبذلك يمكننا تجزئه الفتحة AB كما هو موضح في الشكل رقم (٤-٣).



الشكل رقم (٤-٣)

نرسم مخطط عزم الانعطاف لمختلف حالات التحميل.



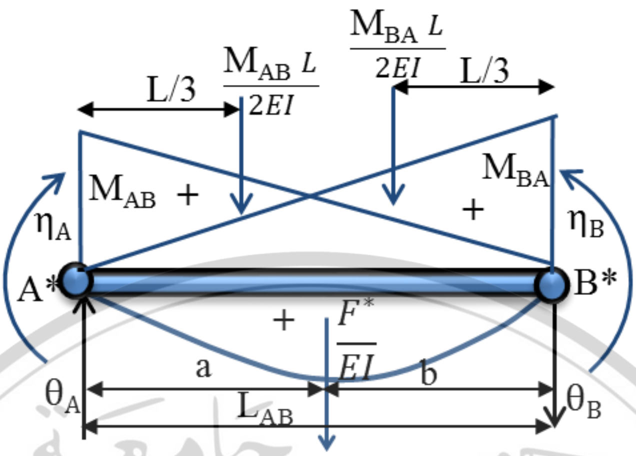
نحمل مخطط عزم الانعطاف مقسوماً على EI على الجائز البديل كما هو موضح في الشكل رقم (٤-٤).

حيث تعبر F^* عن مساحة مخطط عزم الانعطاف الناتج عن الحمولات الخارجية فقط لجائز بسيط. لحساب الدوران في B نأخذ مجموع العزوم حول المسند .

$$\sum MA^* = 0 \Longrightarrow$$

$$\theta_B . l_{AB} + \frac{MB.l_{AB}}{2\,(EI)_{AB}} \cdot \frac{2\,l_{AB}}{3} + \frac{F_{AB}}{(EI)_{AB}} \cdot a + \frac{MB.l_{AB}}{2\,(EI)_{AB}} \cdot \frac{l_{AB}}{3} = 0$$

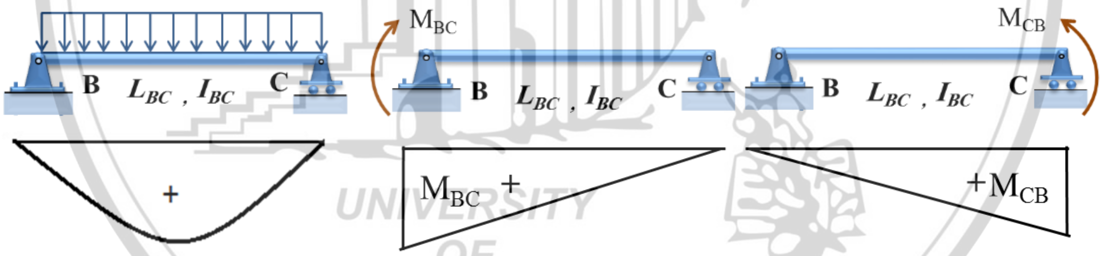
بتقسيم العلاقة على طول الفتحة L نحصل على قيمة الدوران في المسند B الناتج عن الفتحة AB.



الشكل رقم (٤-٤)

$$(4-1)\qquad -\theta_B=\frac{2\,MB.l_{AB}}{6\,(EI)_{AB}}+\frac{F_{AB}}{(EI)_{AB}}\frac{a}{l_{AB}}+\frac{MA.l_{AB}}{6\,(EI)_{AB}}$$

وبنفس الأسلوب نحسب الدوران في المسند B الناتج عن الفتحة BC باستخدام نظرية الجائز البديل والاعتماد على مبدأ تنضد الآثار في تجزئة الحمولات ومخططات عزم الانعطاف الناتجة عنها.



لحساب الدوران في المسند B نأخذ العزوم حول المسند C .

$$\sum M_C\ =0\Rightarrow$$

$$\theta_B.l_{BC}\ -\frac{MB\cdot l_{BC}}{2\,(EI)_{BC}}\cdot\frac{2\,l_{BC}}{3}-\frac{F_{BC}}{(EI)_{BC}}\cdot d+\frac{M_C.l_{BC}}{2\,(EI)_{BC}}\ \frac{l_{BC}}{3}\ =0$$

$$(4-2)\qquad \theta_B=\frac{2\,MB\cdot l_{BC}}{6\,(EI)_{BC}}+\frac{F_{BC}}{(EI)_{BC}}\cdot\frac{d}{l_{BC}}+\frac{M_C\,.l_{BC}}{6\,(EI)_{BC}}$$

بمساواة العلاقتين $(4-1)$ و $(4-2)$ نجد:

$$\frac{2\,MB.l_{BC}}{6\,(EI)_{BC}}+\frac{F_{BC}.d}{(EI)_{BC}.l_{BC}}+\frac{M_C\,.l_{BC}}{6\,(EI)_{BC}}$$
$$=-\frac{2\,MB.l_{AB}}{6\,(EI)_{AB}}-\frac{F_{AB}.a}{(EI)_{AB}.l_{AB}}-\frac{MA.l_{AB}}{6\,(EI)_{AB}}$$

بوضع قيمة عزوم المساند في طرف والحمولات الخارجية في طرف آخر نحصل على العلاقة التالية:

$$(4-3) \quad \frac{MA.\,l_{AB}}{6\,(EI)_{AB}} + \frac{2\,MB}{6}\left(\frac{l_{BC}}{(EI)_{BC}} + \frac{l_{AB}}{(EI)_{AB}}\right) + \frac{2\,M_C\,.\,l_{BC}}{6\,(EI)_{BC}} = -\frac{F_{AB}.\,a}{(EI)_{AB}.\,l_{AB}} - \frac{F_{BC}.\,d}{(EI)_{BC}.\,l_{BC}}$$

بتعويض قيمة:

$$\frac{F_{AB}.\,a}{l_{AB}} = R^*_{Bl}$$

بما يساويها والتي تساوي إلى رد الفعل في المسند B للفتحة AB، والناتجة عن حمولة مخطط عزم الانعطاف الناتجة عن الحمولات الخارجية فقط لجائز بسيط. وكذلك بالنسبة للفتحة: BC، وكذلك بتعويض قيمة:

$$\frac{F_{BC}.\,d}{l_{BC}} = R^*_{Br}$$

بما يساويها والتي تساوي إلى رد الفعل في المسند B للفتحة BC، والناتجة عن حمولة مخطط عزم الانعطاف لجائز بسيط والناتجة عن الحمولات الخارجية فقط.

بعد تعويض قيمة ردود الأفعال الوهمية في العلاقة (4-3) لتصبح العلاقة:

$$(4-4) \quad \frac{MA.\,l_{AB}}{(EI)_{AB}} + 2\,M_B\left(\frac{l_{BC}}{(EI)_{BC}} + \frac{l_{AB}}{(EI)_{AB}}\right) + \frac{M_C.\,l_{BC}}{(EI)_{BC}} = -6\left(\frac{R^*_{Bl}}{(EI)_{AB}} + \frac{R^*_{Br}}{(EI)_{BC}}\right)$$

وتعبر هذه العلاقة عن قيمة العزوم في مساند الجوائز المستمرة الناتجة عن الحمولات الخارجية فقط.

٤-٢-١ حالات خاصة: Special Cases

الحالة الأولى

إذا كانت جميع الفتحات مؤلفة من مادة واحدة (عندما تكون قيمة E متساوية) تصبح العلاقة $(4-4)$ على النحو التالي:

$$(4-5) \quad \frac{MA.\,l_{AB}}{I_{AB}} + 2\,M_B\left(\frac{l_{AB}}{I_{AB}} + \frac{l_{BC}}{I_{BC}}\right) + M_C\,\frac{l_{BC}}{I_{BC}} = -6\left(\frac{R^*_{Bl}}{I_{AB}} + \frac{R^*_{Br}}{I_{BC}}\right)$$

٤-٢-١ حالات خاصة: Special Cases

الحالة الثانية

إذا كان مقطع الجائز متساويا في جميع فتحاته، عندما تكون قيمة I ثابتة لجميع الفتحات إضافة لتحقيق الشرط الوارد في الحالة الأولى تصبح العلاقة السابقة على النحو التالي:

$$(4-6)\ \ MA.l_{AB} + 2\,M_B(l_{AB} + l_{BC}) + M_C.l_{BC} = -6(R^*_{Bl} + R^*_{Br})$$

٤-٢-٢إجراءات التحليل: Analyzing Procedures

لإيجاد قيمة العزوم في المساند الداخلية لجائز مستمر على خمسة مساند ABCDE بأطوال فتحات l_1 و l_2 و l_3 و l_4 وكذلك العطالات، نتبع ما يلي:

- نبدأ بأول فتحتين ABC.

$$MA\cdot\frac{l_1}{I_1} + 2\,M_B\left(\frac{l_1}{I_1}+\frac{l_2}{I_1}\right) + M_C\,\frac{l_2}{I_2} = -6\left(\frac{R^*_{Bl}}{I_1}+\frac{R^*_{Br}}{I_2}\right)$$

- ننزلق مسندا نحو اليمين ونأخذ الفتحين BCD.

$$MB\cdot\frac{l_2}{I_2} + 2\,M_C\left(\frac{l_2}{I_2}+\frac{l_3}{I_3}\right) + M_D\,\frac{l_3}{I_2} = -6\left(\frac{R^*_{Cl}}{I_2}+\frac{R^*_{Cr}}{I_3}\right)$$

- ننزلق مسندا آخرا نحو اليمين أيضاً ونأخذ الفتحين CDE.

$$M_C\cdot\frac{l_3}{I_3} + 2\,M_D\left(\frac{l_3}{I_3}+\frac{l_4}{I_4}\right) + M_E\,\frac{l_4}{I_4} = -6\left(\frac{R^*_{Dl}}{I_3}+\frac{R^*_{Dr}}{I_4}\right)$$

ملاحظة:

- يجب أن تكون بداية المعادلة الأولى بالمسند الأول ونهاية المعادلة الأخيرة بالمسند الأخير.
- نلاحظ: أننا استخدمنا هنا ثلاثة علاقات من علاقات الجوائز المستمرة والمجاهيل هنا هي: M_B، M_C،M_D ، وباعتبار أن المسندين E و A هي مساند بسيطة خارجية فإن قيمة العزمين M_E و M_A تكون معدومة.

أي: $M_A = M_E = 0$ بحل جملة ثلاثة معادلات بثلاثة مجاهيل نحصل على قيمة العزوم في المساند الداخلية.

عدد المعادلات اللازمة = إلى عدد المساند البسيطة −2.

- في حال وجود ثلاثة مساند بسيطة يلزمنا معادلة واحدة.
- في حال وجود خمسة مساند بسيطة يلزمنا ثلاثة معادلات.

لإيجاد قيمة ردود الأفعال الوهمية R^*

الذي يعبّر عن الطرف الأيمن لمعادلة العزوم الثلاثة نتبع ما يلي:

١) نعزل كل فتحة مع حمولاتها الخارجية ونعتبرها جائز بسيط.

٢) نرسم مخطط عزم الانعطاف الناتج عن الحمولات الخارجية لهذا الجائز البسيط.

٣) نعتبر مخطط عزم الانعطاف عبارة عن حمولة وهمية خارجية نحملها على جائز بسيط مسنود على مسندين بسيطين.

* إذا كان مخطط عزم الانعطاف موجب يكون اتجاه التحميل نحو الأسفل.

٤) نوجد رد الفعل الناتج عن حمولة مخطط عزم الانعطاف.

نفرض اتجاه رد الفعل نحو الأعلى والإشارة الناتجة نعوضها في العلاقة.

٤-٢-٣ أمثلة وتطبيقات عملية: Examples

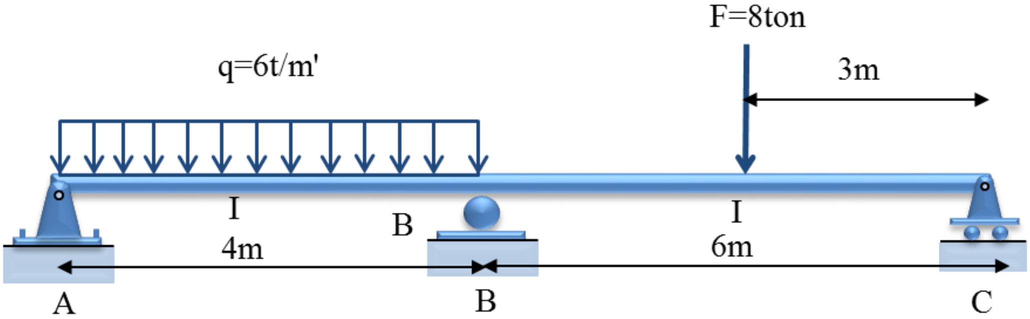
مثال (١): جائز مستمر على ثلاثة مساند بسيطة ABC يتعرض لتأثير الحمولات الموضحة بالشكل فإذا كانت الصلابة الانعطافية ثابتة (EI = constant)، والمطلوب:

١. قرر هذا الجائز بالاعتماد على علاقة العزوم الثلاثة.

٢. أوجد ردود الأفعال وارسم مخططات القوى القاطعة وعزوم الانعطاف.

الحل: باعتبار أنه يوجد لدينا ثلاثة مساند فيلزمنا معادلة واحدة فقط.

$$MA.\, l_{AB} + 2\, MB\, (\, l_{AB} + l_{BC}\,) + \ M_C\ \ l_{BC} = -6\, (\, R^*_{Bl} + R^*_{Br}\,)$$



بما أن C و A مساند بسيطة خارجية لا تخضع لتأثير عزوم خارجية فإن قيمة العزوم في كل منهما تساوي الصفر $MA = MC = 0$، وتصبح العلاقة السابقة.

$$2\,MB\,(4+6) = -6\,(R^*_{Bl} + R^*_{Br}) \Rightarrow 20\,MB = -6\,(R^*_{Bl} + R^*_{Br})$$

لنوجد قيمة R^* الواردة في الطرف الأيمن للعلاقة نتبع ما يلي:

١. نعزل كل فتحة مع حمولاتها الخارجية.

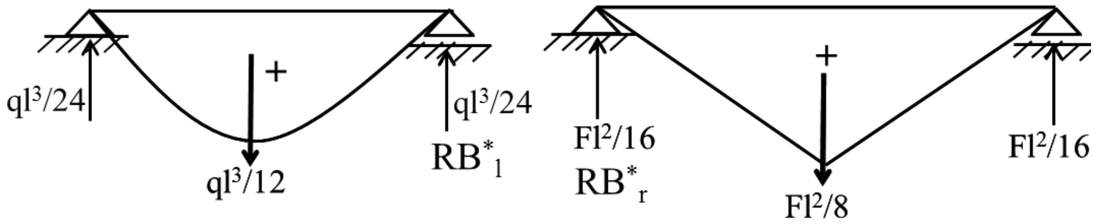
٢. نرسم مخطط عزم الانعطاف لكل فتحة.

* يمكن اللجوء إلى مبدأ تنضد الآثار إذا كانت الحمولات معقدة.

٣. نعتبر مخطط عزم الانعطاف عبارة عن حمولة خارجية أو ما يسمى بالحمولة الوهمية، ونحملها على جائز بسيط ونوجد ردود الأفعال لهذا الجائز (ردود الأفعال الوهمية).

٤. نعوض قيم ردود الأفعال الوهمية بعلاقة العزوم الثلاثة.

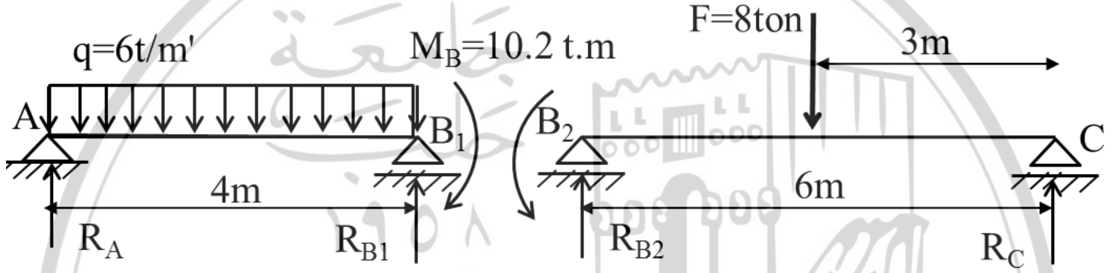
٥. نعوض قيمة العزم MB مع اتجاهه (شد ألياف علوية) في الجائز المستمر ذو الفتحتين كما هو مبين في الشكل رقم (٤-٥)



$$20\,MB = -6(16+18) = -204$$

$$MB = -\frac{204}{20} = -10.2\ t.m$$ شد ألياف علوية

٦. من أجل ايجاد ردود الأفعال ورسم مخططات القوى الداخلية نفصل كل فتحة مع الحمولات الخارجية وعزوم الاستمرار للمساند الداخلية التي تم ايجادها من الطلب الأول.



الشكل رقم (٤-٥)

a) نوجد ردود الأفعال بالاعتماد على مبدأ تنضد الآثار حيث نوجد ردود الأفعال الناتجة عن الحمولات الخارجية وردود الأفعال الناتجة عن عزوم المساند كما هو موضح في الجدول رقم (٤-١).

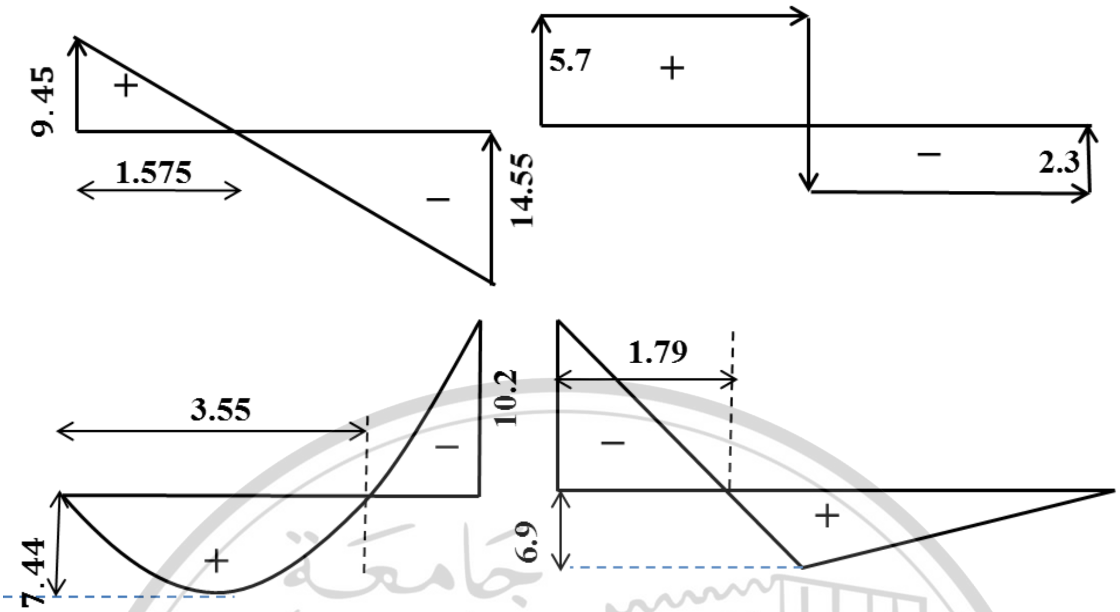
الجدول رقم (٤-١) ردود الأفعال في المساند

A	B_1	B_2	C	المسند
12↑	12↑	4↑	4↑	رد فعل الحمولة
-2.55↓	2.55↑	1.7↑	-1.7↓	رد فعل المزدوجة
9.45↑	14.55↑	5.7↑	2.3↑	رد الفعل المحصل
R_A=9.45↑	R_B=14.55+5.7=20.25↑		R_C=2.3↑	

b) نرسم مخطط القوى القاطعة لكل فتحة.

c) نرسم مخطط عزم الانعطاف لكل فتحة.

لإيجاد قيمة العزم الأعظمي في الفتحة AB نعدم معادلة القوى القاطعة أو نعتمد على تشابه المثلثات في مخطط القوى القاطعة.



$$M_x = 9.45x - 6\,\frac{x^2}{2} \Longrightarrow$$
$$T_x = 9.45 - 6x = 0 \Longrightarrow x = 1.575$$
$$M_{max} = 9.45 * 1.575 - 3 * 1.575^2 = 7.44\ t.m$$

نوجد نقطة انعدام العزم في الفتحة AB

$$M = 0 \Longrightarrow 9.45x - 3x^2 = 0 \Longrightarrow x = \frac{9.45}{3} = 3.15$$

لإيجاد قيمة العزم الأعظمي في الفتحة BC, من معادلة القوى القاطعة يكون موقع العزم الأعظمي تحت تأثير الحمولة المركزة F ، وبالتالي نوجد قيمة العزم الأعظمي عندما تكون قيمة 3 = x .

$$M = 2.3x \Longrightarrow M_{max} = 6.9\ \ t.m$$

لإيجاد موقع انعدام العزم في المجال التالي.

$$M = 10.2 + 5.7\,x = 0 \Longrightarrow x = 1.79$$

٤-٢-٤ حالات خاصة: Special Cases

الحالة الثالثة: عندما يكون أحد المساند الخارجية مسنداً موثوقاً

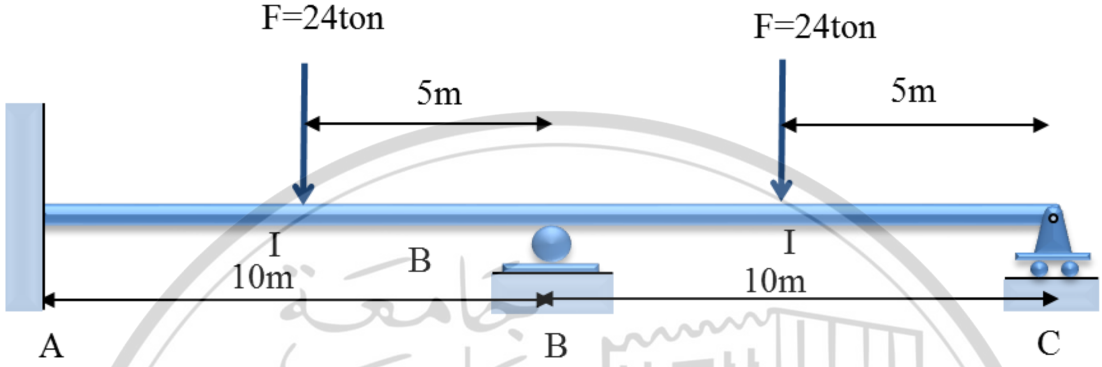
نستبدل الوثاقة بمسندين بسيطين المسافة بينهما تنتهي إلى الصفر والعطالة بينهما تنتهي إلى اللانهاية.

$$l_0 \rightarrow 0 \qquad I_0 \rightarrow \infty$$

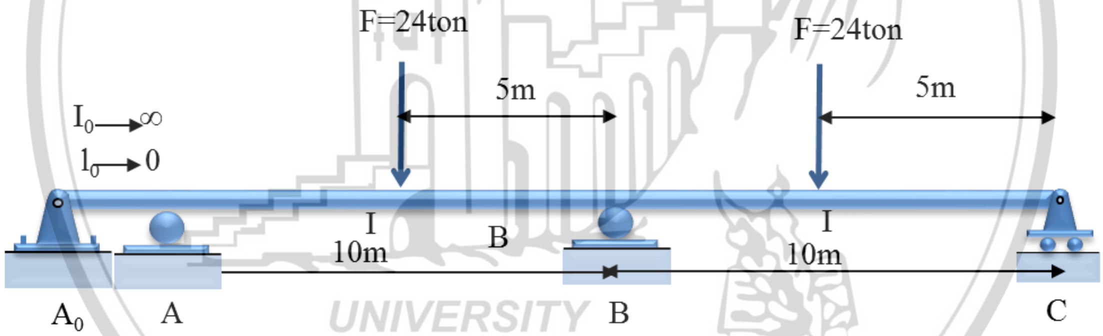
مثال (٢): جائز مستمر بفتحتين يستند على مسندين بسيطين في C , B وموثوق في A, ذو صلابة انعطافيه ثابتة EI=Constant، المطلوب:

١. قرر هذا الجائز بالاعتماد على معادلة العزوم الثلاثة.

٢. أوجد ردود الأفعال وارسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف.



هذا الجائز غير مقرر خارجياً من الدرجة الثانية ذلك يكون عدد المعادلات اللازمة هو: $(4-2=2)$ حيث يتم استبدال الوثاقة بمسندين بسيطين فيصبح شكل الجائز كما هو مبين في الشكل رقم (٤-٦)



الشكل رقم (٤-٦)

نأخذ أول ثلاثة مساند وهي: A_0 , A , B ونكتب معادلة العزوم الثلاثة .

$$M_{A0}\frac{l_0}{I_0}+2\,MA\left(\frac{l_0}{I_0}+\frac{10}{I}\right)+MB\,\frac{10}{I}=-6\left(\frac{R^*_{Al}}{I_0}+\frac{R^*_{Ar}}{I}\right)$$

نعدم الحدود التي تحتوي على l_0, I_0 فتصبح العلاقة بالشكل:

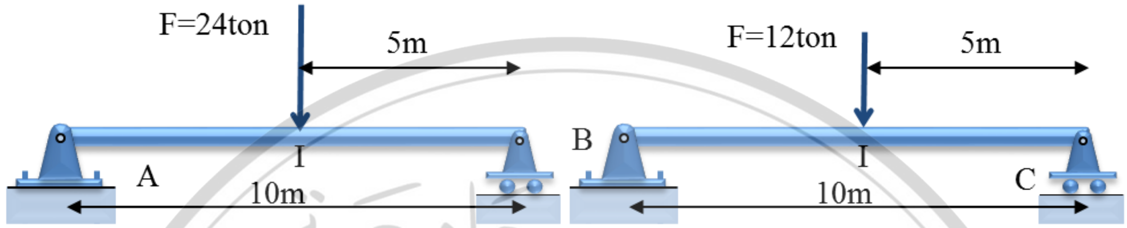
$$\frac{20\,MA}{I}+\frac{10\,MB}{I}=-6\,\frac{R^*_{Ar}}{I}$$

$$20\,MA+10\,MB=-\,6\,R^*_{Ar}$$

ننزلق مسند نحو اليمين ونكتب معادلة العزوم الثلاثة للمساند ABC. بما أن المسند C مسند خارجي فإن قيمة: $M_C=0$

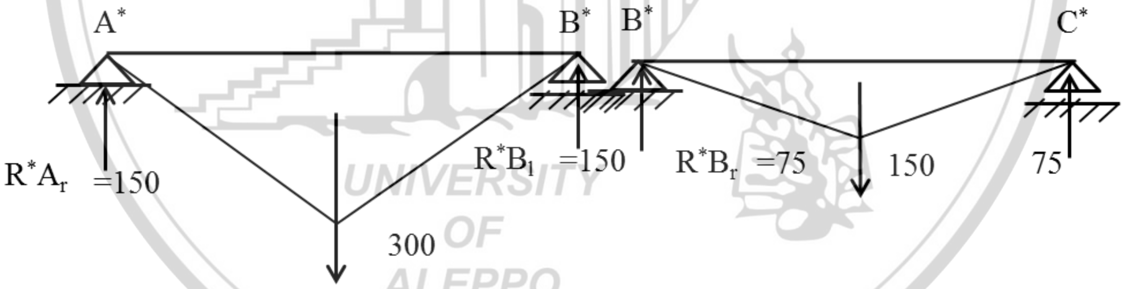
$$M_A\,\frac{10}{I} + 2\,MB\left(\frac{10}{I}+\frac{10}{I}\right) + M_C\,\frac{10}{I} = -6\left(\frac{R^*_{Bl}}{I}+\frac{R^*_{Br}}{I}\right)$$
$$10\,MA + 40\,MB = -\ 6\,(R^*_{Bl} + R^*_{Br})$$

ثانياً: نوجد الحد الأيمن من العلاقة وهي ردود الأفعال الوهمية في كل من المسندين A , B حيث نفصل الجائز المستمر إلى فتحات مستقلة محملة بالحمولات الخارجية فقط.



. نرسم مخطط عزم الانعطاف لهذه الفتحات.

تعتبر هذه المخططات حمولة وهمية (مرنة) خارجية محملة على جائز بسيط، ونوجد ردود الأفعال الوهمية R*.



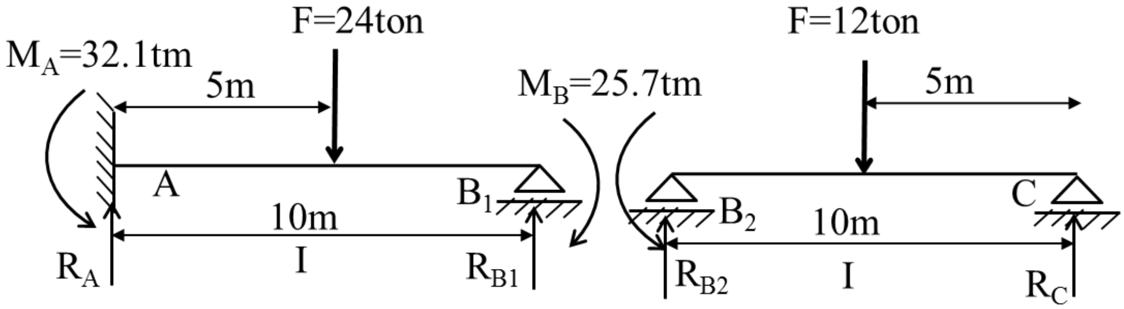
نضرب المعادلة (2) بـ (−2) ونجمعها مع المعادلة رقم (1) .

$$-20\,MA - 80\,MB = 2700$$
$$0 - 70\,MB = 1800 \quad \rightarrow \quad MB = -25.7$$

نضرب المعادلة (1) بـ (−4) ونجمعها مع المعادلة رقم (2)

$$-80\,MA - 40\,MB = 3600$$
$$-70\,MA = 2250 \quad \rightarrow\ MA = -32.1$$

بعد إيجاد قيمة العزوم في الوثاقة والمسند الداخلي يمكننا إيجاد ردود الأفعال لكل فتحة بشكل مستقل مع الأخذ بعين الاعتبار قيمة عزوم المساند إضافة للحمولات الخارجية كما هو مبين في الشكل رقم (٤−٧) والجدول رقم (٤−٢).



الشكل رقم (٤-٧)

الجدول رقم (٤-٢) قيم ردود الأفعال في المساند

المسند	C	B_2	B_1	A
رد فعل الحمولة الخارجية	6↑	6↑	12↑	12↑
رد فعل المزدوجة	-2.57↓	2.57↑	-0.64↓	0.64↑
رد الفعل المحصل	3.43↑	8.57↑	11.36↑	12.64↑
	R_C=3.43↑	R_B=11.36+8.57=19.93↑		R_A=12.64↑

نرسم مخططي القوى القاطعة وعزم الانعطاف بالاعتماد على ردود الافعال والحمولات الخارجية وعزم المساند ثم نوجد قيم نقاط انعدام عزم الانعطاف والنهايات العظمى له.

أولا: الفتحة AB

$$M_1 = -32.1 + 12.64 \, . x_1 \quad , M_2 = -25.7 + 11.36 \, . x_2$$
$$M_1 max \; (x = 5) = 31.1 tm$$
$$M_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2.54 \quad , \quad M_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2.26$$

ثانيا: الفتحة BC

$$M_3 = 3.43 \, . x \quad , \quad M_4 = -25.7 + 8.57 \, x$$
$$M_3 max (x = 5) = 17.15 \quad , \quad M_4 = 0 \Rightarrow x = 3$$

ملاحظة هامة جدا

لا يجوز إدخال قيمة العزم المؤثر في المسند في طرف المعادلة الأيسر، وإيجاد ردود الأفعال المرنة *R الناتجة عن العزم المؤثر في المسند في الطرف الأيمن من المعادلة بآن واحد.

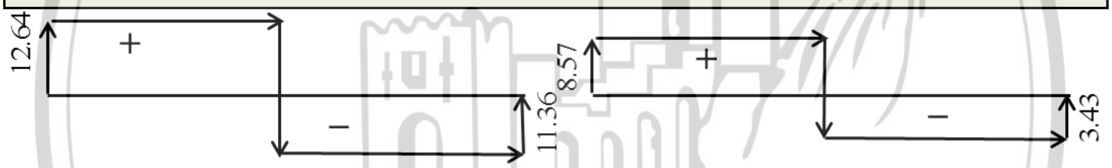
إما أن نعوض العزم بقيمته الجبرية في طرف العلاقة الأيسر **أو** نوجد ردود الأفعال المرنة الناتجة عن العزم ونعوضها في الطرف الأيمن من العلاقة.

٤-٢-٥ الحالة الخاصة الرابعة: Special Case

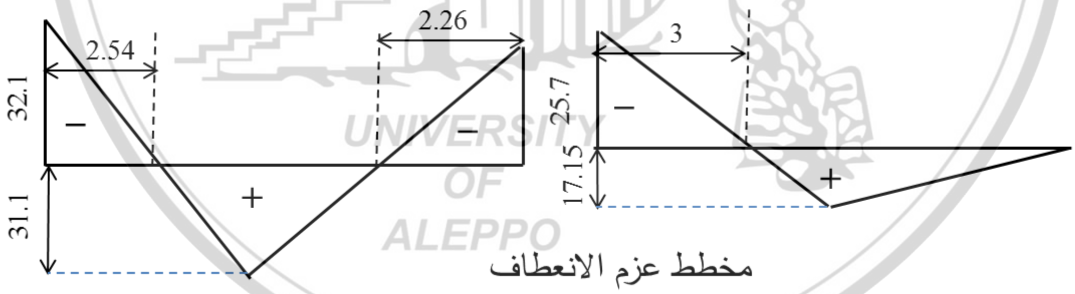
عندما يبدأ أو ينتهي الجائز ب**ظفر** أو يخضع لتأثير مزدوجة عزم تؤثر على مسانده البسيطة الخارجية. يمكننا حل هذه الحالة بطريقتين:

<u>الطريقة الأولى:</u> هي إدخال العزم الناتج عن الظفر في الحد الأيسر لمعادلة العزوم الثلاثة، وبالتالي يصبح للعزم قيمة في المساند الخارجية وتساوي إلى قيمة عزم الظفر أو إلى قيمة العزم المؤثر.

<u>الطريقة الثانية:</u> هي إدخال العزم الناتج عن الظفر في الحد الأيمن لمعادلة العزوم الثلاثة، وبالتالي تصبح ضمن الحد الخاص بالحمولات المرنة. حيث نرسم مخطط عزم الانعطاف الناتج عنها، ونوجد ردود الأفعال المرنة الناتجة عنها إضافة للحمولات الخارجية وبالتالي تكون قيمة العزوم المؤثرة في المساند الخارجية تساوي الصفر.



مخطط القوى القاطعة

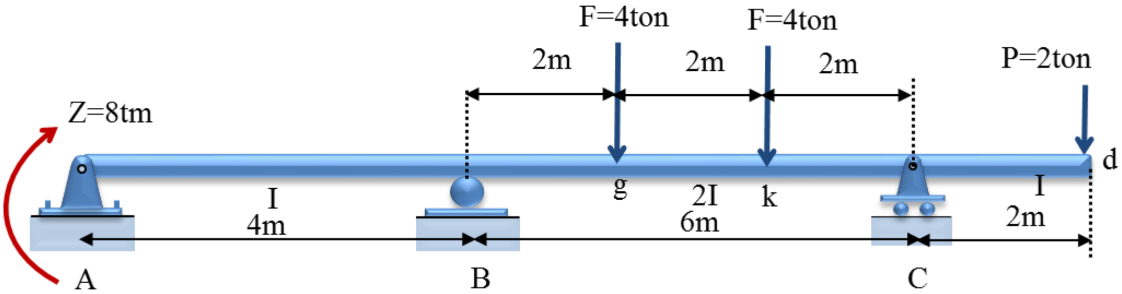


مخطط عزم الانعطاف

مثال (٣): جائز مستمر على ثلاثة مساند بسيطة يتعرض لتأثير حمولات مركزة في الفتحة BC، ومزدوجة عزم تؤثر على المسند A، وينتهي بظفر CD، والمطلوب:

١. قرر هذا الجائز باستخدام نظرية العزوم الثلاثة.

٢. إيجاد ردود الأفعال ورسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف.

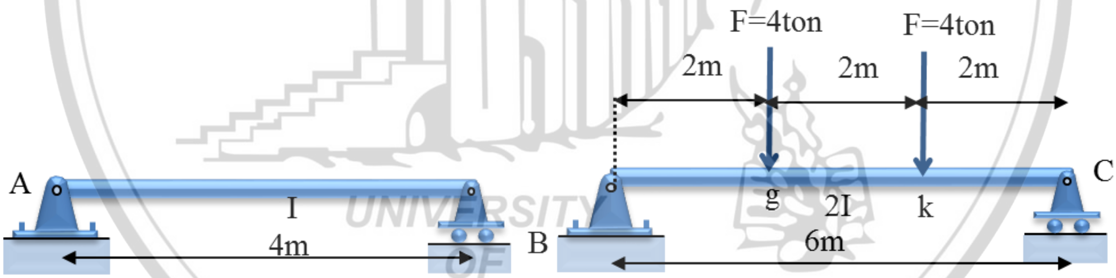


الطريقة الأولى للحل تقتصر على **إدخال المزدوجات التي تؤثر على المساند البسيطة الخارجية أو عزم الظفر في الطرف الأيسر للمعادلة** حيث نكتب معادلة العزوم الثلاثة على النحو التالي:

$$MA \cdot \frac{4}{I} + 2\,MB\left(\frac{4}{I} + \frac{6}{2\,I}\right) + M_C \cdot \frac{6}{2\,I} = -\,6\left(\frac{R^*_{Bl}}{I} + \frac{R^*_{Br}}{2\,I}\right)$$

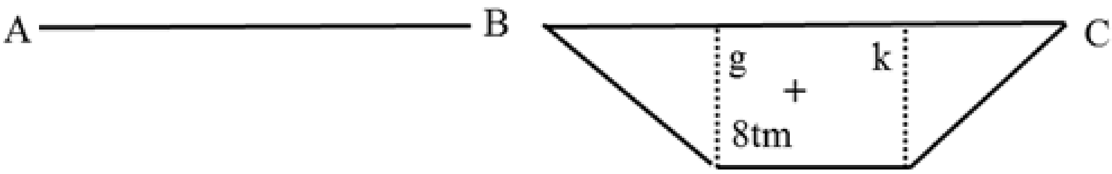
بما أنه يوجد مزدوجة في المسند A شدتها 8 Ton فإن MA = 8 tm وهي موجبة لأنها تسبب شداً في الألياف السفلية، وكذلك نتيجة وجود ظفر في المسند C فإنه يتعرض لتأثير مزدوجة عزم شدتها $(M_C = -\ 4\ \ t.m)$ (شد ألياف علوية) .

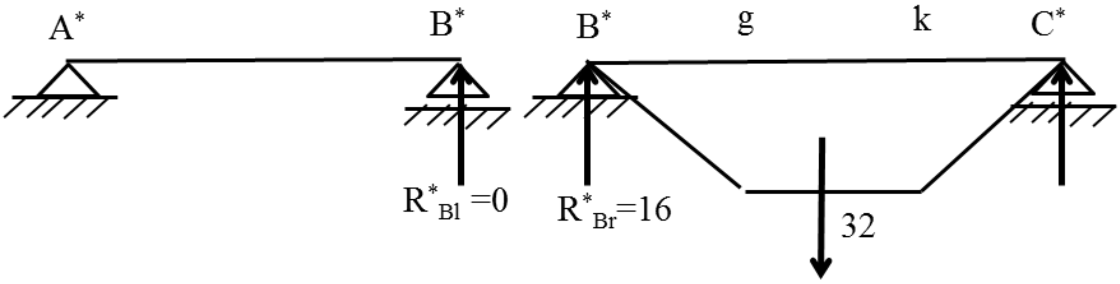
نوجد الحد الأيمن لمعادلة العزوم الثلاثة، لذلك نجزئ الجائز الى فتحات بسيطة تخضع لتأثير الحمولات الخارجية فقط.



نرسم مخطط عزم الانعطاف الناتج عن الحمولات الخارجية لكل فتحة ونوجد قيم ردود الأفعال الوهمية R^*_B.

نعوض قيمة العزم الناتج عن تأثير الظفر والعزم المؤثر على المسند A في الطرف الأيسر للعلاقة، وردود الأفعال الوهمية في الطرف الأيمن لعلاقة العزوم الثلاثة.



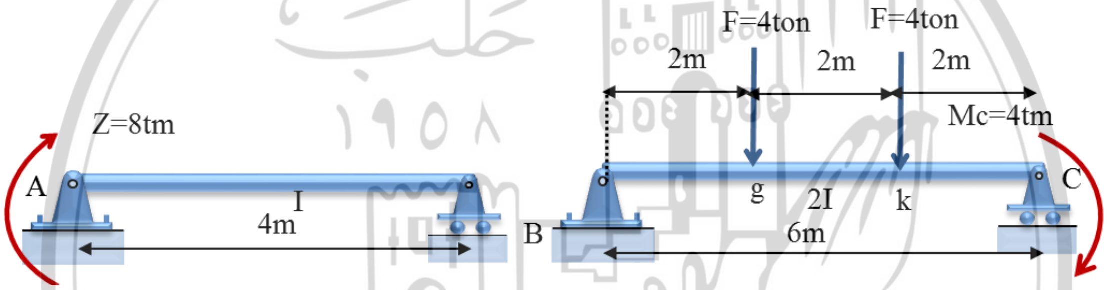


$$8 * 4 + 14\, MB + (-4) * 3 = -6\left(0 + \frac{16}{2}\right)$$

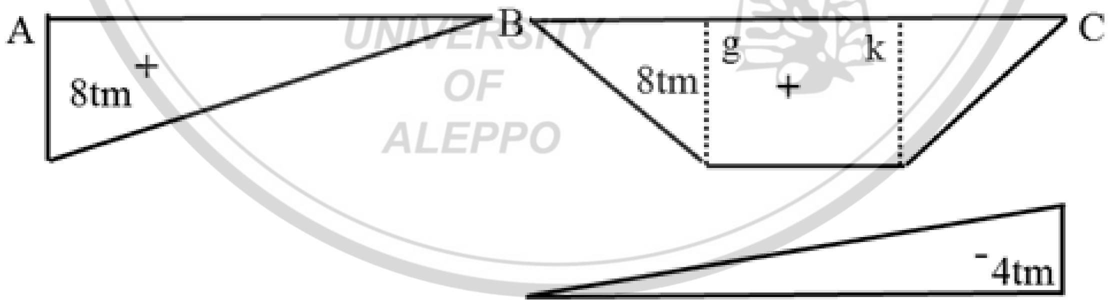
$$32 + 14\, MB - 12 = -\,48$$

$$14\, MB = -\,68 \Longrightarrow MB = -\frac{68}{14} = -\ 4.857$$

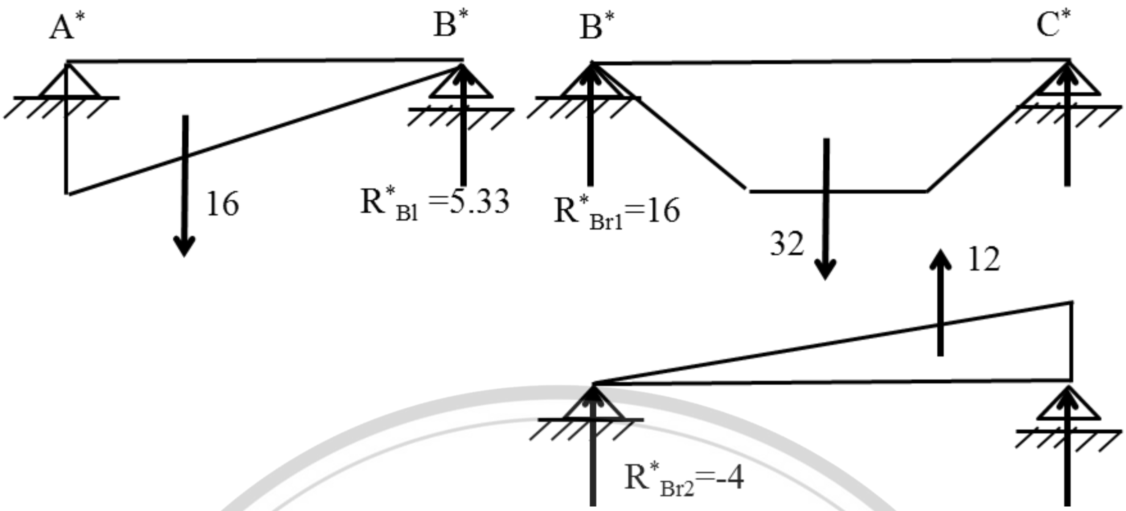
الطريقة الثانية للحل: وهي ادخال تأثير المزدوجة المؤثرة على المسند A وتأثير عزم الظفر في الطرف الأيمن للعلاقة (إدخالها ضمن الحمولة الوهمية).



عند تجزئة الجائز إلى فتحات بسيطة، ندخل تأثير المزدوجات المؤثرة على المساند الخارجية مع الحمولات الخارجية، ونرسم مخطط عزوم الانعطاف الخاص بها إضافة للحمولات الخارجية معتمدين على مبدأ تنضد الآثار للفتحة BC.



ونوجد قيمة ردود الأفعال الوهمية الناتجة عنها حيث تكون قيمة R^{*}_{Br}=16-4=12



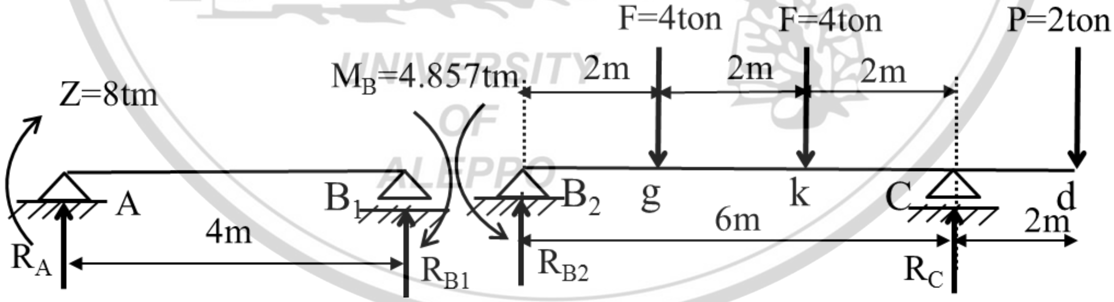
نعوض قيمة عزوم المساند الخارجية MA = MC =0 في الطرف الأيسر للمعادلة ثم نعوض قيمة وردود الأفعال الوهمية في الطرف الأيمن للمعادلة.

$$14\,MB = -\,6\left(5.33 + \frac{12}{2}\right) \Rightarrow MB = -\,4.857$$

بعد إيجاد قيمة العزم في المسند الداخلي B نستطيع الآن إيجاد ردود الأفعال ورسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف والمبينة في الشكل رقم (٤–٨) والجدول رقم (٤–٣) والشكل رقم (٤–٩).

$M_g = 4.14 \times 2 - 4.857 = 3.423$ من اليسار

$M_k = -2 \times 4 + 5.86 \times 2 = 3.72$ من اليمين

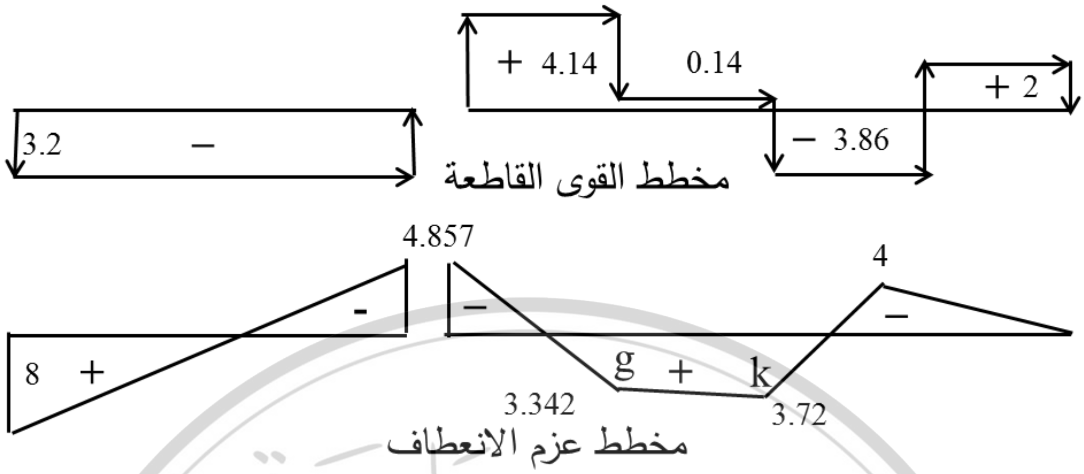


الشكل رقم (٤–٨)

الجدول رقم (٤–٣)

المسند	C	B_2	B_1	A
رد فعل الحمولة الخارجية	4+2↑	4↑	0↑	0↑
رد فعل المزدوجة	-0.14↓	0.14↑	3.2↑	-3.2↓
رد الفعل المحصل	5.86↑	4.14↑	3.2↑	-3.2↓

R_A= -3.2↓	R_B=3.2+4.14=7.34↑	R_C=5.86↑	



الشكل رقم (٤-٩)

٤-٢-٦ الحالة الخاصة الخامسة: Special Case

<u>حالة وجود مزدوجة عزم تؤثر على المسند الداخلي للجائز.</u>

في حال وجود مزدوجة عزم تؤثر على المسند الداخلي للجائز نقوم بإدخال هذه المزدوجة الى احدى الفتحتين المجاورتين للمسند، ونعتبرها حمولة خارجية على هذه الفتحة (كما مرّ معنا في الطريقة الثانية لحالة الظفر).

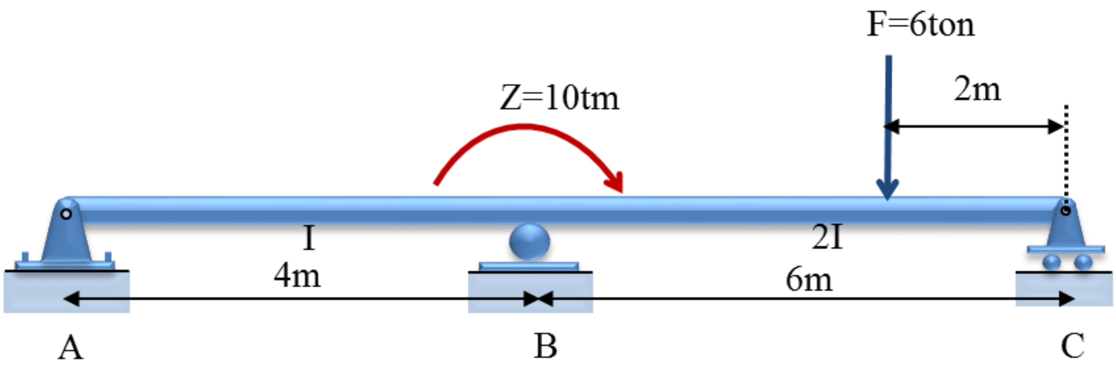
بعد ايجاد قيمة العزم النهائي في المسند المذكور نقوم بعملية الاضافة الجبرية لهذه المزدوجة للعزم المؤثر في المسند بالنسبة للفتحة التي تم اخضاعها لتأثير هذه المزدوجة.

مثال (٤): جائز مستمر على ثلاثة مساند بسيطة ABC يتعرض لتأثير حمولة مركزة في الفتحة BC شدتها 6 Ton ، ومزدوجة عزم Z تؤثر على المسند B شدتها $10\ t.m$ ، طول الفتحة AB 4 متر وعطالتها I ، وطول الفتحة BC 6 متر وعطالتها 2 I والمطلوب:

١. قرر هذا الجائز باستخدام معادلة العزم الثلاثة.

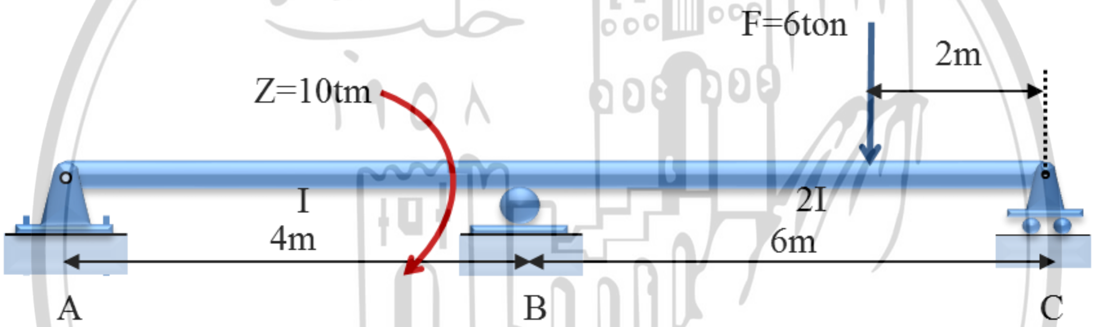
٢. أوجد ردود الافعال وارسم مخططات القوة القاطعة وعزم الانعطاف.

٣. احسب قيمة الدوران في المساند C , B , A .



الحل: بما أن المسند B يخضع لتأثير مزدوجة عزم Z فيمكن اعتبار أن هذه المزدوجة تؤثر على الفتحة AB أو الفتحة BC لذلك سوف نقوم بحل هاتين الحالتين:

الحالة الأولى: المزدوجة Z تؤثر في الفتحة AB حيث يصبح شكل الجائز المستمر كما هو مبين في الشكل رقم (٤-١٠)



الشكل رقم (٤-١٠)

لكي يتم وضع المزدوجة في اتجاهها الصحيح بالنسبة للفتحة المدروسة يجب:

١. يجب أن نحافظ على جهة دوران المزدوجة

٢. **تقعر** المزدوجة يكون باتجاه الفتحة التي تؤثر عليها.

٣. نكتب معادلة العزوم الثلاثة.

$$MA \cdot \frac{4}{I} + 2\,MB\left(\frac{4}{I}+\frac{6}{2\,I}\right) + M_C \cdot \frac{6}{2\,I} = -\,6\left(\frac{R^*_{Bl}}{I}+\frac{R^*_{Br}}{2\,\,I}\right)$$

بما أن C و A مساند خارجية لا تخضع لتأثير مزدوجات عزوم، فإن: MA = MC = 0 وباختصار عزم العطالة I من طرفي العلاقة نجد:

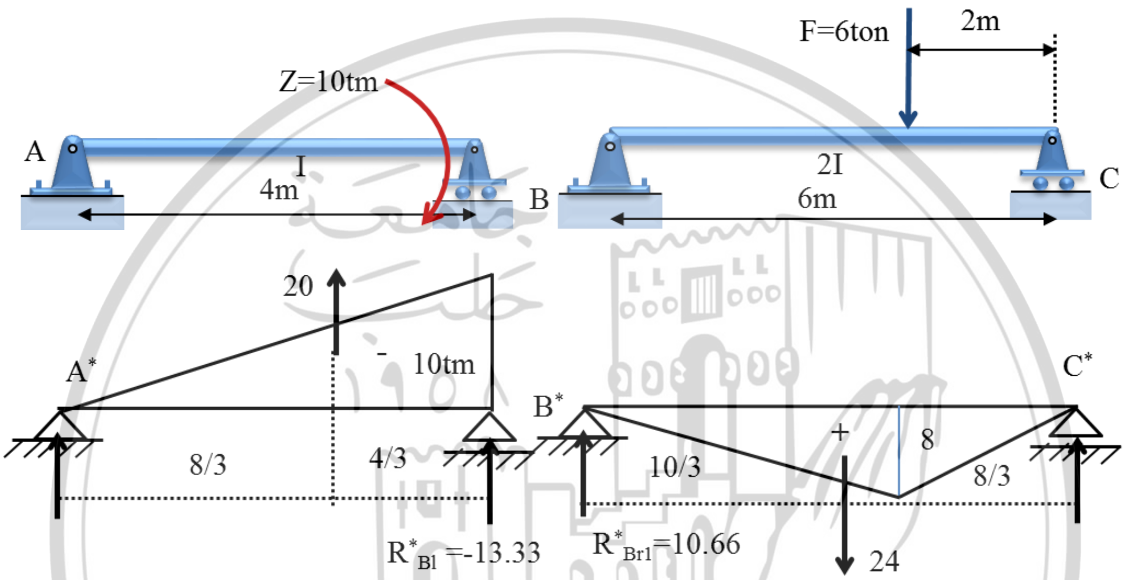
$$14\text{ MB} = -\,6\left(R^*_{Bl} + \frac{\boldsymbol{R^*_{Br}}}{\mathbf{2}}\right)$$

<u>إيجاد ردود الأفعال الوهمية:</u>

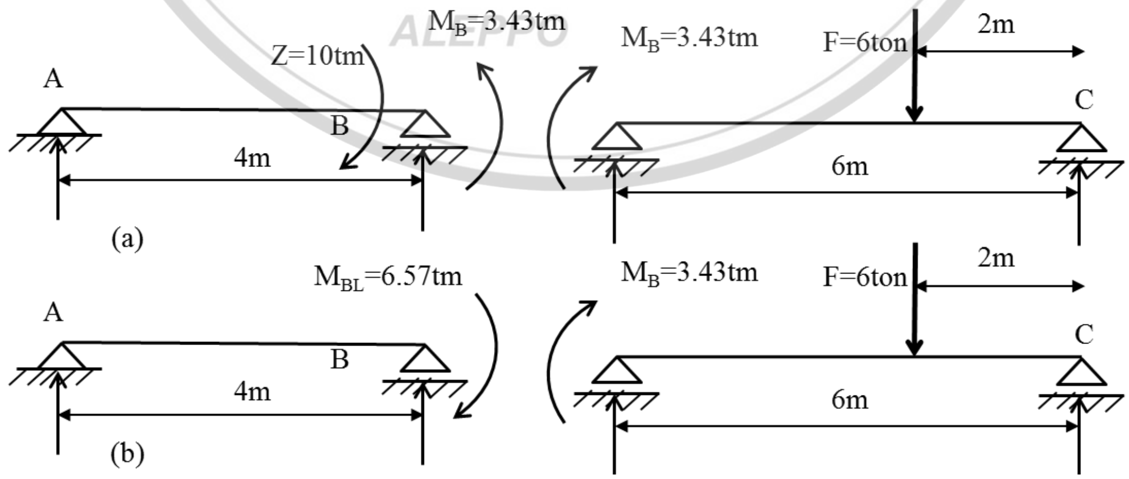
أولا: نفصل الفتحات عند المساند محملة بالحمولات الخارجية " تعتبر المزدوجة من الحمولات الخارجية" ونرسم مخططات عزم الانعطاف ونعتبره حمولة وهمية خارجية (حمولة مرنة) على جائز بسيط.

نعوض قيمة ردود الأفعال الوهمية R^* في علاقة العزوم الثلاثة.

$$14\,MB = -\,6\left(-\,13.33 + \frac{10.66}{2}\right) = 48 \rightarrow MB = 3.43$$

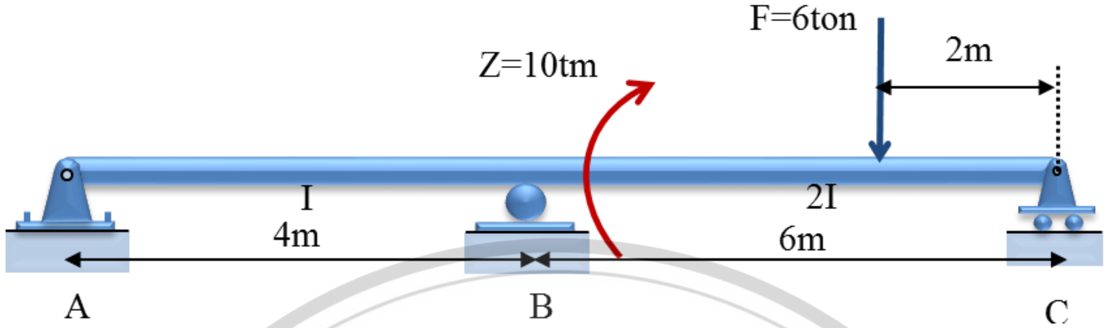


نعوض مزدوجة العزم M_B كما هو مبين في الشكل رقم (٤-١١a)، أصبح المسند B التابع للفتحة AB يخضع لتأثير مزدوجتي عزم هما: MB=3.43 t.m و Z = -10t.m وبالتالي تكون محصلة هاتين المزدوجتين 3.43-10= -6.57tm حيث نقوم بجمعها جمعا جبرياً كما هو مبين في الشكل رقم (٤-١١b).



الشكل رقم (٤-١١)

طريقة ثانية للحل: عندما تؤثر المزدوجة Z على الفتحة BC حيث يصبح شكل الجائز المستمر الموضح في الشكل رقم (٤-١٢).

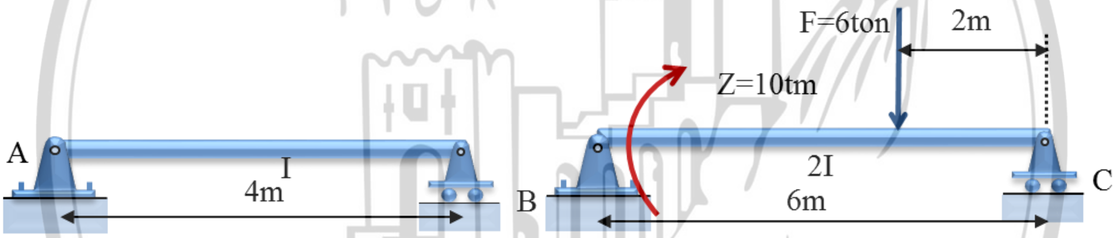


الشكل رقم (٤-١٢)

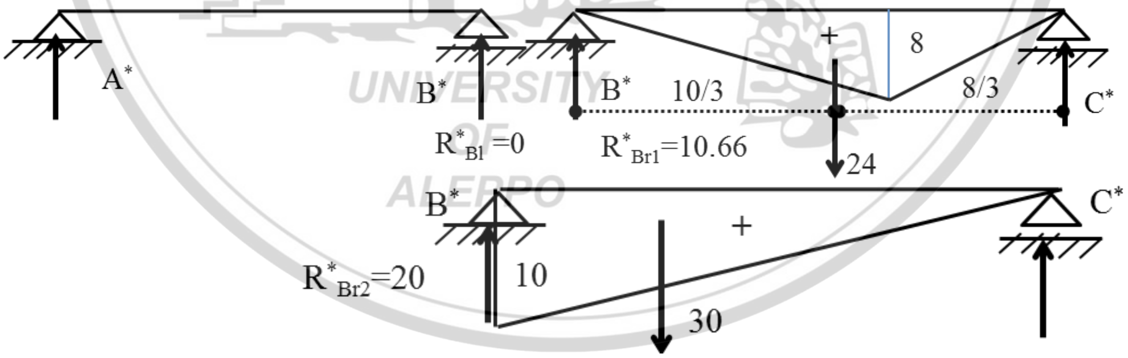
يمكننا اعتماد معادلة العزوم الثلاثة التي مرت معنا في الحالة الأولى وهي:

$$14\,MB = -\,6\left(R^{*}_{Bl} + \frac{R^{*}_{Br}}{2}\right)$$

لإيجاد ردود الأفعال الوهمية R^* نقوم بفصل الفتحات مع حمولاتها الخارجية فقط.



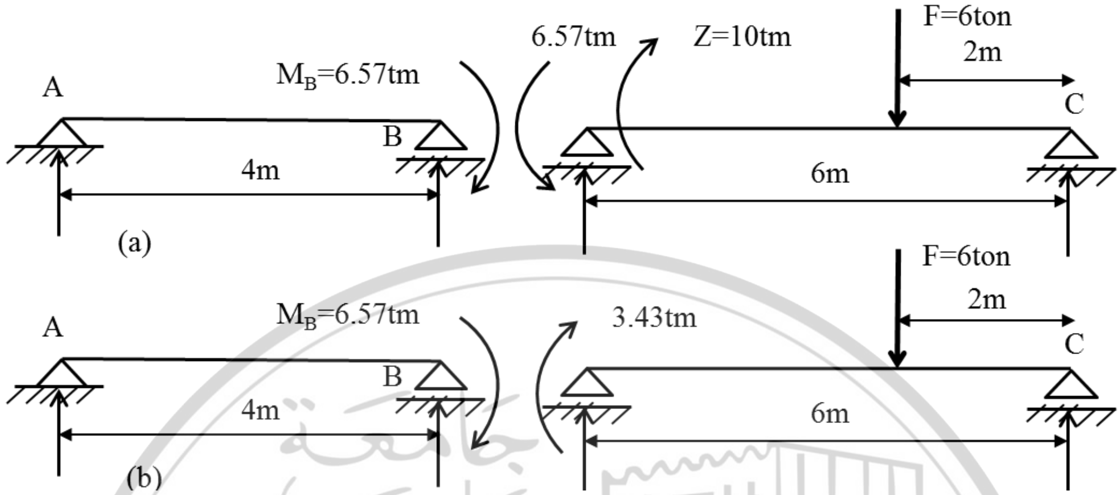
نوجد قيمة ردود الأفعال الوهمية ونعوضها في معادلة العزوم الثلاثة.



$$14\,MB = -6\left(0 + \frac{30.66}{2}\right) = -92 \quad \rightarrow \quad MB = -6.57$$

نعوض مزدوجة العزم M_B كما هو مبين في الشكل رقم (a١٣-٤)، أصبح المسند B التابع للفتحة BC يخضع لتأثير مزدوجتي عزم هما: MB= -6.57 t.m، Z = 10t.m وبالتالي تكون محصلة هاتين المزدوجتين 3.43tm =10+ -6.57 حيث نقوم بجمعها جمعا جبرياً كما هو مبين في الشكل رقم (b١٣-٤).

لإيجاد ردود الأفعال نعزل كل فتحة، ونحملها بحمولاتها الخارجية المؤثرة عليها كما هو مبين في الشكل رقم (٤-١١b) أو (٤-١٣b) والجدول رقم (٤-٤).

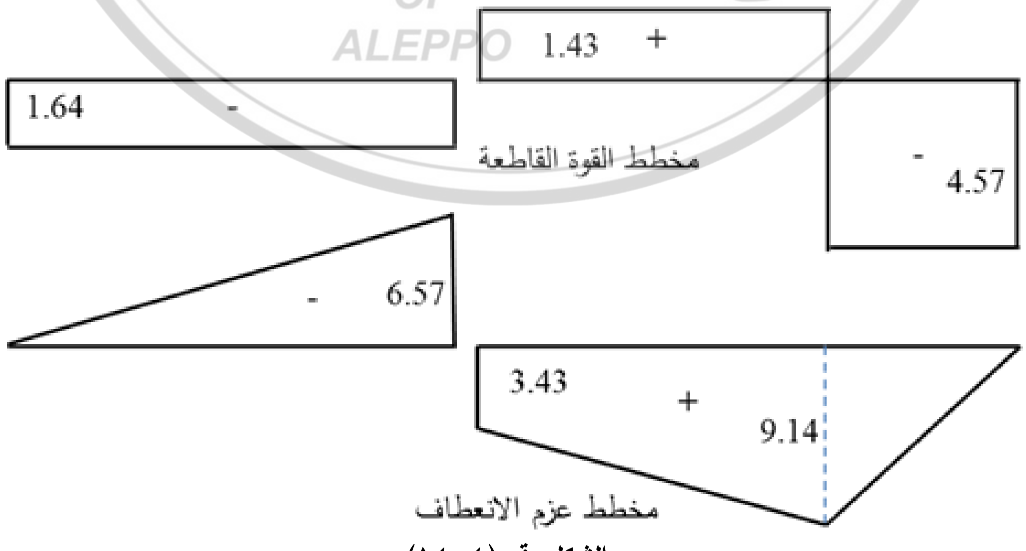


الشكل رقم (٤-١٣)

الجدول رقم (٤-٤)

المسند	C	B_2	B_1	A
رد فعل الحمولة الخارجية	4↑	2↑	0↑	0↑
رد فعل المزدوجة	0.57↑	−0.57↓	1.64↑	-1.64↓
رد الفعل المحصل	4.57↑	1.43↑	1.64↑	-1.64↓
	R_C=4.57↑	R_B=1.64+1.43=3.07↑		R_A= -1.64↓

أما مخططات القوة القاطعة وعزم الانعطاف فهي موضحة في الشكل رقم (٤-١٤)



الشكل رقم (٤-١٤)

الطلب الثالث: لحساب قيمة الدوران في المساندC ،B، A نطبق علاقة عزم المساحة الثانية بين المسندين:B ، A

$$y_B - y_A = y'_A \cdot l_{AB} - W_{AB}\, C_B \,, \quad y_A = y_B = 0$$

$$y'_A \cdot l_{AB} = W_{AB} \cdot C_B$$

$$y'_A * 4 = -\left(\frac{6.57}{EI} * \frac{4}{2}\right) * \left(\frac{4}{3}\right) \quad y'_A = -\frac{4.38}{EI}$$

باستخدام علاقة عزم المساحة الأولى بين المسندين B ، A :

$$y'_B - y'_A = -W_{AB} \Longrightarrow y'_B = y'_A - W_{AB}$$

$$y'_B = -\frac{4.38}{EI} - \left(-\frac{13.14}{EI}\right) = \frac{8.76}{EI}$$ مع عقارب الساعة

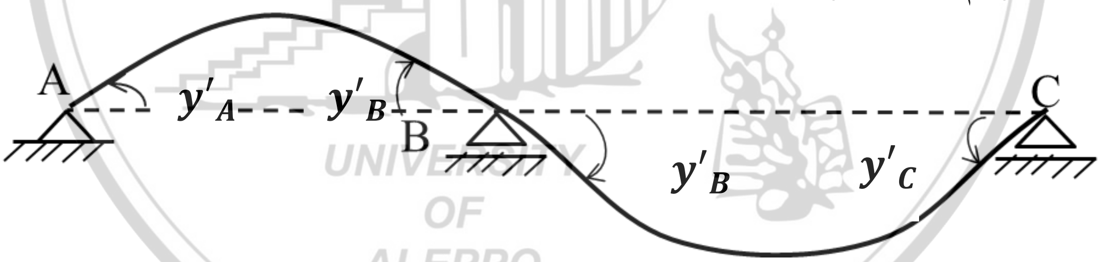
لحساب الدوران في المسند C نطبق علاقة عزم المساحة الأولى بين المسندين C و B

$$y'_C - y'_B = -W_{BC} \Longrightarrow y'_C = y'_B - W_{BC}$$

$$W_{BC} = \left[\, (9.14 + 3.43)\ \frac{4}{2} + 9.14 * \frac{2}{2}\, \right] \frac{1}{2EI} = \frac{17.14}{EI}$$

$$y'_C = \frac{8.76}{EI} - \frac{17.14}{EI} = -\frac{8.38}{EI}$$

رسم الخط المرن:

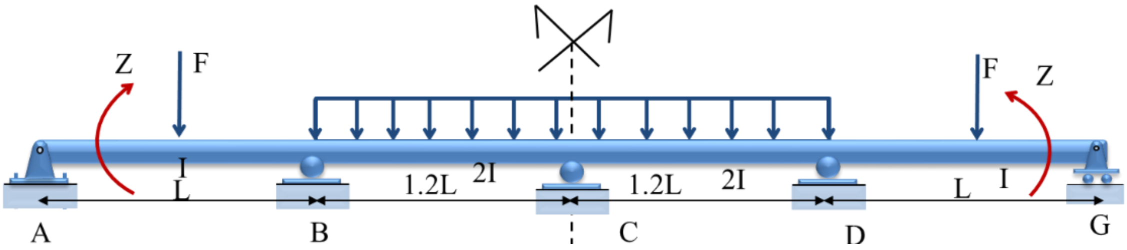


٤-٢-٧ الحالة الخاصة السادسة: Special Cases

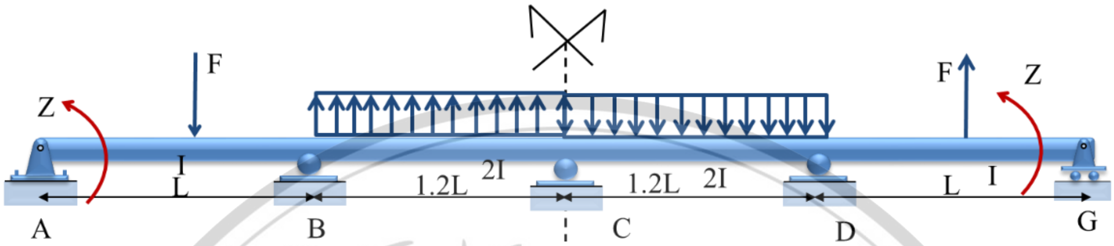
الجوائز المتناظرة والجوائز المتناظرة عكسياً.

نقول عن جائز أنه متناظر إذا كان متناظرا بالشكل والأبعاد والمساند والعطالات والحمولات (مع الأخذ بعين الاعتبار أن المسند الثابت يكافئ المسند المنزلق في حال عدم وجود قوى محورية).

نقول عن الجائز أنه متناظر عكسياً إذا كان متناظرا بالشكل والأبعاد والمساند والعطالات وكانت الحمولات متناظرة عكسياً حول محور التناظر.



الشكل رقم (٤-١٥) الجوائز المتناظرة



الشكل رقم (٤-١٦) الجوائز المتناظرة عكسيا

ملاحظة: Notice

١. إذا وجدت حمولة مركزة واقعة على محور التناظر للجوائز المتناظرة فإنها لا تلغي حالة التناظر لذلك يبقى الجائز متناظراً.

٢. إذا وجدت مزدوجة عزم تؤثر على محور التناظر في الجوائز المتناظرة فإنها تلغي حالة التناظر.

٣. إذا وجدت حمولة مركزة واقعة على محور التناظر للجوائز المتناظرة عكسياً فإنها تلغي حالة التناظر العكسي.

٤. إذا وجدت مزدوجة عزم تؤثر على محور التناظر في الجوائز المتناظرة عكسياً فإنها لا تلغي حالة التناظر العكسي لذلك يبقى الجائز متناظر عكسيا.

يمكننا الاستفادة من حالة التناظر في الخصائص التالية:

١. تكون ردود الأفعال متناظرة.

٢. يكون مخطط عزم الانعطاف متناظراً.

٣. يكون مخطط القوة المحورية متناظراً.

٤. يكون مخطط القوة القاطعة متناظراً عكسياً.

٥. يكون مخطط الانتقال متناظراً.

٦. يكون مخطط الدوران متناظراً عكسياً.
٧. تنعدم قيمة الدوران عند محور التناظر.
٨. تكون قيمة الانتقال عظمى عند محور التناظر.
٩. تنعدم قيمة القوة القاطعة عند محور التناظر.
١٠. تكون قيمة عزم الانعطاف عظمى عند محور التناظر.

يمكننا الاستفادة من حالة التناظر العكسي في الخصائص التالية:

١. تكون قيمة ردود الافعال متناظرة عكسياً.
٢. يكون مخطط عزم الانعطاف متناظراً عكسياً.
٣. يكون مخطط القوة المحورية متناظراً عكسياً.
٤. يكون مخطط القوة القاطعة متناظراً.
٥. يكون مخطط الانتقال متناظراً عكسياً.
٦. يكون مخطط الدوران متناظراً.
٧. تنعدم قيمة الانتقال عند محور التناظر العكسي.
٨. تنعدم قيمة عزم الانعطاف عند محور التناظر العكسي.
٩. تنعدم قيمة القوة المحورية عند محور التناظر العكسي.

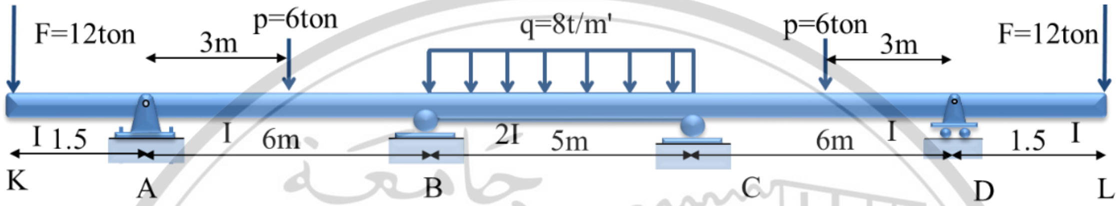
يمكننا الاستفادة من حالتي التناظر والتناظر العكسي في اختصار عدد المجاهيل في المسألة. فتكون قيمة العزوم في المساند المتناظرة في الجوائز المتناظرة متساوية في القيمة والإشارة، وتكون قيمة العزوم في المساند المتناظرة في الجوائز المتناظرة عكسيا متساوية في القيمة ومتعاكسة بالإشارة، لذلك يمكننا أن نكتب معادلة العزوم الثلاثة في هذه الجوائز حتى الوصول إلى أول مسند يقع بعد محور التناظر مباشرة ونستخدم خاصة التناظر أو التناظر العكسي

مثال (٥): جائز ABCD ينتهي بظفرين DL، AK ويتعرض لتأثير الحمولات المبنية على الشكل رقم (٤–١٧) والمطلوب:

١. قرر هذا الجائز باستخدام معادلة العزوم الثلاثة.

٢. حساب ردود الأفعال في المساند ورسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف.

إذا علمت أن عامل المرونة الطولي E ثابت وأن المساند لا تعاني من هبوط شاقولي وأن عزوم العطالة والأبعاد موضحة على الشكل رقم (٤–١٧).



الشكل رقم (٤–١٧)

هذا الجائز متناظر لذلك يمكن إيجاد العزوم في المساند بكتابة معادلة العزوم الثلاثة حتى الوصول الى أول مسند يقع بعد محور التناظر مباشرة (المسند C في هذه المسألة). نستفيد من خاصية تناظر العزوم في المساند المتناظرة حيث تكون العزوم متساوية بالقيمة والإشارة (MB = MC) لذلك نبدأ بالمساند الثلاثة الأولى وهي : A B C ونتوقف عند المسند C لأننا تجاوزنا محور التناظر وتوصلنا إلى أول مسند يقع بعده مباشرة .

$$MA \cdot \frac{l_1}{I} + 2\,MB\left(\frac{l_1}{I} + \frac{l_2}{2\,I}\right) + M_C\,\frac{l_2}{2\,I} = -\,6\left(\frac{R^*_{Bl}}{I} + \frac{R^*_{Br}}{2\,I}\right)$$

بما أن المسند A ينتهي بظفر فنوجد عزم الظفر ولنعوضه في معادلة العزوم الثلاثة.

$$MA = \;-12 * 1.5 = \;-18 \quad \text{شد ألياف علوية}$$

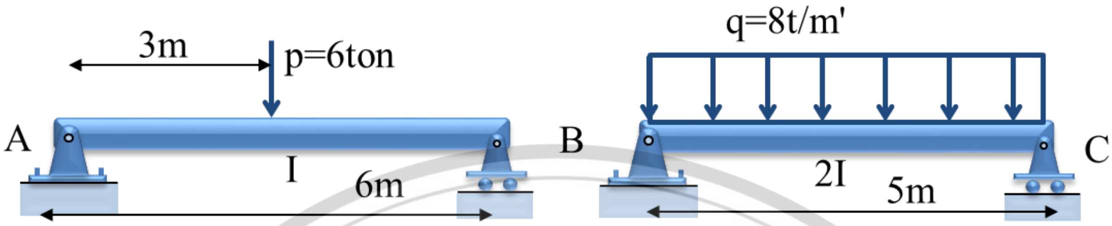
بحذف I من الطرفين وتعويض الأطوال بقيمها واستبدال العزوم المتناظرة حيث نستبدل MC بـ MB نتيجة التناظر.

$$-\,18 * 6 + 2\,MB\left(6 + \frac{5}{2}\right) + MB\,\frac{5}{2} = \;-6\left(R^*_{Bl} + \frac{R^*_{Br}}{2}\right)$$

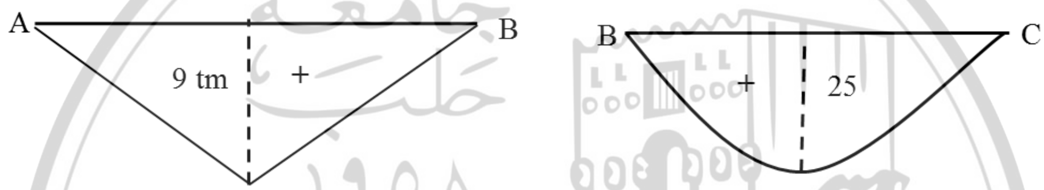
$$-\,108 + 17\,MB + 2.5\,MB = \;-6\left(R^*_{Bl} + \frac{R^*_{Br}}{2}\right)$$

$$- 108 + 19.5\, MB \; = \; -6 \left(\; R^{*}_{Bl} + \frac{R^{*}_{Br}}{2} \right)$$

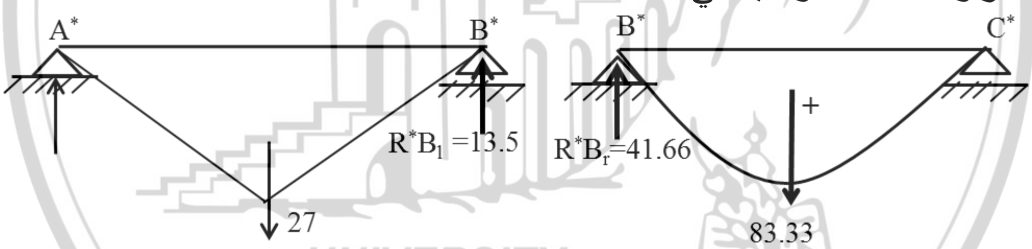
نوجد الطرف الأيمن للعلاقة وذلك بفصل الفتحات المدروسة فقط ونحملها بالحمولات الخارجية.



نرسم مخطط عزم الانعطاف لهاتين الفتحتين.



نحمل مخططات عزم الانعطاف هذه على جائز بسيط وندعوها بالحمولة الوهمية ونوجد ردود الأفعال الوهمية في المسند B^{*} فقط.

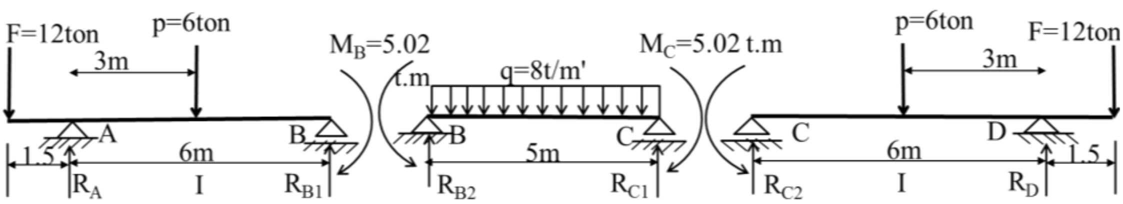


نعوض قيمة ردود الأفعال الوهمية في معادلة العزوم الثلاثة:

$$-108 + 19.5\, MB = -6 \left(13.5 + \frac{41.66}{2} \right)$$

$$19.5\, MB = \; -98 \quad \rightarrow MB = \; -5.025$$

بعد إيجاد قيمة العزم في المسند B يمكننا إيجاد ردود الأفعال كما هو موضح في الشكل رقم (٤-١٨) والجدول رقم (٤-٥).



الشكل رقم (٤-١٨)

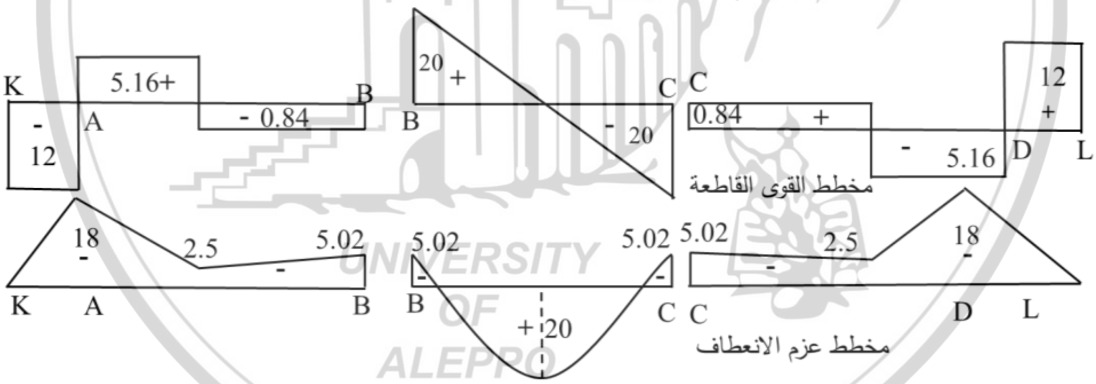
بعد إيجاد قيم ردود الأفعال يمكننا رسم مخططات القوة القاطعة وعزم الانعطاف كما هو موضح في الشكل رقم (٤-١٩).

الجدول رقم (٤-٥)

المسند	D	C_2	C_1	B_2	B_1	A
رد فعل الحمولة	3+12↑	3↑	20↑	20↑	3↑	12+3↑
رد فعل المزدوجة	2.16↑	-2.16↓	0	0	-2.16↓	2.16↑
رد الفعل المحصل	17.16↑	0.84↑	20↑	20↑	0.84↑	17.16↑
	RD= 17.16	RC=20+0.84=20.84		RB=20+0.84=20.84		RA= 17.16

ملاحظة: Notice

١. لرسم مخطط القوى القاطعة: نرسم مخطط القوى القاطعة للجزء الواقع على يسار محور التناظر، أما الجزء الواقع على يمين محور التناظر فيكون متناظراً عكسياً.



الشكل رقم (٤-١٩)

٢. لرسم مخطط عزم الانعطاف: يكون مخطط عزم الانعطاف متناظرا لذلك نرسم مخطط عزم الانعطاف للجزء الواقع على يسار محور التناظر، أما الجزء الواقع على يمين محور التناظر فيكون متناظراً.

٣. في الجوائز المتناظرة تكون ردود الأفعال متناظرة

حساب العزم الأعظمي في الفتحة: AB

تكون قيمة العزم العظمى واقعة تحت نقطة تقاطع مخطط القوة القاطعة مع المحور الأفقي (في هذه الحالة تحت الحمولة المركزة).

$$M_{AB} = -5.02 + 0.84 \cdot x \text{ من اليمين}$$
$$M_x = -2.5 \qquad\qquad x = 3$$

حساب العزم الأعظمي في الفتحة: BC تكون قيمة العزم الأعظمي في منتصفه لأنه واقع على محور التناظر أي: عندما تكون قيمة: $x = 2.5\ m$

$$M_{BC} = 20x - 5.02 - \frac{8\,x^2}{2} \quad , \quad M_x = 20$$

نوجد نقطة انعدام عزم الانعطاف.

$$M_{BC} = 0 \Rightarrow \quad 20x - 4x^2 - 5.02 = 0$$

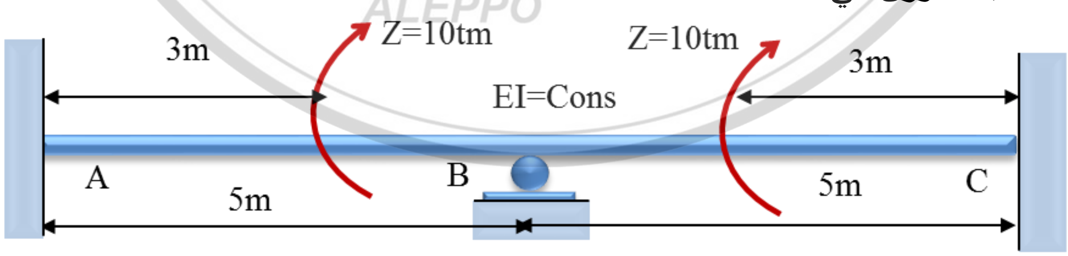
وهي معادلة من الدرجة الثانية.

$$x_1 = 0.25 \qquad x_2 = 4.735$$

مثال (٦): دورة ٢٠١٤

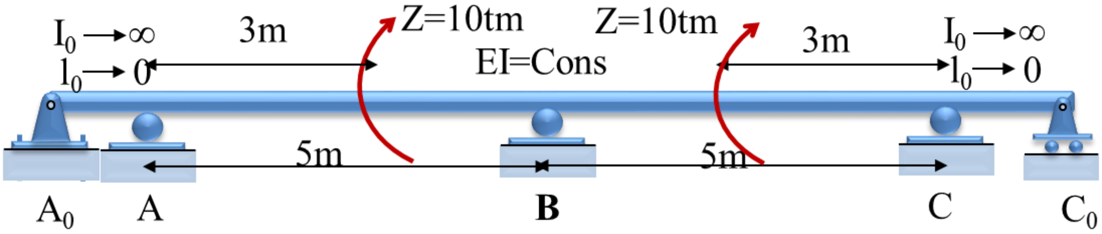
جائز موثوق في C، A ويستند على مسند منزلق في B يتعرض لتأثير مزدوجة عزم في الفتحة AB شدتها $10\ t.m$، ومزدوجة عزم أخرى شدتها $10\ t.m$ في الفتحة BC ، والمطلوب :

١. قرر هذا الجائز بالاعتماد على معادلة العزوم الثلاثة.
٢. إيجاد ردود الأفعال ورسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف.
٣. حساب الدوران في B.



الحل: هذا الجائز متناظر عكسياً لذلك نستفيد من خاصة التناظر العكسي وهي: $MA = -MC$

نستبدل الوثاقتين A و C بمسندين بسيطين، البعد بينهما ينتهي إلى الصفر والعطالة بينهما تنتهي إلى اللانهاية.



نكتب معادلة العزوم الثلاثة:

$$M_{AO} \cdot \frac{l_O}{I_O} + 2\,MA\left(\frac{l_O}{I_O} + \frac{l_{AB}}{I_{AB}}\right) + MB\,\frac{l_{AB}}{I_{AB}} = -6\left(\frac{R^*_{Al}}{I_O} + \frac{R^*_{Ar}}{I}\right)$$

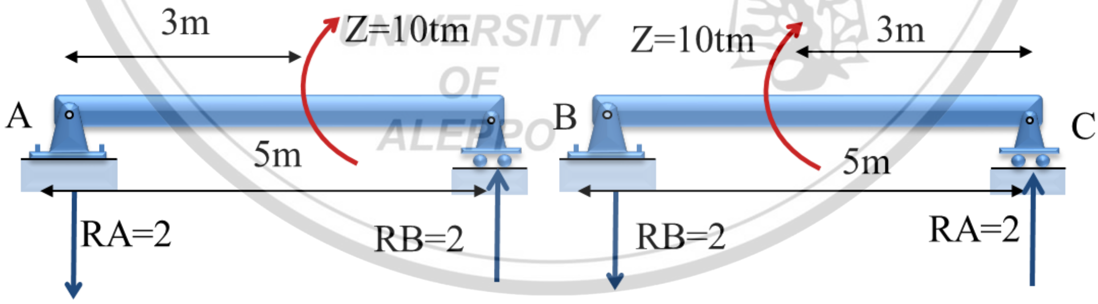
نحذف الحدود التي تحتوي على I_O و l_O، ونعوض قيم الأطوال والعطالات فنحصل على العلاقة التالية:

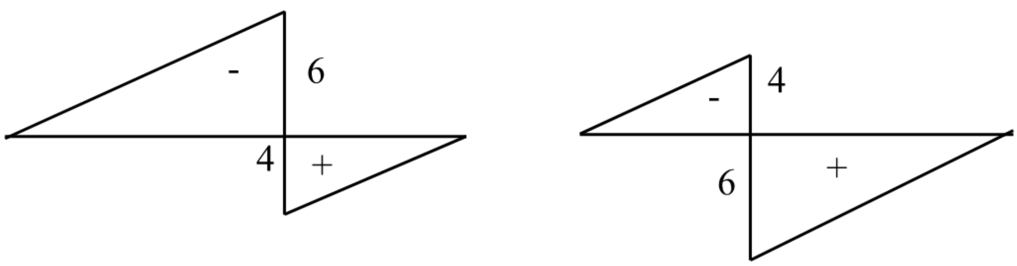
$$2\,MA\,(5) + MB \cdot 5 = -6\;R^*_{Ar}$$
$$10\,MA + 5\,MB = -6\;R^*_{Ar}$$

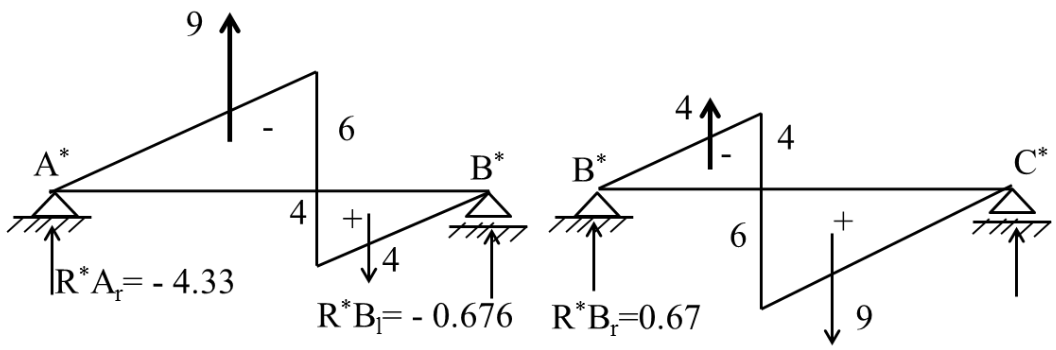
ننزلق مسند نحو اليمين: ABC

$$MA\;\,5 + 2\,MB\,(5+5) + MC \cdot 5 = -6\,(R^*_{Bl} + R^*_{Br})$$
$$5\,MA + 20\,MB - 5\,MA = -6\,(R^*_{Bl} + R^*_{Br})$$
$$20\,MB = -6\,(R^*_{Bl} + R^*_{Br})$$

لإيجاد قيمة ردود الأفعال الوهمية R^* نفصل الفتحات المدروسة محملة بالحمولات الخارجية فقط، حيث نرسم مخطط عزم الانعطاف وتعتبر هذا المخطط حمولة وهمية خارجية تؤثر على جائز بسيط كما هو موضح في الخطوات التالية:







$$\Sigma\, MB^* = 0 \;\Rightarrow\; R^*_{Ar} \times 5 + 9 \times 3 - 1.33 \times 4 = 0$$
$$R^*_{Ar} = -4.33$$
$$\Sigma\, Fy = 0 \;\Rightarrow\; R^*_{Ar} + 9 - 4 + R^*_{Bl} = 0$$
$$R^*_{Bl} = 4 - 9 - R^*_{Ar} = 4 - 9 + 4.33 = -0.67$$

وأن قيمة $R^*_{Bl} = -R^*_{Br}$

لنعوض قيمة ردود الأفعال الوهمية في معادلتي العزوم الثلاثة:

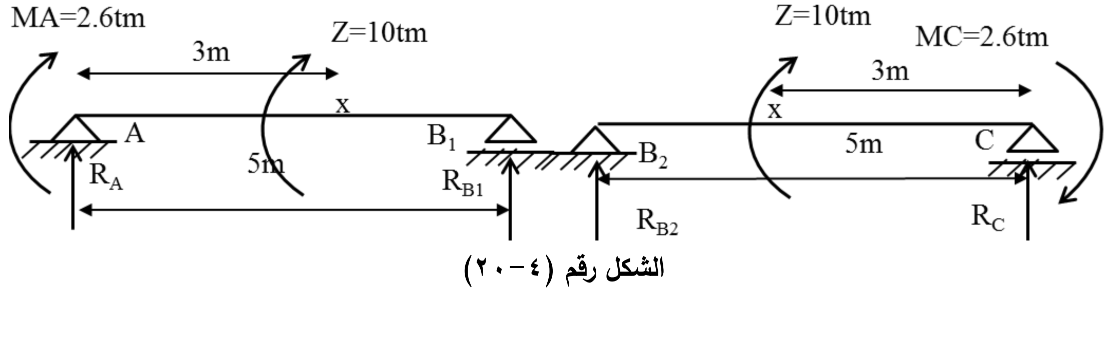
$$10\, MA + 5\, MB = -6\,(-4.33) = 26 \quad (1)$$
$$20\, MB = -6\,(-0.67 + 0.67) = 0 \quad (2)$$

من المعادلة رقم **(٢)** نجد: $MB = 0$

نعوض قيمة: MB في المعادلة رقم (١)، فنحصل على قيمة: MA = 2.6

نتيجة: تكون قيمة عزم الانعطاف معدومة عند محور التناظر العكسي، وبالتالي لا يوجد قيمة للعزم في المسند الذي يمر منه محور التناظر في الجمل المتناظرة عكسياً.

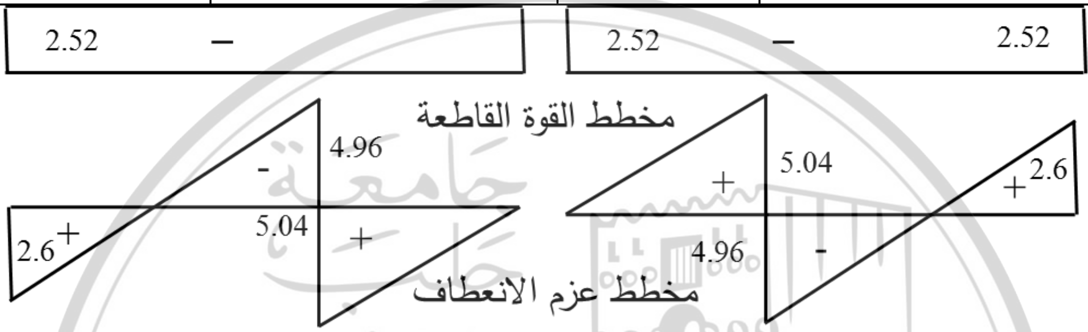
نوجد قيم ردود الأفعال كما هو موضح في الشكل رقم (٤-٢٠) والجدول رقم (٤-٦)، ونرسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف كما هو موضح في الشكل رقم (٤-٢١) حيث نوجد القيم الخاصة بالجزء الأيسر، وباستخدام خاصة التناظر العكسي نوجد القيم الخاصة بالجزء الأيمن.



الشكل رقم (٤-٢٠)

الجدول رقم (٤-٦)

المسند	C	B_2	B_1	A
رد فعل الحمولة الخارجية	0↑	0↑	0↑	0↑
رد فعل المزدوجة	2.52↑	-2.52↓	2.52↑	-2.52↓
رد الفعل المحصل	2.52↑	-2.52↓	2.52↑	-2.52↓
	R_C=2.52↑	R_B=0		R_A= -2.52↓



الشكل رقم (٤-٢١)

حساب الدوران في المسند B:

سوف نحسب الدوران في المسند B بالاعتماد على المعادلة التفاضلية للخط المرن:

$$M = -2.52 \cdot x + 2.6 \quad , \quad EIy'' = 2.52 \times \; -2.6$$

$$EIy' = \frac{2.52\, x^2}{2} - 2.6 \cdot x + C1$$

$$x = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow C1 = 0$$

$$EIy' = 2.52\, \frac{x^2}{2} - 2.6x$$

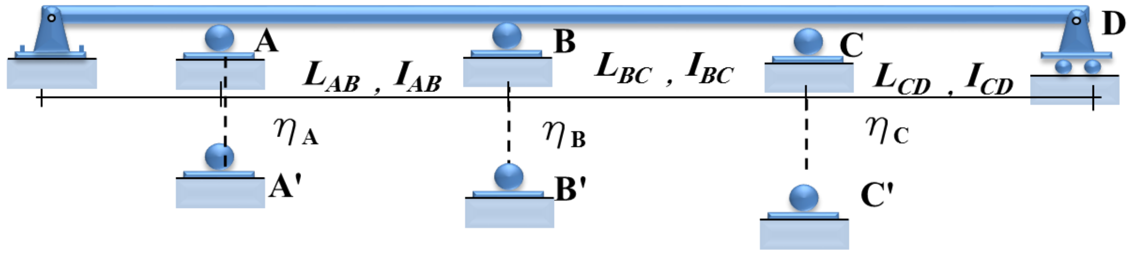
نعوض قيمة : $x = 3$ فنحصل على قيمة الدوران في B

$$EIy'_B = 2.52 \cdot \frac{9}{2} - 2.63 = 11.34 - 7.8 = 3.54$$

$$y'_B = \frac{3.54}{EI}$$

٤-٣ الحالة الثانية: حالة وجود انتقالات شاقولية η في المساند:

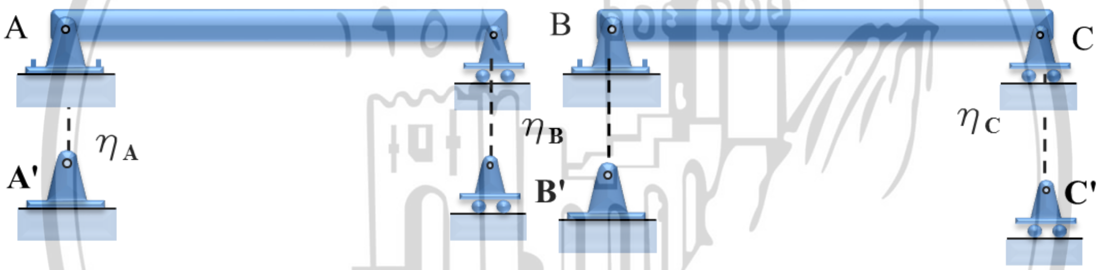
تخضع مساند الجائز المستمر لتأثير هبوطات معلومة مقدارها η كما هو موضح في الشكل رقم (٤-٢٢)، وتنتج هذه الهبوطات عادة من عدم استقرار التربة الواقعة تحت المسند، أو استناد الجائز على مساند مرنة أو استناد الجائز على جائز آخر.



الشكل رقم (٤-٢٢)

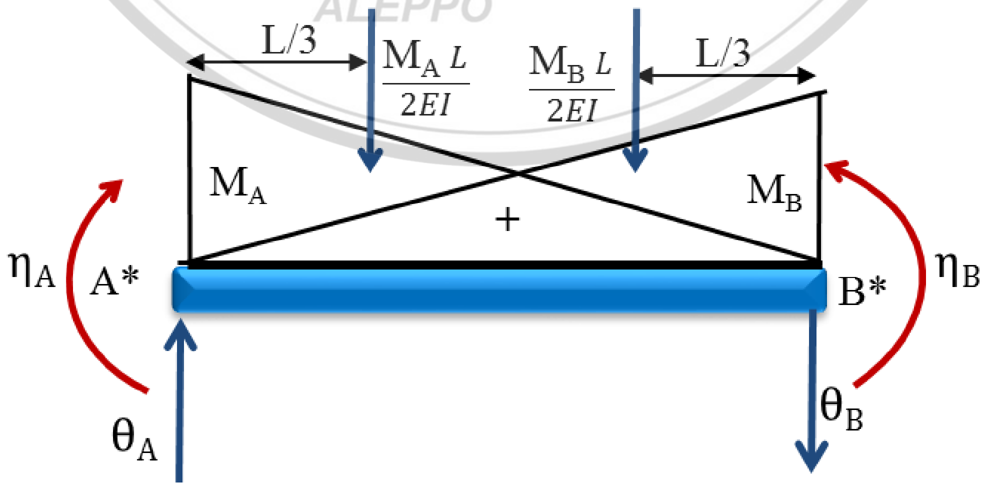
العمل: نقوم بعزل فتحتين داخليتين AB , BC ، حيث يخضع المسند A لانتقال شاقولي نحو الأسفل مقداره η_A ، وكذلك يخضع المسند B لانتقال شاقولي نحو الأسفل بمقدار η_B ، وكذلك يخضع المسند C لانتقال شاقولي نحو الأسفل بمقدار η_C كما هو موضح بالشكل رقم (٤-٢٣).

لإيجاد قيمة الدوران في المسند B العائد للفتحة AB، نستخدم نظرية الجائز البديل معتمدين على مبدأ تنضد الآثار.



الشكل رقم (٤-٢٣)

نرسم مخطط عزم الانعطاف ونحمل مخطط عزم الانعطاف مقسوماً على EI على الجائز البديل بعد تعويض قيمة الانتقالات في المسندين B و A , بمزدوجتي عزم η_A ، η_B على التوالي كما هو مبين في الشكل رقم (٤-٢٤).



الشكل رقم (٤-٢٤)

لحساب الدوران θ_B في المسند B:

$$\Sigma\, MA^* = 0$$

$$\theta_B \cdot l_{AB} + \frac{M_B \cdot l_{AB}}{2\, EI_{AB}}\, \frac{2\, l_{AB}}{3} + \frac{M_A \cdot l_{AB}}{2\, EI_{AB}}\, \frac{l_{AB}}{3} + \eta_{\,A} - \eta_{\,B} = 0$$

نقسم المعادلة على طول الفتحة l_{AB} ، وإجراء الاختصارات اللازمة نحصل على الدوران في المسند B العائد للفتحة AB:

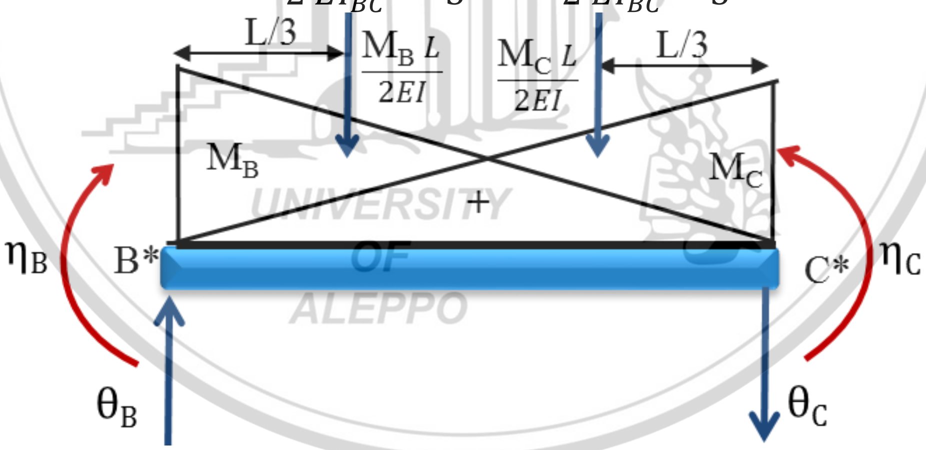
$$\theta_B = \frac{\eta_{\,A} - \eta_{\,B}}{l_{AB}} - \frac{2\, M_B \cdot l_{AB}}{6\, EI_{AB}} - \frac{M_A \cdot l_{AB}}{6\, EI_{AB}} \qquad (1)$$

لحساب الدوران في المسند B العائد للفتحة BC ، نستخدم نظرية الجائز البديل أيضاً معتمدين على مبدأ تنضد الآثار . نرسم مخطط عزم الانعطاف لهذين الجائزين كما هو مبين في الشكل رقم (٤–٢٥).

نحمل مخطط عزم الانعطاف مقسوماً على EI على الجائز البديل، وبتعويض قيمة الانتقالات في المسندين C , B بمزدوجتي عزم $\eta_{\,B}$ ، $\eta_{\,C}$:

$$\Sigma\, MC^* = 0$$

$$\theta_B \cdot l_{BC} + \eta_{\,B} - \frac{MB\,.\,l_{BC}}{2\, EI_{BC}}\, \frac{2\, l_{BC}}{3} - \frac{MC\,.\,l_{BC}}{2\, EI_{BC}}\, \frac{l_{BC}}{3} - \eta_{\,C} = 0$$



الشكل رقم (٤–٢٥).

بالتقسيم على l_{BC} ، وإجراء الاختصارات اللازمة نحصل على قيمة الدوران في المسند B العائد للفتحة BC

$$\theta_B = \frac{\eta_{\,C} - \eta_{\,B}}{l_{AB}} + \frac{2\, M_B \cdot l_{BC}}{6\, EI_{BC}} - \frac{M_C \cdot l_{BC}}{6\, EI_{BC}} \qquad (2)$$

بمساواة العلاقتين (1) مع (2):

$$\frac{\eta_C - \eta_B}{l_{BC}} + \frac{2M_B \cdot l_{BC}}{6EI_{BC}} + \frac{M_C \cdot l_{BC}}{6EI_{BC}} = \frac{\eta_B - \eta_A}{l_{BC}} - \frac{2M_B \cdot l_{AB}}{6EI_{AB}} - \frac{M_A \cdot l_{AB}}{6EI_{AB}}$$

بنقل العزوم إلى الطرف الأيسر والانتقالات إلى الطرف الأيمن، وإجراء الاختصارات اللازمة نتوصل الى كتابة العلاقة التالية.

$$(4-7) \qquad \frac{M_A \cdot l_{AB}}{I_{AB}} + 2MB\left(\frac{l_{AB}}{I_{AB}} + \frac{l_{BC}}{I_{BC}}\right) + MC \cdot \frac{l_{BC}}{I_{BC}} = 6E\left[\frac{\eta_B - \eta_A}{l_{AB}} + \frac{\eta_B - \eta_C}{l_{BC}}\right]$$

وتعبر هذه العلاقة عن معادلة العزوم الثلاثة للجوائز المستمرة في حال وجود انتقالات في المساند.

أما العلاقة العامة لمعادلة العزوم الثلاثة (في حال وجود حمولات خارجية وهبوطات في المساند) فإنها تعطى بالشكل التالي:

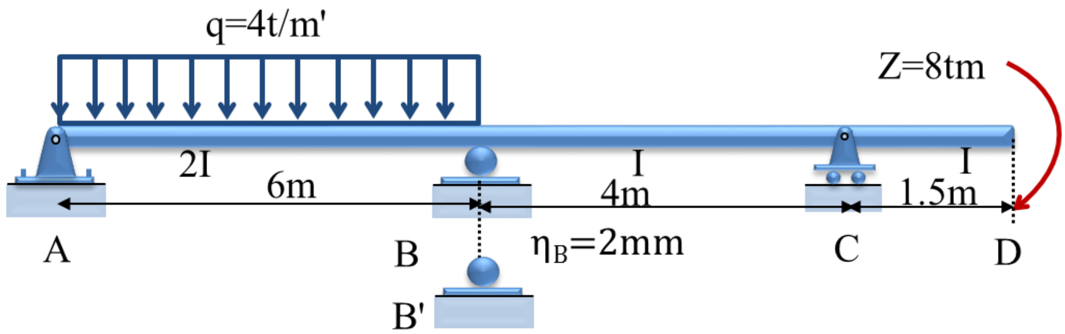
$$(4-8) \qquad MA \cdot \frac{l_{AB}}{I_{AB}} + 2MB\left(\frac{l_{AB}}{I_{AB}} + \frac{l_{BC}}{I_{BC}}\right) + MC\,\frac{l_{BC}}{I_{BC}} = -6\left(\frac{R^*_{Bl}}{I_{BC}} + \frac{R^*_{Br}}{I_{BC}}\right) + 6E\left[\frac{\eta_B - \eta_A}{l_{AB}} + \frac{\eta_B - \eta_C}{l_{BC}}\right]$$

مثال (٧): جائز مستمر على ثلاثة مساند بسيطة ABC ، وينتهي بظفر CD يخضع لتأثير مزدوجة في نهايته الحرة شدتها $Z = 8\ t.m$ ، أما الفتحة AB فتخضع لتأثير حمولة موزعة بانتظام شدتها $q = 4\ {}^{t}/_{m'}$ ، يخضع المسند الوسطي B إلى هبوط مقداره 2mm، فإذا علمت أن الأبعاد والعطالات موضحة على الشكل رقم (٤–٢٦) والمطلوب قرر هذا الجائز بالاعتماد على نظرية العزوم الثلاثة.

١. أوجد ردود الأفعال وارسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف.

٢. ارسم الخط المرن. إذا علمت أن الصلابة الانعطافية $EI = 2000\ t.m^2$

الحل: بما أن الجائز مستمرا يخضع لتأثير حمولات خارجية ويعاني من هبوطات، لذلك نطبق المعادلة العامة للعزوم الثلاثة:



الشكل رقم (٤-٢٦)

$$MA\,\frac{6}{2\,I}+2\,MB\left(\frac{6}{2\,I}+\frac{4}{I}\right)+\;MC\cdot\frac{4}{I}$$

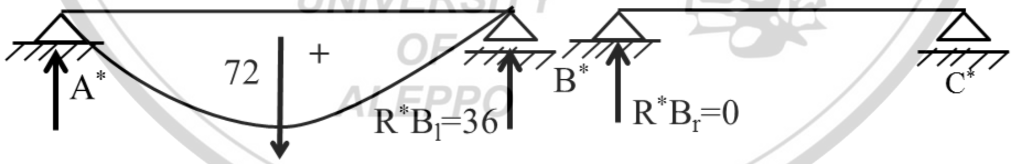
$$=-6\left(\frac{R^*_{Bl}}{2\,I}+\frac{R^*_{Br}}{I}\right)+6E\left(\frac{\eta_{\,B}-\;\eta_{\,A}}{6}+\frac{\eta_{\,B}-\;\eta_{\,C}}{4}\right)$$

بما أن A مسند خارجي لا يخضع لتأثير مزدوجة عزم فإن: MA = 0، وأن C مسند ينتهي بظفر فإن: $MC=-8\;t.m$ وأن المسند B يعاني من انتقال شاقولي نحو الأسفل مقدار $\eta_{\,B}=2\;mm$ ، وأن قيمة : $\eta_{\,A}=\eta_{\,C}=0$.

(نجانس واحدات الأطوال في الحد الخاص بالانتقالات). فتصبح معادلة العزوم الثلاثة على الشكل التالي:

$$\frac{14\;MB}{I}+\frac{4\,(-8)}{I}=-6\left(\frac{R^*_{Bl}}{2\,I}+\frac{R^*_{Br}}{I}\right)+6E\left(\frac{2-0}{6000}+\frac{2-0}{4000}\right)$$

نوجد ردود الأفعال الوهمية: بما أن الفتحة BC غير محملة فإن قيمة: $R^*_{Br}=0$ ، نضرب طرفي المعادلة بعزم العطالة I .

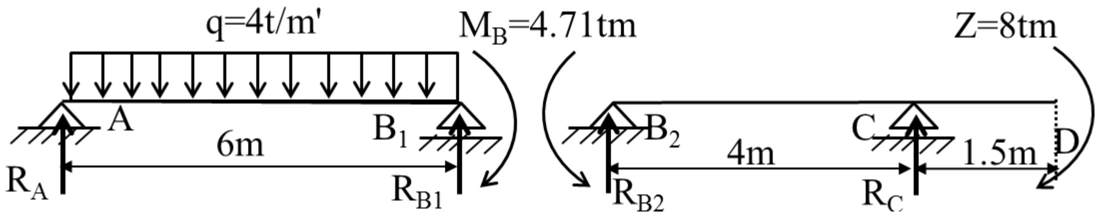


$$14\;MB=32-6(18+0)+6\;EI\left(\frac{2}{6000}+\frac{2}{4000}\right)$$

$$14\;MB=-76+12000\;\left(\frac{2}{6000}+\frac{2}{4000}\right)$$

$$14\;MB=-66\;\Rightarrow MB=-4.71$$

إن قيم ردود الأفعال موضحة في الشكل رقم (٤-٢٧) والجدول رقم (٤-٧).



الشكل رقم (٤-٢٧)

الجدول رقم (٤-٧)

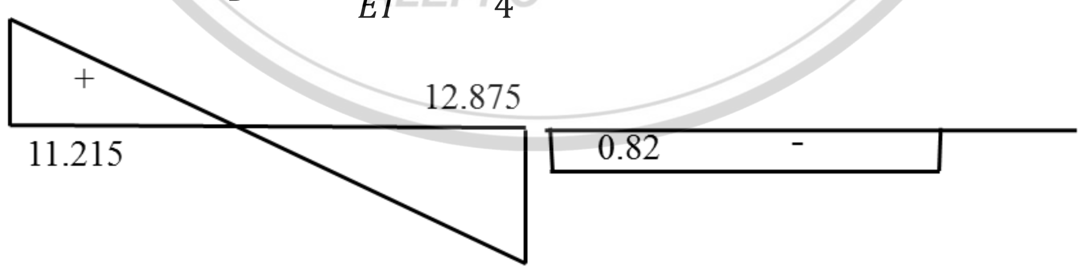
المسند	C	B_2	B_1	A
رد فعل الحمولة الخارجية	0	0	12↑	12↑
رد فعل المزدوجة	0.82↑	-0.82↓	0.785↑	-0.785↓
رد الفعل المحصل	0.82↑	-0.82↓	12.875↑	11.215↑
	R_C=0.82↑	R_B=12.055↑		R_A= 11.215↑

أما مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف فهي موضحة في الشكل رقم (٤-٢٨)

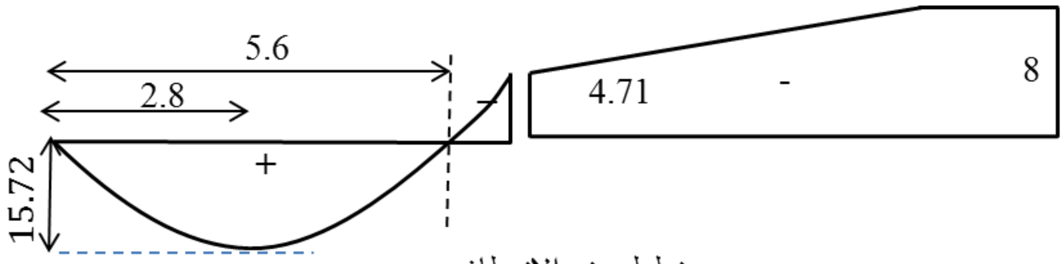
$$T = 11.215 - 4x = 0 \;\Rightarrow x = 2.8$$
$$M = 11.215x - 2\;x^2 \quad , \quad M_{max} = 15.72$$
$$M = 0 \Rightarrow x = 5.6$$

- حساب الانتقال والدوران في النهاية الحرة بطريقة الجائز البديل.

$$\Sigma\, MC^* = 0 \Rightarrow R_B^*\;4 + \frac{18.84}{EI} \times 2 + \frac{6.58}{EI} \times 4/3 + 0.002 = 0$$
$$R_B^* = -\frac{11.7}{EI} - \frac{0.002}{4} = -0.006 \;\; radian$$

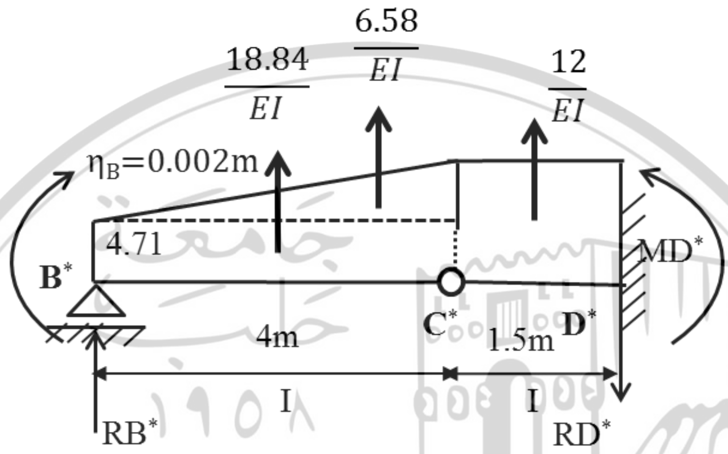


مخطط القوى القاطعة



مخطط عزم الانعطاف

الشكل رقم (٤-٢٨)



الجائز البديل

نأخذ مخطط كامل الجائز البديل.

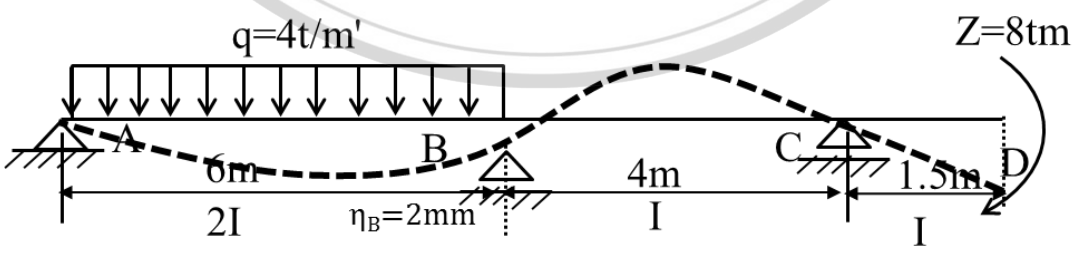
$$\Sigma\, Fy = 0 \Rightarrow RB^{*} + \frac{18.84}{EI} + \frac{6.58}{EI} + \frac{12}{EI} - RD^{*} = 0$$

$$RD^{*} = +\frac{37.42}{EI} - 0.006 = 0.0127 \quad radian$$

$$\Sigma\, MC^{*} = 0 \Rightarrow \frac{12}{EI} * 0.75 + M_D^{*} - R_D^{*} \cdot 1.5 = 0$$

$$M_D^{*} = 1.5 \;\; R_D^{*} - \frac{9}{EI} = 0.019 - 0.0045 = 0.0145 \;\; m$$

رسم الخط المرن.



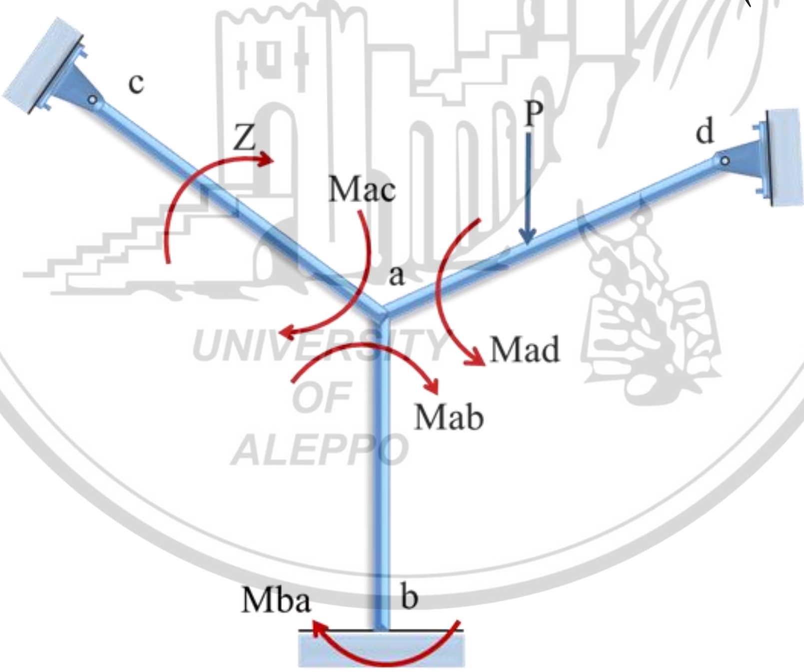
الفصل الخامس

معادلة الميل والسهم (معادلة الدورانات)

Slope Deflection Equation

٥–١ مقدمة: Preface

يتشكل الإطار ذو العقد الصلبة من تجميع عدة عناصر مستقيمة تتلاقي في نقطة واحدة (a) التي نطلق عليها العقدة كما هو موضح في الشكل رقم (٥–١)، ونقول عن العقدة انها صلبة إذا حافظت الزوايا بين العناصر على قيمتها بعد التشوه. سوف نعتمد في هذا البحث على اصطلاح آخر لإشارات العزوم أثناء كتابة المعادلات الخاصة بهذا البحث، حيث نقول إن العزم الموجب هو العزم الذي يدور مع عقارب الساعة، أما عند رسم مخططات عزم الانعطاف فنعتمد مبدأ شد الألياف السفلية موجب. وسوف نشير إلى العزم المؤثر في العقدة بدليلين، حيث يعبر الدليل الأول عن العقدة التي يؤثر فيها العزم، ويشير الدليل الثاني إلى العقدة البعيدة من العنصر الذي يؤثر فيه العزم، فمثلا العزم Mab وهو العزم الذي يؤثر في العقدة a وباتجاه العقدة b (وبتعبير آخر: هو العزم الذي يؤثر في العقدة a من العنصر ab) كما هو موضح في الشكل رقم (٥–١)



الشكل رقم (٥–١)

وتخضع العناصر الإطارية المستوية ذات العقد الصلبة لتأثير قوى محورية وقوى قاطعة وعزوم انعطاف التي تأخذ شكلا منحنيا بعد التشوه. وتكون الانتقالات المحورية لعناصر الإطارات ذات العقد الصلبة صغيرة جدا إذا ما قورنت بالانتقالات الناتجة عن

عزم الانعطاف، لذلك يتم إهمال التشوهات الطولية للعناصر من الناحية العملية والتي تنعكس على ثبات طول العناصر.

تعتمد هذه الطريقة على حساب قيم الدورانات والانتقالات في عقد الإطار واستنتاج قيم العزوم في عقد وعناصر الإطار لذا يندرج هذا البحث تحت أبحاث طرق الانتقالات في تقرير الجمل غير المقررة.

٥-٢ الإطارات المستوية: Plane Frames

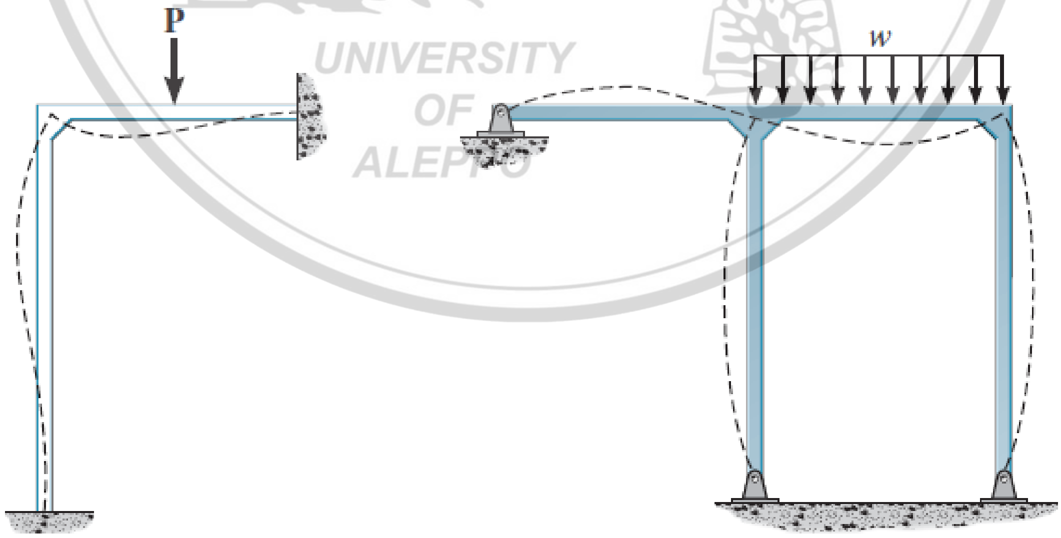
يوجد عدة أنواع من الإطارات المستوية وذلك حسب توضع عناصرها وكذلك حسب حركتها لذلك سوف نصنف الإطارات ذات العقد الصلبة وفق التصنيف التالي:

١. إطارات الفئة الأولى: الإطارات التي تعاني من حركة دورانية مجهولة فقط.
٢. إطارات الفئة الثانية: الإطارات التي تعاني من حركتين دورانية وانتقالية مجهولتين ذات عناصر متعامدة.
٣. إطارات الفئة الثالثة: الإطارات التي تعاني من حركتين دورانية وانتقالية مجهولتين ذات عناصر مائلة.

٥-٢-١ إطارات الفئة الأولى:

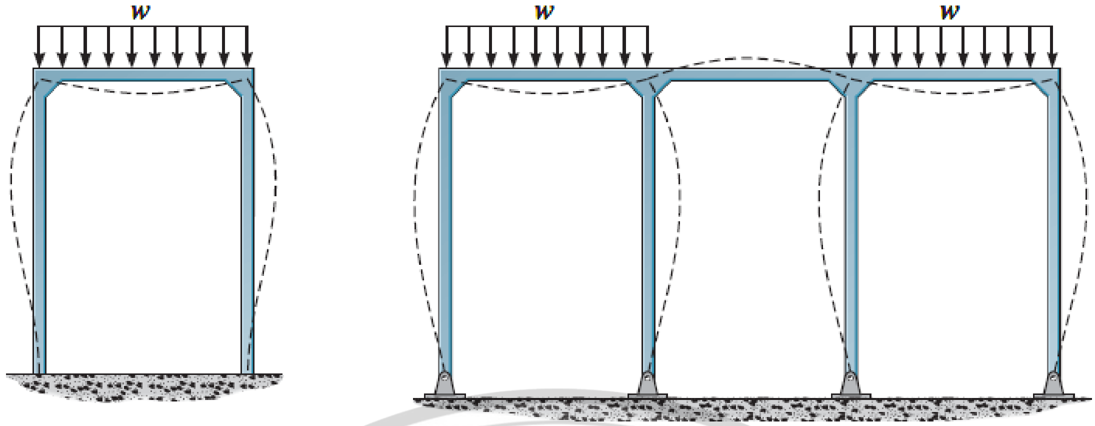
يوجد عدة أنواع من الإطارات التي تندرج ضمن هذه الفئة:

١. الإطارات الثابتة والموضحة في الشكل رقم (٥-٢).



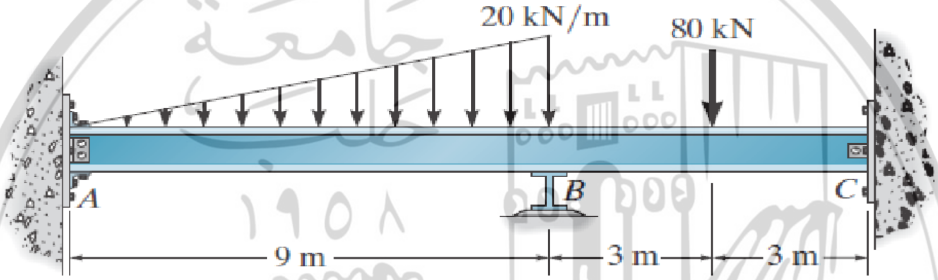
الشكل رقم (٥-٢) الإطارات الثابتة

٢. الإطارات المتناظرة (Symmetric Frames) الموضحة في الشكل (٥-٣)



الشكل رقم (٥–٣) الإطارات المتناظرة

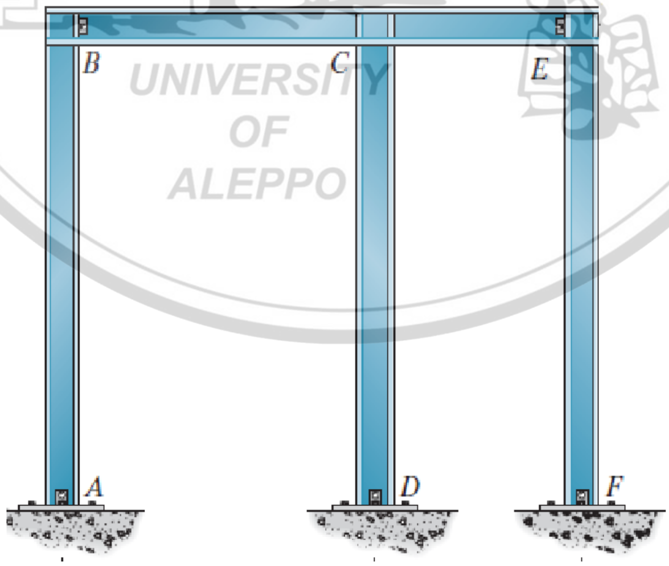
٣. الجوائز المستمرة (Continuous Beams) والموضحة في الشكل رقم (٥–٤).



الشكل رقم (٥–٤) الجوائز المستمرة

٥–٢–٢ إطارات الفئة الثانية:

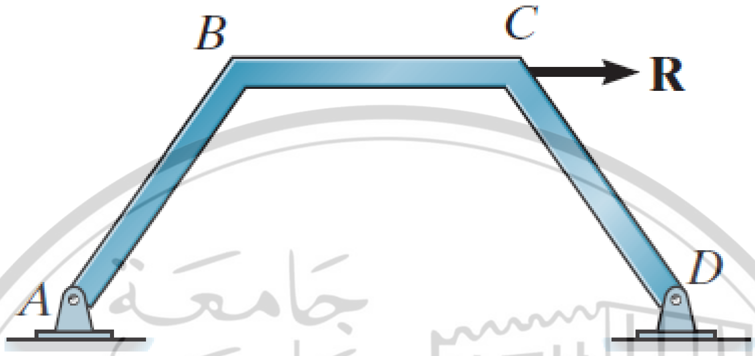
وهي الإطارات التي تعاني من انتقالات أفقية نتيجة عدم تناظر شكلها الهندسي أو عدم وجود ممانعة للانتقال الأفقي كما هو موضح في الشكل رقم (٥–٥).



الشكل رقم (٥–٥) إطارات الفئة الثانية

٥-٢-٣ إطارات الفئة الثالثة:

وهي الإطارات التي تعاني من انتقالات معقدة نتيجة وجود الأضلاع المائلة في عناصرها وكذلك عدم وجود ممانعة للانتقال الأفقي أو غير متناظرة كما هي موضحة في الشكل رقم (٥-٦)

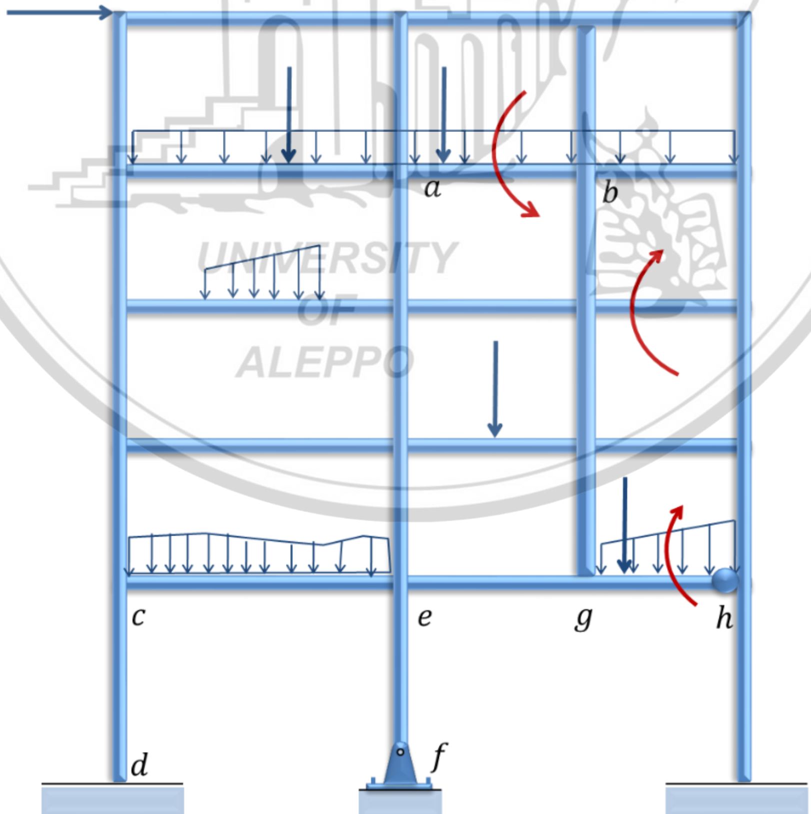


الشكل رقم (٥-٦) إطارات الفئة الثالثة

لذلك سوف نقتصر في دراستنا الحالية على إطارات الفئة الأولى

٥-٣ إيجاد العلاقة العامة للدورانات

لإيجاد معادلة الدورانات نصادف حالتين:



الشكل رقم (٥-٧)

الحالة الأولى: عندما تكون نهايتا العنصر عقدا صلبة كما هو الحال في العنصر (ab) الموضح في الشكل رقم (٥-٧) أو عندما تكون إحدى النهايتين موثوقة والنهاية الأخرى عقدة صلبة كما هو الحال في العنصر (cd).

الحالة الثانية: عندما تكون إحدى نهايتي العنصر عقدة صلبة والنهاية الأخرى متمفصلة كما هو الحال في العنصر (gh) أو عندما تكون إحدى نهايتي العنصر عقدة صلبة والنهاية الأخرى مسند بسيط خارجي كما هو الحال في العنصر (ef).

٥-٣-١ الحالة الأولى: عندما تكون نهايتي العنصر عقداً صلبة، أو إحدى النهايتين موثوقة والنهاية الأخرى عقدة صلبة.

٥-٣-١-١ استنتاج العلاقة:

نعزل العنصر ab محملا بحمولاته الخارجية وعزوم الاستمرارية حيث يخضع هذا العنصر لانتقال شاقولي ودوران في a مقداره Δ_a و θ_a على التوالي، وانتقال شاقولي ودوران في b مقداره Δ_b و θ_b على التوالي كما هو موضح في الشكل رقم (٥-٨a).

باستخدام نظرية الجائز البديل يمكننا إيجاد العلاقة العامة للدورانات للعقدة ba والعقدة ab، باستخدام معادلات التوازن للعنصر الأفقي ab وذلك برسم مخططات عزم الانعطاف الناتجة عن الحمولات الخارجية وعزوم الاستمرارية في العقد وتحميلها على الجائز البديل a*b* وتمثيل الانتقالات في الجائز الأصلي بعزوم انعطاف في الجائز البديل وكذلك الدورانات في الجائز الأصلي بقوى قاطعة في الجائز البديل كما هو موضح في الشكل رقم (٥-٨b).

$$\sum \mathrm{M}b^* = 0$$

$$(1) \quad \Delta_a + \theta_a * L - \frac{M_{ab}.L}{2EI}\frac{2L}{3} + \frac{M_{ba}.L}{2EI}\frac{L}{3} - \Delta_b - \frac{F}{EI}X_b = 0$$

$$\sum \mathrm{M}a^* = 0$$

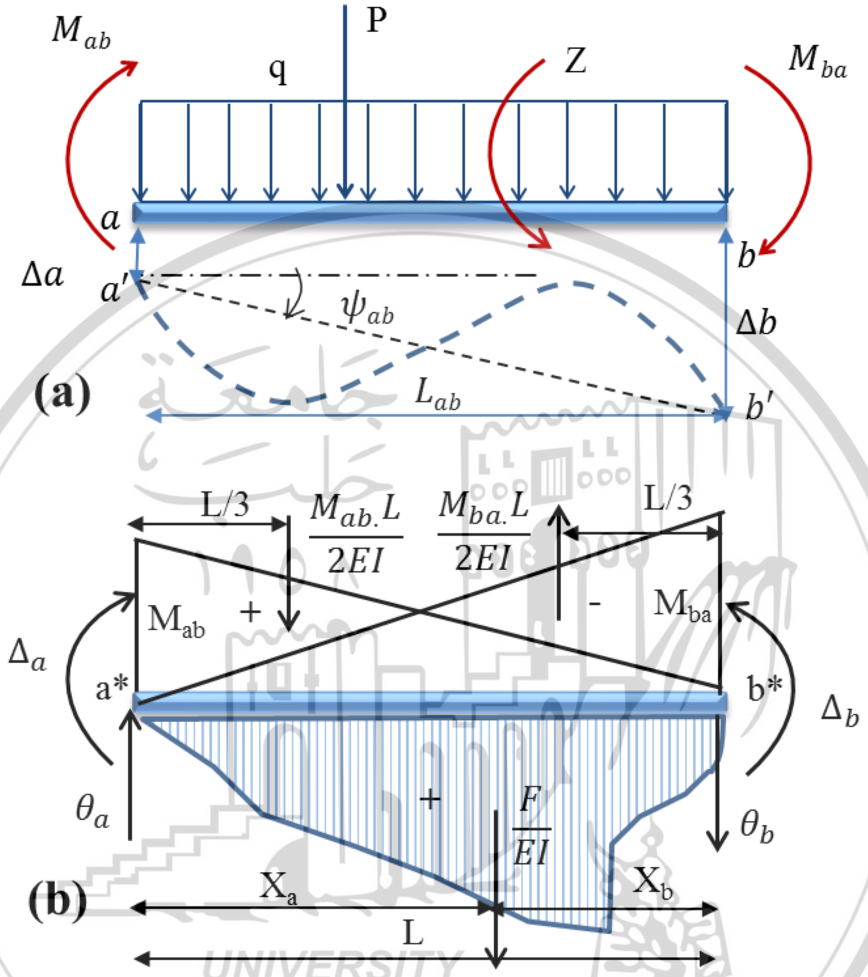
$$(2) \qquad \Delta_a + \theta_b * L + \frac{M_{ab}.L}{2EI}\frac{L}{3} - \frac{M_{ba}.L}{2EI}\frac{2L}{3} - \Delta_b + \frac{F}{EI}X_a = 0$$

بضرب العلاقة الأولى بـ 2 وجمعها مع العلاقة الثانية نجد:

$$2\,\Delta_a + 2\theta_a * L - 4\frac{M_{ab}.L^2}{6EI} + \frac{M_{ba}.L^2}{3EI} - 2\Delta_b - 2\frac{F}{EI}X_b = 0$$

$$\Delta_a + \theta_b * L + \frac{M_{ab}.L^2}{6EI} - \frac{M_{ba}.L^2}{3EI} - \Delta_b + \frac{F}{EI}X_a = 0$$

$$3\,\Delta_a + 2\theta_a * L \; + \theta_b * L - 3\frac{M_{ab}.L^2}{6EI} - 3\Delta_b - 2\frac{F}{EI}X_b + \frac{F}{EI}X_a = 0$$



الشكل رقم (٥-٨)

بتقسيم هذه العلاقة على L وضربها بـ EI وإصلاحها نجد:

$$EI\frac{3\,\Delta_a - 3\Delta_b}{L} + EI(2\theta_a \; + \theta_b) - \frac{M_{ab}.L}{2} - 2\frac{F}{L}X_b + \frac{F}{L}X_a = 0$$

باعتبار أن:

$$R_a^* = \frac{F}{L}X_b \quad \text{و} \quad R_b^* = \frac{F}{L}X_a$$

تصبح العلاقة السابقة على النحو التالي:

$$M_{ab} = \frac{2EI}{L}(2\theta_a \; + \theta_b - 3\frac{\Delta_b - \Delta_a}{L}) - \frac{2}{L}(\,2\,R_a^* - R_b^*)$$

لكن القيمة $-\frac{2}{L}(2\ \ R_a^* - \ \ R_b^*) = M_{ab}^F$ تعبر عن عزم الوثاقة التام في المسند A، وبفرض أن القيمة: $\psi_{ab} = \frac{\Delta_b - \Delta_a}{L}$ تعبر عن دوران العنصر AB الناتج عن الانتقال، مع ملاحظة أن الحد Δ (خاص بالانتقال المتعامد مع العنصر المدروس) يكون موجبا حين يكون باتجاه الأسفل أو باصطلاح آخر عندما يدور العنصر الذي يتأثر بالانتقال مع عقارب الساعة تكون إشارة ψ_{ab} موجبة، وبتعويض هذه القيم في العلاقة السابقة تصبح المعادلة النهائية للدورانات على النحو التالي:

$$(5-1) \qquad M_{ab} = \frac{2EI}{L}(2\theta_a + \theta_b - 3\psi_{ab}) + M_{ab}^F$$

أما قيم عزوم الوثاقات التامة لبعض حالات التحميل الشائعة تم إدراجها في الجدول رقم (٥-١).

إجراءات التحليل: Analyzing Procedures

١. نوجد قيم عزوم الوثاقات التامة حسب الجدول رقم (٥-١) مع الأخذ بعين الاعتبار الإشارة الموجبة للعزم حسب اتجاه دورانه (مع عقارب الساعة موجب)

٢. نكتب معادلة الدورانات لبداية ونهاية كل عنصر.

٣. بما أن العقد متوازنة يكون مجموع العزوم في كل عقدة يساوي الصفر

$$\sum \mathrm{Mi} = 0$$

٤. نحصل على عدد من معادلات التوازن يساوي عدد العقد

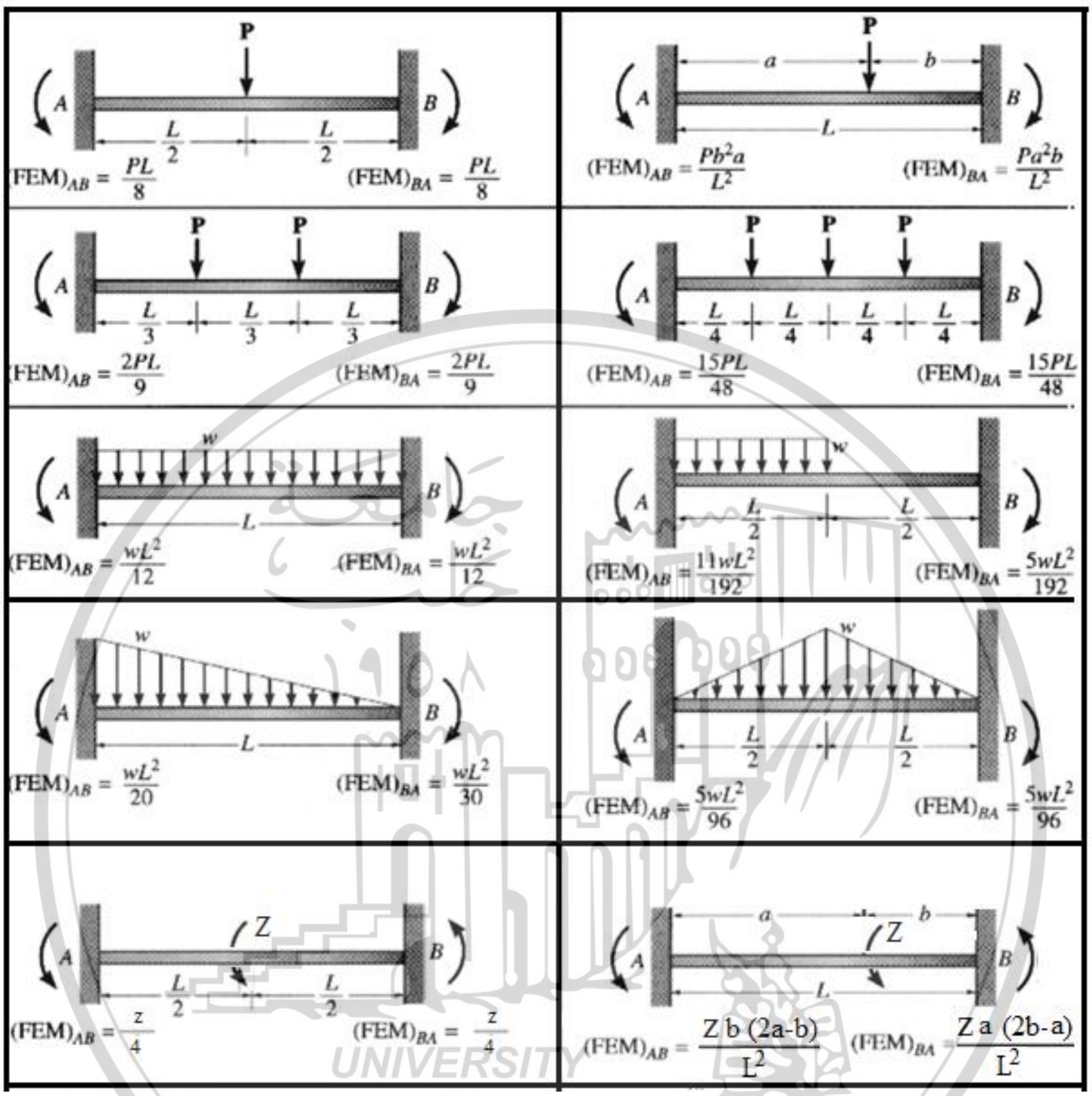
٥. نقوم بحل هذه المعادلات فنحصل على قيم زوايا الدوران $\boldsymbol{\theta}$

٦. نعوض قيم زوايا الدوران $\boldsymbol{\theta}$ في معادلات العزوم فنحصل على العزوم النهائية في جميع عناصر الإطار

٧. نعوض قيم هذه العزوم حسب اتجاه دورانها لكل عنصر في الإطار

٨. نحسب ردود الأفعال ونرسم مخططات القوى الداخلية لكل عنصر حسب موقعه، مع اعتبار إشارة مخطط عزم الانعطاف حسب اتجاه شد الألياف

الجدول رقم (٥-١) يبين قيم عزوم الوثاقات التامة لبعض حالات التحميل الشائعة



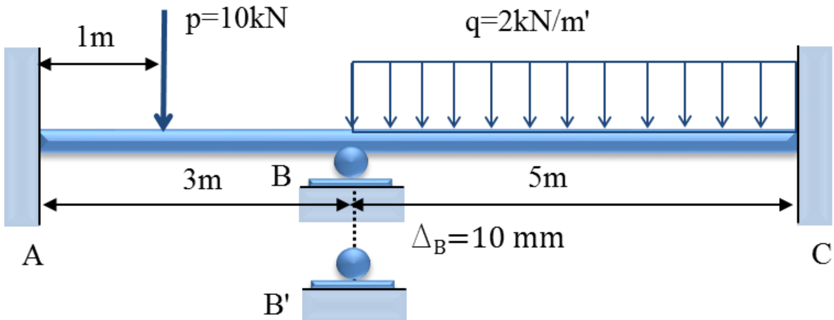
٥-٣-١-٢ أمثلة عملية

مثال (١): جائز ABC مستمر يستند على مسندين موثوقين في A و C وعلى مسند بسيط في B، يتعرض المسند B لهبوط مقداره 10 mm إضافة لتعرضه لحمولة موزعة بانتظام شدتها 2kN/m' على كامل طول الفتحة BC ويتعرض أيضا لتأثير حمولة مركزة شدتها 10kN على بعد 1m من المسند A والمطلوب:

١. قرر هذا الجائز بالاعتماد على معادلة الدورانات

٢. أوجد ردود الأفعال وارسم مخطط القوة القاطعة وعزم الانعطاف

٣. ارسم الخط المرن للجائز

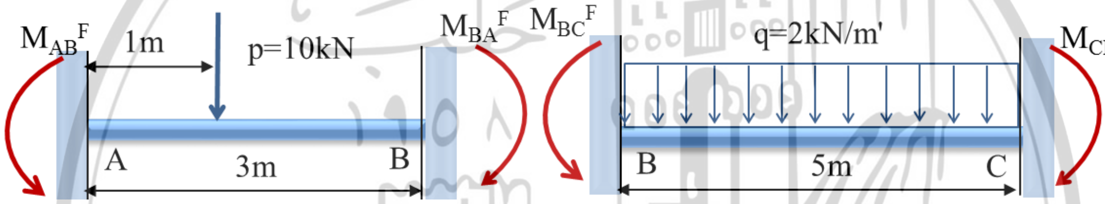


بفرض أن الصلابة الانعطافية للعناصر هي:

$EI_{ab}=100\ kN.m^2$ $\quad\quad$ $EI_{bc}=200\ kN.m^2$

الحل:

أولا: إيجاد عزوم الوثاقات التامة بالاعتماد على الجدول رقم (٥-١) حيث نوثق كل فتحة من الطرفين كما هو موضح في الشكل التالي:



$$M_{AB}^F = -\frac{pab^2}{L^2} = -\frac{10*1*4}{9} = -4.44\ \text{kN.m}$$

$$M_{BA}^F = \frac{pba^2}{L^2} = -\frac{10*2*1}{9} = 2.22\ \text{kN.m}$$

$$M_{BC}^F = -\frac{qL^2}{12} = -\frac{2*25}{12} = -4.16\ \text{kN.m}$$

$$M_{CB}^F = \frac{qL^2}{12} = \frac{2*25}{12} = 4.16\ \text{kN.m}$$

ثانيا: نكتب معادلات الدورانات لجميع العناصر (مع ملاحظة أن الدوران معدوم في الوثاقة)

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\psi_{AB}) + M_{AB}^F$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{3}\left[\theta_B - 3\left(\frac{0.01}{3}\right)\right] - 4.44 = EI\left[\frac{2\theta_B}{3} - \frac{0.02}{3}\right] - 4.444$$

$$M_{BA} = EI\left[\frac{4\theta_B}{3} - \frac{0.02}{3}\right] + 2.222$$

$$M_{BC} = \frac{2E2I}{5}\left[2\theta_B - 3\left(-\frac{0.01}{5}\right)\right] - 4.167 = EI\left[\frac{8\theta_B}{5} + \frac{0.12}{25}\right] - 4.167$$

$$M_{CB} = EI\left[\frac{4\theta_B}{5} + \frac{0.12}{25}\right] + 4.167$$

ثالثا: توازن العقد:

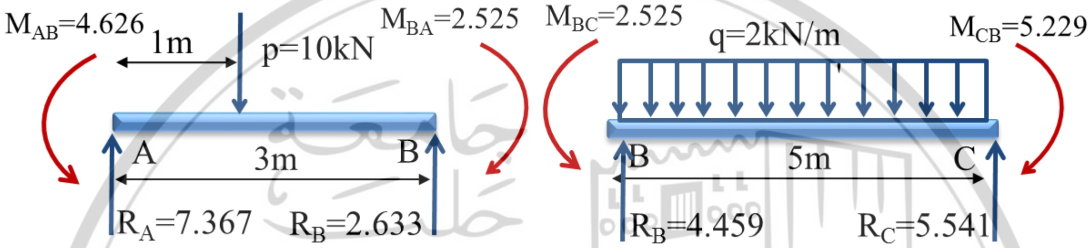
$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \rightarrow EI[2.933\theta_B - 0.001867] = 1.945$$
$$\theta_B = 7.27(10^{-3})radian$$

رابعا –نعوض قيمة زاوية الدوران في معادلات العزوم لكل عنصر فنحصل على قيم العزوم في المساند والعقد.

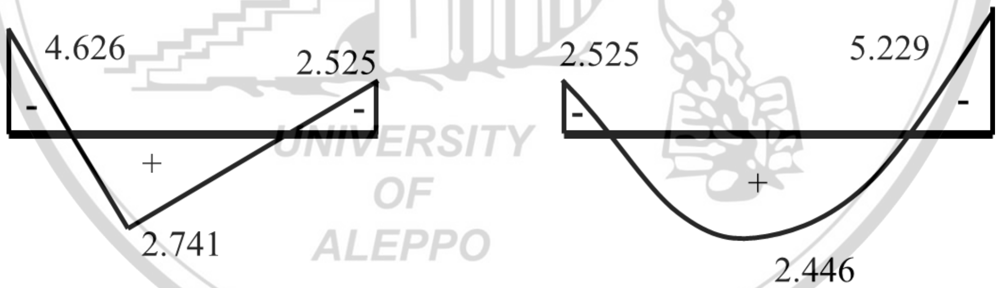
$M_{BA} = 2.525$ kN.m $\quad$ $M_{AB} = -4.626$ kN.m

$M_{BC} = -2.525$ kN.m $\quad$ $M_{CB} = 5.229$ kN.m

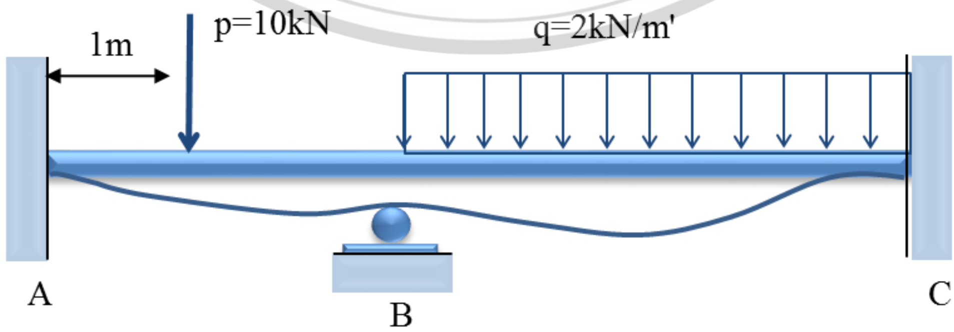
خامسا: نوجد قيم ردود الأفعال ونرسم مخططات القوى الداخلية



مخطط القوة القاطعة



مخطط عزم الانعطاف

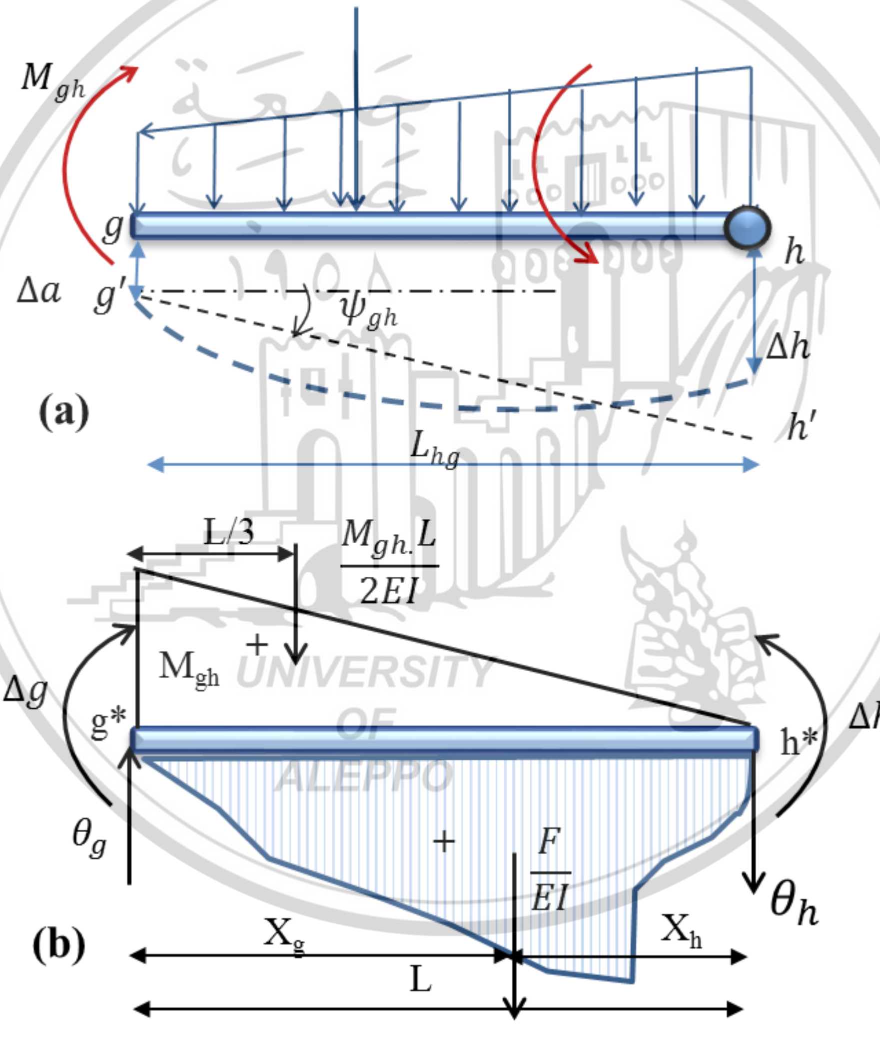


الخط المرن

٥-٣-٢ الحالة الثانية: عندما تكون إحدى نهايتي العنصر عقدة صلبة والنهاية الأخرى متمفصلة، أو عندما تكون إحدى نهايتي العنصر عقدة صلبة والنهاية الأخرى مسند بسيط خارجي.

٥-٣-٢-١ استنتاج العلاقة:

نعزل العنصر gh محملا بحمولاته الخارجية وعزوم الاستمرارية حيث يخضع هذا العنصر لانتقال شاقولي ودوران في g مقداره Δ_g و θ_g على التوالي، وانتقال شاقولي ودوران في h مقداره Δ_h و θ_h على التوالي والموضح في الشكل رقم (٥-٩a).



الشكل رقم (٥-٩)

بالاعتماد على نظرية الجائز البديل يمكننا إيجاد العلاقة العامة للدورانات للعقدة g التابعة للعنصر gh، حيث نرسم مخططات عزم الانعطاف الناتجة عن الحمولات الخارجية والناتجة أيضا عن عزوم الاستمرارية في العقد وتحميلها على الجائز البديل

وتمثيل الانتقالات في الجائز الأصلي بعزوم انعطاف في الجائز البديل وكذلك g*h* الدورانات في الجائز الأصلي بقوى قاطعة في الجائز البديل والموضح في الشكل رقم (٥-b٩) وبالاعتماد على معادلات التوازن للعنصر الأفقي gh نجد:

$$\sum \mathrm{M}h^* = 0 \rightarrow \Delta_g + \theta_g * L - \frac{M_{gh}.L}{2EI}\frac{2L}{3} - \Delta_h - \frac{F}{EI}X_h = 0$$

بتقسيم هذه العلاقة على L وضربها بـ EI وإصلاحها نجد:

$$EI\frac{\Delta_g - \Delta_h}{L} + EI(\theta_g) - \frac{M_{gh}.L}{3} - \frac{F}{L}X_h = 0$$

وبتعويض قيمة $R_g^* = \frac{F}{L}X_h$

$$M_{gh} = \frac{3EI}{L}(\theta_g - \frac{\Delta_h - \Delta_g}{L}) - \frac{3}{L}(\ R_g^*)$$

لكن القيمة $M_{gh}^{MF} = -\frac{3}{L}\left(\ R_g^*\right)$ تعبر عن عزم الوثاقة المعدل

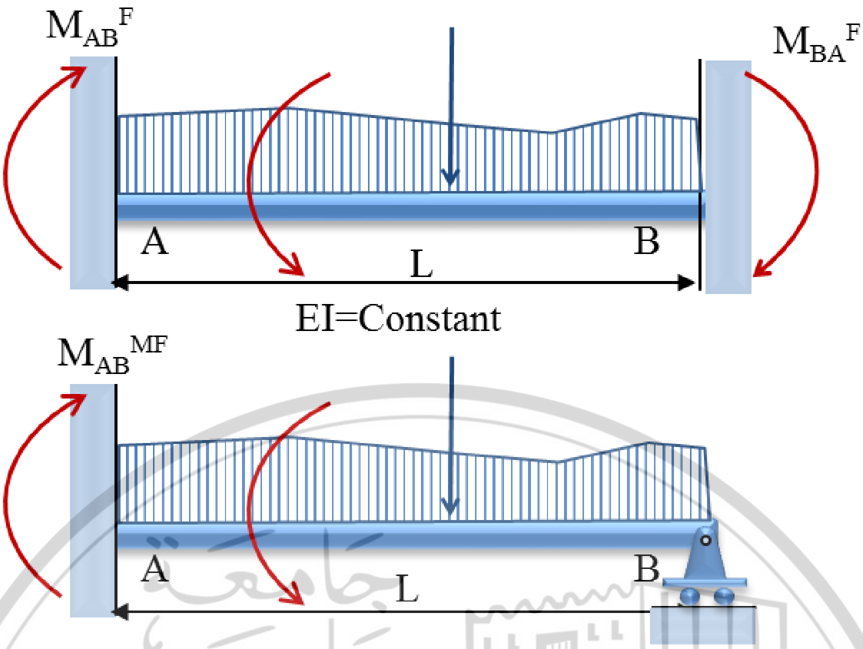
بفرض أن القيمة $\psi_{gh} = \frac{\Delta_h - \Delta_g}{L}$ تعبر عن دوران العنصر الناتج عن الانتقال مع ملاحظة أن الحد Δ (خاص بالانتقال المتعامد مع المجال المدروس) يكون موجبا حين يكون باتجاه الأسفل أو باصطلاح آخر عندما يدور العنصر الذي يتأثر بالانتقال مع عقارب الساعة تكون إشارة ψ_{gh} موجبة، وبتعويض هذه القيم في العلاقة السابقة تصبح المعادلة النهائية للدورانات على النحو التالي:

$$\boldsymbol{M_{gh} = \frac{3EI}{L}\left(\theta_g - \psi_{gh}\right) + M_{gh}^{MF}}$$

أما قيم عزوم الوثاقات المعدلة $\boldsymbol{M_{gh}^{MF}}$ (عزم الوثاقة لجائز موثوق ومسنود) يمكن إيجادها بالاعتماد على الفقرة التالية:

٥-٤ إيجاد عزم الوثاقة المعدل لجائز موثوق ومسنود:

يطلق في بعض الأحيان على مفهوم عزم الوثاقة في الجائز الموثوق والمسنود بعزم الوثاقة المعدل، حيث يمكننا إيجاد عزم الوثاقة المعدل بالاعتماد على عزوم الوثاقة التامة لجائز موثوق من الطرفين له نفس مواصفات الجائز الأصلي من حيث الأطوال والحمولات الخارجية والمساند حيث تحولت أحد الوثاقات في الجائز الموثوق من الطرفين إلى مسند بسيط (حالة الجائز الموثوق والمسنود).



الشكل رقم (٥-١٠)

من العلاقات النظرية للجائز الموثوق والمسنود والجائز الموثوق من الطرفين وجدنا أن:

$$MA^{MF} = -\frac{3}{l} RA^{*}$$

$$M_A^F = -\frac{2}{l}(2\,RA^{*} - RB^{*})$$

$$M_B^F = +\frac{2}{l}(2\,RB^{*} - RA^{*})$$

بفرض أن عزوم الوثاقات الموجبة هي العزوم التي تدور مع عقارب الساعة كما هي موضحة في الشكل رقم (٥-١٠)، من علاقتي الجائز الموثوق من الطرفين لو قسمنا عزم الوثاقة في B على 2، وجمعناه مع عزم الوثاقة في A لنتج لدينا:

$$M_A^F - \frac{M_B^F}{2} = -\frac{2}{l}(2\,RA^{*} - RB^{*}) - \frac{1}{l}(2\,RB^{*} - RA^{*})$$

$$M_A^F - \frac{M_B^F}{2} = -\frac{4\,RA^{*}}{l} + \frac{2\,RB^{*}}{l} - \frac{2\,RB^{*}}{l} + \frac{RA^{*}}{l}$$

$$M_A^F - \frac{M_B^F}{2} = -\frac{3\,RA^{*}}{l} = MA^{MF}$$

العلاقة التي تربط بين عزوم الوثاقات التامة لجائز موثوق من الطرفين وعزم الوثاقة المعدل لجائز موثوق ومسنود حسب اتجاه دورانها هي:

$$MA^{MF} = M_A^F - \frac{M_B^F}{2}$$

حيث يعوض العزم بإشارته في هذه العلاقة.

<u>طريقة التحليل:</u> <u>Analyzing Procedures</u>

١-نوجد قيم عزوم الوثاقات المعدلة بالاعتماد على الفقرة (٥-٤) وانطلاقا من عزوم الوثاقات التامة مع الأخذ بعين الاعتبار الإشارة الموجبة للعزم حسب اتجاه دورانه (مع عقارب الساعة موجب)

٢-نكتب معادلة الدورانات لكل عنصر للبداية والنهاية باستثناء العنصر الذي يحتوي على مفصل او مسند بسيط حيث يكتفى بكتابة معادلة واحدة للطرف المستمر

٣-بما أن العقد متوازنة يكون مجموع العزوم في كل عقدة يساوي الصفر

$$\sum \mathrm{Mi} = 0$$

٤-نحصل على عدد من معادلات التوازن يساوي عدد العقد

٥-نقوم بحل هذه المعادلات فنحصل على قيم زوايا الدوران $\boldsymbol{\theta}$

٦-نعوض قيم زوايا الدوران $\boldsymbol{\theta}$ في معادلات العزوم فنحصل على العزوم النهائية في جميع عناصر الإطار

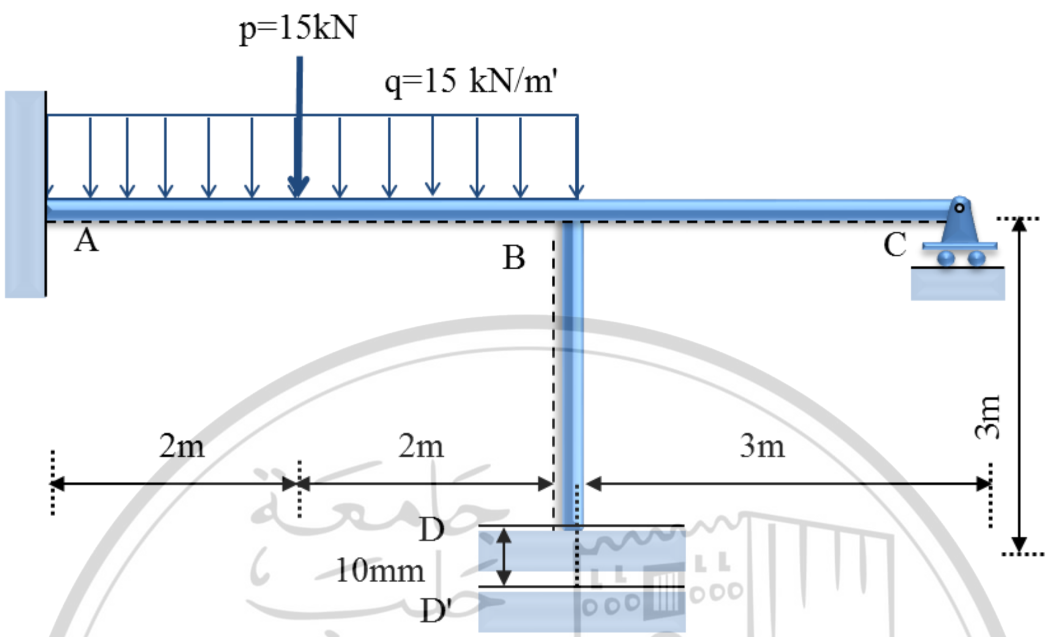
٧-نعوض هذه العزوم في كل عقدة حسب اتجاه دورانها لكل عنصر

٨-نحسب ردود الأفعال ونرسم مخططات القوى الداخلية لكل عنصر حسب موقعه، مع اعتبار إشارة مخطط عزم الانعطاف حسب اتجاه شد الألياف

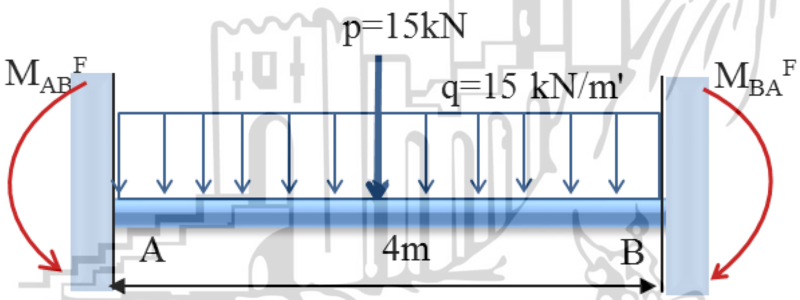
مثال ٢: منشأة إطارية مؤلفة من عنصر شاقولي BD و عنصر أفقي AC مؤلف من مجازين AB وBC يتعرض المجاز الأول AB لتأثير حمولة موزعة بانتظام شدتها 15kN/m' وحمولة مركزة في منتصفه شدتها 15kN، يتعرض المسند D لهبوط مقداره 10mm فإذا علمت أن عطالات العناصر هي $I_{AB}=0.0008m^4$ $I_{BC}=I_{BD}=0.0006m4$ والمطلوب:

١. قرر هذا الإطار باستخدام معادلة الدورانات

٢. اوجد ردود الأفعال وارسم مخطط القوة القاطعة والقوة المحورية وعزم الانعطاف



أولا: نوجد عزوم الوثاقات التامة والمعدلة للفتحات المحملة.



$$M_{AB}^{F}=-\frac{wL^2}{12}-\frac{PL}{8}=-\frac{15(4)^2}{12}-\frac{15(4)}{8}=-27.5\ \text{kN.m}$$

$$M_{BA}^{F}=+27.5\ \text{kN.m}$$

نوجد قيم زوايا دوران العناصر الناتجة عن انتقال المسند C

$$\psi_{AB}=\psi_{BA}=\frac{\Delta_B-\Delta_A}{L}=\frac{0.01-0}{4}$$

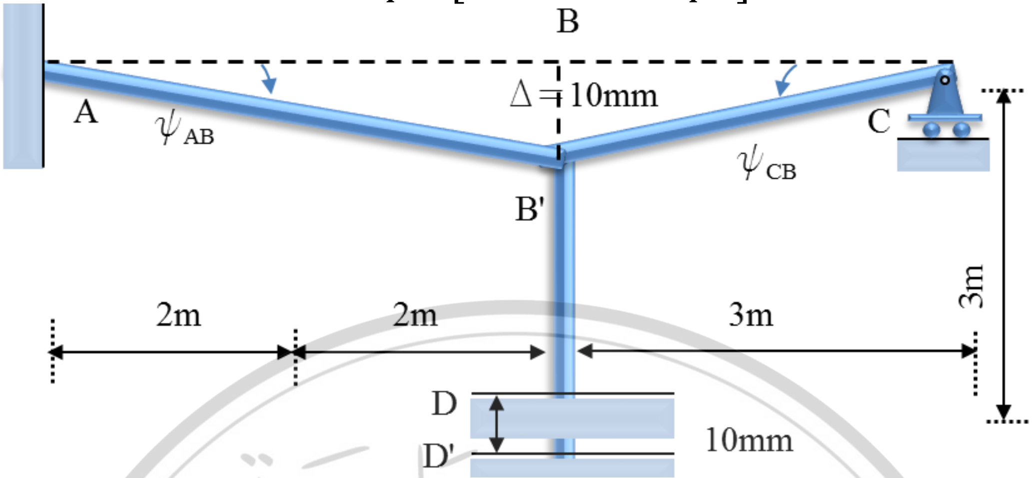
$$\psi_{BC}=\psi_{CB}=\frac{\Delta_C-\Delta_B}{L}=\frac{0-0.01}{3}$$

$$\psi_{AB}=\psi_{BA}=+\frac{\Delta}{4}radian \qquad \psi_{BC}=\psi_{CB}=-\frac{\Delta}{3}radian$$

كما هو موضح بالشكل التوضيحي رقم (٥-١١).

ثانيا: نكتب معادلات الدورانات لجميع العناصر مع الأخذ بعين الاعتبار أن $\theta_A=\theta_D=0$ لانعدام الدوران في الوثاقة

$$M_{AB} = 2E\frac{0.0008}{4}\left[0 + \theta_B - 3\frac{0.010}{4}\right] - 27.5$$



الشكل رقم (٥-١١)

$$M_{AB} = 0.0004E[\theta_B - 0.0075] - 27.5$$
$$M_{BA} = 0.0004E[2\theta_B - 0.0075] + 27.5$$
$$M_{BC} = 3E\frac{0.0006}{3}\left[\theta_B + \frac{0.010}{3}\right] + 0$$
$$M_{BC} = 0.0006E[\theta_B + 0.00333]$$
$$M_{BD} = 2E\frac{0.0006}{3}[2\theta_B + 0 - 0] + 0$$
$$M_{BD} = 0.0008E[\theta_B] \qquad M_{DB} = 0.0004E[\theta_B]$$

ثالثا: نطبق شرط توازن العزوم في العقد:

$$M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} = 0$$
$$\theta_B = \frac{172.5}{440(10^3)} = 0.39205(10^{-3})radian$$

رابعا: نعوض قيمة زاوية الدوران في معادلات العزوم

M_{AB}= -596.136 kN.m $\qquad$ M_{BA}= -509.772 kN.m

M_{BC}=447.046 kN.m $\qquad$ M_{BD}=62.726 kN.m

M_{DB}=31.363 kN.m

خامسا: نوجد ردود الأفعال بعزل كل فتحة مع حمولاتها والعزوم المؤثرة على العقد مع اعتبار أن العزم الموجب يدور مع عقارب الساعة كما هو موضح بالشكل رقم (٥-١٢).

$$R_{AB} = 7.5 + 30 + \frac{596.136 + 509.772}{4} = 313.98$$
$$R_{BA} = 7.5 + 30 - \frac{596.136 + 509.772}{4} = 238.98$$

$$R_{BC} = -\frac{447.046}{3} = -149.02 \qquad R_{CB} = -R_{BC} = +149.02$$
$$R_{BD} = \frac{62.726 + 31.363}{3} = 31.36 \qquad R_{DB} = -R_{BD} = -31.36$$

سادسا: نرسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف كما هو موضح في الشكل رقم (٥-١٣).

سابعا: نرسم مخطط القوى المحورية، بإيجاد ردود الأفعال المتبقية حيث ندرس توازن القوى في كل عقدة كما هو موضح في الشكل رقم (٥-١٤).

تتوازن العزوم المؤثرة في العقد (مجموع العزوم في كل عقدة يساوي الصفر)، لذلك سوف ندرس توازن القوى الأفقية والقوى الشاقولية، ثم ندرس توازن العناصر بعد وضع ردود الأفعال المجهولة لكل مسند ونبدأ بتوازن القوى الشاقولية لوجود مجهول واحد وهو R_{BV}

$$\Sigma Fy = 0 \rightarrow R_{BA} + R_{BC} + R_{BV} = 0$$
$$238.98 - 149.02 + R_{BV} = 0 \quad \rightarrow R_{BV} = -89.96$$

أما دراسة التوازن الأفقي للعقدة B التي تحتوي على مجهولين وهما H_{BC} و H_{BA} لذلك نقوم بدراسة العنصر BC لإيجاد H_{BC} ثم نعود لدارسة التوازن الأفقي للعقدة B

أولا: دراسة توازن العنصر BC الموضح في الشكل رقم (٥-١٤a)

$$\Sigma Fx = 0 \rightarrow H_{BC} = 0$$

بالعودة إلى دراسة العقدة B

$$\Sigma Fx = 0 \rightarrow R_{BD} + H_{BA} - H_{BC} = 0 \rightarrow H_{BA} = -R_{BD} = -31.36$$

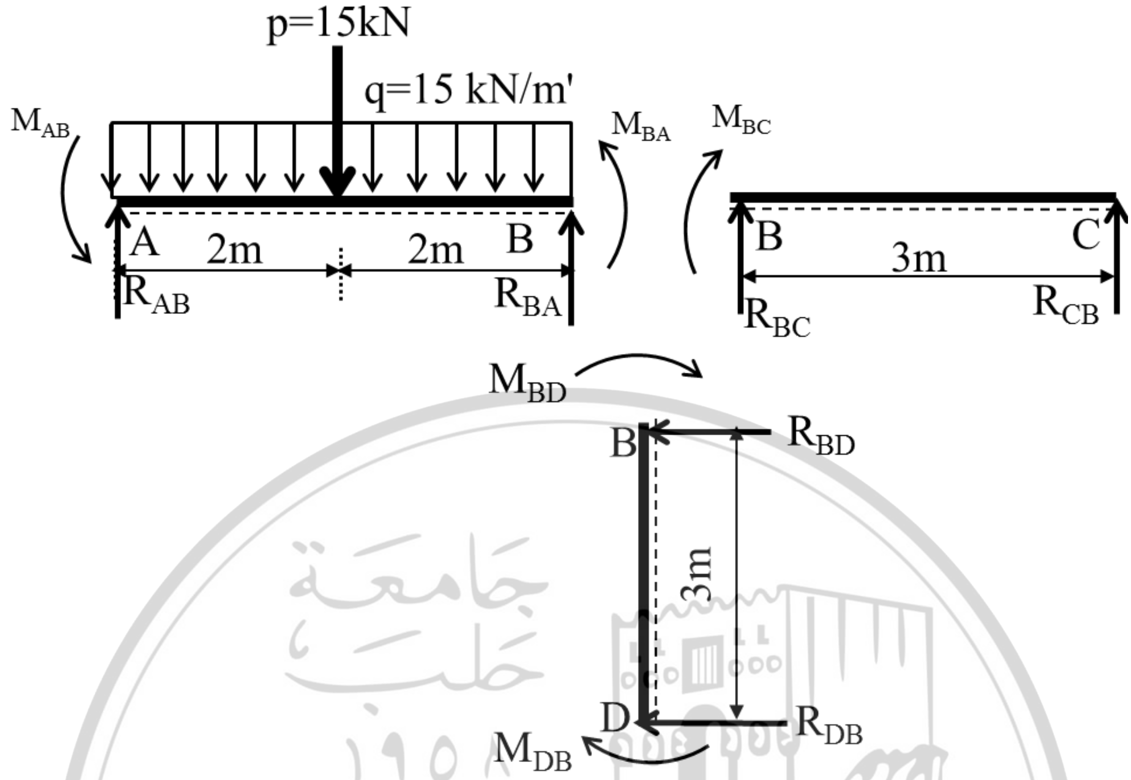
ثانيا: دراسة توازن العنصر AB الموضح في الشكل رقم (٥-١٤)

$$\Sigma Fx = 0 \rightarrow H_{BA} - H_{AB} = 0 \rightarrow H_{AB} = H_{BA} = -31.36$$

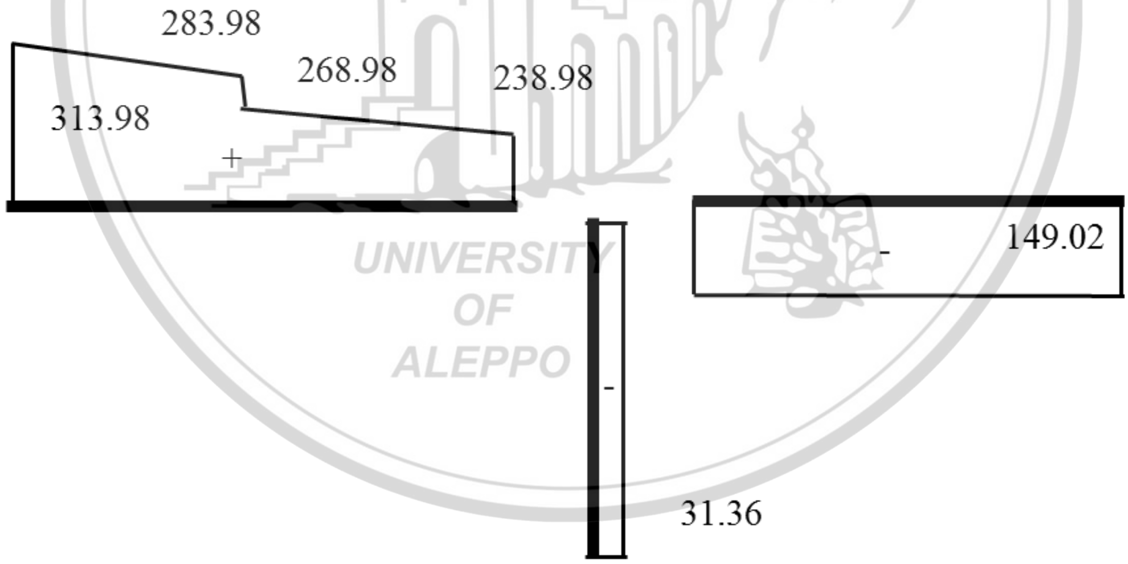
ثالثا: دراسة توازن العنصر BD الموضح في الشكل رقم (٥-١٤b)

يتم دراسة التوازن الشاقولي للعناصر الشاقولية ودراسة التوازن الأفقي للعناصر الأفقية.

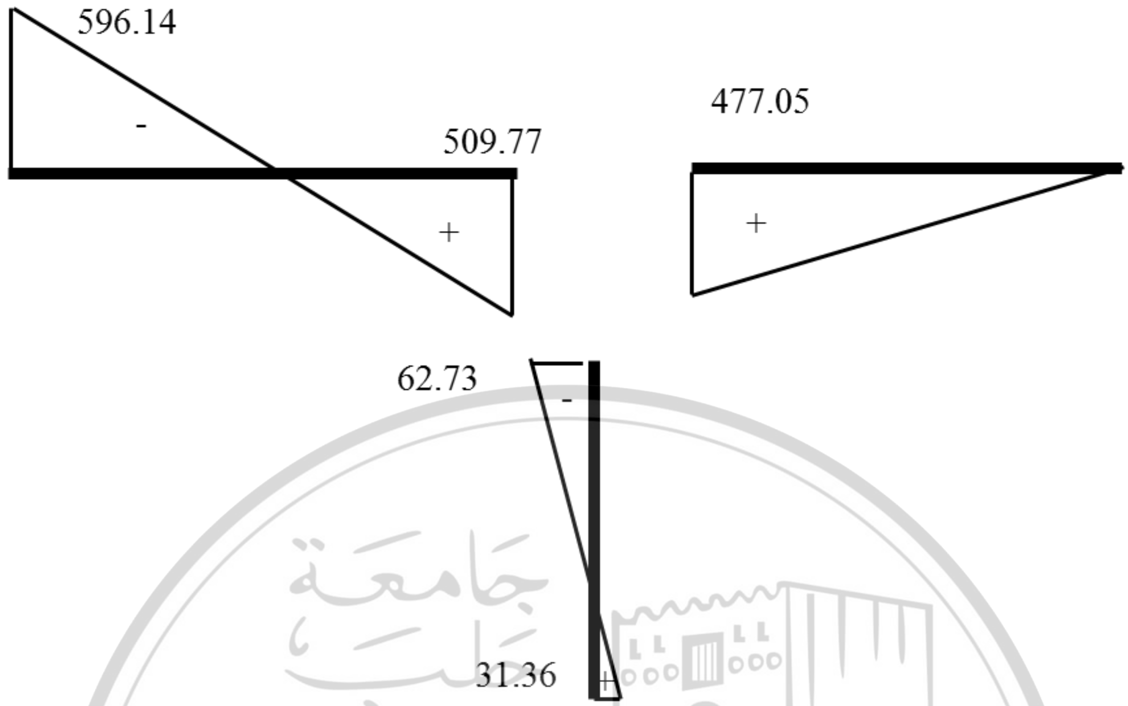
$$\Sigma Fy = 0 \rightarrow R_{VB} + R_{BV} = 0 \rightarrow R_{VB} = 89.96$$



الشكل رقم (٥-١٢) ردود الأفعال

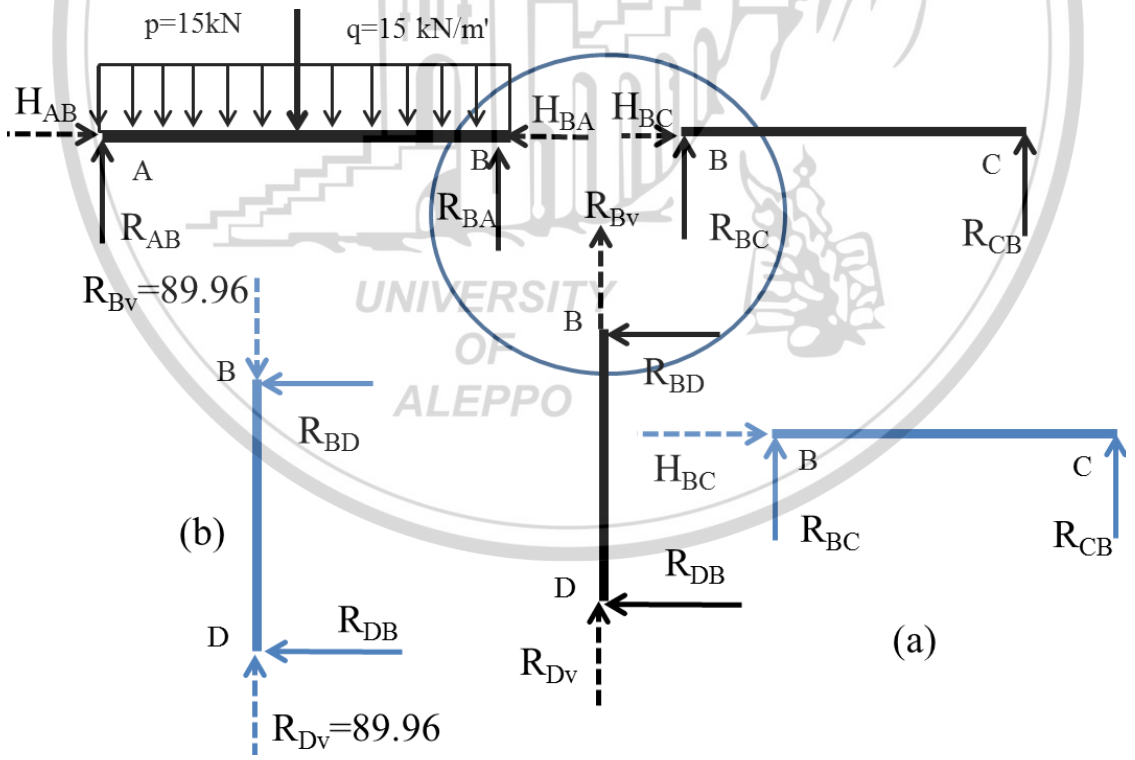


مخطط القوى القاطعة



مخطط عزم الانعطاف

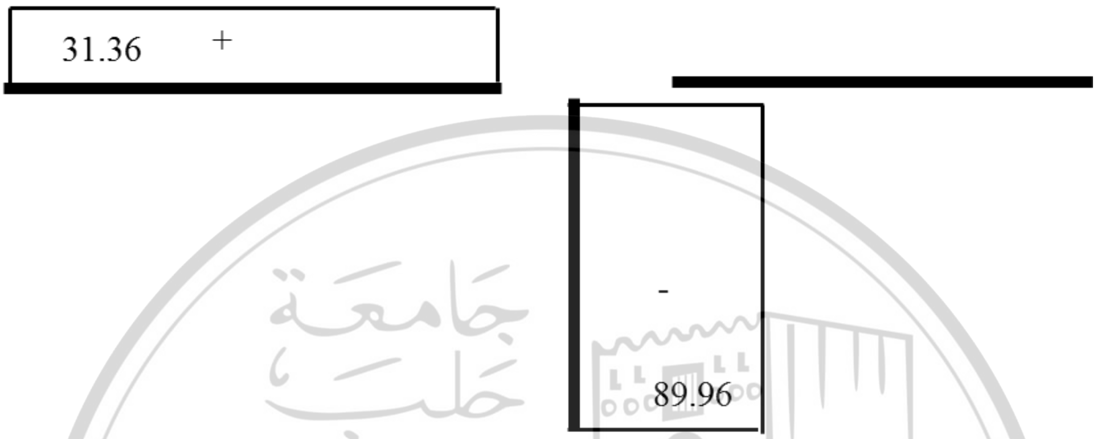
الشكل رقم (٥-١٣) مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف



الشكل رقم (٥-١٤) توازن العقد والعناصر

وبذلك نكون قد أنهينا دراسة العنصر BD، حيث يخضع هذا العنصر لتأثير قوة محورية ضاغطة شدتها 89.96 kN، أما دراسة التوازن الأفقي فهو محقق.

بعد إجراء هذه الموازنة السريعة نستطيع رسم مخطط القوى المحورية ومعرفة ردود الأفعال النهائية في كل مسند كما هو موضح في الشكل رقم (٥–١٥).



الشكل رقم (٥–١٥) مخطط القوى المحورية

٥–٥ حالات خاصة: Special Cases

٥–٥–١ الحالة الأولى: في حال وجود تناظر تام في الشكل والمساند والعطالات والحمولات والأطوال

نصادف في هذه الحالة موقعين لمحور التناظر وهما:

أولاً: إذا كان موقع محور التناظر يمر من العقدة حيث يمكننا حل نصف الجملة بوضع وثاقة عند هذه العقدة لأن الدوران معدوم عند محور التناظر في الجمل المتناظرة.

ثانياً: إذا كان موقع محور التناظر يمر من منتصف فتحة في هذه الحالة يمكننا حل نصف الجملة مع الأخذ بعين الاعتبار كامل الفتحة التي يمر منها محور التناظر وتطبيق شرط التناظر على زاويتي الدوران المتناظرتين الواقعتين على يمين ويسار محور التناظر مباشرة (يمين $-\theta$ = يسار θ)

مثال(٣): يبين الشكل رقم (٥-١٦) إطارا مكونا من طابقين يتعرض لتأثير الحمولات المبينة في الشكل فاذا علمت أن الأبعاد والحمولات والعطالات والمساند مبينة على الشكل والمطلوب:

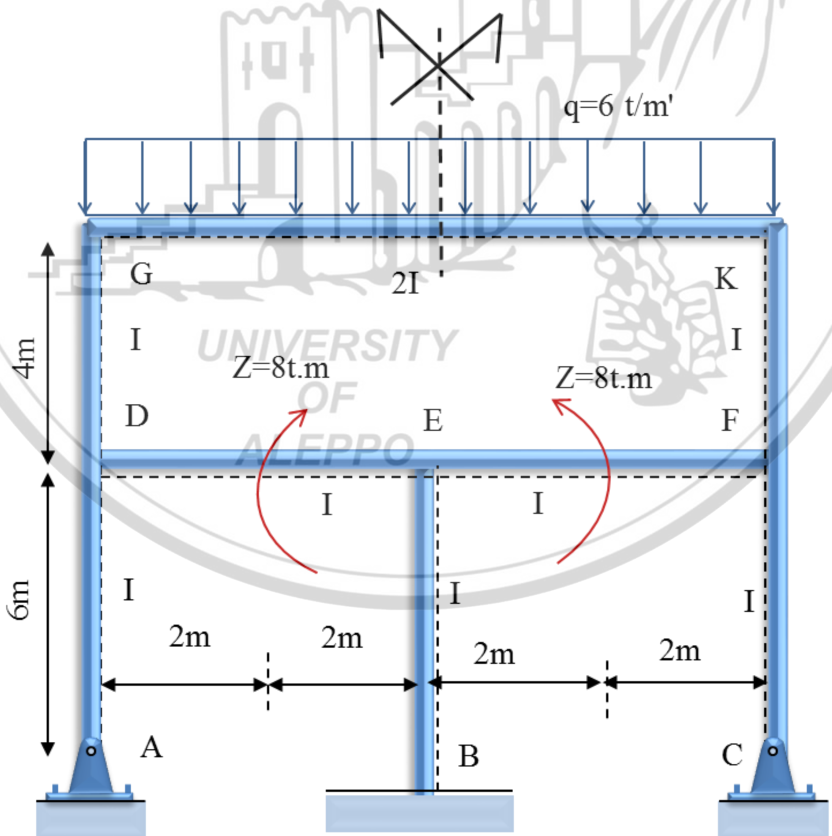
١. قرر هذا الإطار بالاعتماد على معادلة الدورانات

٢. أوجد ردود الأفعال وارسم مخططات القوى المحورية والقوى القاطعة وعزم الانعطاف.

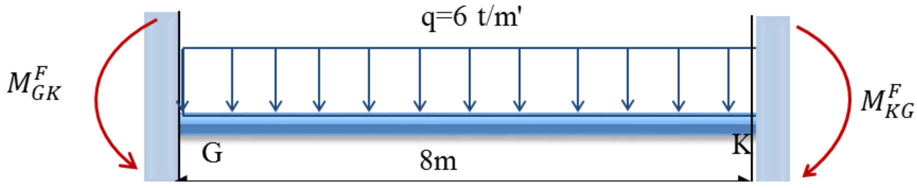
الحل: هذا الإطار متناظر لذلك يمكن حل نصف هذا الإطار وبالتناظر يمكن إيجاد ردود الأفعال والقوى المحورية والقوى القاطعة وعزوم الانعطاف في النصف الآخر من الإطار الموضح في الشكل رقم (٥-١٧).

أولا: حساب عزوم الوثاقات التامة للفتحة GK والفتحة DE

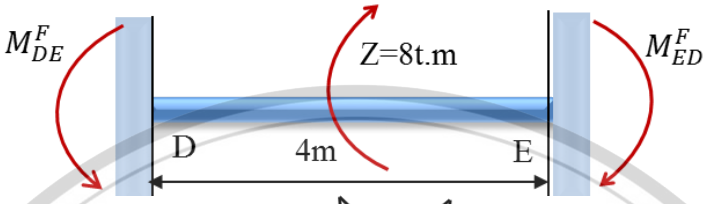
$$M_{GK}^{F} = -\frac{ql^2}{12} = -32, \quad M_{KG}^{F} = +\frac{ql^2}{12} = +32$$

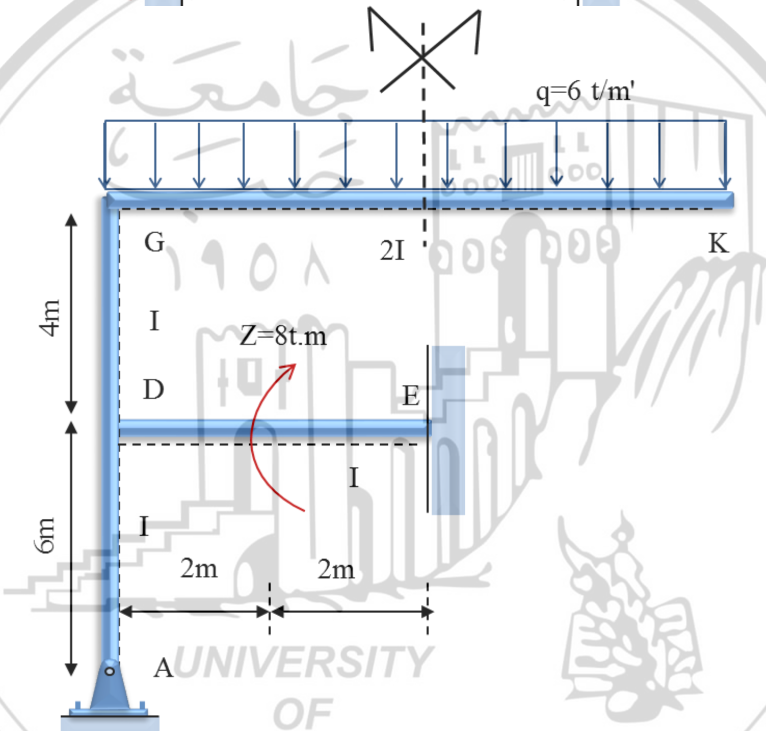


الشكل رقم (٥-١٦)



$$M^F_{DE} = M^F_{ED} = \frac{Z}{4} = 2$$





الشكل رقم (٥-١٧)

ثانيا: نكتب معادلات الدورانات للعقد والمساند

العقدة G:

$$M_{GD} = \frac{2EI}{4}(2\theta_G + \theta_D)$$

$$M_{GK} = \frac{2E2I}{8}(2\theta_G + \theta_K) - 32 = \frac{EI}{2}(\theta_G) - 32$$

الوثاقة E:

$$M_{ED} = \frac{2EI}{4}(\theta_D) + 2$$

ثالثا: نوازن العقد D و G

$$\Sigma M_D = 0 \rightarrow M_{DE} + M_{DG} + M_{DA} = 0 \rightarrow \frac{EI}{2}(5\theta_D + \theta_G) + 2 = 0$$

$$\Sigma M_G = 0 \rightarrow M_{GD} + M_{GK} = 0 \rightarrow \frac{EI}{2}(3\theta_G + \theta_D) - 32 = 0$$

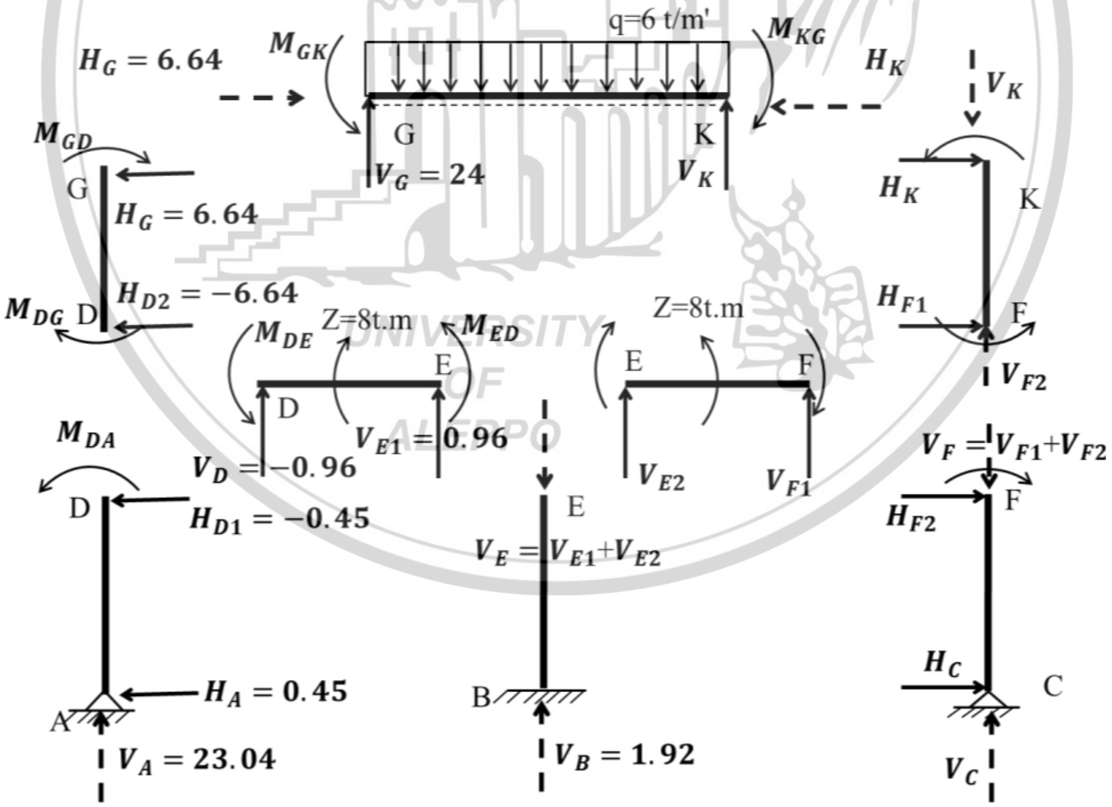
بحل هاتين المعادلتين حلا مشتركا نوجد قيم زوايا دوران العقدتين D و G

$$\theta_D = \frac{-76}{14EI} \quad , \quad \theta_G = \frac{162}{7EI}$$

نعوض قيم زوايا الدوران في معادلات العزوم فنستنتج قيم العزوم في العقد والوثاقات

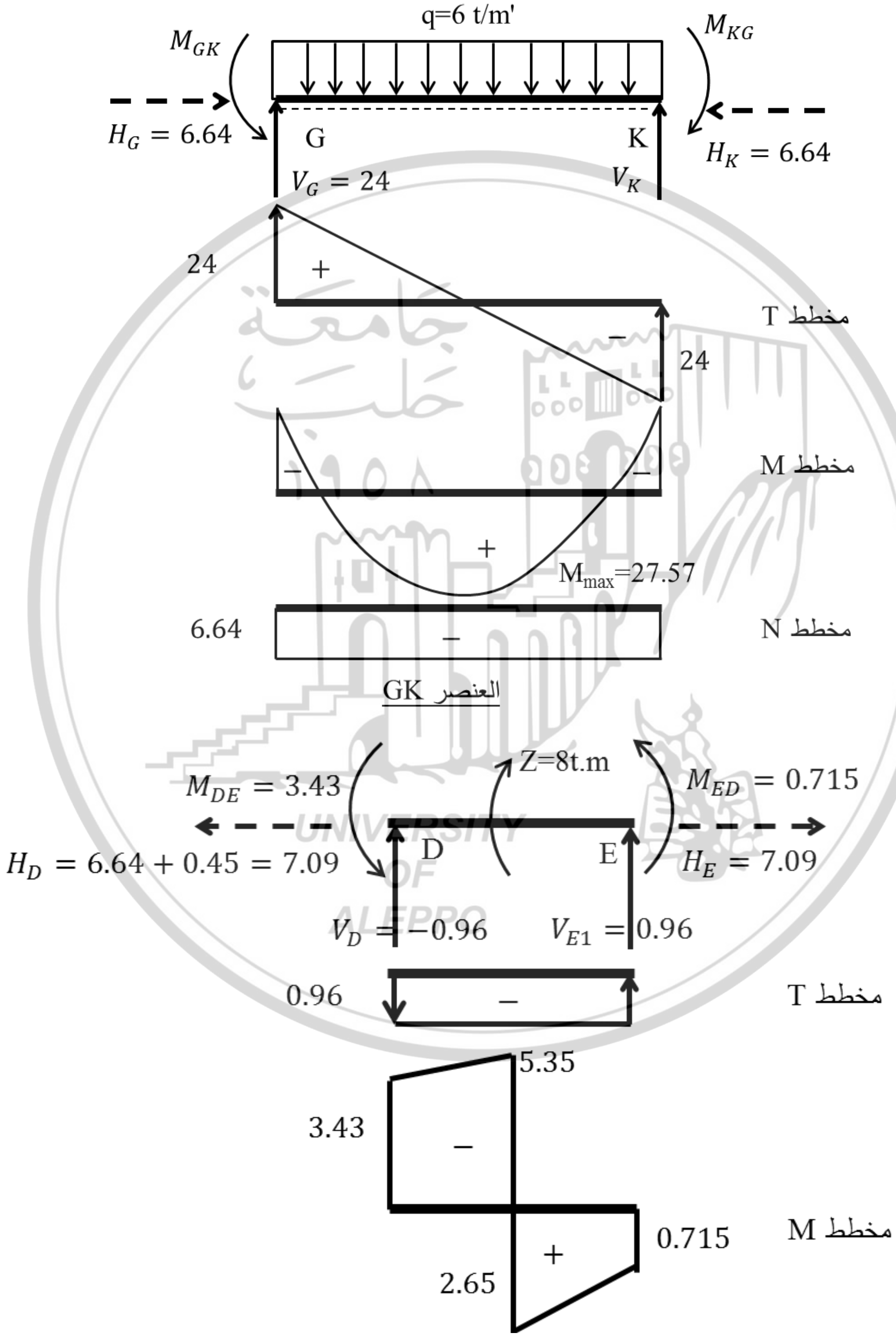
$$M_{DE} = -3.43\,, \qquad M_{DG} = 6.14$$
$$M_{DA} = -2.71, \quad M_{GD} = 20.43$$
$$M_{GK} = -20.43, \quad M_{ED} = -0.715$$

بعد إيجاد قيم العزوم في العقد والمساند نقوم بتمثيلهم على الإطار حسب اتجاه دوران عقارب الساعة كما هو موضح في الشكل رقم (٥-١٨)

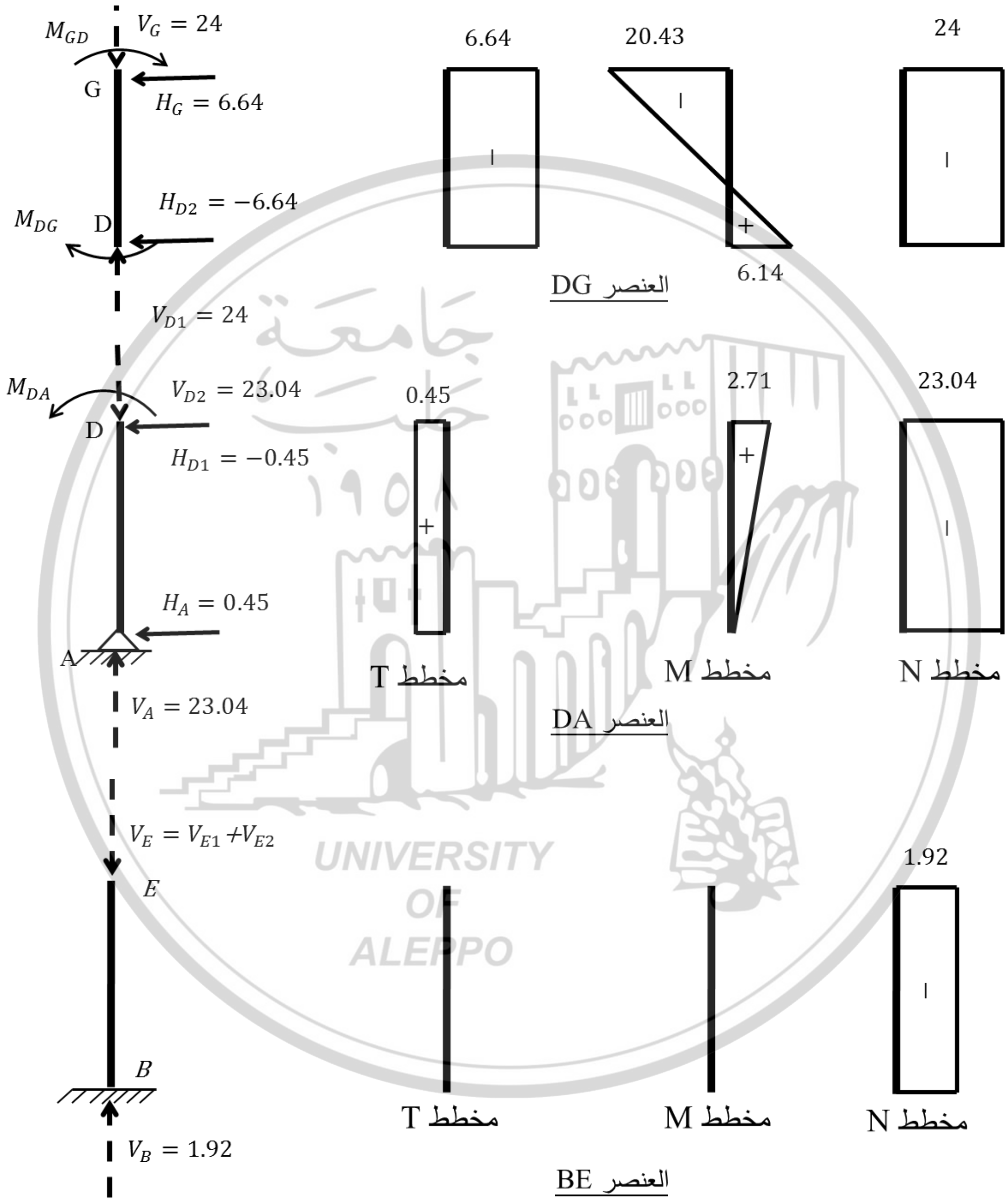


الشكل رقم (٥-١٨)

نعزل كل عنصر ونوجد ردود أفعاله ونرسم مخططات القوى القاطعة والقوى المحورية وعزم الانعطاف، أما العناصر المتناظرة فتكون ردود الأفعال ومخططات القوى المحورية وعزم الانعطاف متناظرة أما مخطط القوى القاطعة فيكون متناظرا عكسيا.



العنصر DE

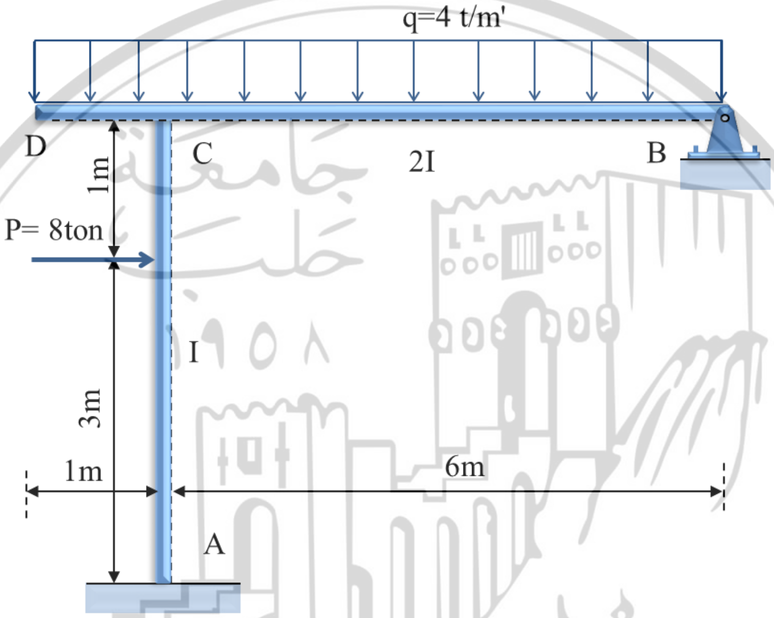


٥-٥-٢ الحالة الثانية: في حال وجود عزم يؤثر في العقدة أو ظفر، عندها يكون مجموع العزوم المؤثرة في هذه العقدة يساوي العزم الخارجي.

مثال (٤): جائز هيكلي موثوق في **A** ومسنود في **B**على مسند ثابت، يتعرض لتأثير الحمولات الموضحة في الشكل رقم (٥-١٩) والمطلوب:

١-قرر هذا الجائز باستخدام معادلة الدورانات.

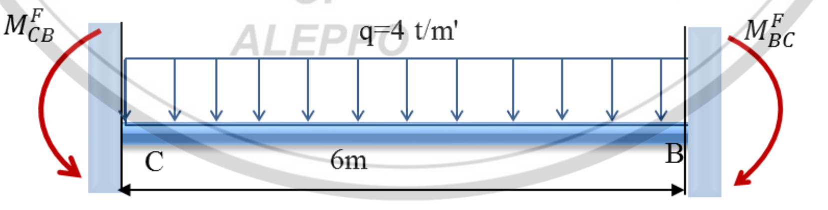
٢-حساب ردود الأفعال في المساند ورسم مخططات القوى القاطعة والقوى المحورية وعزم الانعطاف إذا علمت أن عامل المرونة الطولي E ثابت وأن عزوم العطالة والأبعاد موضحة على الشكل.

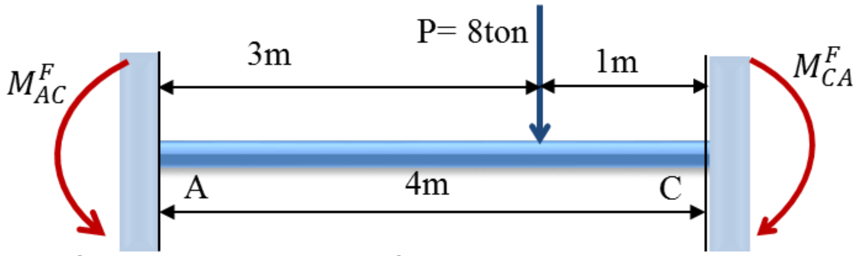


الشكل رقم (٥-١٩)

الحل:

أولا: حساب عزوم الوثاقات التامة والمعدلة





$$M_{CB}^F = -\frac{ql^2}{12} = -12 \qquad M_{BC}^F = \frac{ql^2}{12} = 12 \qquad M_{CB}^{MF} = -12 - \left(\frac{12}{2}\right) = -18$$

$$M_{AC}^{F} = -\frac{Pab^2}{L^2} = -1.5 \qquad M_{CA}^{F} = \frac{Pba^2}{L^2} = 4.5$$

عزم الظفر: $M_C = -2$ tm

ثانيا: كتابة معادلات الدورانات للعقدة والمسند:

$$M_{CA} = \frac{2EI}{4}(2\theta_C) + 4.5, \quad M_{CB} = \frac{3E2I}{6}(\theta_C) - 18$$

$$M_{AC} = \frac{2EI}{4}(\theta_C) - 1.5$$

ثالثا: نكتب معدلة التوازن في العقدة C

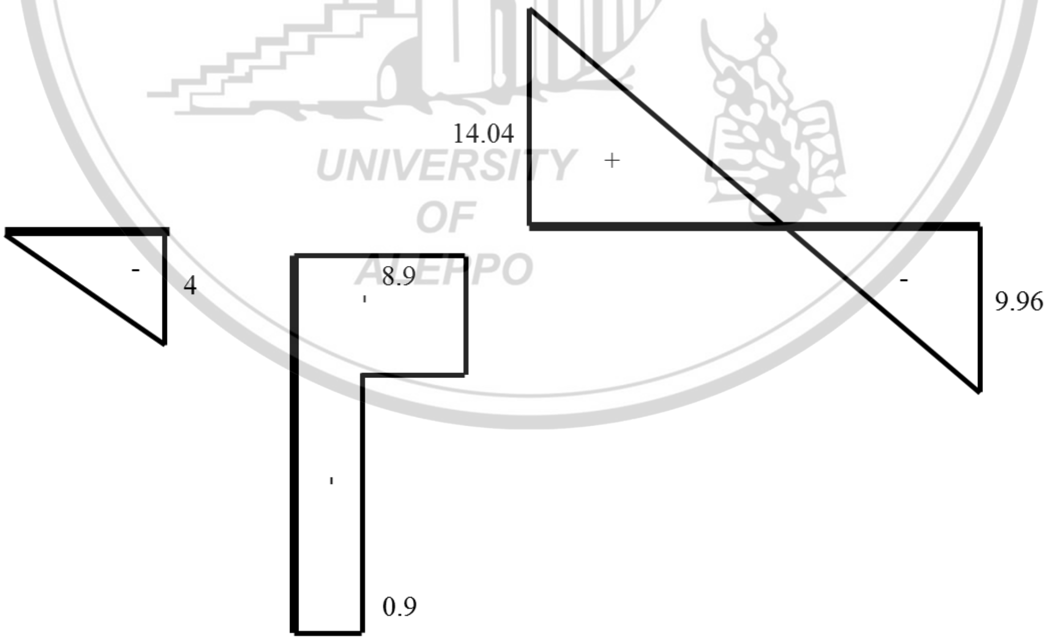
$$\Sigma M_C = -2 \quad \rightarrow M_{CA} + M_{CB} = -2 \quad \rightarrow 2EI\theta C + 4.5 - 18 = -2$$

$$\theta_C = \frac{5.75}{EI}$$

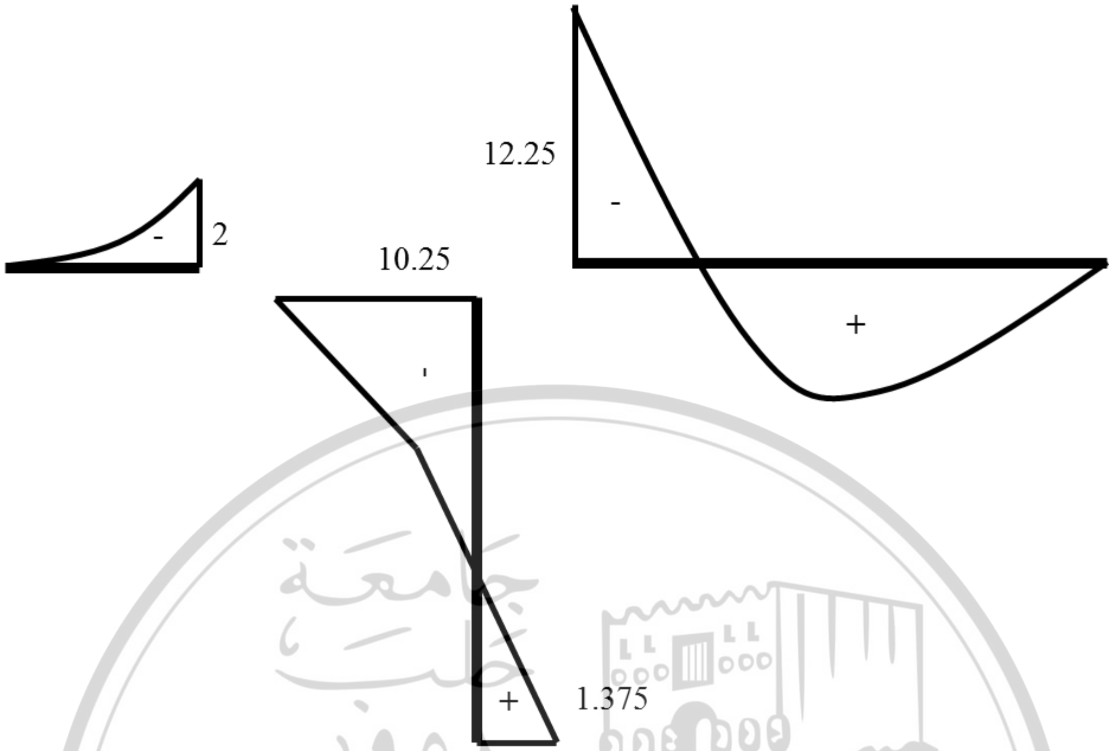
نعوض قيمة $\theta_C = \frac{5.75}{EI}$ في معادلات العزوم فنحصل على قيم العزوم في العقدة C والوثاقة A

$$M_{CA} = 10.25 \;\;,\;\; M_{CB} = -12.25 \;\;,\;\; M_{AC} = 1.375$$

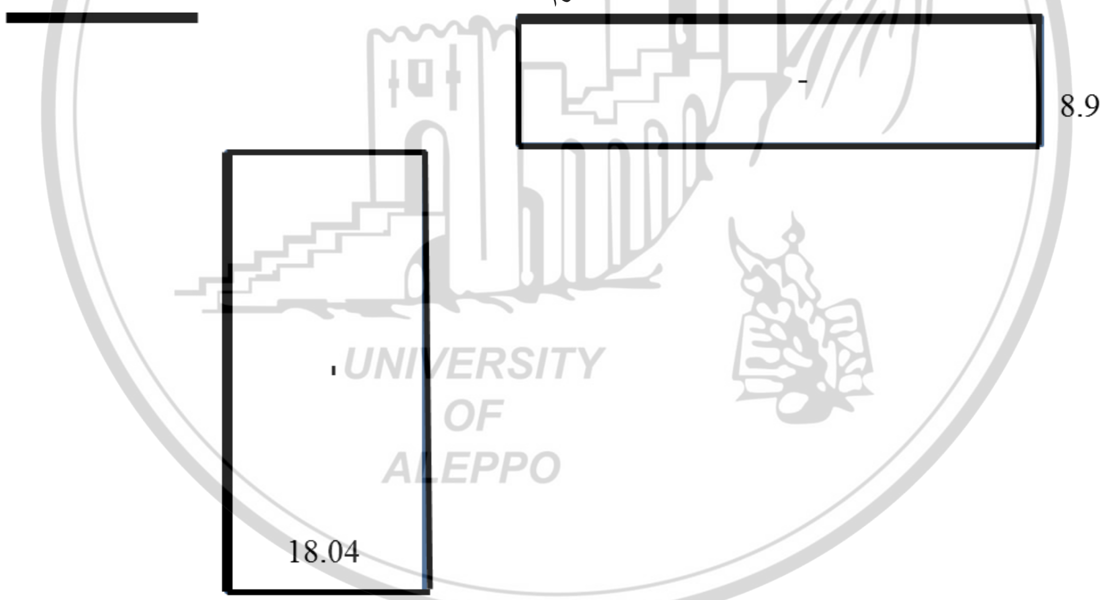
لإيجاد ردود الأفعال ورسم مخططات القوى الداخلية نعزل كل فتحة مع حمولاتها الخارجية وعزوم العقد وندرس توازن كل جزء بمعزل عن الآخر ثم ندرس التوازن الأفقي والشاقولي لكل عقدة ونوجد ردود الأفعال الناقصة لكل مسند.



مخطط القوة القاطعة



مخطط عزم الانعطاف



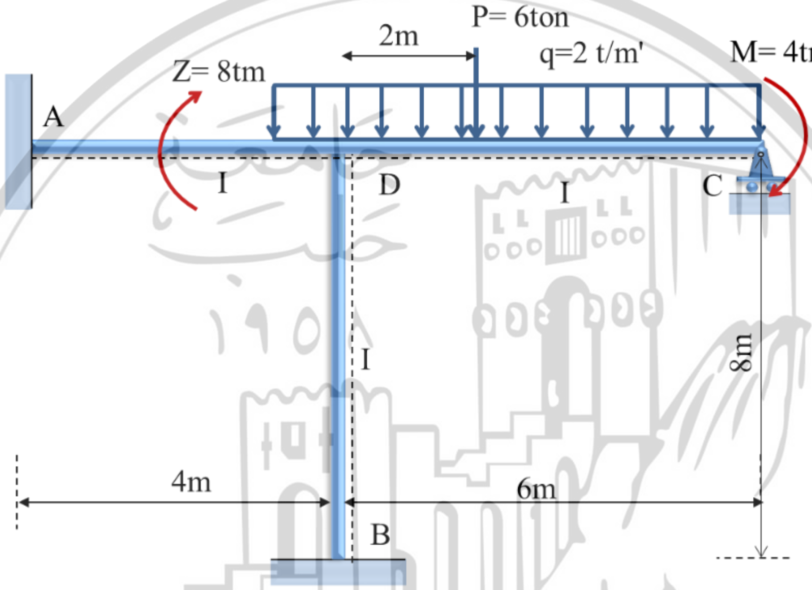
مخطط القوة المحورية

٥-٥-٣ الحالة الثالثة: حالة وجود ظفر، أو وجود عزم يؤثر في مسند بسيط خارجي ، تكون قيمة عزم الوثاقة المعدل مساوية لنصف عزم الظفر وله نفس اتجاه الدوران.

<u>مثال ٥:</u> جائز هيكلي موثوق في **A** و B **ومسنود** على مسند منزلق في C، يتعرض لتأثير الحمولات الموضحة في الشكل رقم (٥-٢٠) والمطلوب:

١-قرر هذا الجائز باستخدام معادلة الدورانات.

٢-حساب ردود الأفعال في المساند ورسم مخططات القوى القاطعة والقوى المحورية وعزم الانعطاف. إذا علمت أن عامل المرونة الطولي E ثابت وأن عزوم العطالة والأبعاد موضحة على الشكل رقم (٥-٢٠).



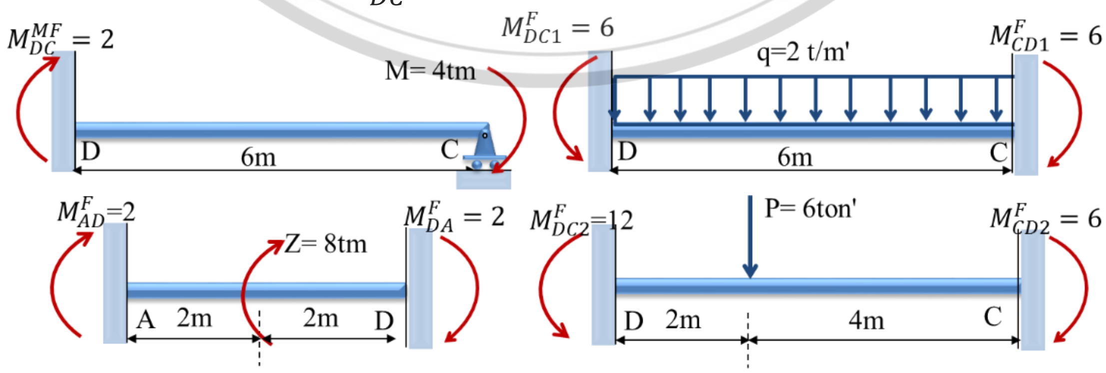
الشكل رقم (٥-٢٠)

الحل:

أولاً: حساب عزوم الوثاقات التامة والمعدلة

$$M_{DC1}^{MF}=-6-\frac{6}{2}=-9 \qquad M_{DC2}^{MF}=-12-\frac{6}{2}=-15$$

$$M_{DC}^{MF}=-9-15+2=-22$$



حساب عزوم الوثاقات التامة

ثانيا: كتابة معادلات الدورانات للعقدة والمسند

$$M_{DA} = \frac{2EI}{4}(2\theta_D) + 2 \quad , \qquad M_{DB} = \frac{2EI}{8}(2\theta_D)$$

$$M_{DC} = \frac{3EI}{6}(\theta_D) - 22$$

$$M_{AD} = \frac{2EI}{4}(\theta_D) + 2 \quad , \quad M_{BD} = \frac{2EI}{8}(\theta_D)$$

ثالثا: نكتب معادلة التوازن في العقدة D

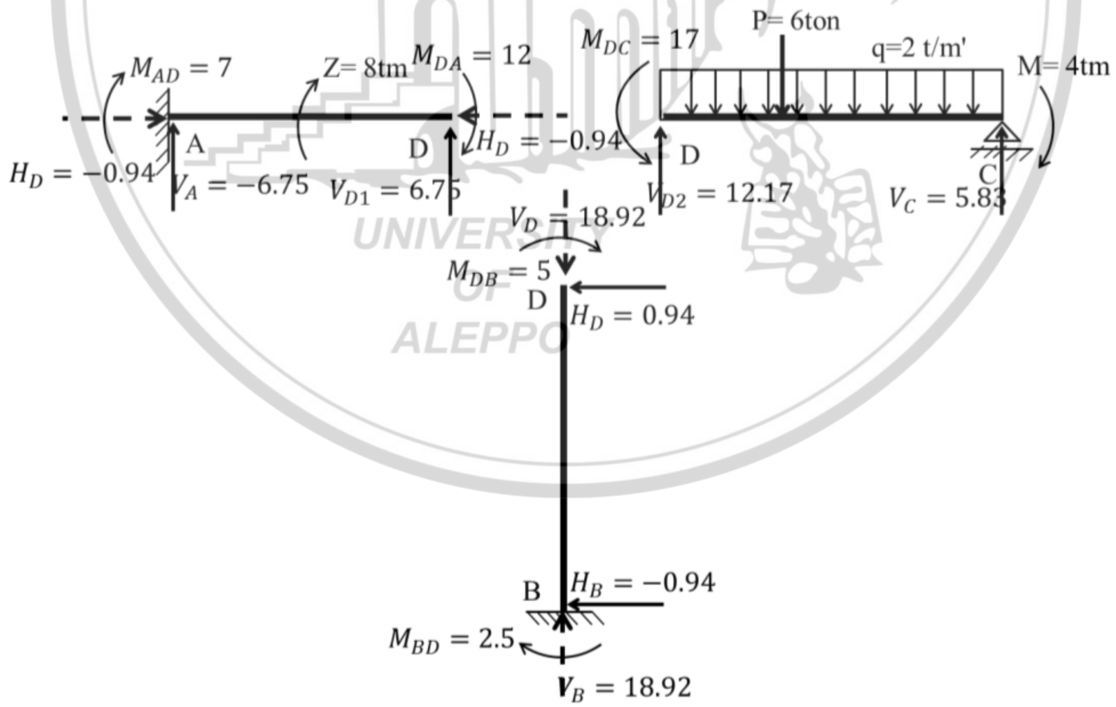
$$\Sigma\Sigma M_D = 0 \quad \rightarrow M_{DA} + M_{DB} + M_{DC} = 0 \quad \rightarrow 2EI\theta C + 4.5 - 18 = 0$$

$$\theta_D = \frac{10}{EI}$$

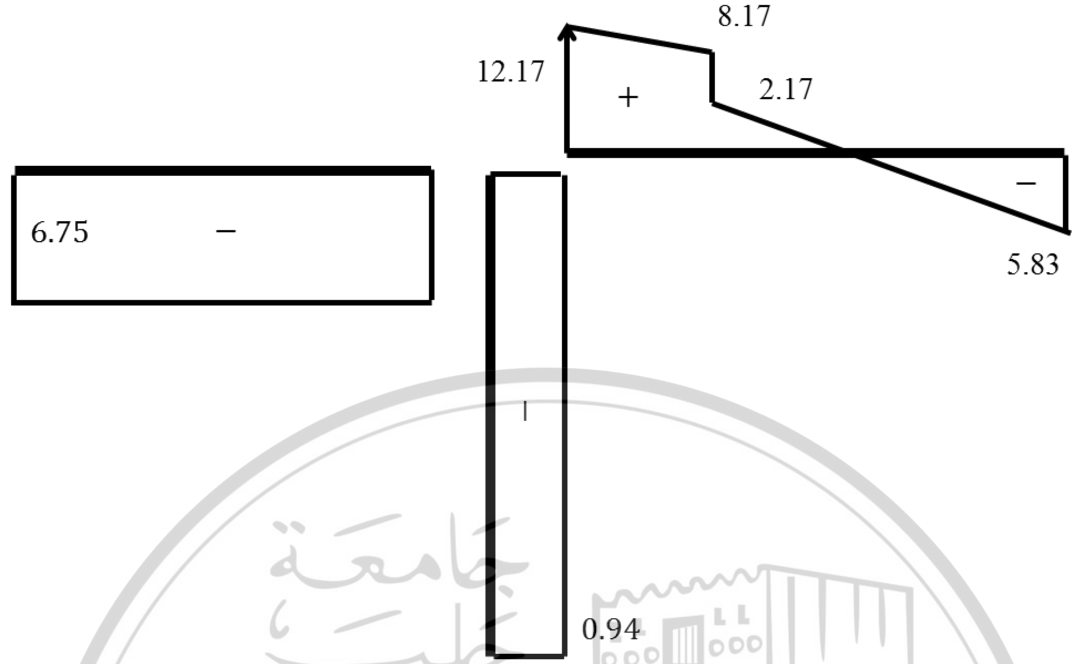
نعوض قيمة θ_D في معادلات العزوم فنحصل على قيم العزوم في العقدة D والوثاقات A و B

$$\boldsymbol{M_{DA} = 12 \qquad M_{DB} = 5 \quad , \quad M_{DC} = -17 \quad M_{AD} = 7 \qquad M_{BD} = 2.5}$$

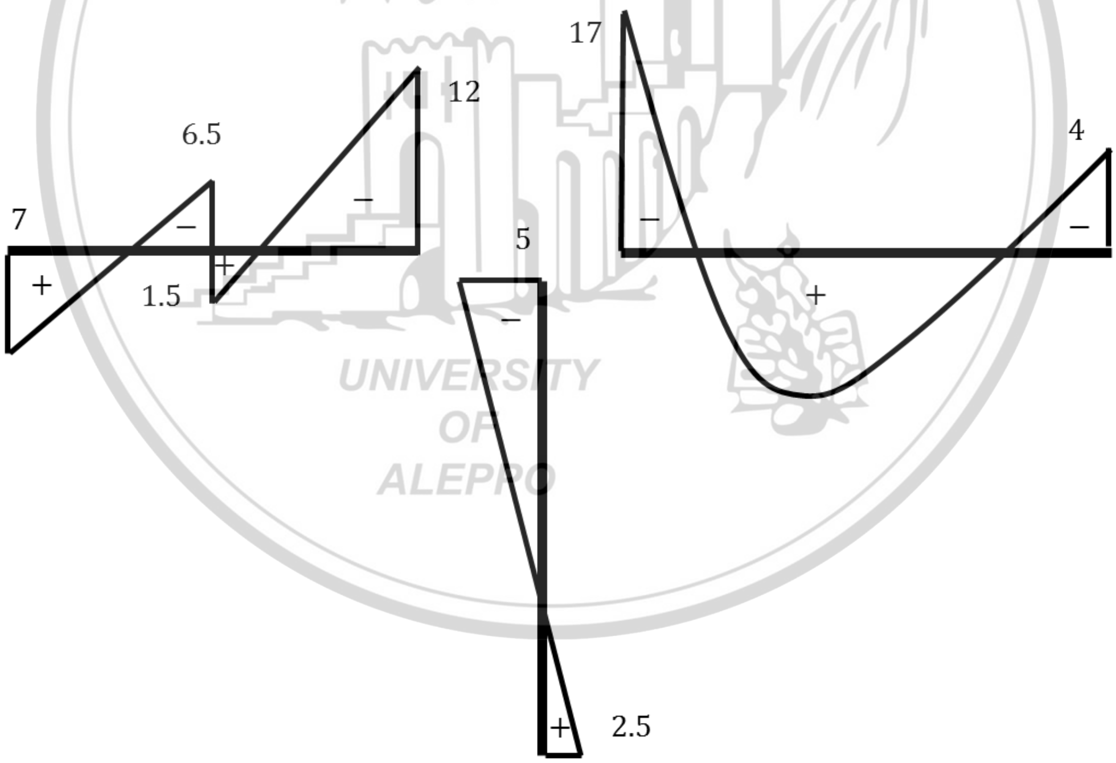
لإيجاد ردود الأفعال ورسم مخططات القوى الداخلية نعزل كل فتحة مع حمولاتها الخارجية وعزوم العقد وندرس توازن كل جزء بمعزل عن الآخر ثم ندرس التوازن الأفقي والشاقولي لكل عقدة ونوجد ردود الأفعال الناقصة لكل مسند.



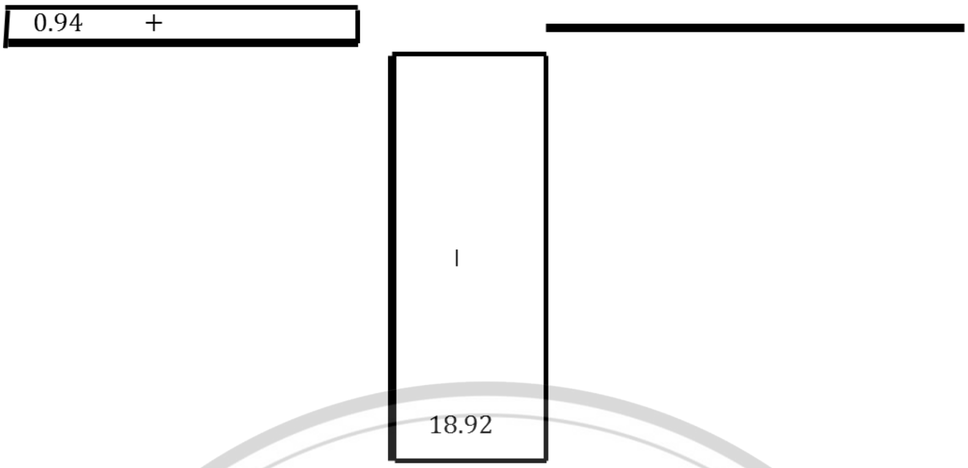
حساب ردود الأفعال والقوى المحورية



مخطط القوة القاطعة



مخطط عزم الانعطاف

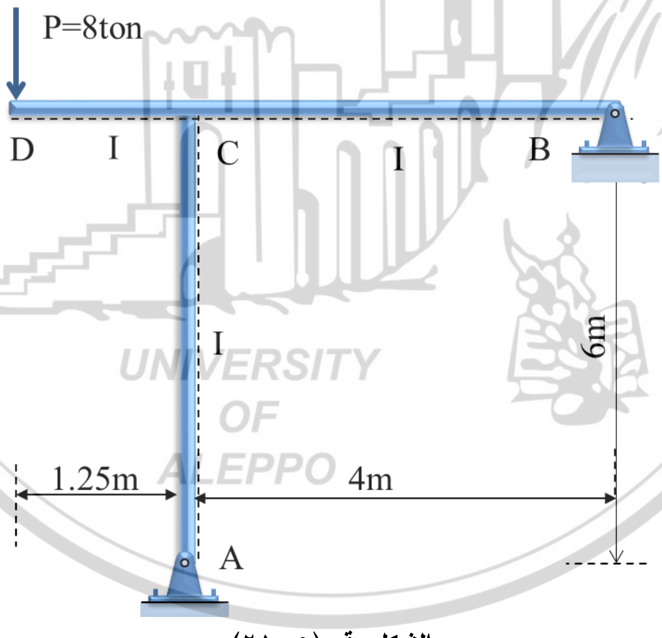


مخطط القوة المحورية

<u>مثال(٦)</u>: الدورة الفصلية الثالثة أيلول ٢٠١١

جائز هيكلي مسنود في A وB على مساند ثابتة، يتعرض لتأثير الحمولات الموضحة في الشكل رقم (٥-٢١) والمطلوب:

١-قرر هذا الجائز باستخدام معادلة الدورانات.



الشكل رقم (٥-٢١)

٢-حساب ردود الأفعال في المساند ورسم مخططات القوى القاطعة والقوى المحورية وعزم الانعطاف، إذا علمت أن عامل المرونة الطولي E ثابت وأن عزوم العطالة والأبعاد موضحة على الشكل.

الحل: حساب عزوم الوثاقات التامة والمعدلة

لايوجد عزوم وثاقات تامة أو معدلة لأن الفتحات غير محملة، أما العزم في العقدة C فيساوي $M_C = -8*1.25 = -10tm$ (عكس عقارب الساعة)

كتابة معادلات الدورانات للعقدة (C)

$$M_{CA} = \frac{3EI}{6}(\theta_C), \qquad M_{CB} = \frac{3EI}{4}(\theta_C)$$

نكتب معادلة التوازن في العقدة (C)

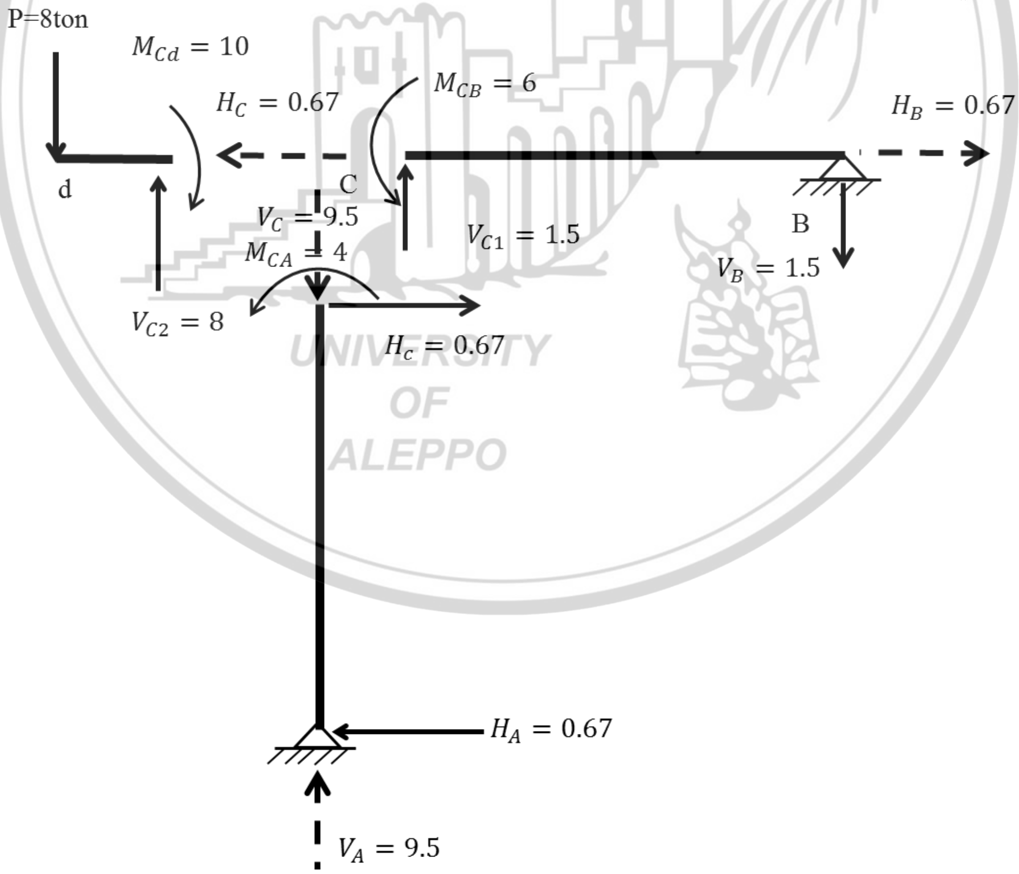
$$\Sigma M_C = -10 \quad \rightarrow M_{CA} + M_{CB} = -10 \quad \rightarrow 1.25EI\theta C = -10$$

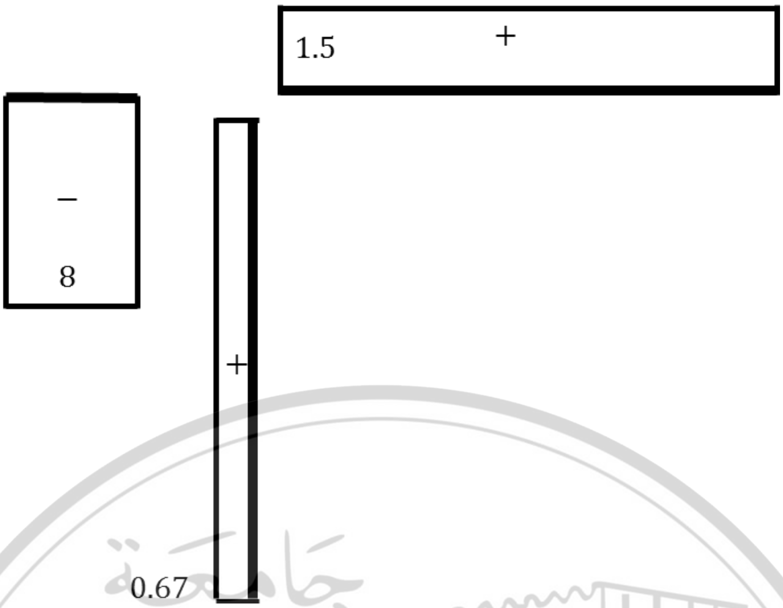
$$\theta_C = -\frac{8}{EI}$$

نعوض قيمة θ_C في معادلات العزوم فنحصل على قيم العزوم في العقدة C

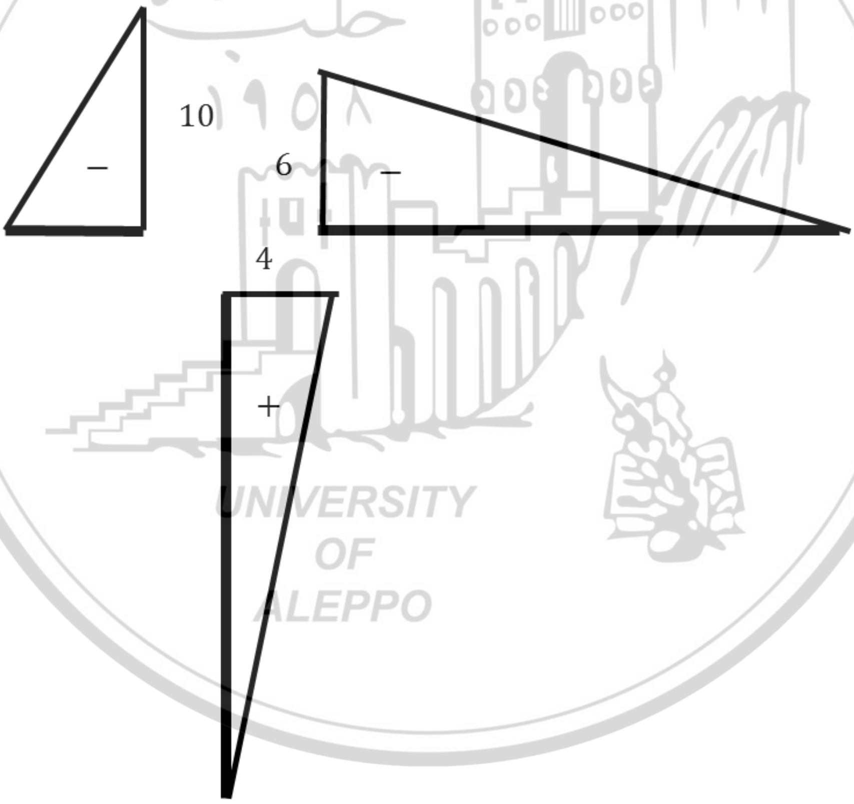
$$M_{CA} = \mathbf{-4} \qquad M_{CB} = \mathbf{-6}$$

لإيجاد ردود الأفعال ورسم مخططات القوى الداخلية نعزل كل فتحة مع حمولاتها الخارجية وعزوم العقد وندرس توازن كل جزء بمعزل عن الآخر ثم ندرس التوازن الأفقي والشاقولي لكل عقدة ونوجد ردود الأفعال الناقصة لكل مسند.

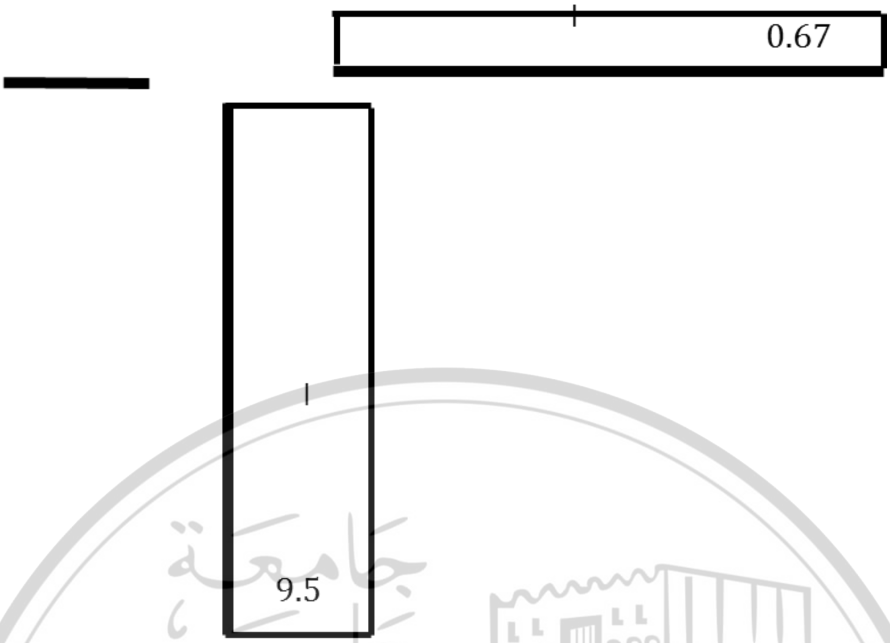




مخطط القوة القاطعة



مخطط عزم الانعطاف



مخطط القوة المحورية

الفصل السادس

مبادئ الطاقة في حساب تشوهات الجمل الإنشائية المقررة

مبدأ العمل الافتراضي

Virtual Work Principle for Determinate Structures

٦-١ مقدمة: preface

تعتبر مبادئ الطاقة من المبادئ الأكثر عمومية من المبادئ السابقة باعتبار أنه يمكن تطبيقها على عدة أنواع مختلفة من المنشآت الهندسية مثل الجمل الشبكية والجوائز والإطارات، وتكمن مساوئ هذه الطريقة في حساب الانتقال أو الدوران لنقطة واحدة من المنشأ، وإذا أردنا حساب الانتقال أو الدوران لنقطة أخرى فانه يجب علينا إعادة الحل من جديد لهذه النقطة.

سوف نستعرض أحد مبادئ الطاقة في حساب تشوهات الجمل الإنشائية المقررة وهو مبدأ العمل الافتراضي والذي يمكن من خلاله حساب الانتقال والدوران في جميع مقاطع الجمل الانشائية.

أما المبادئ الأخرى مثل نظرية كاستليانو ونظرية بتي وماكسويل فإننا لن ندخل في تفاصيلها نظرا لتشابه المعالجة الإنشائية للمسائل المطروحة.

سوف نبدأ باستعراض المفاهيم الأساسية للعمل الناتج عن القوى والمزدوجات خلال تشوه المنشأة الهندسية ومن ثم نناقش مفهوم العمل الافتراضي الذي يستخدم في صياغة واستنباط مبدأ العمل الافتراضي لتشوهات الجمل الشبكية والجوائز والإطارات. وسوف نشتق علاقات الطاقة للجمل الشبكية والجوائز والإطارات

٦-٢ مفهوم العمل:Concept of Work

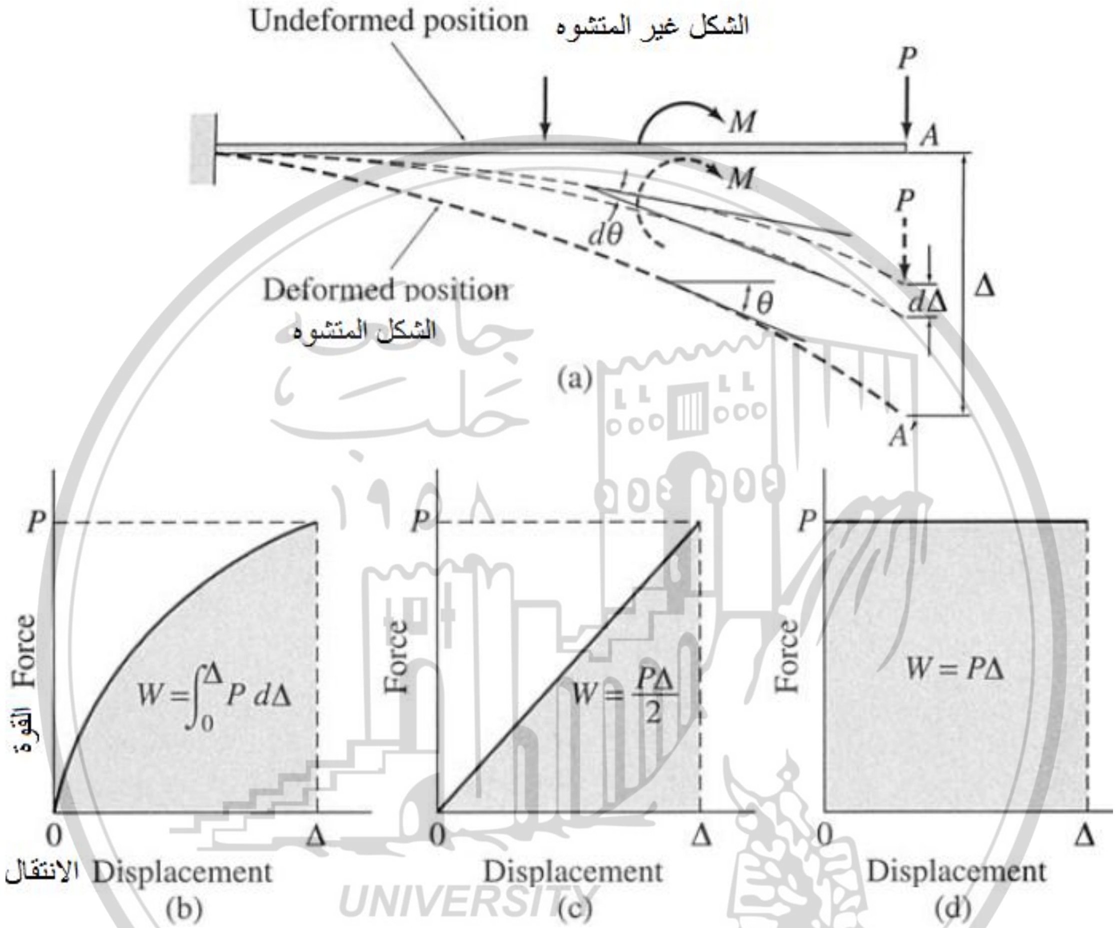
يمكن التعبير ببساطة عن مفهوم العمل الناتج عن قوة تؤثر على جسم معين بأنه حاصل جداء هذه القوة بالانتقال التي تخضع له نقطة تأثير هذه القوة باتجاه تطبيقها، ويكون العمل موجبا إذا كان الانتقال باتجاه هذه القوة وسالبا إذا كان الانتقال بعكس اتجاه القوة.

سوف نستنبط العمل المنجز بواسطة القوة P خلال تشوه المنشأة الخاضعة لجملة من القوى "التي تشمل القوة P " كما هو موضح في الشكل رقم (٦-١a)، وتتراوح هذه القيمة حسب إزاحة موقع القوة P من الموقع الأساسي A للشكل غير المتشوه للمنشأة إلى الوضعية النهائية للمنشأة بعد التشوه 'A. يكون العمل dW المنجز للقوة P والناتج عن انزياح تفاضلي مقداره $d\Delta$ تابع لنقطة تأثير هذه القوة والتي يمكن التعبير عنها:

$$dW = P(d\Delta)$$

ويمكن الحصول على العمل الكلي الذي تنجزه القوة P الناتج عن الانتقال الكلي Δ بتكامل العلاقة السابقة dW

$$(6-1) \qquad W=\int_0^{\Delta} P(d\Delta)$$



الشكل رقم (٦−١) مفهوم العمل

تشير العلاقة السابقة إلى أن العمل المنجز يساوي إلى المساحة المحصورة أسفل المنحني البياني للقوة والانتقال كما هو موضح بالشكل رقم (٦−b١).

سوف نركز اهتمامنا في هذا الفصل على تحليل المنشآت الخطية المرنة، فإذا تم تطبيق القوة P بشكل متزايد خطيا مع الانتقال من الصفر حتى قيمة الانتقال النهائية كما هو مبين في الشكل رقم (٦−c١) فإن العمل المنجز في هذه الحالة يساوي إلى مساحة المثلث المحصورة تحت مخطط القوة الانتقال والذي يعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$(6-2) \qquad \mathrm{W}=\frac{1}{2}P\Delta$$

وهناك حالة خاصة أخرى موضحة في الشكل رقم (٦−d١)، عندما تكون القوة P ثابتة بينما تعاني نقطة تأثيرها من انتقال (مقداره Δ) ناتج عن تأثير قوى أخرى مستقلة عن القوة P، في هذه الحالة يكون العمل الذي تنجزه القوة P يساوي مساحة المستطيل المحصورة تحت مخطط القوة الانتقال والذي يعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$(6-3) \qquad \mathrm{W} = P\Delta$$

وإنه من الضروري التمييز بين علاقتي العمل السابقتين مع ملاحظة أن علاقة العمل تحتوي على العامل 1/2 عندما يتزايد الانتقال خطيا بتزايد القوة المؤثرة، أما في حال ثبات القوة فإن هذه العلاقة لا تحتوي على هذا العامل، ونظرا لأهمية وجوب التمييز بين هاتين الحالتين فانه سوف يتم استخدامهما بشكل متكرر في إيجاد عدة طرائق لحساب التشوهات في المنشآت الهندسية.

ويكون التعبير عن العلاقات الخاصة بالعمل الناتج عن مزدوجات العزم بأسلوب مشابه للعلاقات الخاصة بالقوى والمستنتجة سابقا.

يكون العمل dW المنجز لمزدوجة العزم M والناتج عن دوران تفاضلي مقداره $d\theta$ تابع لنقطة تأثير هذه المزدوجة والتي يمكن التعبير عنها:

$$dW = M(d\theta)$$

ويمكن الحصول على العمل الكلي الذي تنجزه المزدوجة M الناتج عن الدوران الكلي θ بتكامل العلاقة السابقة dW

$$(6-4) \qquad W = \int_0^{\theta} M(d\theta)$$

فإذا تم تطبيق مزدوجة العزم M بشكل متزايد خطيا مع الدوران من الصفر حتى قيمة الدوران النهائية كما هو مبين في الشكل رقم (٦−c١) فإن العمل المنجز في هذه الحالة يساوي إلى مساحة المثلث المحصورة تحت مخطط القوة الدوران والذي يعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$(6-5) \qquad \mathrm{W} = \frac{1}{2} P\theta$$

وعندما تكون مزدوجة العزم M ثابتة بينما تعاني نقطة تأثيرها من دوران مقداره θ ناتج عن تأثير قوى أخرى مستقلة عن مزدوجة العزم M في هذه الحالة يكون العمل الذي

تنجزه مزدوجة العزم M يساوي مساحة المستطيل المحصورة تحت مخطط القوة الانتقال والذي يعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$(6-6) \qquad \mathrm{W} = P\theta$$

٦–٣ مبدأ العمل الافتراضي: Principle of Virtual Work

أعطى مبدأ العمل الافتراضي الذي أوجده العالم برنولي عام ١٧١٧ وسائل فعالة لحل عدة مسائل هامة في ميكانيك الإنشاءات، وسوف نقوم بدراسة حالتين من هذا المبدأ والذي يسمى بـ(أساسيات الانتقالات الافتراضية للأجسام الصلبة)(the principle of virtual displacements for rigid bodies) و(أساسيات القوى الافتراضية للأجسام المتشوهة)(principle of virtual forces for deformable bodies) ويستخدم المفهوم الأخير في تطوير مبدأ العمل الافتراضي والذي يعتبر أحد الطرائق العامة الأكثر فعالية في تحديد تشوهات المنشآت الهندسية.

٦–٤ حساب تشوهات الجمل الشبكية بالاعتماد على مبدأ العمل الافتراضي

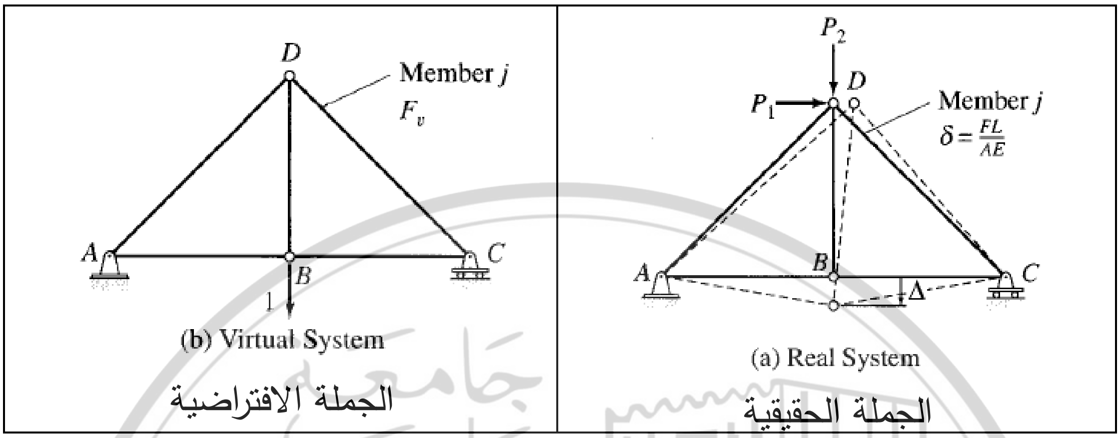
ليكن لدينا الجملة الشبكية المقررة والموضح في الشكل رقم (٦–a٢)، نريد أن نحدد الانتقال الشاقولي Δ للنقطة B في الشبكي الخاضع لتأثير حمولتين خارجيتين هما P1 و P2.

بما أن الشبكي مقرر فإنه يمكننا حساب القوى المحورية في عناصره بالاعتماد على الطرائق التي مرت معنا سابقا ولتكن F هي القوة المحورية المؤثرة في العنصر J (وليكن العنصر CD) كما هو مبين في الشكل رقم (٦–a٢)، يمكننا حساب التشوهات المحورية δ لهذا العنصر بالاعتماد على مبادئ مقاومة المواد من العلاقة التالية:

$$\delta = \frac{FL}{EA}$$

وتعبر الحدود L عن طول العنصر وA عن المقطع العرضي للعنصر وE عن عامل المرونة الطولي للعنصر.

من أجل تحديد الانتقال الشاقولي Δ في النقطة B للشبكي الموضح في الشكل رقم (٦-٢)، نختار جملة افتراضية تتعرض لتأثير قوة واحدية افتراضية في العقدة باتجاه الانتقال كما هو موضح في الشكل رقم (٦-٢b).



(b) Virtual System — الجملة الافتراضية

(a) Real System — الجملة الحقيقية

الشكل رقم (٦-٢)

مع ملاحظة أن الانتقال في الجملة الحقيقية Δ نحو الأسفل والذي يكون باتجاه القوة الافتراضية، ونستطيع إيجاد القوى المحورية في عناصر الجملة الافتراضية الناتجة عن القوة الواحدية الافتراضية باستخدام طريقة العقد التي مرت معنا سابقا، ولتكن Fv هي القوة المحورية المؤثرة في العنصر j من الجملة الافتراضية، بفرض أن الجائز الشبكي الافتراضي "الذي يتعرض لتأثير الحمولة الواحدية الافتراضية" ينتقل بمقدار Δ "وهي المسافة الناتجة عن الحمولات الحقيقية المبينة" كما هو مبين في الشكل رقم (٦-٢a)، يكون العمل الافتراضي الخارجي الذي تنجزه القوة الواحدية الافتراضية الناتج عن التشوه الحقيقي Δ مساويا للعلاقة التالية:

$$W_{ve}=1*(\Delta)$$

من أجل تحديد العمل الداخلي نركز اهتمامنا على العنصر J وهو العنصر CD الموضح في الشكل رقم (٦-٢a)، بحيث يكون العمل الداخلي الناتج عن تأثير القوة المحورية Fv في العنصر J والناتج عن التشوهات المحورية الحقيقية δ مساويا لـ $Fv.\,\delta$ وبذلك يكون العمل الداخلي الكلي لجميع عناصر الجائز الشبكي معطى بالعلاقة التالية:

$$W_{vi}=\sum F_v(\delta)$$

بمساواة العمل الافتراضي الخارجي بالعمل الافتراضي الداخلي بالتوافق مع مبدأ القوى الافتراضية للأجسام المتشوهة نحصل على التعبير التالي لطريقة العمل الافتراضي بالنسبة لتشوه الجمل الشبكية

$$(6-7) \quad 1(\Delta)=\sum F_v(\delta)$$

وعندما تكون التشوهات ناتجة عن تأثير الحمولات الخارجية نستبدل الانتقالات الافتراضية بالانتقالات الحقيقية في العلاقة السابقة بحيث تصبح على الشكل التالي:

$$(6-8) \quad 1(\Delta)=\sum F_v\left(\frac{FL}{EA}\right)$$

وبذلك يكون المجهول الوحيد في هذه العلاقة هو الانتقال (Δ) الذي يمكن الحصول عليه من العلاقة السابقة.

٦-٤-١ تغيرات درجة الحرارة وأخطاء التصنيع

يمكن استخدام علاقة العمل الافتراضي الواردة في الفقرة السابقة لتحديد التشوهات في الجمل الشبكية الناتجة عن تغير درجات الحرارة وأخطاء التصنيع وأي تأثيرات أخرى ينتج عنها تشوهات محورية δ "معلومة أو يمكن تقديرها مسبقا" في عناصر الجملة الشبكية، ويعطى التشوه المحوري للعنصر الشبكي J ذو الطول L الناتج عن تغير في درجة الحرارة ΔT بالعلاقة التالية:

$$\delta=\alpha(\Delta T)L$$

وتعبر α عن عامل التمدد الطولي للعنصر J، و بتعويض العلاقة السابقة بالعلاقة رقم $(6-8)$ نحصل على العلاقة التي تعبر عن الانتقال الناتج عن تغير درجة الحرارة.

$$(6-9) \quad 1(\Delta)=\sum F_v\alpha(\Delta T)L$$

أما التشوهات الناتجة عن أخطاء التصنيع فيمكن تحديدها بشكل بسيط وذلك بتعويض التغيرات δ الحاصلة في طول العنصر في العلاقة رقم $(6-7)$

٦-٤-٢ إجراءات التحليل: Analyzing Procedures

يمكن اتباع الخطوات التالية لتحديد التشوهات في **الجمل الشبكية** باستخدام نظرية العمل الافتراضي:

١-الجملة الحقيقية:

إذا كان التشوه المطلوب إيجاده ناتجا عن تأثير القوى الخارجية عندئذ يتم استخدام طريقة العقد أو طريقة المقاطع لحساب القوى المحورية الحقيقية F في جميع عناصر الجملة الشبكية، ونفترض أن القوى الشادة هي القوى الموجبة والقوى الضاغطة هي القوى السالبة، وبشكل مشابه فإن الزيادة في درجة الحرارة أو الزيادة في طول العنصر الناتج عن أخطاء التصنيع هي الموجبة أثناء التحليل والعكس صحيح.

٢-الجملة الافتراضية:

نقوم بإزالة جميع الحمولات الحقيقية الخارجية عن الجملة الشبكية ونؤثر بقوة افتراضية واحدية في العقدة المطلوب حساب انتقالها وباتجاه الانتقال المطلوب مشكلا بذلك جملة القوى الافتراضية، ثم نوجد القوى المحورية الافتراضية Fv في جميع العناصر باستخدام طريقة العقد أو المقاطع ويكون اصطلاح الإشارات هو ذات الاصطلاح المستخدم في الفقرة (١).

٣-تحديد الانتقال:

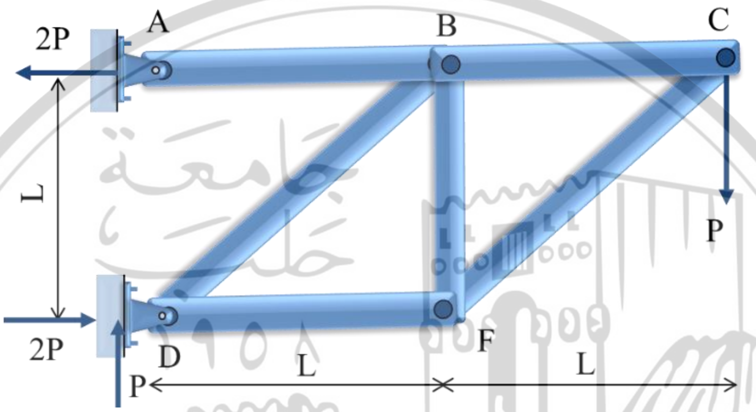
يمكن تحديد الانتقال المطلوب في الجملة الشبكية باستخدام العلاقة رقم (8 – 6) الناتج عن الحمولات الخارجية، واستخدام العلاقة رقم – 6) (9 إذا كان التشوه ناتجا عن تغير في درجة الحرارة، واستخدام العلاقة رقم (7 – 6) اذا كان التشوه ناتجا عن أخطاء التصنيع، ويمكن انشاء جدول نرتب فيه القوى الحقيقية والقوى الافتراضية وأطوال العناصر ومقاطعها العرضية وعامل التمدد الطولي لنحصل في النهاية على نتائج واضحة وسليمة، فإذا كانت الإشارة موجبة فهذا يعني أن الانتقال المحسوب يكون باتجاه القوة الافتراضية الواحدية والإشارة السالبة تعني أن الانتقال الحاصل يكون عكس القوة الافتراضية الواحدية.

٦-٤-٣ أمثلة عملية: Examples

<u>مثال (١):</u> لدينا الجائز الشبكي المبين في الشكل رقم (٦-٣) يتعرض لتأثير حمولة شاقولية شدتها P في العقدة C فإذا علمت أن الصلابة المحورية EA ثابتة لجميع العناصر وأن الأطوال موضحة على الشكل، المطلوب:

١-احسب قيمة الانتقال الشاقولي للعقدة F.

٢-احسب دوران العنصر BF



الشكل رقم (٦-٣) الجملة الحقيقية

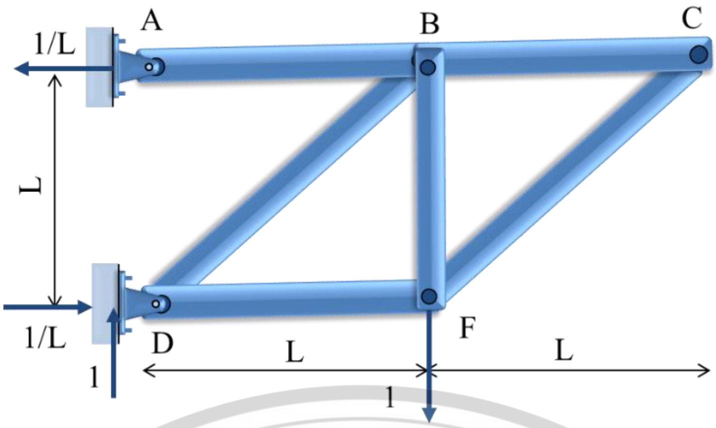
أولا-حساب قيمة الانتقال الشاقولي للعقدة F.

١-إيجاد ردود أفعال الجملة الحقيقية. بما أن المسند A يحتوي على العنصر الشبكي AB فقط فإن رد الفعل فيه يساوي ويعاكس القوة المحورية في هذا العنصر (أي يحتوي المسند A على رد فعل أفقي وحيد وهو H_A)

٢-إيجاد القوى المحورية في الجملة الحقيقية بطريقة العقد حيث نبدأ بالعقدة التي تحتوي على مجهول أو مجهولين.

٣-نرسم جملة افتراضية تخضع لتأثير قوة افتراضية واحدية شاقولية في العقدة F ونوجد ردود أفعال هذه الجملة والقوى المحورية في عناصرها.

٤-نرتب جدولا يحتوي على القوى المحورية التي تؤثر في عناصر الجملة الشبكية الحقيقية وعناصر الجملة الشبكية الافتراضية بالإضافة للخصائص الهندسية للعناصر والمبين في الجدول رقم (٦-١)



الجملة الافتراضية (١)

الجدول رقم (٦-١) القوى المحورية المؤثرة في الجملة الشبكية الحقيقة والافتراضية

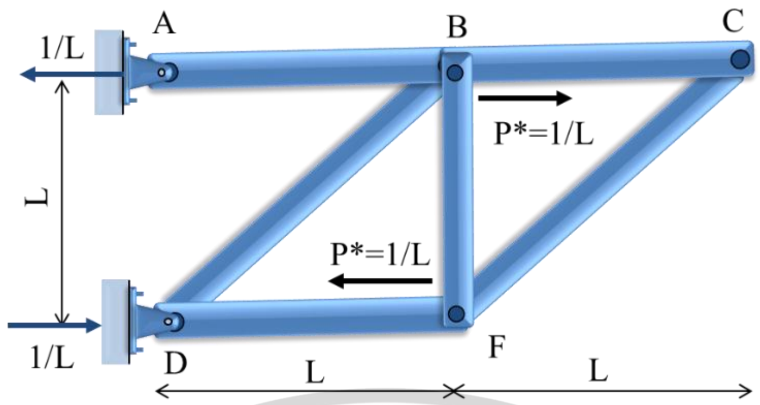
العنصر	القوى المحورية في الجملة الجملة الحقيقيةF	القوى المحورية في الجملة الافتراضيةFv	الطول	الصلابة المحورية	$\frac{F * Fv * L}{EA}$
AB	+2P	+1	L	EA	2PL/EA
BC	+P	0	L	EA	0
CF	$-\sqrt{2}P$	0	L$\sqrt{2}$	EA	0
FB	+P	+1	L	EA	PL/EA
FD	-P	0	L	EA	0
DB	$-\sqrt{2}P$	$-\sqrt{2}$	L$\sqrt{2}$	EA	$2\sqrt{2}PL$/EA
$(\Delta)_F = \sum F_v \left(\frac{FL}{EA}\right)$					5.828PL/EA

ثانيا-حساب دوران العنصر BF

لإيجاد دوران العنصر BF، نطبق مزدوجة عزم واحدية افتراضية على هذا العنصر، وهي عبارة عن قوتين متساويتين ومتعاكستين تتباعدان بمقدار L

$$1 = P^* * L \rightarrow P^* = \frac{1}{L}$$

ثم نوجد قيم القوى المحورية للجملة الافتراضية والمبينة في الجدول رقم (٦-٢)



الجملة الافتراضية (٢)

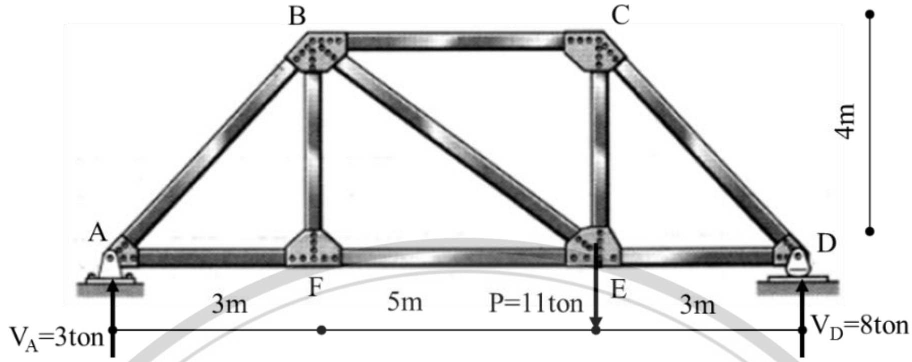
الجدول رقم (٦-٢) القوى المحورية المؤثرة في الجملة الشبكية الحقيقة والافتراضية

العنصر	القوى المحورية في الجملة الحقيقية F	القوى المحورية في الجملة الافتراضية Fv	الطول	الصلابة المحورية	$\frac{F * Fv * L}{EA}$
AB	+2P	+1/L	L	EA	2P/EA
BC	+P	0	L	EA	0
CF	$-\sqrt{2}P$	0	L$\sqrt{2}$	EA	0
FB	+P	0	L	EA	0
FD	-P	-1/L	L	EA	P/EA
DB	$-\sqrt{2}P$	0	L$\sqrt{2}$	EA	0
$(\theta)_{BF} = \sum F_v\left(\frac{FL}{EA}\right)$					$\frac{3P}{EA}$

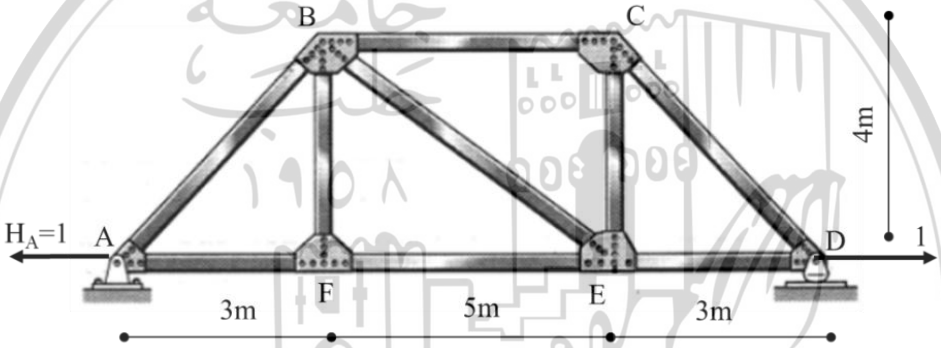
<u>**مثال (٢):**</u> لدينا الجائز الشبكي المبين في الشكل رقم (٦-٤) يتعرض لتأثير حمولة شاقولية شدتها P=11 ton في العقدة E فإذا علمت أن الصلابة المحورية EA ثابتة لجميع العناصر وأن الأطوال موضحة على الشكل، المطلوب: حساب قيمة الانتقال الأفقي للمسند D.

الحل: لحساب قيمة الانتقال الأفقي في المسند D نرسم جملة شبكية افتراضية، ونؤثر بقوة افتراضية أفقية واحدية على المسند D كما هو موضح في الشكل رقم (٦-٥)،

ثم نحسب قيمة القوى المحورية في عناصر الجملة الشبكية الحقيقية والجملة الشبكية الافتراضية، ومن ثم نرتب النتائج في الجدول رقم (٦–٣)



الشكل رقم (٦–٤) الجملة الحقيقية



الشكل رقم (٦–٥) الجملة الافتراضية

الجدول رقم (٦–٣) القوى المحورية المؤثرة في الجملة الشبكية الحقيقة والافتراضية

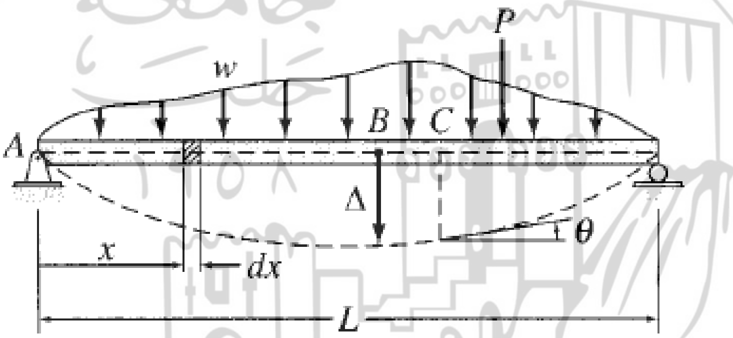
$\frac{F * Fv * L}{EA}$	الصلابة المحورية	الطول	القوى المحورية في الجملة الافتراضية Fv	القوى المحورية في الجملة الحقيقية F	العنصر
0	EA	5	0	-3.75	AB
0	EA	5	0	-6	BC
0	EA	5	0	-10	CD
18/EA	EA	3	1	6	DE
11.25/EA	EA	5	1	2.25	EF
6.75/EA	EA	3	1	2.25	FA
0	EA	4	0	8	EC

0	EA	6.4	0	4.8	EB
0	EA	4	0	0	FB
$\frac{36}{EA}$	$(\Delta)_D = \sum F_v \left(\frac{FL}{EA}\right)$				

٦-٥ حساب التشوهات في الجوائز بالاعتماد على مبدأ العمل الافتراضي

الاستنتاج النظري للعلاقة:

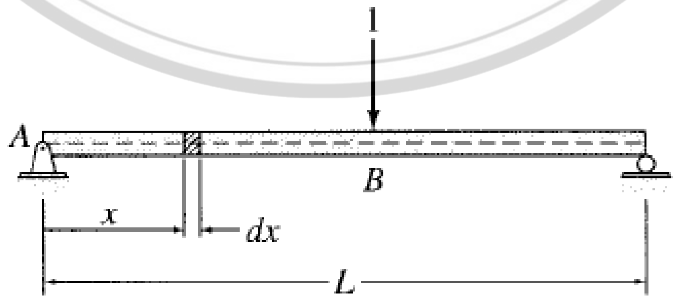
من أجل توضيح طريقة العمل الافتراضي لتحديد الانتقالات في الجوائز، نفترض أن الجائز يتعرض لتأثير حمولات عشوائية كما هو مبين في الشكل رقم (٦-٦) ولنفترض أنه مطلوب حساب الانتقال الشاقولي Δ للنقطة B.



الشكل رقم (٦-٦) استنتاج علاقة العمل الافتراضي للجوائز

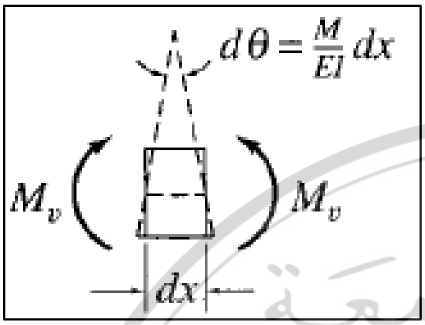
من أجل تحديد الانتقال Δ نختار جملة افتراضية تخضع لتأثير قوة واحدية باتجاه الانتقال المفروض في المقطع المطلوب كما هو موضح في الشكل رقم (٦-٧).

إذا تعرض الجائز الافتراضي لتأثير انتقال شاقولي Δ، يساوي الانتقال الناتج عن الحمولات الخارجية يكون العمل الخارجي الناتج عن تأثير القوة الواحدية يساوي إلى $W_{ve}=1^* (\Delta)$



الشكل رقم (٦-٧) الجملة الافتراضية لحساب الانتقال

من أجل الحصول على العمل الداخلي سوف نركز اهتمامنا على العنصر التفاضلي dx الواقع على بعد x من المسند اليساري A للجائز البسيط كما هو موضح في الشكل رقم (٦–٧)، ولأن الجائز الخاضع لتأثير الحمولة الافتراضية يكون خاضعا للتشوهات الناتجة عن الحمولات الحقيقية يكون عزم الانعطاف الافتراضي My يؤثر على العنصر dx الذي يعطي عملا افتراضيا داخليا وكأنه يتعرض لدوران حقيقي مقداره $d\theta$ كما هو مبين في الشكل رقم (٦–٨) وبهذا يكون العمل الداخلي الافتراضي الذي يؤثر على العنصر dx معطي بالعلاقة التالية:



الشكل رقم (٦–٨) العمل الداخلي الافتراضي المؤثر على العنصر dx

$$(6\text{-}10) \qquad dW_{vi}=Mv.(d\theta)$$

مع ملاحظة أن العزم الافتراضي Mv يبقى ثابتا خلال الدوران $d\theta$ فإنه لايحتوي العامل 1/2، وبما أنه يمكننا كتابة الدوران التفاضلي $d\theta$ على طول العنصر التفاضلي dx بالعلاقة :

$$(6-11) \qquad d\theta = \frac{M}{EI}dx$$

حيث تعبر M عن عزم الانعطاف الناتج عن الحمولة الفعلية التي تسبب الدوران $d\theta$ بتعويض العلاقة رقم (6-11) بالعلاقة رقم (6-10) يمكننا استنتاج العلاقة التالية:

$$(6-12) \qquad \mathrm{dW}_{vi} = M_v(\frac{M}{EI})dx$$

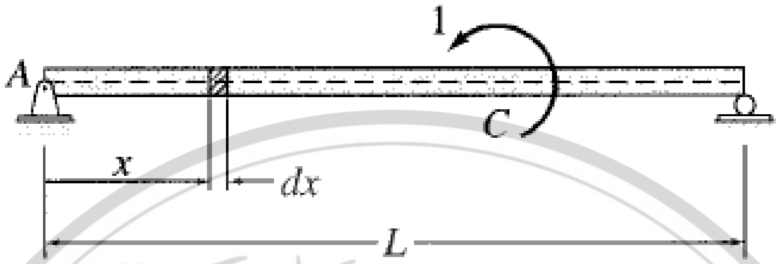
وبذلك يمكننا تحديد العمل الافتراضي الداخلي الكلي الذي يؤثر على كامل طول الجائز بمكاملة العلاقة رقم (6-12) على كامل طول الجائز

$$(6-13) \qquad \mathrm{W}_{vi} = \int_0^L \frac{M_v M}{EI}dx$$

بمساواة العمل الافتراضي الخارجي (Δ) *Wve=1 بالعمل الافتراضي الداخلي العلاقة رقم (6-13) نحصل على علاقة التالية التي تعبر عن العمل الافتراضي لحساب التشوه في الجوائز:

$$(6-14) \qquad 1*(\Delta) = \int_0^L \frac{M_v M}{EI}dx$$

إذا أردنا حساب الدوران θ في النقطة C من الجائز المبين في الشكل رقم (٦–٦) سوف نقوم باستخدام مبدأ العمل الافتراضي للجائز الأصلي والجائز الافتراضي الذي يخضع لتأثير مزدوجة واحدية تؤثر في النقطة المدروسة كما هو مبين في الشكل رقم (٦–٩).



الشكل رقم (٦–٩) الجملة الافتراضية لحساب الدوران

عندما يتعرض الجائز الخاضع لتأثير مزدوجة واحدية لتشوه ناتج عن الحمولات الفعلية يكون العمل الافتراضي الخارجي الناتج عن المزدوجة الواحدية $W_{ve}=1^*\ (\theta)$ ويكون التعبير عن العمل الافتراضي الداخلي معطى بالعلاقة السابقة

$$\mathrm{W}_{vi} = \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx$$

باعتبار أن M_v تعبر عن العزم الناتج عن المزدوجة الواحدية بمساواة العمل الداخلي W_{vi} بالعمل الخارجي W_{ve} يمكننا الحصول على العلاقة التي تعبر عن العمل الافتراضي لحساب الدوران في الجوائز:

$$(6-15) \qquad 1 * (\theta) = \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx$$

لقد تم اهمال العمل الداخلي الناتج عن القوة القاطعة أثناء اشتقاق المعادلتين السابقتين نظرا لصغر التشوه الناتج عن هذه القوة مقارنة بالتشوهات الناتجة عن عزم الانعطاف باستثناء الجوائز العميقة جدا *(very deep beams)* وبذلك تهمل العلاقتين السابقتين التشوهات الناتجة عن القوة القاطعة.

سوف نقوم فيما يلي بإجراء عملية التحليل لحساب الانتقال والدوران بطريقة العمل الافتراضي خطوة بخطوة.

٦-٥-١ إجراءات التحليل: Analyzing Procedures

١. ارسم الجائز الأصلي مبينا عليه جميع الحمولات الخارجية المؤثرة

٢. ارسم الجائز الافتراضي بعد حذف جميع الحمولات الخارجية وتطبيق قوة واحدية باتجاه الانتقال المطلوب في النقطة المطلوب حساب الانتقال فيها، أو تطبيق مزدوجة عزم واحدية باتجاه الدوران في النقطة المطلوب حساب الدوران

٣. نقوم بتفحص الجملة الأصلية والجملة الافتراضية وملاحظة تغيرات الصلابة الانعطافية EI على كامل طول الجائز، وتغيرات المجالات، وبعد ذلك نقوم بتقسيم الجائز إلى عدد من المجالات بحيث تكون الصلابة الانعطافية متساوية (مستمرة) في كل قطاع من الجائزين الحقيقي والافتراضي

٤. نقوم بكتابة معادلة عزم الانعطاف M لكل مقطع من مقاطع الجائز الحقيقي والجائز الافتراضي والتي تحتوي على أقل عدد ممكن من الحدود، بحيث يكون مبدأ واتجاه المحور X متناسبا في كل من الجائز الحقيقي والافتراضي مع الأخذ بعين الاعتبار الاتجاهات الموجبة لعزم الانعطاف.

٥. نقوم بكتابة معادلة عزم الانعطاف M لكل مقطع من مقاطع الجائز الافتراضي الذي يخضع لتأثير قوة واحدية أو مزدوجة عزم واحدية والتي تحتوي على أقل عدد ممكن من الحدود، بحيث يكون مبدأ واتجاه المحور X متناسبا مع اتجاهه ومبدئه في الجائز الحقيقي مع الأخذ بعين الاعتبار الاتجاهات الموجبة لعزم الانعطاف.

٦. نقوم بتحديد الانتقال أو الدوران بالاعتماد على إحدى العلاقتين (6-14) و (6-15) اللتين تم استنتاجهما في الفقرة السابقة وذلك بإجراء التكامل على كامل مقاطع الجائز

٧. إذا كانت النتيجة موجبة يكون الانتقال باتجاه القوة الافتراضية المفروضة، وكذلك الدوران يكون باتجاه المزدوجة الافتراضية المفروضة.

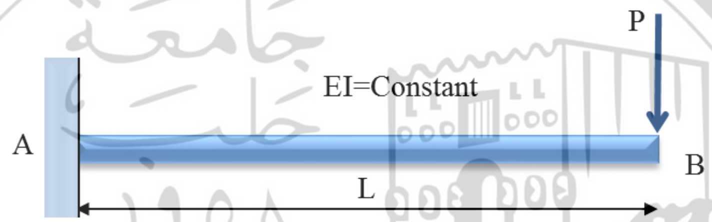
٦-٥-٢ أمثلة عملية: Examples

مثال (٣): جائز ظفري يخضع لتأثير حمولة مركزة في النهاية الحرة B طوله L وصلابته الانعطافية EI والمطلوب:

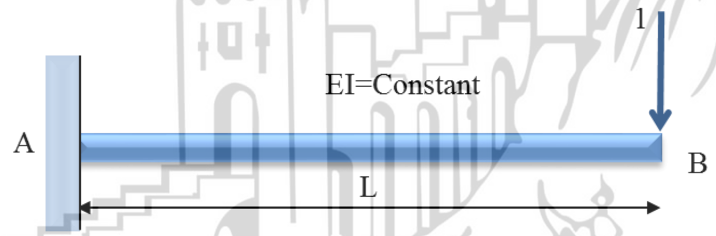
١. حسب قيمة الانتقال والدوران في النهاية الحرة B بطريقة العمل الافتراضي.

٢. حسب قيمة الانتقال والدوران في المنتصف C بطريقة العمل الافتراضي.

لحساب الانتقال الشاقولي في النهاية الحرة B نرسم جائزا افتراضيا تؤثر عليه قوة شاقولية افتراضية شدتها تساوي الواحد في النهاية الحرة



الجملة الحقيقية



الجملة الافتراضية (١) لحساب الانتقال في النهاية الحرة

نكتب معادلات عزم الانعطاف للجائزين الأصلي والافتراضي مع الأخذ بعين الاعتبار اتجاه المحور x من اليسار في هذه المسألة.

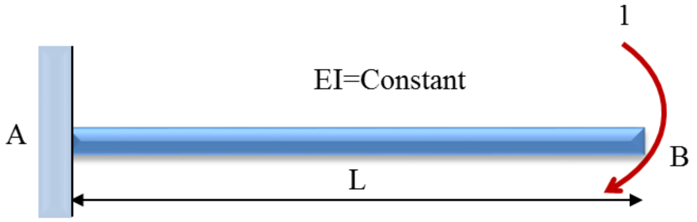
$$M = -PX \qquad M_v = -1X$$

$$1 * (\Delta) = \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx = \int_0^L \frac{(-PX)(-1X)dx}{EI} = \int_0^L \frac{(PX^2)dx}{EI} = \left[\frac{PL^3}{3EI}\right]$$

بما أن الانتقال موجب فهذا يعني أن الانتقال باتجاه القوة الافتراضية (نحو الأسفل)

لحساب الدوران في النهاية الحرة B نرسم جائزا افتراضيا تؤثر عليه مزدوجة عزم افتراضية تدور مع عقارب الساعة (مثلا) شدتها تساوي الواحد في النهاية الحرة

نكتب معادلات عزم الانعطاف للجائزين الأصلي والافتراضي مع الأخذ بعين الاعتبار اتجاه المحور x من اليسار في هذه المسألة.

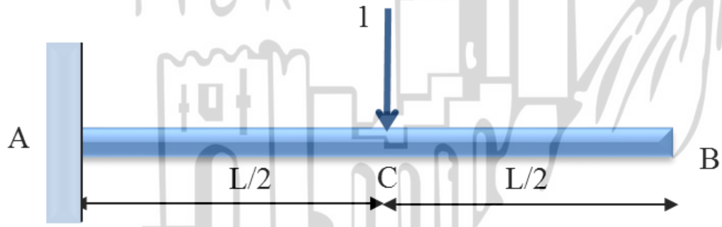


الجملة الافتراضية (٢) لحساب الدوران في النهاية الحرة

$$M = -PX \qquad M_v = -1$$

$$1 * (\Delta) = \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx = \int_0^L \frac{(-PX)(-1)dx}{EI} = \int_0^L \frac{(PX)dx}{EI} = \left[\frac{PL^2}{2EI}\right]$$

بما أن الدوران موجب فهذا يعني أن الدوران باتجاه مزدوجة العزم الافتراضية (مع عقارب الساعة)، أما من أجل حساب الانتقال الشاقولي في المنتصف C نرسم جائز افتراضي تؤثر عليه قوة شاقولية افتراضية شدتها تساوي الواحد في المنتصف C



الجملة الافتراضية (٣) لحساب الانتقال في C

تظهر هنا حالة عدم تطابق قطاعات أو مجالات عزم الانعطاف في كل من الجائز الأصلي والجائز الافتراضي حيث يتألف الجائز الأصلي من مجال واحد أما الجائز الافتراضي فيتألف من مجالين، لذلك سنعتمد في هذه الحالة على تقسيم الجائز الحقيقي إلى مجالين افتراضيين لمطابقته مع مجالات الجائز الافتراضي (يجب أن تكون كافة المجالات متطابقة في كل من الجائز الحقيقي والجائز الافتراضي).

المجال الأول: $L/2 \geq x_1 \geq 0$ من اليمين

$$M_1 = -PX \qquad M_{v1} = 0$$

المجال الثاني: $L/2 \geq x_2 \geq 0$ من اليمين

$$M_2 = -P\left(\frac{L}{2} + X\right) \qquad M_{v2} = -1X$$

$$1 * (\Delta) = \int_0^{L/2} \frac{M_{v1} M_1}{EI} dx_1 + \int_0^{L/2} \frac{M_{v2} M_2}{EI} dx_2$$

$$1 * (\Delta) = 0 + \int_0^{L/2} \frac{(-1X)(-P(\frac{L}{2} + X)}{EI} dx_2 = \frac{P}{EI} \int_0^{L/2} (\frac{L}{2} x + x^2)\, dx_2$$

$$(\Delta) = \frac{P}{EI} \left[\frac{L}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^{L/2} = \frac{P}{EI} \left[\frac{L}{4} \,(\frac{L}{2})^2 + \frac{1}{3} \,(\frac{L}{2})^3 \right] = \frac{5PL^3}{48EI} \downarrow$$

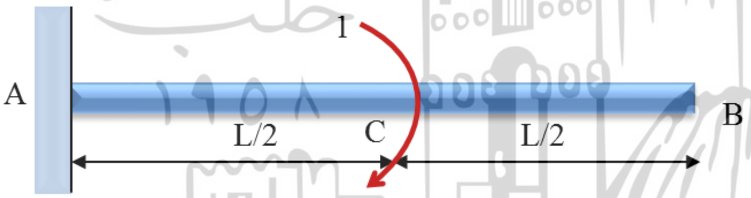
لحساب الدوران في المنتصف C نرسم جائزا افتراضيا تؤثر عليه مزدوجة عزم افتراضية شدتها تساوي الواحد في المنتصف C

المجال الأول: $0 \leq x_1 \leq L/2$ من اليمين

$$M_1 = -PX \qquad M_{v1} = 0$$

المجال الثاني: $0 \leq x_2 \leq L/2$ من اليمين

$$M_2 = -P\left(\frac{L}{2} + X\right) \qquad M_{v2} = -1$$



الجملة الافتراضية (٤) لحساب الدوران في C

$$1 * (\theta) = \int_0^{L/2} \frac{M_{v1} M_1}{EI} dx_1 + \int_0^{L/2} \frac{M_{v2} M_2}{EI} dx_2$$

$$1 * (\theta) = 0 + \int_0^{L/2} \frac{(-1)(-P(\frac{L}{2} + X)}{EI} dx_2 = \frac{P}{EI} \int_0^{L/2} (\frac{L}{2} + x)\, dx_2$$

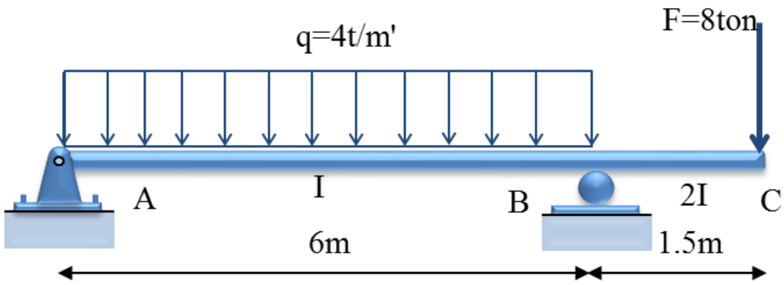
$$(\theta) = \frac{P}{EI} \left[\frac{L}{2} x + \frac{x^2}{2} \right]_0^{L/2} = \frac{P}{EI} \left[\frac{L}{2} \frac{L}{2} + \frac{1}{2} \,(\frac{L}{2})^2 \right] = \frac{3PL^2}{8EI}$$ مع عقارب الساعة

<u>**مثال(٤):**</u> جائز بسيط AB عطالته I ينتهي بظفر BC عطالته 2I يتعرض لتأثير حمولة مركزة في نهايته الحرة (C) شدتها *8 t.m* وحمولة موزعة بانتظام في المجال *AB* شدتها *4 t/m'*. والمطلوب:

١–حساب الانتقال والدوران في *(C)*.

٢–حساب الدوران في *A*

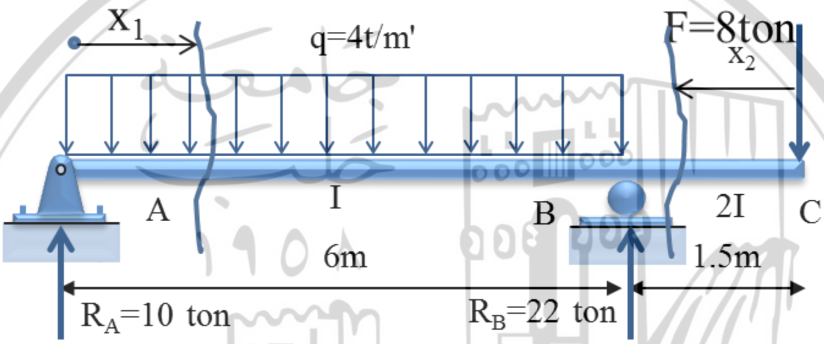
نوجد ردود الأفعال ونكتب معادلات عزم الانعطاف للجملة الحقيقية بعد التأكد من مطابقة المجالات مع الجمل الافتراضية.



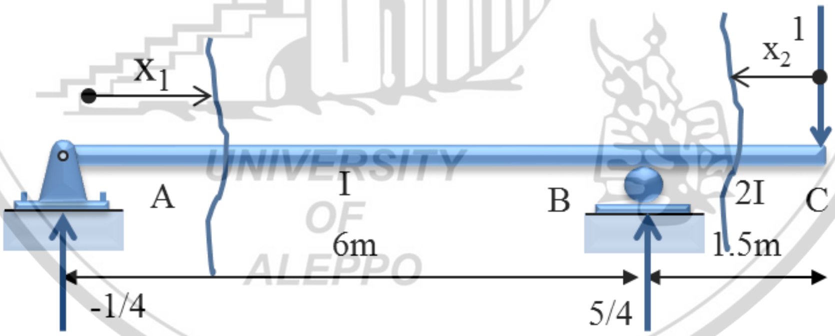
$M_1 = 10x - 2x^2$ المجال AB: $6 \geq X_1 \geq 0$

$M_2 = -8x$ المجال BC: $1.5 \geq X_2 \geq 0$

أولا: حساب الانتقال الشاقولي في C:



نرسم الجملة الافتراضية التي تخضع لتأثير القوة الافتراضية الواحدية (وهي نفس الجملة الحقيقية بعد حذف جميع الحمولات الخارجية)



نكتب معادلات عزم الانعطاف لهذه الجملة الافتراضية لجميع المجالات مع المحافظة على تطابق المجالات واتجاه المحاور الاحداثية أثناء كتابة هذه المعادلات

$$Mv_1 = -\frac{x_1}{4} \qquad M_{v2} = -1x_2$$

$$1 * (\Delta_c) = \int_0^6 \frac{M_{v1}M_1}{EI}dx_1 + \int_0^{1.5} \frac{M_{v2}M_2}{2EI}dx_2$$

$$1 * (\Delta_c) = \int_0^6 \frac{(-\frac{x_1}{4})(10x - 2x^2)}{EI}dx_1 + \int_0^{1.5} \frac{(-1x_2)(-8x)}{2EI}dx_2$$

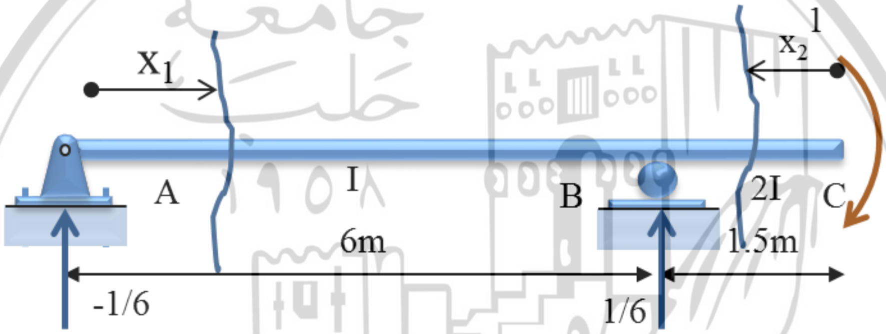
$$1*(\Delta_c)=\int_0^6\frac{\left(-10\frac{x_1^2}{4}\right)+(\frac{x_1^3}{2})}{EI}dx_1+\int_0^{1.5}\frac{4x_1^2}{EI}dx_2$$

$$(\Delta_c)=\frac{1}{EI}\left[\frac{-10x_1^3}{12}+\frac{x_1^4}{8}\right]_0^6+\frac{1}{EI}\left[\frac{4x_1^3}{3}\right]_0^{1.5}=\frac{1}{EI}\left[\frac{-10}{12}6^3+\frac{6^4}{8}+\frac{4}{3}1.5^3\right]$$

$$(\Delta_c)=-\frac{13.5}{EI}\uparrow$$

ثانيا: حساب الدوران في النهاية الحرة C

نكتب معادلات عزم الانعطاف للجائز الافتراضي حيث نلاحظ تطابق مجالات عزم الانعطاف للجائز الافتراضي مع الجائز الحقيقي



$$Mv_1=-\frac{x_1}{6}\qquad M_{v2}=-1$$

$$1*(\theta_c)=\int_0^6\frac{M_{v1}M_1}{EI}dx_1+\int_0^{1.5}\frac{M_{v2}M_2}{2EI}dx_2$$

$$1*(\theta_c)=\int_0^6\frac{(-\frac{x_1}{6})(10x-2x^2)}{EI}dx_1+\int_0^{1.5}\frac{(-1)(-8x)}{2EI}dx_2$$

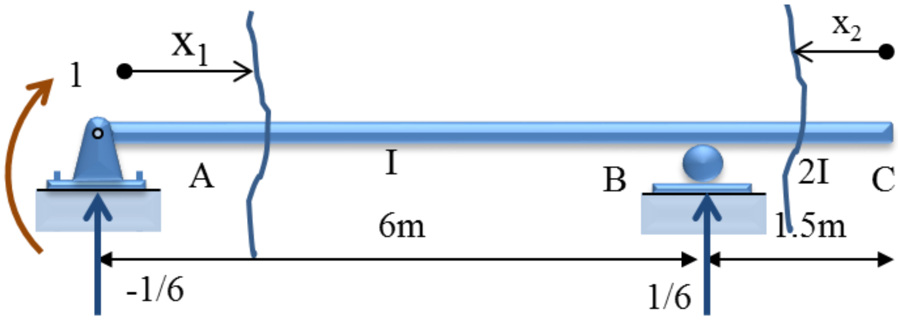
$$1*(\theta_c)=\int_0^6\frac{\left(-10\frac{x_1^2}{6}\right)+\left(\frac{x_1^3}{3}\right)}{EI}dx_1+\int_0^{1.5}\frac{4x_2}{EI}dx_2$$

$$(\theta_c)=\frac{1}{EI}\left[\frac{-10x_1^3}{18}+\frac{x_1^4}{12}\right]_0^6+\frac{1}{EI}\left[\frac{4x_1^2}{2}\right]_0^{1.5}=\frac{1}{EI}\left[\frac{-10}{18}6^3+\frac{6^4}{12}+\frac{4}{2}1.5^2\right]$$

$$(\theta_c)=-\frac{7.5}{EI}$$ عكس عقارب الساعة

ثالثا: حساب الدوران في المسند A

نكتب معادلات عزم الانعطاف للجائز الافتراضي حيث نلاحظ تطابق مجالات عزم الانعطاف للجائز الافتراضي مع الجائز الحقيقي



$$Mv_1 = -\frac{x_1}{6} + 1 \qquad M_{v2} = 0$$

$$1 * (\theta_A) = \int_0^6 \frac{M_{v1}M_1}{EI} dx_1 + \int_0^{1.5} \frac{M_{v2}M_2}{EI} dx_2$$

$$1 * (\theta_A) = \int_0^6 \frac{(-\frac{x_1}{6} + 1)(10x - 2x^2)}{EI} dx_1 + 0$$

$$1 * (\theta_A) = \int_0^6 \frac{\frac{x_1^3}{3} - 11\frac{x_1^2}{3} + 10x_1}{EI} dx_1 = \left[\frac{\frac{x_1^4}{12} - 11\frac{x_1^3}{9} + 5x_1^2}{EI}\right]_0^6 = \frac{24}{EI}$$

٦-٦ إيجاد تكامل الجداءات بيانيا $\Delta = \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx$

يمكننا إيجاد قيمة التكامل $\Delta = \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx$ بالاعتماد على مخططات عزم الانعطاف للجملة الحقيقية والجملة الافتراضية للحالة المدروسة.

بفرض أن مخطط عزم الانعطاف للجملة الحقيقية بشكل منحني وأن مخطط عزم الانعطاف للجملة الافتراضية بشكل مستقيم كما هو مبين بالشكل رقم (٦-١٠)، في هذه الحالة يمكننا كتابة الصيغة التالية:

$$M_v = x \tan\alpha$$

بتعويض قيمة Mv في العلاقة العامة لنظرية العمل الافتراضي نحصل على العلاقة التالية:

$$\Delta = \int_0^L \frac{x.\tan\alpha \,.\, M_x}{EI} dx$$

لكن القيمة $Mx.dx=dA$ كما هو مبين في الشكل رقم (٦-١٠a) وبالتالي تصبح العلاقة السابقة بالشكل:

$$(6-16) \qquad \Delta = \int_0^L \frac{x.\tan\alpha \,.\, dA}{EI}$$

لكن القيمة التكامل $x.dA$ تعبر عن العزم الستاتيكي للمساحة حول المحور OO' والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$\int_0^L x.dA = A.X_c$$

بتعويض هذه القيمة بالعلاقة الأساسية رقم (6-16) نحصل على:

$$(6-17) \qquad \Delta = \frac{x_c.\tan\alpha\,.A}{EI}$$

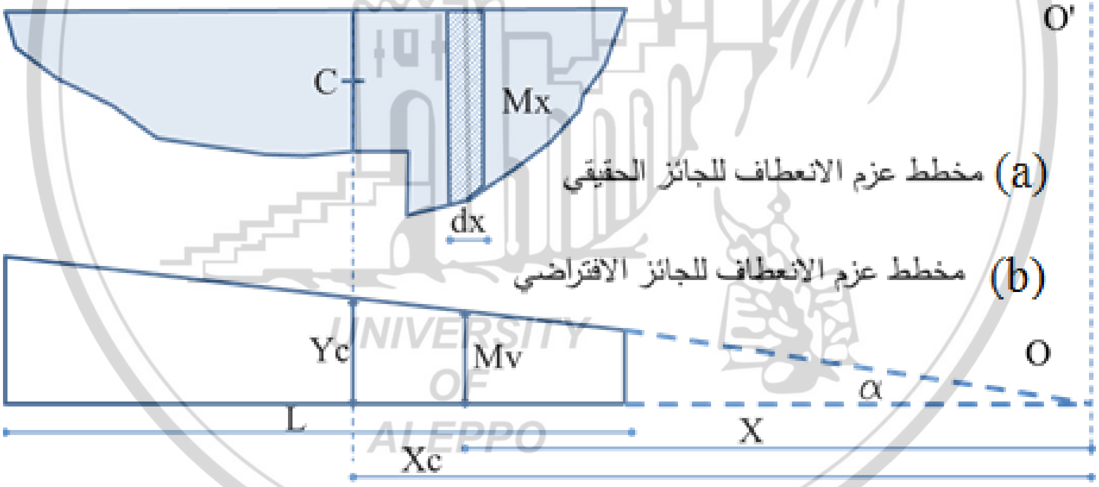
من الشكل رقم (٦-١٠ b) نوجد القيمة Xc.tanα=Yc ونعوضها في العلاقة السابقة فنحصل على العلاقة النهائية لتكامل الجداء وهي:

$$(6-18) \qquad \Delta = \frac{Y_c.A}{EI}$$

تعبر حدود العلاقة $(6-18)$عن:

A وهي مساحة مخطط عزم الانعطاف للجائز الحقيقي

Yc وهو الارتفاع في الجائز الافتراضي المقابل لموقع مركز ثقل الجائز الحقيقي



الشكل رقم (٦-١٠) إيجاد عملية تكامل الجداءات بيانيا

٦-٦-١ إجراءات التحليل: Analyzing Procedures

١. نرسم مخطط عزم الانعطاف للجملة الحقيقية وإذا كان المخطط ذا مساحات غير معروفة نستخدم مبدأ تنضد الآثار

٢. نرسم مخطط عزم الانعطاف للجملة الافتراضية

٣. نطابق بين مجالات الجملة الحقيقية والجملة الافتراضية

٤. لإيجاد قيمة التكامل نضرب إشارات المخططين، ثم نقسم على EI، ثم نحسب مساحة مخطط عزم الانعطاف للجملة الحقيقية الذي يمثل المساحة A، ونحدد موقع مركز ثقل هذه المساحة، ونقيس الترتيب المقابل لمركز الثقل من مخطط عزم الانعطاف للجملة الافتراضية الواحدية والذي يمثل الترتيب Yc لكل مجال.

ملاحظة هامة: Important Note

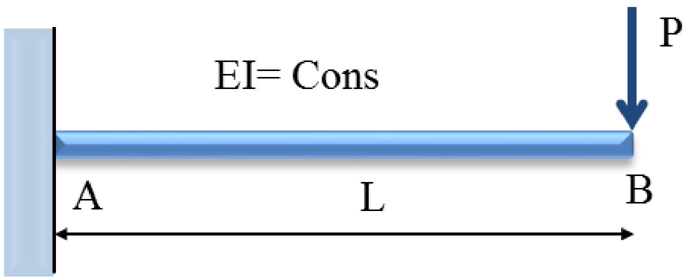
إذا كان مخطط عزم الانعطاف للجائز الحقيقي بشكل مستقيم خطي يمكن مبادلة الجداء أي يمكن حساب مساحة مخطط عزم الانعطاف للجملة الافتراضية الواحدية الذي يمثل المساحة A، ونحدد موقع مركز ثقل هذه المساحة، ونقيس الترتيب المقابل لمركز الثقل من مخطط عزم الانعطاف للجملة الحقيقية والذي يمثل الترتيب Yc حيث نختار الأسهل.

٦-٦-٢ أمثلة عملية: **Examples**

<u>مثال(٥)</u>: جائز ظفري يخضع لتأثير حمولة مركزة في النهاية الحرة B طوله L وصلابته الانعطافية EI والمطلوب:

١. احسب قيمة الانتقال والدوران في النهاية الحرة B بطريقة العمل الافتراضي.

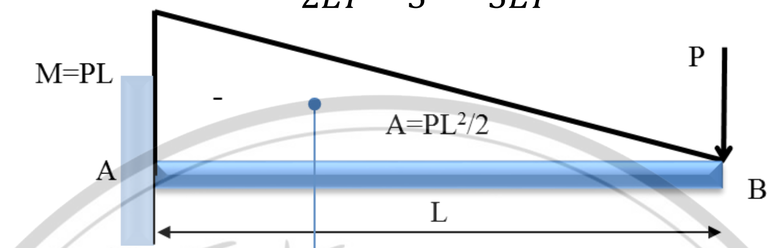
٢. احسب قيمة الانتقال والدوران في المنتصف C بطريقة العمل الافتراضي.

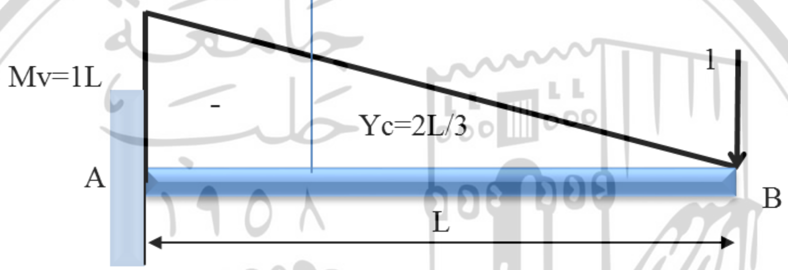


لحساب الانتقال الشاقولي في النهاية الحرة B نرسم جائز افتراضي تؤثر عليه قوة شاقولية افتراضية شدتها تساوي الواحد في النهاية الحرة

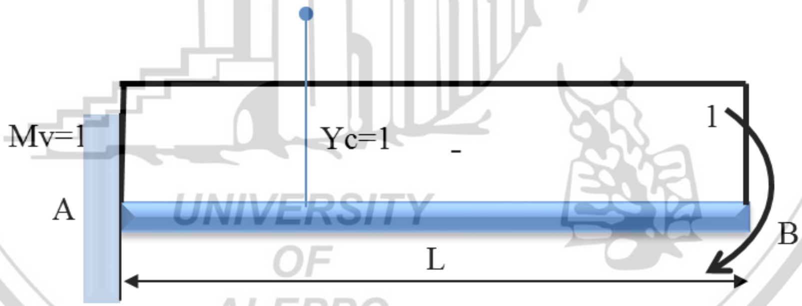
نرسم مخططات عزم الانعطاف للجائزين الأصلي والافتراضي.

$$\Delta_B = \frac{PL^2}{2EI} * \frac{2L}{3} = \frac{PL^3}{3EI}$$





لحساب الدوران في النهاية الحرة B نرسم جائزا افتراضيا تؤثر عليه مزدوجة عزم افتراضية تدور مع عقارب الساعة (مثلا) شدتها تساوي الواحد في النهاية الحرة



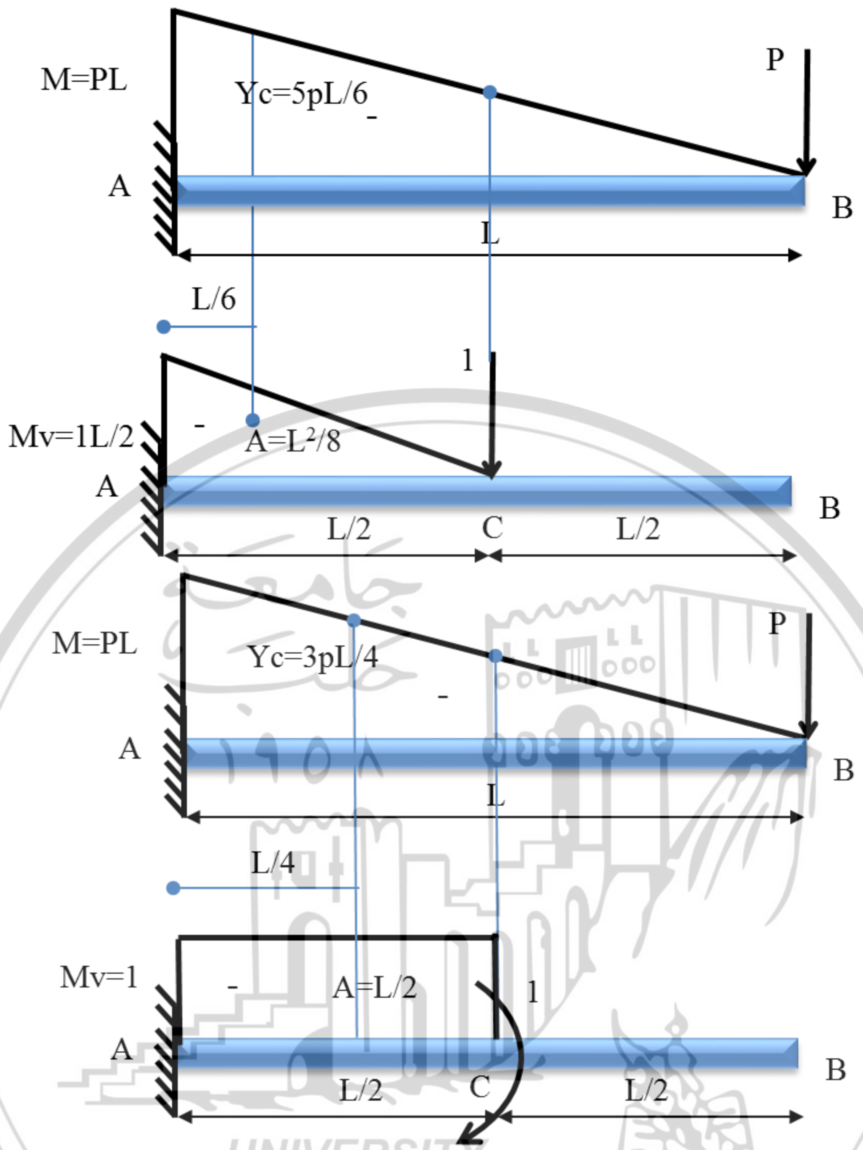
$$\theta_B = \frac{PL^2}{2EI} * 1 = \frac{PL^2}{2EI}$$

لحساب الانتقال الشاقولي في المنتصف C نرسم جائز افتراضي تؤثر عليه قوة شاقولية افتراضية شدتها تساوي الواحد في المنتصف C

$$\Delta_c = \frac{L^2}{8EI} * \frac{5pL}{6} = \frac{5PL^3}{48EI}$$

لحساب الدوران في المنتصف C نرسم جائزا افتراضيا تؤثر عليه مزدوجة عزم افتراضية شدتها تساوي الواحد في المنتصف C

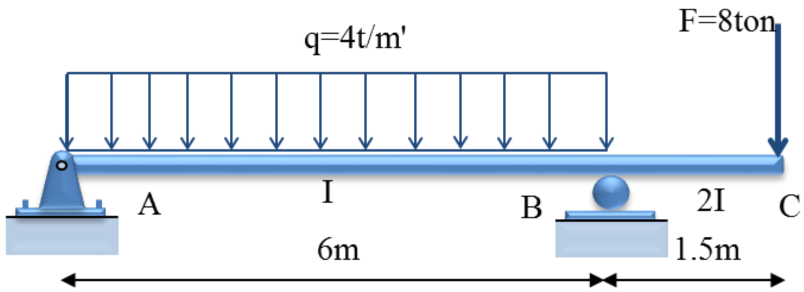
$$\theta_c = \frac{L}{2EI} \frac{3PL}{4} = \frac{3PL^2}{8EI}$$



مثال(٦): جائز بسيط AB عطالته I ينتهي بظفر BC عطالته 2I يتعرض لتأثير حمولة مركزة في نهايته الحرة (C) شدتها 8t/m' وحمولة موزعة بانتظام في المجال AB شدتها 4t/m' والمطلوب:

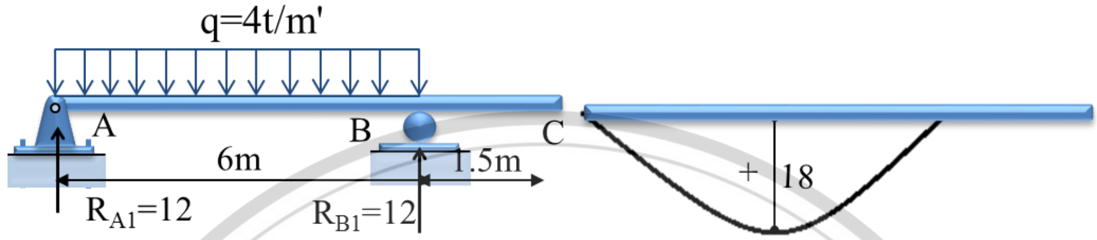
١–حساب الانتقال والدوران في (C).

٢–حساب الدوران في A

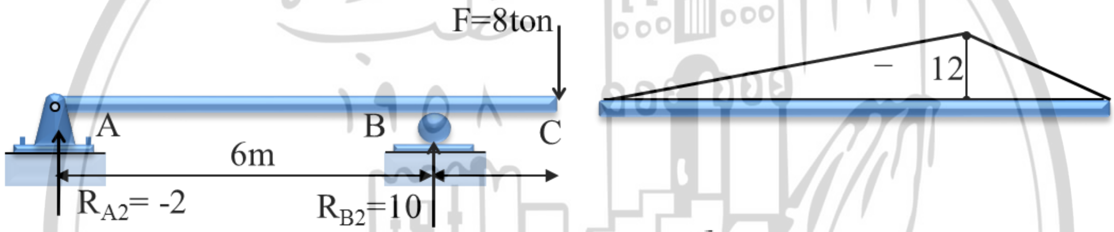


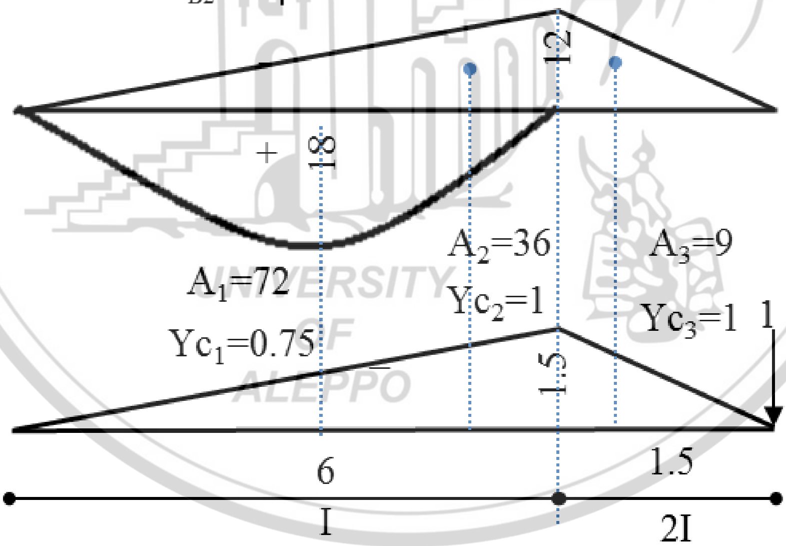
نوجد ردود الأفعال ونكتب معادلات عزم الانعطاف للجملة الحقيقية بعد التأكد من مطابقة المجالات مع الجمل الافتراضية ونرسم مخطط عزم الانعطاف بالاعتماد على مبدأ تنضد الآثار.

حالة التحميل الأولى: الجائز يخضع لتأثير حمولة موزعة بانتظام في الفتحة AB



حالة التحميل الثانية: الجائز يخضع لتأثير حمولة مركزة التي تؤثر في النهاية الحرة C.





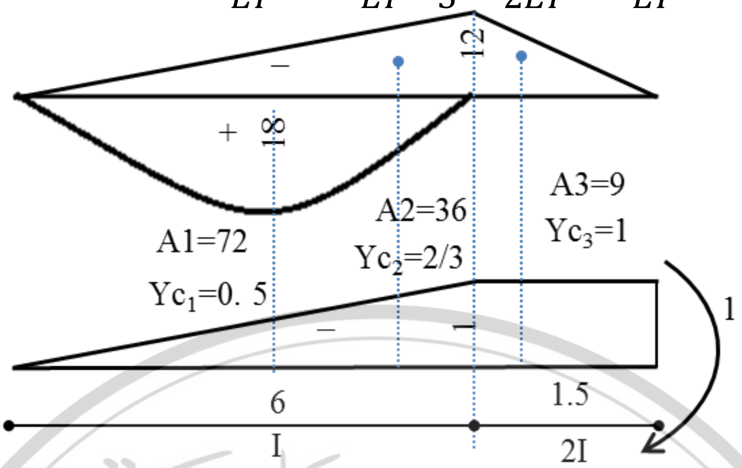
أولا: حساب الانتقال في النهاية الحرة C

$$\Delta_c = -\frac{72 * 0.75}{EI} + \frac{36}{EI} + \frac{9}{2EI} = \frac{-13.5}{EI} \uparrow$$

ثانيا: حساب الدوران في النهاية الحرة C

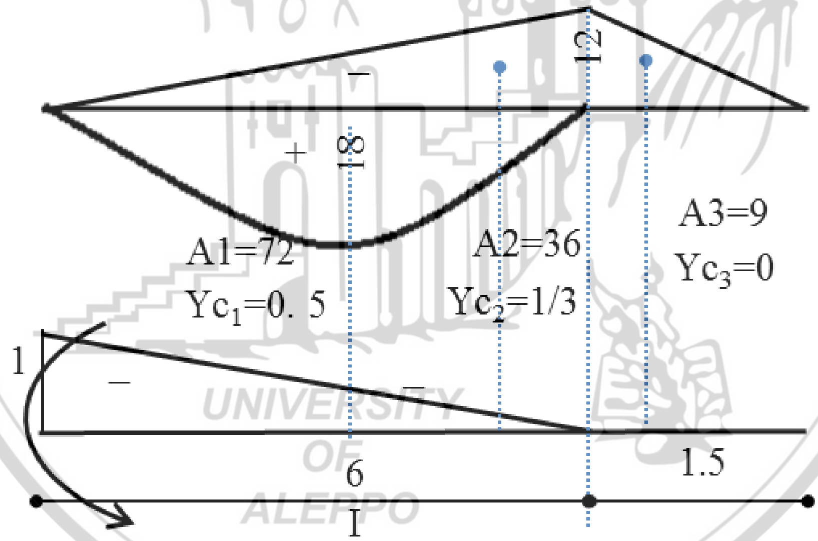
نرسم مخططات عزم الانعطاف، نطابق مجالات عزم الانعطاف للجائز الافتراضي مع الجائز الحقيقي

$$\theta_c = -\frac{72 * 0.5}{EI} + \frac{36}{EI} * \frac{2}{3} + \frac{9}{2EI} = \frac{-7.5}{EI}$$



ثالثا: حساب الدوران في المسند A

نرسم مخططات عزم الانعطاف للجائز الافتراضي حيث نلاحظ تطابق مجالات عزم الانعطاف للجائز الافتراضي مع الجائز الحقيقي



$$\theta_A = -\frac{72 * 0.5}{EI} + \frac{36}{EI} * \frac{1}{3} + 0 = \frac{-24}{EI}$$ مع عقارب الساعة

٦-٧ حساب التشوهات في الإطارات باستخدام نظرية العمل الافتراضي:

يعتبر استخدام نظرية العمل الافتراضي في حساب الانتقالات والدورانات في الإطارات مشابهة تماما لاستخدامها في الجوائز.

من أجل تحديد الانتقال Δ والدوران θ في أي نقطة من نقاط الإطار، نطبق قوة افتراضية واحدية أو مزدوجة عزم افتراضية واحدية في النقطة المدروسة.

عندما تتعرض الجملة الافتراضية للتشوهات الناتجة عن الحمولات الحقيقية يكون العمل الخارجي المنجز من الحمولة الواحدية أو مزدوجة العزم الواحدية تساوي $W_{ve}=1*\Delta$ أو $W_{ve}=1*\theta$ ويمكن أن تتعرض بعض أجزاء الإطار لتشوهات محورية إضافة للتشوهات الناتجة عن الانعطاف، وبذلك يكون العمل الافتراضي الداخلي الكلي المؤثر على الإطار مساويا لمجموع العمل الافتراضي الداخلي الناتج عن الانعطاف والتشوهات المحورية، وعندما تكون الحمولات الحقيقية والافتراضية والصلابة الانعطافية EI مستمرة على كامل المجال في الإطار عندها يمكن التعبير عن العمل الافتراضي الداخلي الناتج عن الانعطاف لهذا المجال بإجراء التكامل للعلاقة $\frac{M_v M}{EI}$ على كامل طول المجال ويتم الحصول على العمل الافتراضي الداخلي الناتج عن الانعطاف لكامل الإطار بجمع الأعمال الافتراضية للمجالات وبذلك يمكننا كتابة العلاقة على النحو التالي:

$$\mathrm{W}_{vib}=\sum\int\frac{M_v M}{EI}dx$$

وبشكل مشابه إذا كانت القوة المحورية الحقيقية F والقوة المحورية الواحدية الافتراضية F_v وكانت الصلابة المحورية EA ثابتة على كامل طول العنصر L يكون العمل الافتراضي الداخلي الناتج عن القوة المحورية مساويا $F_v\,(FL)/EA$ وبذلك يمكننا كتابة العمل الافتراضي الناتج عن التشوهات المحورية لكامل الإطار على النحو التالي:

$$\mathrm{W}_{vib}=\sum F_v(\frac{FL}{EA})$$

بإضافة الحد الخاص بالتشوهات الناتجة عن الانعطاف إلى الحد الناتج عن التشوهات المحورية نحصل على العمل الافتراضي الداخلي للإطار الناتج عن مجموع هذين التشوهين:

$$\mathrm{W}_{vib}=\sum F_v\left(\frac{FL}{EA}\right)+\sum\int\frac{M_v M}{EI}dx$$

وبمساواة العمل الخارجي مع العمل الافتراضي الداخلي نحصل على عبارة العمل الافتراضي للانتقالات والدورانات الخاصة بالإطارات

$$(\Delta)=\sum F_v\left(\frac{FL}{EA}\right)+\sum\int\frac{M_v M}{EI}dx \qquad (6-19)$$

$$(\theta)=\sum F_v\left(\frac{FL}{EA}\right)+\sum\int\frac{M_v M}{EI}dx \qquad (6-20)$$

تكون التشوهات المحورية في عناصر الإطارات المصنعة من المواد الهندسية الشائعة أصغر بكثير من التشوهات الناتجة عن الانعطاف لذلك يتم عادة إهمال هذه التشوهات المحورية أثناء تحليل الإطارات لذلك سوف نقوم بإهمال التشوهات المحورية " مالم يرد نص صريح بإدخالها" وبذلك يتم حذف الحد الأول من الطرف الأيمن للعلاقتين السابقتين لكي تصبحا على النحو التالي:

$$(\Delta) = \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx \qquad (6-21)$$

$$(\theta) = \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx \qquad (6-22)$$

٦-٧-١ إجراءات التحليل: Analyzing Procedures

سوف نقوم بإجراء عملية التحليل لحساب الانتقال والدوران للإطارات بطريقة العمل الافتراضي خطوة بخطوة في حال إهمال تأثير القوى المحورية.

١. نرسم الإطار الأصلي مبينا عليه جميع الحمولات الخارجية المؤثرة عليه واحسب ردود الأفعال في المساند الخارجية.

٢. نرسم الإطار الافتراضي بعد حذف جمع الحمولات الخارجية وتطبيق قوة واحدية باتجاه الانتقال المطلوب في النقطة المطلوب حساب الانتقال فيها، أو تطبيق مزدوجة عزم واحدية باتجاه الدوران في النقطة المطلوب حساب الدوران فيها.

٣. نقوم بتفحص الجملة الأصلية والجملة الافتراضية وملاحظة تغيرات الصلابة الانعطافية EI وتغير المجالات على كامل الإطار، وبعد ذلك نقوم بتقسيم الإطار إلى مجالات بحيث تكون الصلابة الانعطافية متساوية (مستمرة) في كل مجال من مجالات الإطارين الحقيقي والافتراضي.

٤. نقوم بكتابة معادلة عزم الانعطاف M لكل مجال من مجالات الإطار **الحقيقي** والتي تحتوي على أقل عدد ممكن من الحدود، بحيث يكون مبدأ واتجاه المحور X متناسبا في كل من الإطار الحقيقي والإطار الافتراضي مع الأخذ بعين الاعتبار الاتجاهات الموجبة لعزم الانعطاف.

٥. نقوم بكتابة معادلة عزم الانعطاف M لكل مقطع من مقاطع الإطار

الافتراضي الذي يخضع لتأثير قوة واحدية أو مزدوجة عزم واحدية والتي تحتوي على أقل عدد ممكن من الحدود، بحيث يكون مبدأ واتجاه المحور X متناسبا مع اتجاهه ومبدئه في الإطار الحقيقي مع الأخذ بعين الاعتبار الاتجاهات الموجبة لعزم الانعطاف.

٦. نقوم بتحديد الانتقال أو الدوران بالاعتماد على إحدى العلاقتين (*6-21*) و(*6-22*) اللتين تم استنتاجهما في الفقرة السابقة وذلك بإجراء التكامل على كامل مقاطع الإطار

٧. إذا كانت النتيجة موجبة يكون الانتقال باتجاه القوة الافتراضية المفروضة، وكذلك الحال بالنسبة للدوران.

أما في حال عدم إهمال القوى المحورية

نقوم بتحديد الانتقال أو الدوران بالاعتماد على إحدى العلاقتين (6-19) و(6-20) اللتين تم استنتاجهما في الفقرة السابقة وذلك بإجراء التكامل على كامل مقاطع الإطار

ملاحظة: Notice

a. تحتوي كل نقطة من نقاط الإطار على ثلاثة مركبات للحركة، انتقال أفقي Δ_H، وانتقال شاقولي Δ_V، ودوران θ

b. يتم تحديد الألياف السفلية في الإطارات بوضع خطوط متقطعة باتجاه هذه الألياف.

٦-٧-٢ أمثلة عملية: Examples

__مثال (٧):__ (امتحان عملي ٢٠١٣)

إطار ABC يستند على مسندين بسيطين في A وB يتعرض لتأثير مزدوجة عزم شدتها 6t.m في المسند B بفرض أن مقطع الجائز ثابت ومتجانس في كافة المجالات المطلوب حساب الدوران في المسند B بطريقة العمل الافتراضي.

لحساب الدوران في B نرسم جملة افتراضية تخضع لتأثير مزدوجة واحدية افتراضية في B كما هو مبين في الشكل رقم (٦-١١).

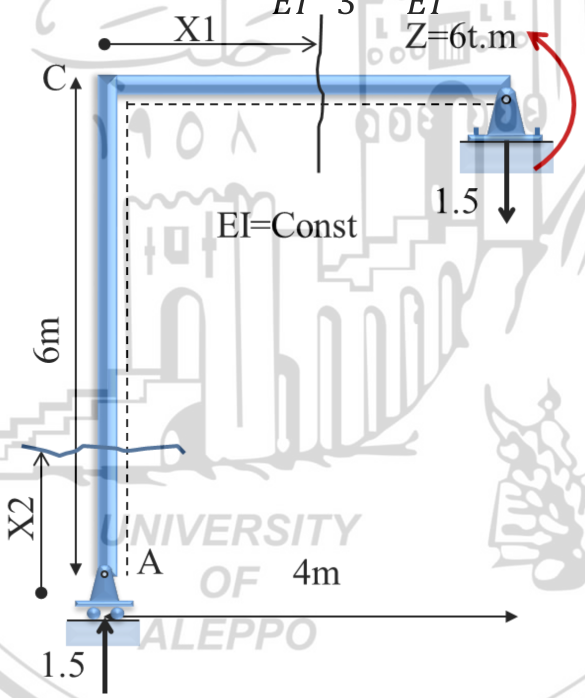
نوجد ردود الأفعال ونكتب معادلات أو نرسم مخططات عزم الانعطاف لكل من الجملة الحقيقية والافتراضية

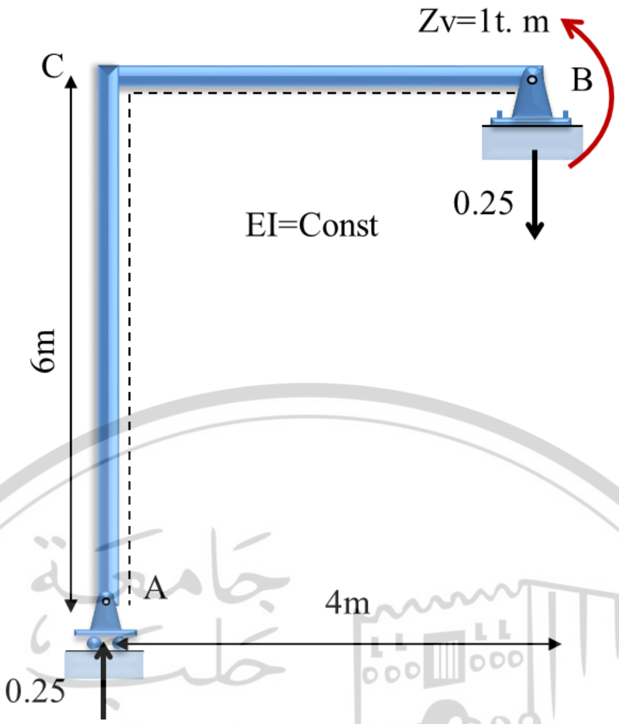
$$M_1 = 1.5\,X1 \qquad M_2 = 0$$
$$M_{v1} = 0.25\,X1 \qquad M_{v2} = 0$$

$$\theta_B = \int_0^4 (\frac{3}{2}\,X1)(\frac{1}{4}\,X1)\frac{dx1}{EI} + 0 = \frac{3}{8EI}\int_0^4 X_1^2\,dx_1 = \frac{3}{8EI}\left[\frac{X_1^3}{3}\right]_0^4 = \frac{8}{EI}$$

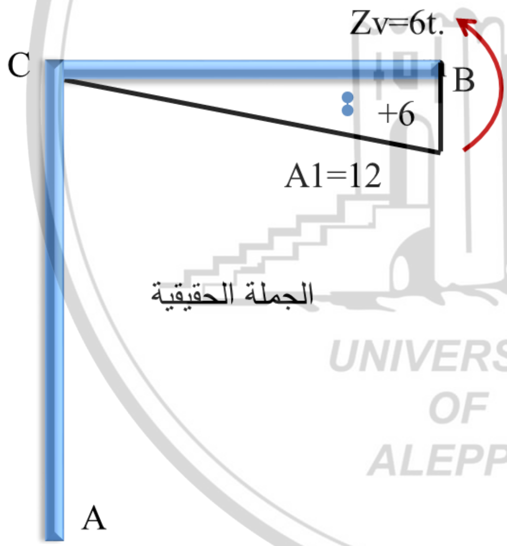
إجراء التكامل تخطيطيا (بالاعتماد على مخططات عزم الانعطاف)

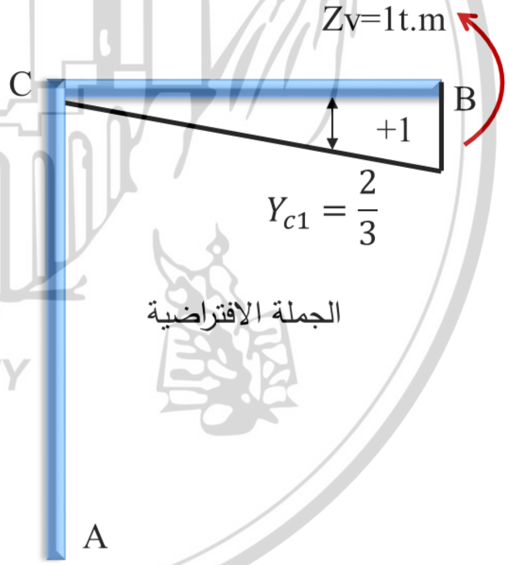
$$\theta_B = \frac{12}{EI}\ \frac{2}{3} = \frac{8}{EI}$$





الشكل رقم (٦-١١)

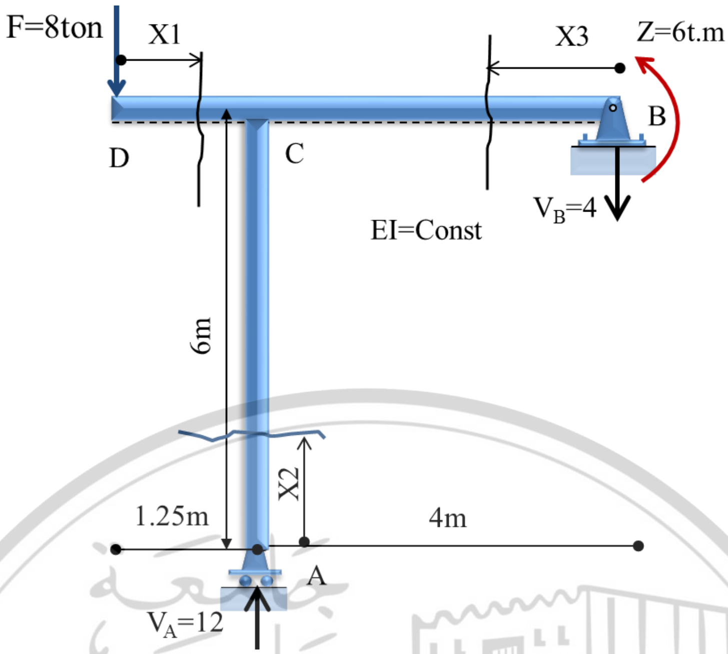




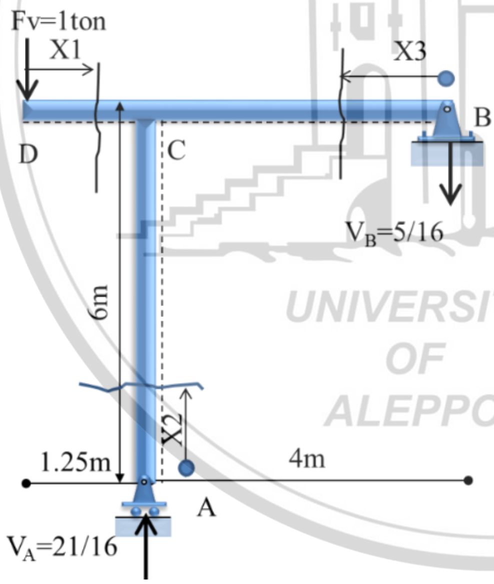
مثال (٨): (امتحان عملي ٢٠٠٩)

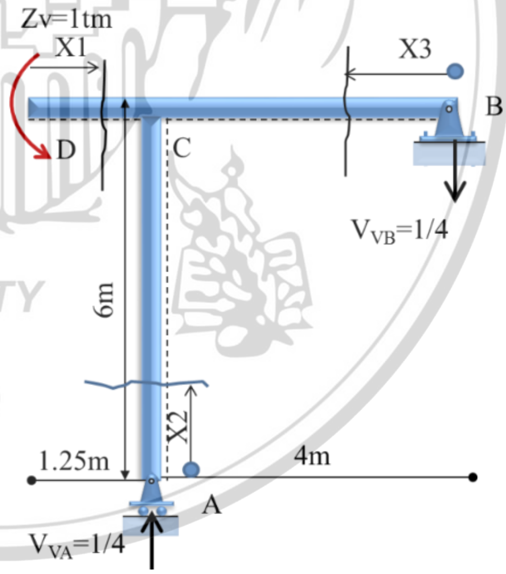
إطار ABC يستند على مسندين بسيطين في A و B وينتهي بظفر CD يتعرض لتأثير مزدوجة عزم شدتها 6t.m في المسند B وحمولة مركزة شدتها 8t في النهاية الحرة D بفرض أن مقطع الجائز ثابت ومتجانس في كافة المجالات.

المطلوب: حساب الانتقال والدوران في النهاية الحرة D بطريقة العمل الافتراضي.



أولا: نرسم عددا من الجمل الافتراضية يساوي إلى عدد الحالات المطلوبة بما النهاية الحرة D تقع على استقامة أفقية واحدة مع المسند الثابت B فإن قيمة الانتقال الأفقي فيها تساوي الصفر، لذلك نرسم جملتين افتراضيتين فقط.





ثانيا: نوجد ردود أفعال الجملة الحقيقية والجمل الافتراضية

ثالثا: نكتب معادلات أو نرسم مخططات عزم الانعطاف لكل من الجملة الحقيقية والجمل الافتراضية.

$$M_1 = -8X_1 \ , \ M_2 = 0 \, , \qquad M_3 = -4X_3 + 6$$

$$M_{v11} = -X_1 \ , \ M_{v12} = 0 \, , \qquad M_{v13} = -\frac{5}{16}X_3$$

$$M_{v21} = -1 \ , \ M_{v22} = 0 \ , \qquad M_{v23} = \frac{-X_3}{4}$$

$$\Delta_D = \int_0^{1.25} (-8\,X_1)(-X_1)\frac{dx_1}{EI} + 0 + \int_0^4 \frac{(-4X_3+6)\left(-\frac{5}{16}X_3\right)}{EI}\,dx_3$$

$$\Delta_D = \int_0^{1.25} (8\,X_1^2)\frac{dx_1}{EI} + 0 + \int_0^4 \frac{(20X_3^2-30X_3)}{16EI}\,dx_3$$

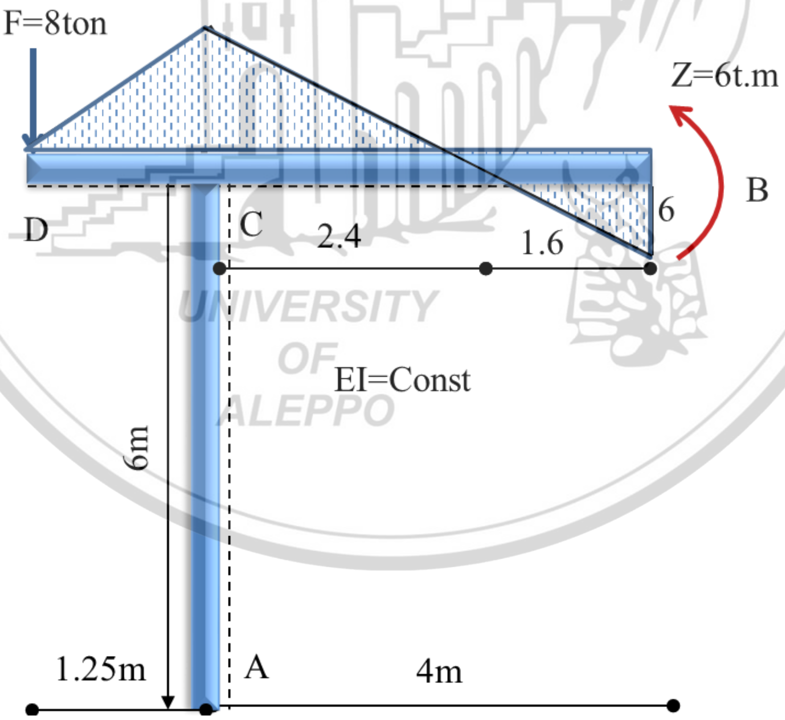
$$\Delta_D = \frac{8}{EI}\left[\frac{X_1^3}{3}\right]_0^{1.25} + \frac{10}{16EI}\left[\frac{2X_3^3}{3} - \frac{3X_3^2}{2}\right]_0^4 = \frac{5.2+11.67}{EI} = \frac{16.87}{EI}$$

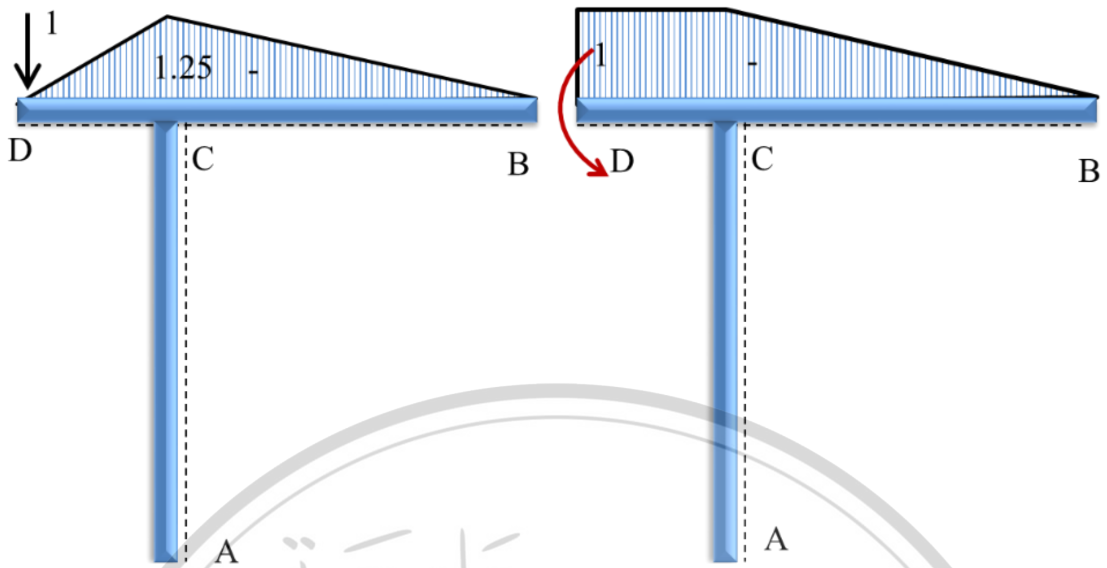
$$\theta_D = \int_0^{1.25} (-8\,X_1)(-1)\frac{dx_1}{EI} + 0 + \int_0^4 \frac{(-4X_3+6)(-\frac{X_3}{4})}{EI}\,dx_3$$

$$\theta_D = \int_0^{1.25} (8\,X_1)\frac{dx_1}{EI} + 0 + \int_0^4 \frac{(4X_3^2-6X_3)}{4EI}\,dx_3$$

$$\theta_D = \left[\frac{4X_1^2}{EI}\right]_0^{1.25} + \frac{1}{4EI}\left[\frac{4X_3^3}{3} - 3X_3^2\right]_0^4 = \frac{6.25+9.33}{EI} = \frac{15.583}{EI}$$

أو نرسم مخطط عزم الانعطاف للجملة الحقيقية لإجراء التكامل تخطيطيا





نرسم مخطط عزم الانعطاف للجمل الافتراضية: بما أن مخططات عزم الانعطاف للجمل الحقيقية والافتراضية هي خطوط مستقيمة فيمكن إجراء عملية جداء المخططات بالطريقة التي نراها مناسبة.

لحساب الانتقال الشاقولي في النهاية الحرة D نحسب مساحة المخططات من الجملة الافتراضية على النحو التالي:

$$A_1 = \frac{1.25^2}{2} = \frac{25}{32} \qquad A_2 = \frac{1.25 * 4}{2} = 2.5$$

نوجد الترتيب من الجملة الحقيقية المقابل لمركز ثقل الجملة الافتراضية

نحسب قيمة عزم الانعطاف في الجائز الحقيقي على بعد (8/3) من المسند B والتي تعبر عن قيمة Y_{c2}

$$M_3 = -4X_3 + 6 = -4 * \frac{8}{3} + 6 = -\frac{14}{3}$$

$$Y_{c1} = \frac{2}{3}10 = \frac{20}{3} \qquad Y_{c2} = -\frac{14}{3}$$

$$\Delta = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{25}{32} * \frac{20}{3}\right) + 2.5 * \frac{14}{3}\right] = \frac{16.87}{EI}$$

ثم نحسب مقدار الدوران في النهاية الحرة D بحساب مساحة مخطط عزم الانعطاف للجملة الافتراضية الثانية

$$A_1 = 1.25 * 1 = 1.25 \qquad A_2 = \frac{1 * 4}{2} = 2$$

$$Y_{c1} = 5 \qquad Y_{c2} = -\frac{14}{3}$$

$$\theta = \frac{1}{EI}\left[(1.25 * 5) + 2 * \frac{14}{3}\right] = \frac{15.583}{EI}$$

__مثال(٩):__ إطار ABC موثوق في A وحر في B يتعرض لتأثير الحمولات الموضحة في الشكل رقم (٦-١٢)، فإذا كانت عزوم العطالة موضحة في الشكل وأن الإطار مصنوع من مادة متجانسة لكافة المجالات. فالمطلوب حساب الانتقال والدوران في النهاية الحرة B بطريقة العمل الافتراضي.

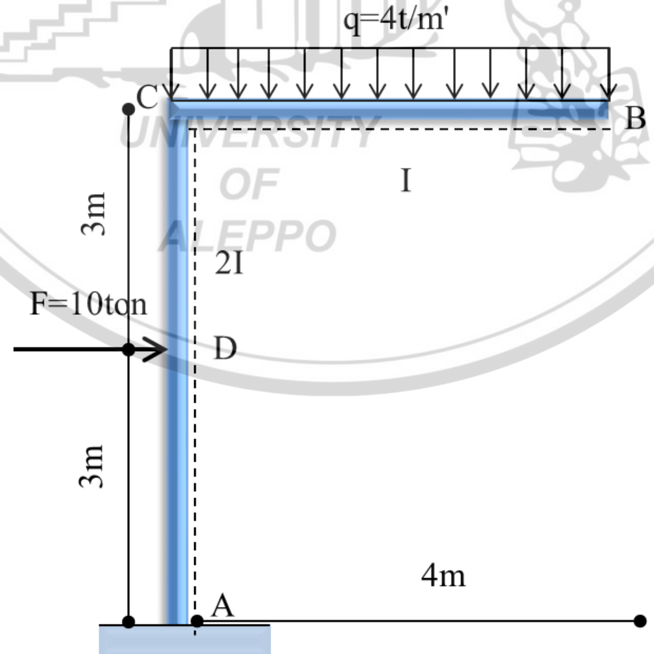
من أجل حساب التشوهات في هذا الإطار، نقسم هذا الإطار إلى ثلاثة مجالات كما هو موضح في الشكل رقم (٦-١٣)، ونجري عملية الجداء لكل مجال من الجملة الحقيقية بما يقابلها من الجملة الافتراضية.

أولا: حساب الانتقال الأفقي في النهاية الحرة B كما هو موضح بالشكل رقم (٦-١٤):

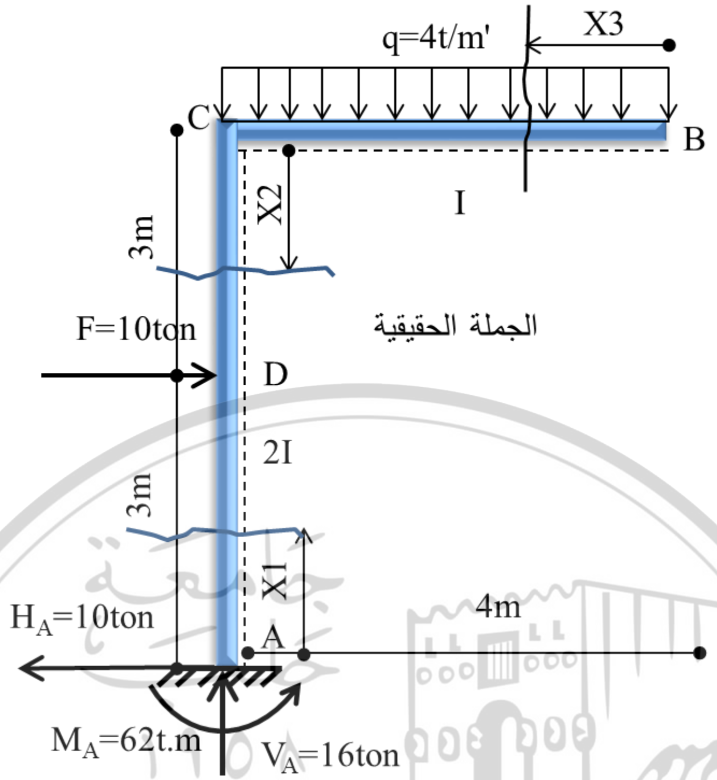
$$\Delta_{HB} = -\frac{96 * 1.5}{2EI} - \frac{1}{2EI}(96 * 4.5 + 45 * 5) = -\frac{400.5}{EI}$$

ثانيا: حساب الانتقال الشاقولي في النهاية الحرة B كما هو موضح بالشكل رقم (٦-١٥):

$$\Delta_{VB} = \frac{96 * 4}{2EI} + \frac{1}{2EI}(96 * 4 + 45 * 4) + \frac{42.67 * 3}{EI} = \frac{602}{EI}$$



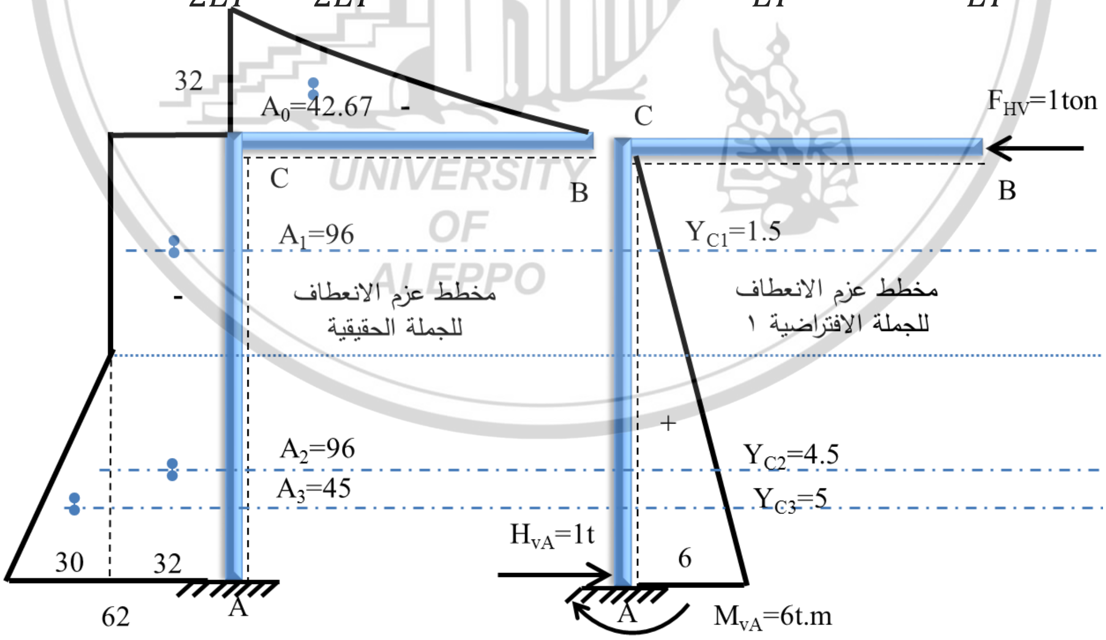
الشكل رقم (٦-١٢)



الشكل رقم (٦-١٣)

ثالثاً: حساب الدوران في النهاية الحرة B كما هو موضح بالشكل رقم (٦-١٦):

$$\theta_B = -\frac{96*1}{2EI} - \frac{1}{2EI}(96*1+45*1) - \frac{42.67*1}{EI} = -\frac{161.17}{EI}$$



الشكل رقم (٦-١٤)

إذا أردنا حساب التشوهات بإجراء عملية التكامل نتبع ما يلي:

أولا: نوجد ردود الأفعال لكل من الجملة الحقيقية والجمل الوهمية (إذا لزم الأمر) والمبينة في الأشكال رقم (٦-١٣) و(٦-١٤) و (٦-١٥) و (٦-١٦)

ثانيا: نكتب معادلات عزم الانعطاف لجميع المجالات " مع الأخذ بعين الاعتبار شرط تطابق المجالات"

١-معادلات عزم الانعطاف للجملة الحقيقية

المجال الأول(AD) : $3 \geq X_1 \geq 0$

$$M_1 = -62 + 10X_1$$

المجال الثاني(CD) : $3 \geq X_2 \geq 0$

$$M_2 = -32$$

المجال الثالث(BC): $4 \geq X_3 \geq 0$

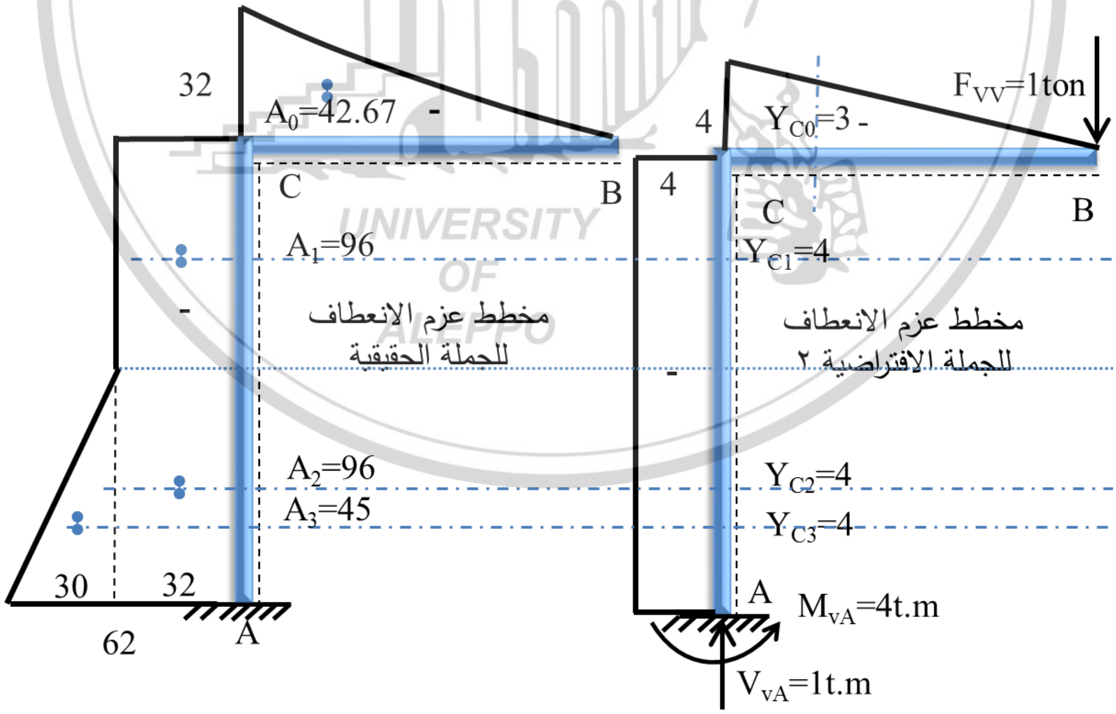
$$M_3 = -2X_3^2$$

٢-معادلات عزم الانعطاف للجملة الافتراضية الأولى

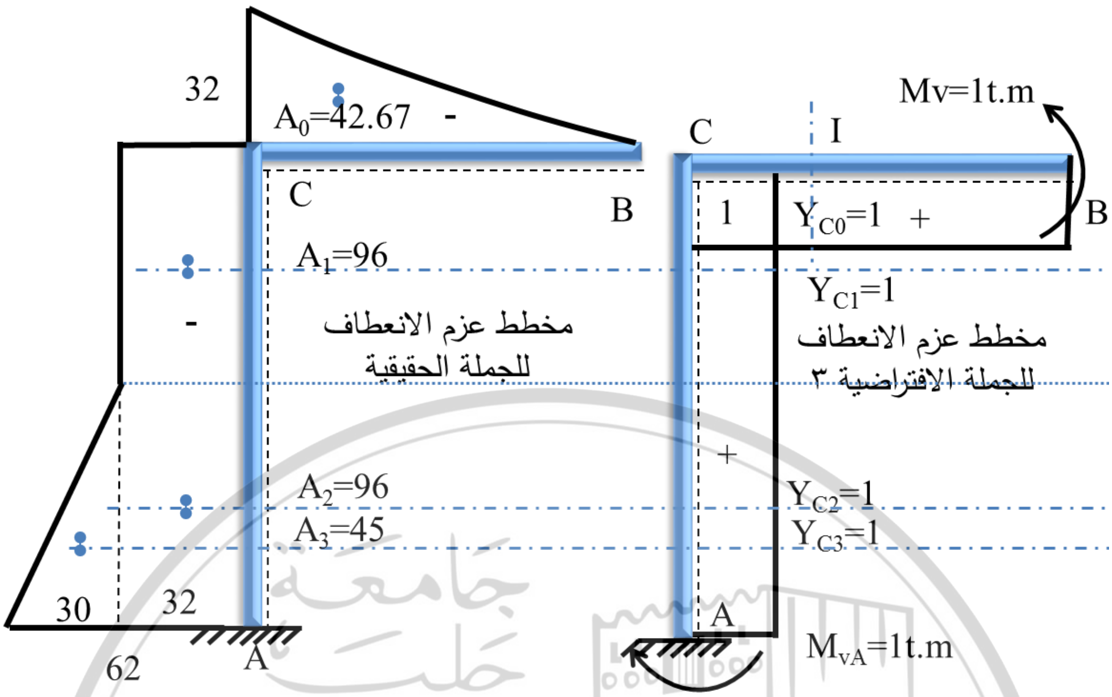
المجال الأول(AD) : $3 \geq X_1 \geq 0$

$$M_{v1} = 6 - X_1$$

المجال الثاني(CD) : $3 \geq X_2 \geq 0$



الشكل رقم (٦-١٥)



الشكل رقم (٦-١٦)

$M_{v2} = X_2$

المجال الثالث(BC): $4 \geq X_3 \geq 0$

$M_{v3} = 0$

٣-معادلات عزم الانعطاف للجملة الافتراضية الثانية

المجال الأول(AD) : $3 \geq X_1 \geq 0$

$M_{v1} = -4$

المجال الثاني(CD) : $3 \geq X_2 \geq 0$

$M_{v2} = -4$

المجال الثالث(BC): $4 \geq X_3 \geq 0$

$M_{v3} = -X_3$

٤-معادلات عزم الانعطاف للجملة الافتراضية الثالثة

المجال الأول(AD) : $3 \geq X_1 \geq 0$

$M_{v1} = 1$

المجال الثاني(CD) : $3 \geq X_2 \geq 0$

$M_{v2} = 1$

المجال الثالث(BC): $4 \geq X_3 \geq 0$

$M_{v3} = 1$

حساب التشوهات في الجملة الحقيقية

أولا: حساب الانتقال الأفقي في النهاية الحرة B

$$\Delta_{HB}=\int_0^3 \frac{(-62+10X_1)(6-X_1)}{2EI}dx_1+\int_0^3 \frac{-32X_2}{2EI}dx_2+0=-\frac{400.5}{EI}$$

$$\Delta_{HB}=\int_0^3 \frac{(-372+122X_1-10X_1^2)}{2EI}dx_1+\int_0^3 \frac{-32X_2}{2EI}dx_2+0$$

$$\Delta_{HB}=\frac{1}{2EI}\left[-372X+61X_1^2-\frac{10X_1^3}{3}-16X_2^2\right]_0^3=-\frac{400.5}{EI}$$

ثانيا: حساب الانتقال الشاقولي في النهاية الحرة B

$$\Delta_{VB}=\int_0^3 \frac{(-62+10X_1)(-4)}{2EI}dx_1+\int_0^3 \frac{-32*(-4)}{2EI}dx_2 +\int_0^4 \frac{(-2X_3^2)(-X_3)}{EI}dx_3$$

$$\Delta_{VB}=\int_0^3 \frac{248-40X_1}{2EI}dx_1+\int_0^3 \frac{128}{2EI}dx_2+\int_0^4 \frac{2X_3^3}{EI}dx_3$$

$$\Delta_{VB}=\left[\frac{248X_1-20X_1^2+128X_1}{2EI}\right]_0^3+\left[\frac{X_3^4}{2EI}\right]_0^4=\frac{474+128}{EI}=\frac{602}{EI}$$

ثالثا: حساب الدوران في النهاية الحرة B

$$\theta_B=\int_0^3 \frac{(-62+10X_1)(1)}{2EI}dx_1+\int_0^3 \frac{-32*1}{2EI}dx_2+\int_0^4 \frac{(-2X_3^2)*1}{EI}dx_3$$

$$\theta_B=\left[\frac{5X_1^2-62X_1-32X_1}{2EI}\right]_0^3-\left[\frac{2X_3^3}{3EI}\right]_0^4=-\frac{118.5+42.67}{EI}$$

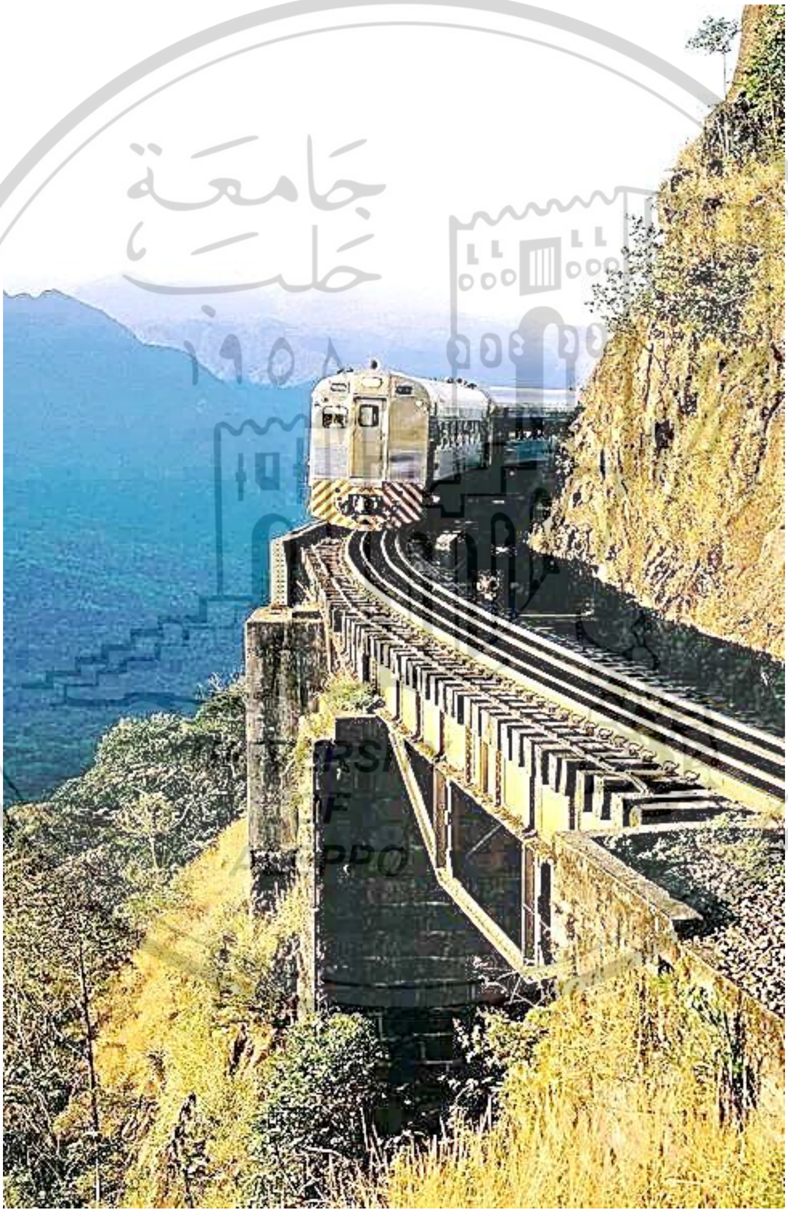
$$\theta_B=-\frac{161.17}{EI}$$

الفصل السابع

مبادئ الطاقة في تحليل الجمل غير المقررة

نظرية العمل الافتراضي

Virtual Work Principle for Indeterminate Structures



٧-١ مقدمة preface

يمكن استخدام نظرية العمل الافتراضي في تحليل الجمل غير المقررة لكل من الجمل الشبكية والجوائز والإطارات.

سوف نناقش في هذا الفصل ميزات الجمل غير المقررة ونناقش نظرية العمل الافتراضي في تحليل هذه الجمل. ولندرك تماما أن معظم المنشآت الهندسية التي يتم تصميمها حديثا هي منشآت غير مقررة، ويتشكل عدم التقرير نتيجة إضافة مساند أو عناصر إضافية في المنشأة.

وعلى سبيل المثال تكون المنشآت البيتونية المسلحة هي منشآت غير مقررة لأنه يتم صب الجوائز والأعمدة كعناصر مستمرة مرورا بالعقد الداخلية والعقد الواقعة فوق المساند.

٧-٢ طريقة التحليل Analyzing Method

عند تحليل المنشآت غير المقررة فإنه من الضروري جدا أن نحقق شروط التوافق والتوازن إضافة إلى علاقة القوة –الانتقال للمنشأة الهندسية، ويتحقق التوازن عندما تمنع قوى ردود الأفعال المنشأة من الانهيار وتجبرها على حالة الاستقرار أما التوافق فيتحقق عندما تتوافق المقاطع في الانتقال معا دون إجبارها على ذلك، أما متطلبات القوة – الانتقال تعتمد على طريقة استجابة المواد المشكلة للمنشأة. سوف نفرض أن المواد مرنة وخطية وتتبع قانون هوك حيث يوجد وسيلتين لتحليل الجمل غير المقررة هما: طريقة القوة أو طريقة المرونة *force or flexibility method* والطريقة الثانية هي طريقة الانتقالات أو طريقة الصلابة *displacement or stiffness method.*

٧-٢-١ طريقة القوة أو طريقة المرونة Force or Flexibility Method

تم تطوير هذه الطريقة من قبل العالم *James Clerk Maxwell* عام *1864* وتم تنقيحها وصقلها من الباحثين *Otto Mohr and Heinrich Müller-Breslau.* وكانت هذه هي الطريقة الأولى المستخدمة في تحليل الجمل غير المقررة، معتمدة على مبدأ التوافق *compatibility method* التي تشكل المبدأ الأساسي لهذه الطريقة والتي يطلق عليها أحيانا طريقة التشوهات المتوافقة *method of consistent displacements*

وتعتمد هذه الطريقة على كتابة المعادلات التي تلبي متطلبات التوافق ومتطلبات القوة–الانتقال للجملة لكي يتم تحديد القوى الفائضة، وبعد تحديد هذه القوى يتم تحديد باقي القوى وردود الأفعال باستخدام معادلات التوازن.

وتشمل المبادئ الأساسية في كيفية توضيح هذه الطريقة بشكل بسيط يمكن استيعابه وتطويره والذي سوف يتم مناقشته في هذا الفصل.

٧–٢–٢ طريقة الانتقال Displacement Method

تعتمد طريقة التحليل هذه على كتابة العلاقات بين القوى والانتقالات للعناصر أولا، ثم نستكمل متطلبات التوافق *equilibrium requirements* للجملة، وتكون الانتقالات هي المجاهيل في هذه الطريقة، فإذا تم الحصول على الانتقالات يمكننا الحصول على القوى باستخدام التوافق ومن علاقات القوة والانتقال. وقد تمت مناقشة هذه الطريقة في فصل معادلة الميل والسهم *Slope Deflection Method* أو ما يسمى بمعادلة الدورانات، وقد تم تطوير هذه الطريقة بعد استخدام الحاسبات الالكترونية بشكل واسع حيث تم تشكيل هذه العلاقات بشكل مصفوفات وتم الاعتماد على مصفوفة الصلابة *Stiffness Matrix* في تحليل الجمل غير المقررة، ويمكن تلخيص ميزات طريقة القوة وطريقة الانتقال بالجدول رقم (٧–١):

الجدول رقم (٧–١)

الطريقة *Method*	المجاهيل *Unknowns*	المعادلات المستخدمة في الحل	العوامل المستخدمة في إيجاد المجاهيل
طريقة القوة *Force Method*	القوى *Forces*	التوافق وازاحات القوة *Compatibility and Force Displacement*	عوامل المرونة *Flexibility Coefficients*
طريقة الانتقال *Displacement Method*	الانتقالات *Displacements*	التوازن وازاحات القوة *Equilibrium and Force Displacement*	عوامل الصلابة *Stiffness Coefficients*

ولكل طريقة من هاتين الطريقتين إيجابياتها وسلبياتها التي تعتمد أساسا على مواصفات الجملة الهندسية المستخدمة، وعلى درجة عدم التقرير التي يمكن توضيحها بعد دراسة كل طريقة بشكل موسع.

٧-٣ التحليل باستخدام نظرية العمل الافتراضي

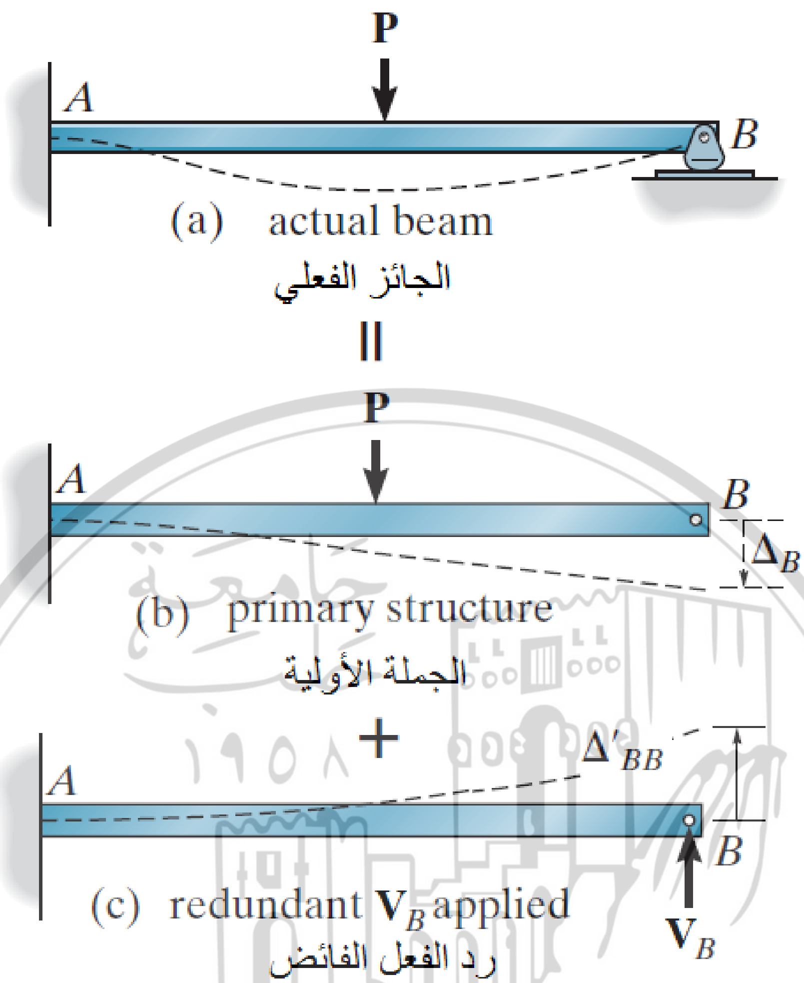
٧-٣-١ إجراءات عامة General Procedures

إن أفضل وسيلة لتوضيح فكرة التحليل باستخدام نظرية العمل الافتراضي مبينة في المثال الموضح في الشكل رقم (٧-١a) التي تتضمن جائزا بسيطا موثوقا ومسنودا. تم رسم مخطط الجسم الحر لهذا الجائز الذي يحتوي على أربعة ردود أفعال مجهولة، يمكن الحصول على ثلاثة ردود أفعال باستخدام معادلات التوازن ويبقى رد فعل واحد فائض. وتكون هذه الجملة غير مقررة من الدرجة الأولى، لذلك يلزمنا معادلة إضافية من أجل إيجاد رد الفعل الفائض، ومن أجل الحصول على هذه المعادلة سوف نستخدم مبدأ تنضد الآثار لتعيين الانتقالات المتوافقة في أحد المساند، وتتم هذه العملية باختيار أحد ردود أفعال المساند كرد فعل فائض، ويتم بصورة مؤقتة إزالة تأثيره عن الجائز بحيث يصبح الجائز مقررا ومستقرا سكونيا، ونطلق على هذا الجائز بالجملة الأولية بعد إزالة المسند B. وبالاعتماد على مبدأ تنضد الآثار فإن القوة P تنقل الجائز نحو الأسفل بمقدار Δ_B كما هو موضح بالشكل رقم (٧-١b)، أما رد الفعل في B الذي ينقل الجائز نحو الأعلى بمقدار Δ'_{BB} موضح بالشكل رقم (٧-١c)، حيث يشير الدليل الأول إلى الانتقال في النقطة B أما الدليل الثاني فيشير إلى نقطة تطبيق القوة، وبفرض أن الانتقال الموجب يكون باتجاه الأسفل، وبالعودة إلى كامل الشكل رقم (٧-١) نستطيع كتابة شرط التوافق في المسند B على الشكل التالي:

$$0 = \Delta_B - \Delta'_{BB} \qquad (7-1)$$

وتكون مهمتنا الأساسية في هذه الحالة هي حساب الانتقالات الناتجة عن رد الفعل الفائض وحساب الانتقالات الناتجة عن الحمولات الخارجية،

لذلك سوف نقوم بحساب تلك الانتقالات باستخدام نظرية العمل الافتراضي الذي درسناه في الفصل السادس.



الشكل رقم (٧–١) توضيح فكرة تحليل الجوائز باستخدام نظرية العمل الافتراضي

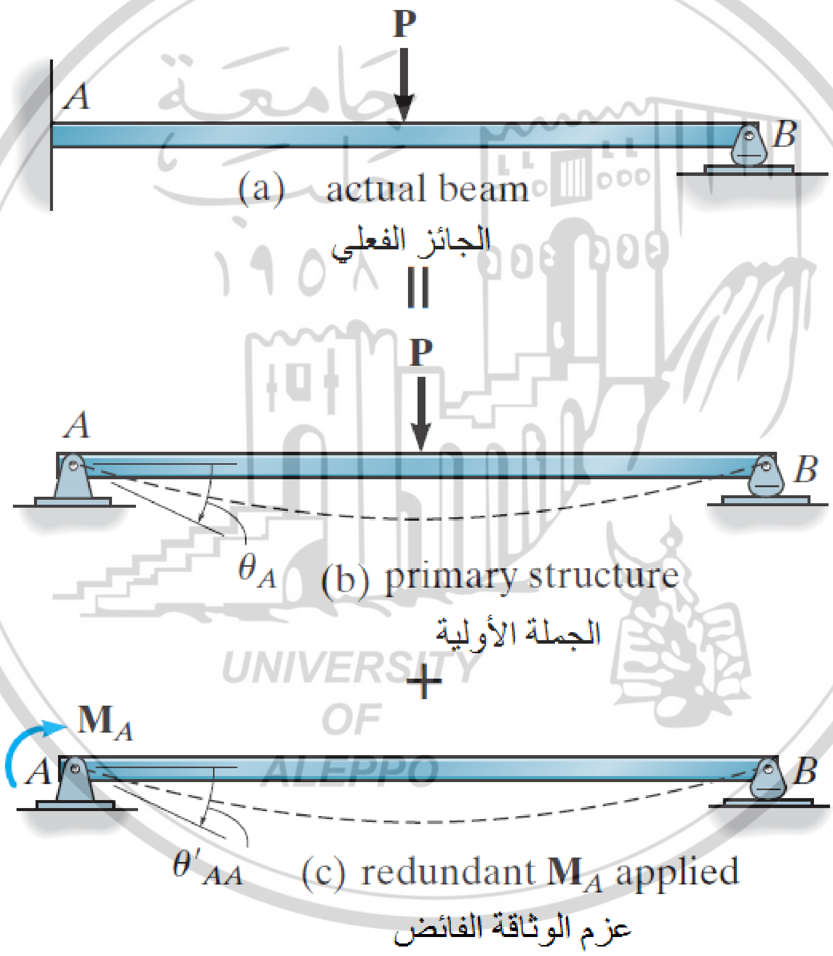
٧–٣–٢ طريقة ثانية لتقرير هذا الجائز:

الجملة غير مقررة من الدرجة الأولى، لذلك يلزمنا معادلة إضافية لإيجاد رد الفعل الفائض، ومن أجل الحصول على هذه المعادلة سوف نستخدم مبدأ تنضد الآثار لتعيين الانتقالات المتوافقة في أحد المساند، وتتم هذه العملية باختيار أحد ردود أفعال المساند كرد فعل فائض، ويتم بصورة مؤقتة إزالة تأثيره عن الجائز بحيث يصبح الجائز مقررا ومستقرا سكونيا، ونطلق على هذا الجائز بالجملة الأولية بعد إزالة الممانعة الدورانية من المسند A، بحيث يصبح مسندا ثابتا مع مزدوجة عزم MA وبالاعتماد على مبدأ تنضد الآثار فإن القوة P تعطي دورانا للمسند A بعكس عقارب الساعة بمقدار $\square_A$ كما هو موضح بالشكل رقم (b٢–٧)، أما عزم الوثاقة في A الذي يولد دورانا بعكس عقارب الساعة عند المسند بمقدار θ'_{AA} هو موضح بالشكل رقم (c٢–٧)، حيث يشير الدليل

الأول إلى الدوران في النقطة A أما الدليل الثاني فيشير إلى نقطة تطبيق المزدوجة، وبفرض أن الدوران الموجب يكون بعكس عقارب الساعة، وبالعودة إلى كامل الشكل رقم (٧-٢) نستطيع كتابة شرط التوافق في المسند A على الشكل التالي:

$$(7-2) \qquad 0 = \square_A + \theta'_{AA}$$

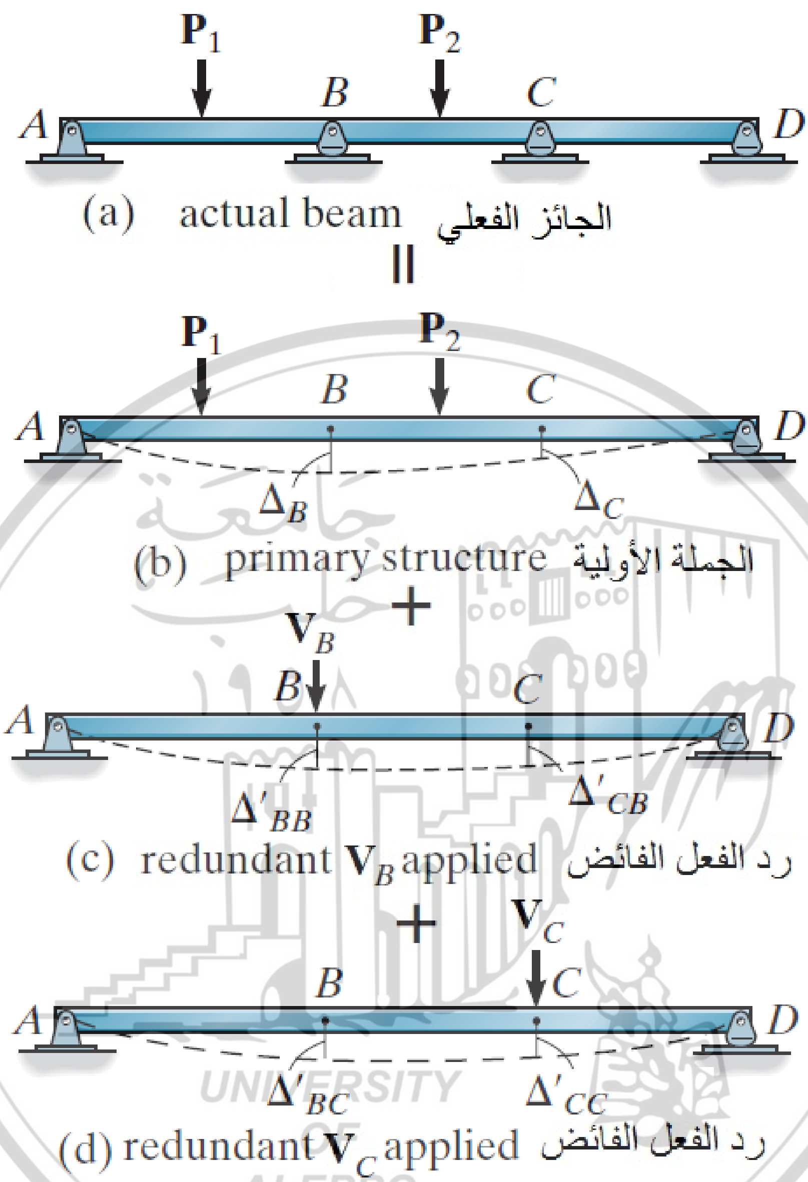
مهمتنا الأساسية في هذه الحالة هي حساب الدورانات الناتجة عن رد الفعل الفائض والحمولات الخارجية، لذلك سوف نقوم بحساب تلك الدورانات باستخدام نظرية العمل الافتراضي الذي درسناه سابقا.



الشكل رقم (٧-٢) توضيح فكرة تحليل الجوائز باستخدام نظرية العمل الافتراضي

لو فرضنا أن المجهول الفائض هو مزدوجة العزم في A كما هو مبين في الشكل رقم (٧-٢) لذلك نقوم بإزالة الممانعة الدورانية في المسند A حيث نستعيض عن الوثاقة بمسند ثابت ونسمي هذا الجائز بالجائز الأساسي، ثم نرسم الجائز الأساسي ونزيل الحمولات الخارجية ونطبق مزدوجة العزم الفائضة على المسند A

٧-٤ الجوائز المستمرة:



الشكل (٧-٣) توضيح فكرة تحليل الجوائز المستمرة باستخدام نظرية العمل الافتراضي

إن أفضل وسيلة لتوضيح فكرة التحليل باستخدام نظرية العمل الافتراضي مبينة في المثال الموضح في الشكل رقم (a٣-٧) والتي تتضمن جائزا مستمرا على أربعة مساند. هذا الجائز غير مقرر من الدرجة الثانية لذلك نقوم بحذف ممانعتين وهما المسندين الداخليين B وC فنحصل على الجائز الأساسي الموضح في الشكل رقم (b٣-٧)، حيث نحتاج لمعادلتي توافق من أجل إيجاد ردود الأفعال الفائضة.

نرسم عددا من الجمل الأساسية تساوي درجة عدم التقرير ونحذف الحمولات الخارجية ونطبق على كل جملة أحد ردود الأفعال الفائضة ثم نحسب الانتقال الشاقولي

بطريقة العمل الافتراضي في الجملة الأساسية والناتج عن الحمولات الخارجية وردود الأفعال الفائضة في النقاط التي حذفت ممانعتها B وC بفرض أن الانتقال الموجب باتجاه الأسفل باستخدام العلاقتين التاليتين:

$$0 = \Delta_B + \Delta'_{BB} + \Delta'_{BC}$$
$$0 = \Delta_C + \Delta'_{CB} + \Delta'_{CC} \qquad (7\text{-}3)$$

لقد تم إيضاح فكرة تطبيق طريقة القوى في تحليل الجمل غير المقررة من خلال الأمثلة السابقة، وسوف نقوم باستخدامها في تقرير الجوائز والإطارات والجمل الشبكية، وبما أننا نعتمد على مبدأ تنضد الآثار في حساب الانتقالات فإنه من الضروري أن تكون المادة مرنة وخطية عند التحميل.

٧-٤-١ إجراءات التحليل: Analyzing Procedures

سوف نعطي فيما يلي ملخصا موجزا عن الإجراءات المستخدمة في تحديد ردود الأفعال الخارجية أو القوى الداخلية للجمل غير المقررة سكونيا باستخدام نظرية القوة أو الطريقة المرنة في التحليل.

١-مبدأ تنضد الآثار Principle of Superposition

١. تحديد درجة عدم تقرير الجملة

٢. نقرر الجملة بحذف عدد من الممانعات الفائضة يساوي إلى درجة عدم التقرير سواء كانت هذه الممانعة انتقالية أو دورانية بحيث تبقى الجملة مستقرة.

٣. باستخدام مبدأ تنضد الآثار نرسم الجملة غير المقررة ونقارنها مع مجموعة الجمل المقررة الناتجة عنها.

٤. تحتوي الجملة الأساسية المقررة على جميع الحمولات الخارجية المؤثرة على الجملة غير المقررة

٥. نرسم عددا من الجمل الأساسية المقررة بعد حذف جميع الحمولات الخارجية وإخضاع كل جملة لأحد ردود الأفعال الفائضة من قوة أو مزدوجة عزم، وبذلك نحصل على عدد من الجمل الأساسية تساوي إلى درجة عدم التقرير إضافة للجملة التي تحتوي على الحمولات الخارجية.

٢-معادلات التوافق: Compatibility Equations

١. نوجد قيم الانتقالات أو الدورانات الموافقة للمجاهيل الفائضة باستخدام نظرية العمل الافتراضي بعد فرض اتجاه القوة الافتراضية الواحدية باتجاه المجهول الفائض.

٢. بحل هذه المعادلات حلا مشتركا نحصل على قيم المجاهيل الفائضة " الإشارة السالبة تدل على أن الاتجاه المفروض للمجهول الفائض هو عكس الاتجاه الصحيح "

٣-معادلات التوازن: Equilibrium Equations

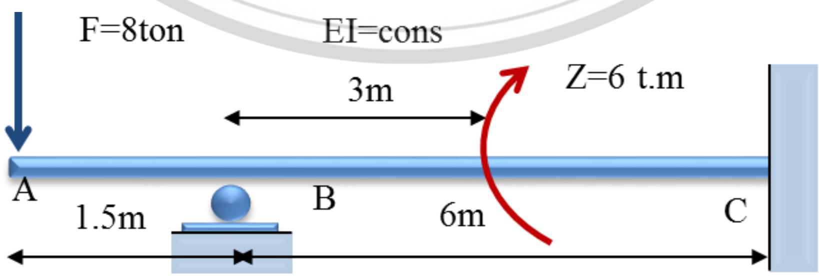
٣. نرسم مخطط الجسم الطليق للجملة بعد حساب قيم القوى أو العزوم الفائضة، ثم نوجد بقية ردود الأفعال باستخدام معادلات التوازن.

٤. نرسم مخططات القوى القاطعة وعزوم الانعطاف بالاعتماد على ردود الأفعال المستنتجة سابقا.

٥. يتم حساب الانتقالات والدورانات في أي نقطة من نقاط الجملة بالاعتماد النظريات الخاصة بالجمل المقررة والتي تم ذكرها في الفصول السابقة.

٧-٤-٢ أمثلة عملية: Examples

__مثال (١):__ جائز موثوق ومسنود ينتهي بظفر يتعرض لتأثير حمولة مركزة في النهاية الحرة A شدتها (8Ton) ومزدوجة عزم تؤثر في المقطع C شدتها (6tm)، والمطلوب:



١. قرر هذا الجائز بالاعتماد على نظرية العمل الافتراضي.

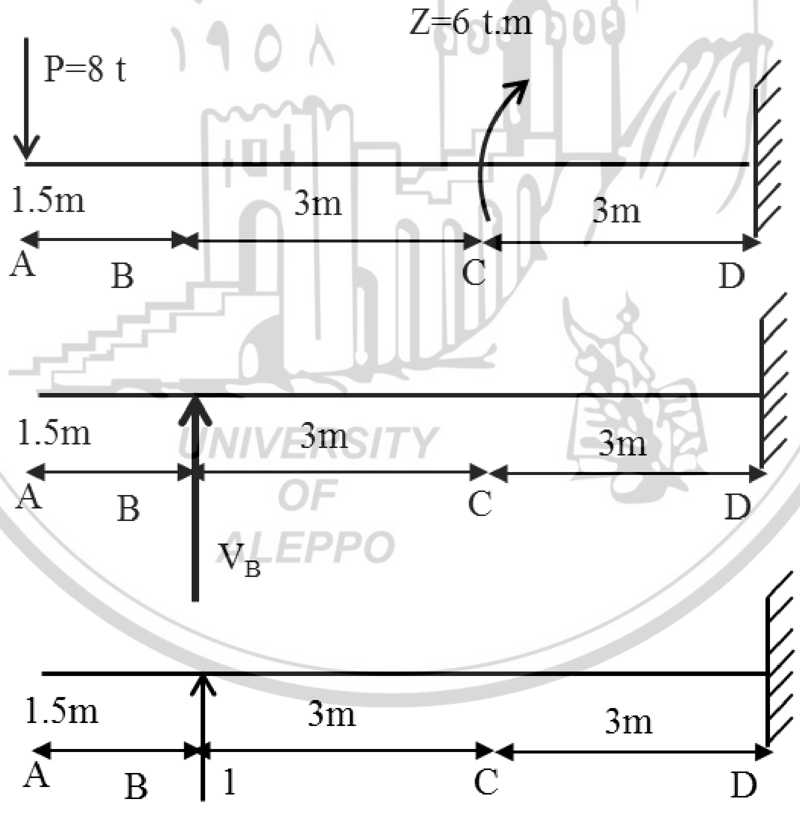
٢. ارسم مخطط القوى القاطعة وعزم الانعطاف.

الحل: هذه الجملة غير مقررة من الدرجة الأولى، نرسم الجملة الأساسية المقررة التي تتعرض لتأثير الحمولات الخارجية فقط وذلك بحذف إحدى الممانعات.

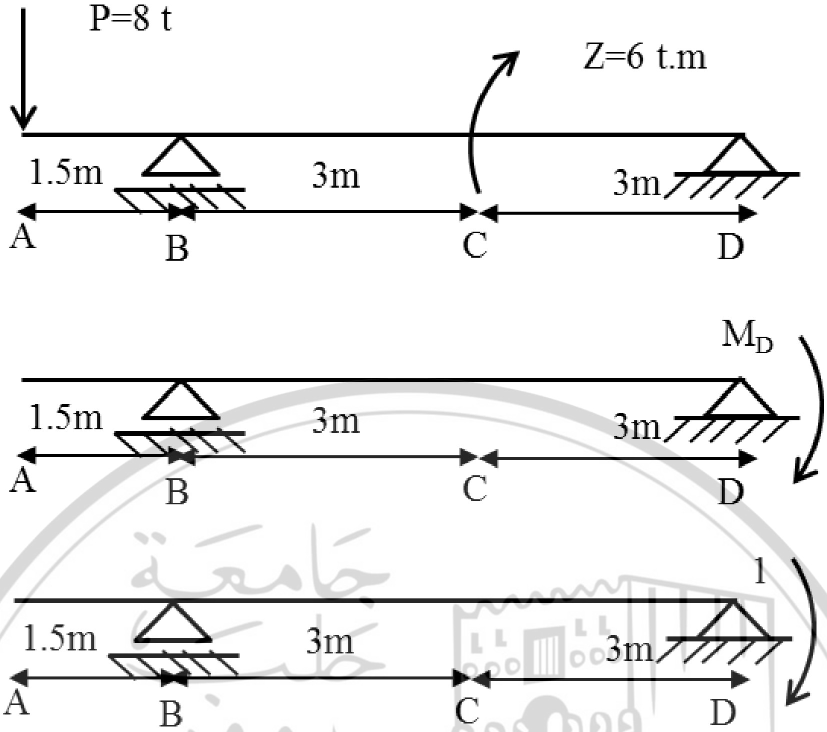
إما أن نحذف الممانعة الشاقولية في المسند B (نحذف المسند المنزلق B) كما هو مبين في الشكل رقم (٧-٤)، أو نحذف الممانعة الدورانية في D (نستبدل الوثاقة بمسند ثابت) كما هو مبين في الشكل رقم (٧-٥).

نرسم جملة مساعدة تتعرض لتأثير رد الفعل المؤثر في الممانعة المحذوفة (وهي الجملة الأساسية المقررة بعد حذف الحمولات الخارجية).

لو اخترنا الحالة الأولى المبينة في الشكل رقم (٧-٤) (حذف المسند B) وبالاعتماد على تكامل الجداءات في حساب الانتقال الشاقولي في المسند B باستخدام نظرية العمل الافتراضي.



الشكل رقم (٧-٤)



الشكل رقم (٧-٥)

ننجز عملية تكامل الجداءات بين المخططات السابقة. بما أن المخططات السابقة مستقيمة من الدرجة الأولى فيمكن إجراء عملية الجداء بشكل يمكننا اختيار الأنسب والأسهل، لذلك سوف نحسب المساحات من الجملة الافتراضية كما هو موضح بالشكل رقم (٧-٦) ونضربها بالترتيب المقابل لمركز الثقل المقابل لهذه المساحات من الجملة الأساسية.

جداء الجملة الافتراضية IV بالجملة الأساسية III

$$4.5 * 5V_B + 9 * 4.5V_B + 4.5 * 2V_B = 72V_B$$

جداء الجملة الافتراضية IV بالجملة الأساسية II

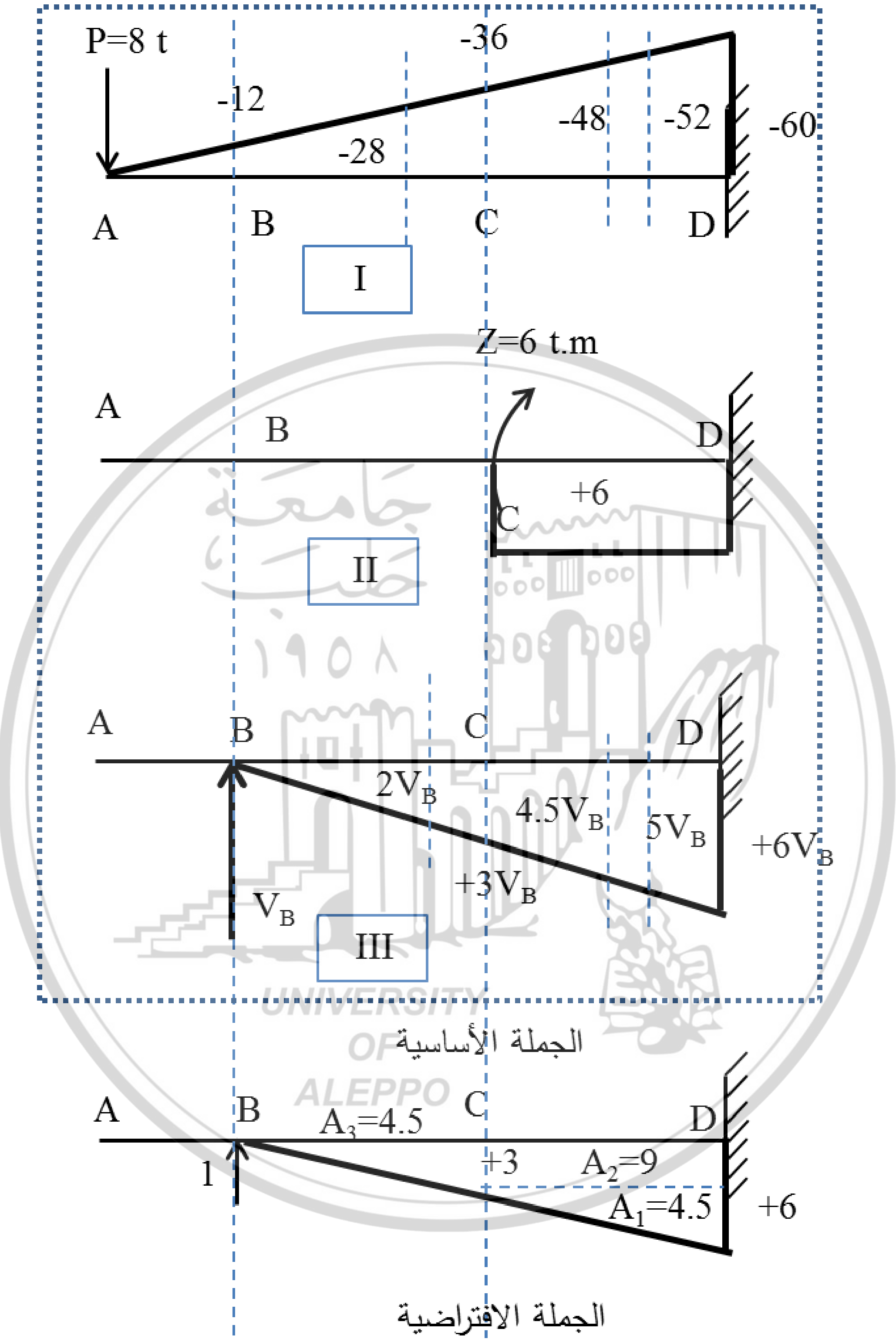
$$4.5 * 6 + 9 * 6 = 81$$

جداء الجملة الافتراضية IV بالجملة الأساسية I

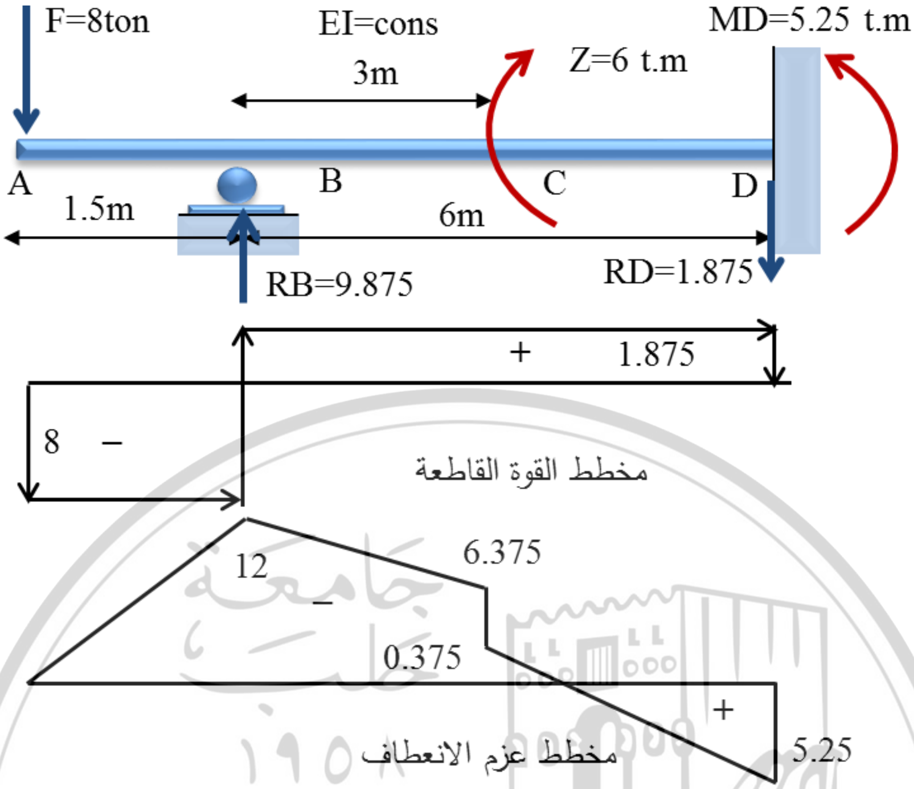
$$4.5 * (-52) + 9 * (-48) + 4.5 * (-28) = -792$$

$$\Delta = 0 = 72V_B + 81 - 792 \rightarrow V_B = \frac{9.875}{EI}$$

نعوض رد الفعل في الجائز الأصلي ونحسب ردود الأفعال باستخدام معادلات التوازن ونرسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف المبين في الشكل رقم (٧-٧).


P=8 t
-12
-28
-36
-48
-52
-60
A
B
C
D
I
Z=6 t.m
A
B
D
C
+6
II
A
B
C
D
$2V_B$
$4.5V_B$
$5V_B$
$+6V_B$
$+3V_B$
V_B
III
الجملة الأساسية
A
B
C
D
A_3=4.5
1
+3
A_2=9
A_1=4.5
+6
الجملة الافتراضية

الشكل رقم (٧-٦)

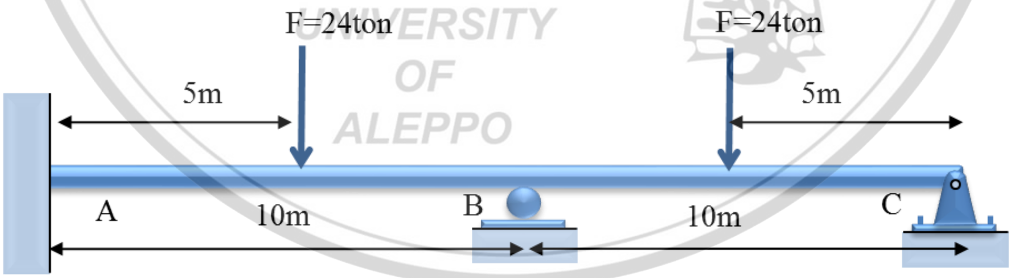


الشكل رقم (٧-٧)

<u>**مثال (٢):**</u> جائز مستمر بفتحتين يستند على مسندين بسيطين في B , C وموثوق في A بصلابة انعطافية ثابتة EI=Constant، المطلوب:

١. قرر هذا الجائز بالاعتماد على معادلة العزوم الثلاثة.

٢. أوجد ردود الأفعال وارسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف.

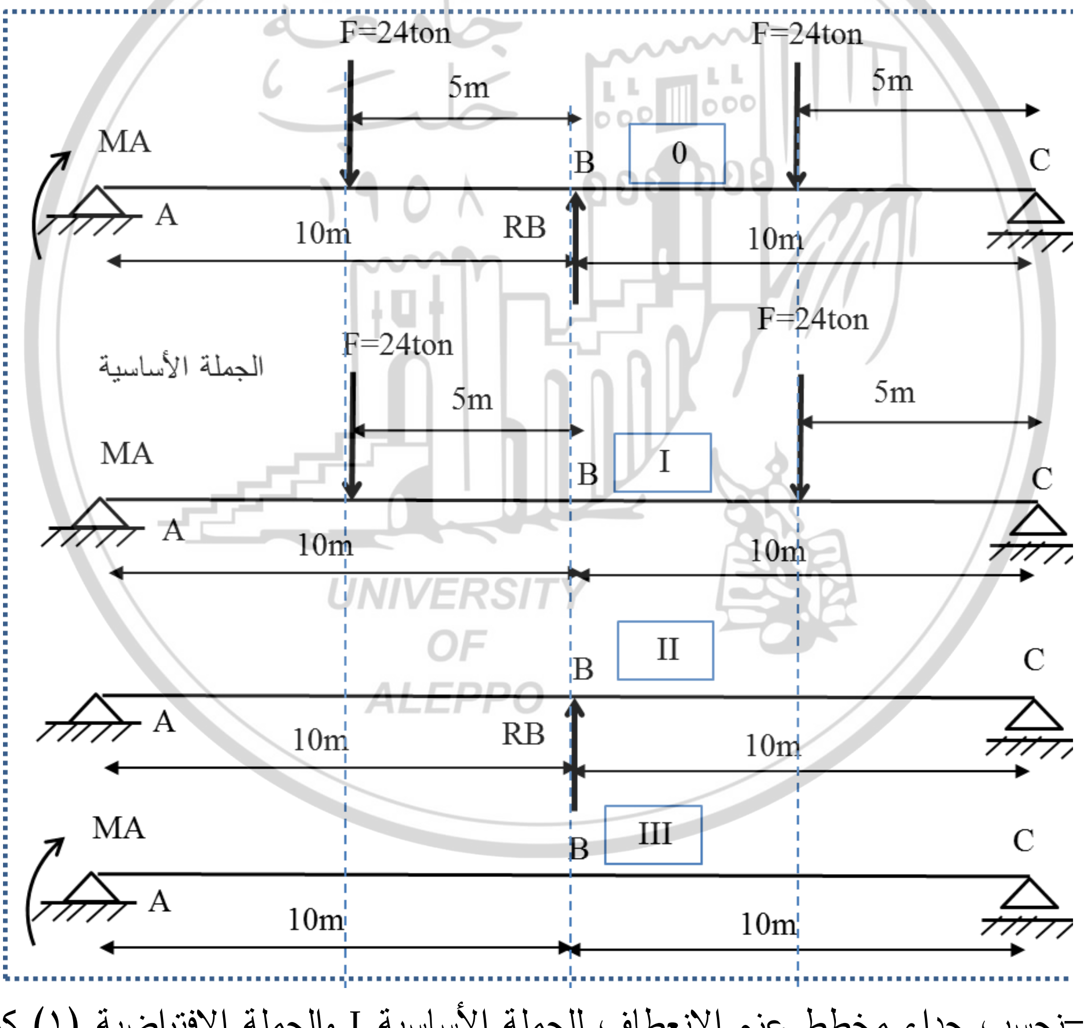


هذا الجائز غير مقرر خارجياً من الدرجة الثانية وبذلك يكون عدد المعادلات اللازمة هو: $2 = 3 - 5$ (5= عدد ردود الأفعال و 3 = عدد معادلات التوازن)

نحذف عددا من الممانعات يساوي إلى درجة عدم التقرير، حيث نحذف الممانعة الدورانية في الوثاقة A ونعوض بدلا منها بعزم MA وكذلك نحذف المسند المنزلق B ونعوض بدلا منه برد الفعل RB ونحصل على الجملة الأساسية.

باستخدام مبدأ تنضد الآثار نجزئ الجملة الأساسية إلى ثلاثة جمل، الجملة الأولى وتؤثر عليها الحمولات الخارجية فقط أما الجملتين الثانية والثالثة فتؤثر عليهما ردود الأفعال الفائضة كما هو مبين في الشكل رقم (٧-٨).

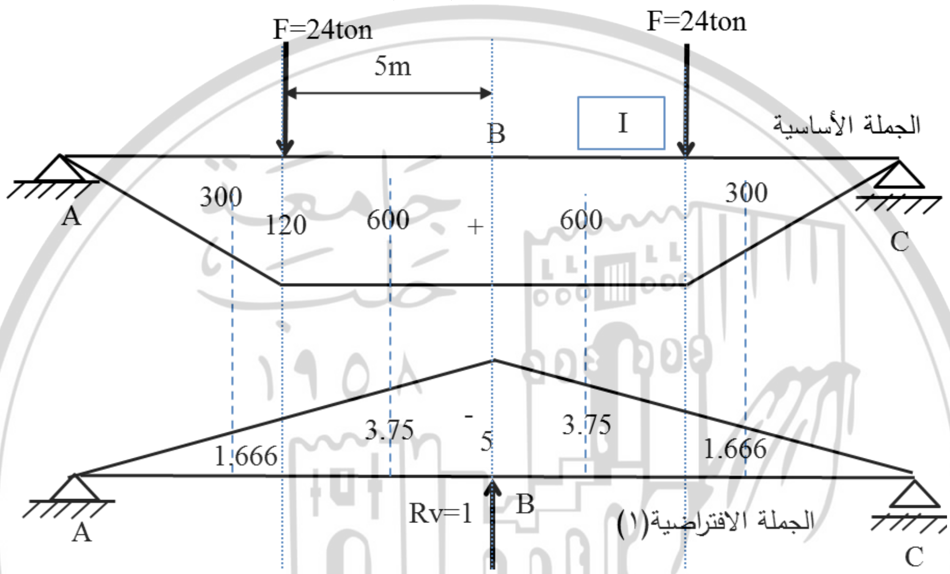
نقوم بحساب الانتقال الشاقولي في B وذلك بإجراء عملية الجداء بين مكونات الجملة الأساسية والجملة الافتراضية الأولى، ونقوم أيضا بحساب الدوران في A وذلك بإجراء عملية الجداء بين مكونات الجملة الأساسية والجملة الافتراضية الثانية، لذلك سوف نجري التكامل بالاعتماد على تكامل الجداء تخطيطيا، حيث نرسم مخططات عزم الانعطاف لمكونات الجملة الأساسية والجمل الافتراضية.



١-نحسب جداء مخطط عزم الانعطاف للجملة الأساسية I والجملة الافتراضية (١) كما هو مبين في الشكل رقم (٧-٩).

$$-300 * 1.66 - 600 * 3.75 - 600 * 3.75 - 300 * 1.66 = -5500$$

الشكل رقم (٧-٨)



الشكل رقم (٧-٩)

٢-نحسب جداء مخطط عزم الانعطاف للجملة الأساسية II والجملة الافتراضية (١) كما هو مبين في الشكل رقم (٧-١٠).

$$25R_B * 3.333 + 25R_B * 3.33 = 166.666R_B$$

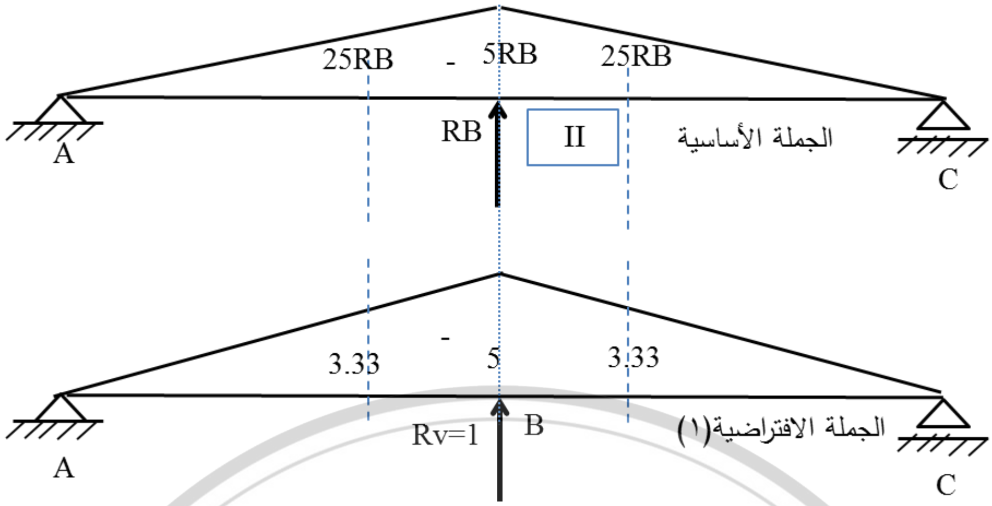
٣-نحسب جداء مخطط عزم الانعطاف للجملة الأساسية III والجملة الافتراضية (١) كما هو مبين في الشكل رقم (٧-١١).

$$-25 * 0.333M_A - 25 * 0.667M_A = -25M_A$$

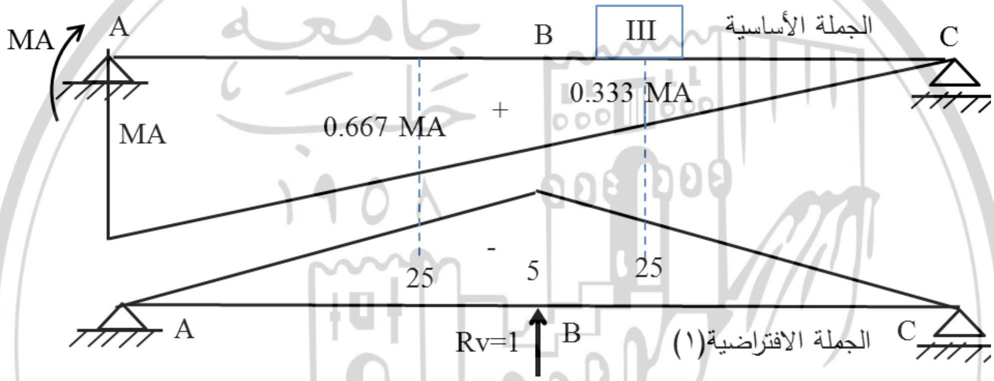
وبذلك حصلنا على العلاقة الأولى من علاقة العمل الافتراضي بعد جمع تكامل الجدءات الناتج عن الجمل الأساسية الثلاثة مع الجملة الافتراضية (١)

$$\Delta_B = \frac{-25M_A + 166.666R_B - 5500}{EI} = 0$$

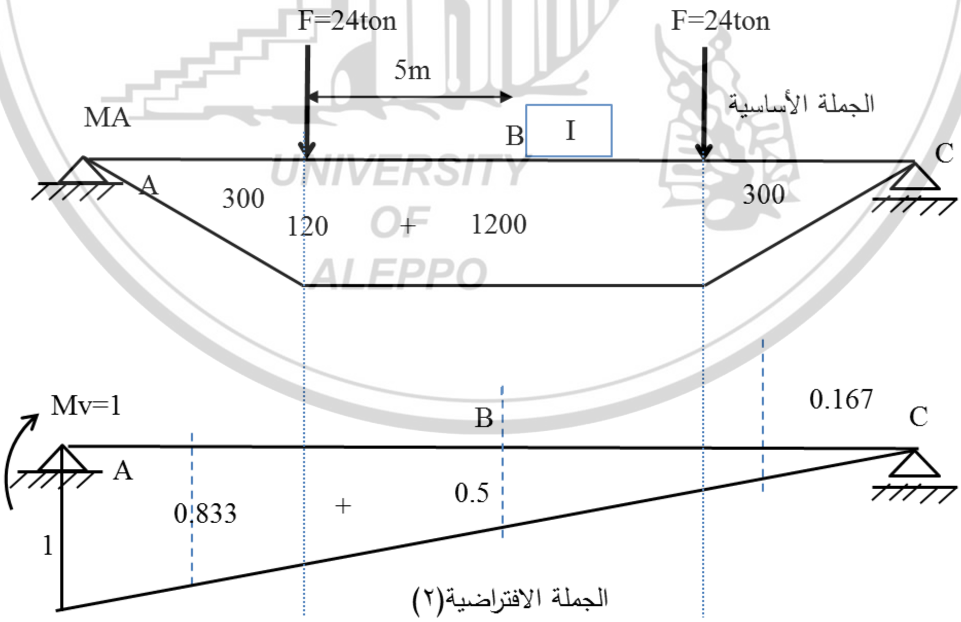
للحصول على العلاقة الثانية نحسب تكامل الجداءات الناتج عن الجمل الأساسية الثلاثة مع الجملة الافتراضية (٢)



الشكل رقم (٧-١٠)



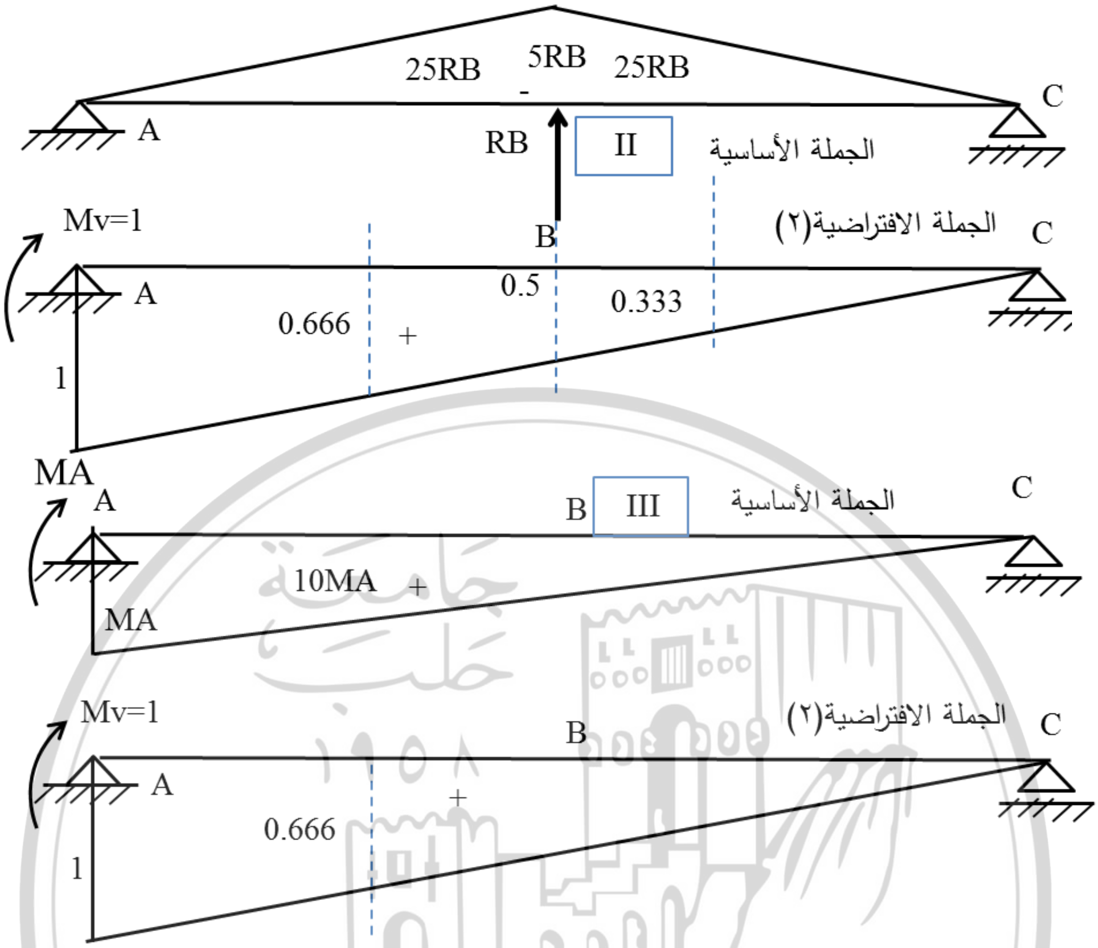
الشكل رقم (٧-١١).



الشكل رقم (٧-١١).

$$300 * 0.833 + 1200 * 0.5 + 300 * 0.167 = 900$$

$$-25\ R_B * 0.333 - 25\ R_B * 0.666 = -25\ R_B$$



$$10\ M_A * 0.666 = 6.666M_A$$

وبذلك حصلنا على العلاقة الثانية من علاقة العمل الافتراضي بعد جمع تكامل الجداءات الناتج عن الجمل الأساسية الثلاثة مع الجملة الافتراضية (٢).

$$\theta_A = \frac{900 - 25R_B + 6.666M_A}{EI} = 0$$

بحل هاتين المعادلتين حلا مشتركا نوجد قيمة كل من:

$$M_A = -25.71 \qquad R_B = 29.14$$

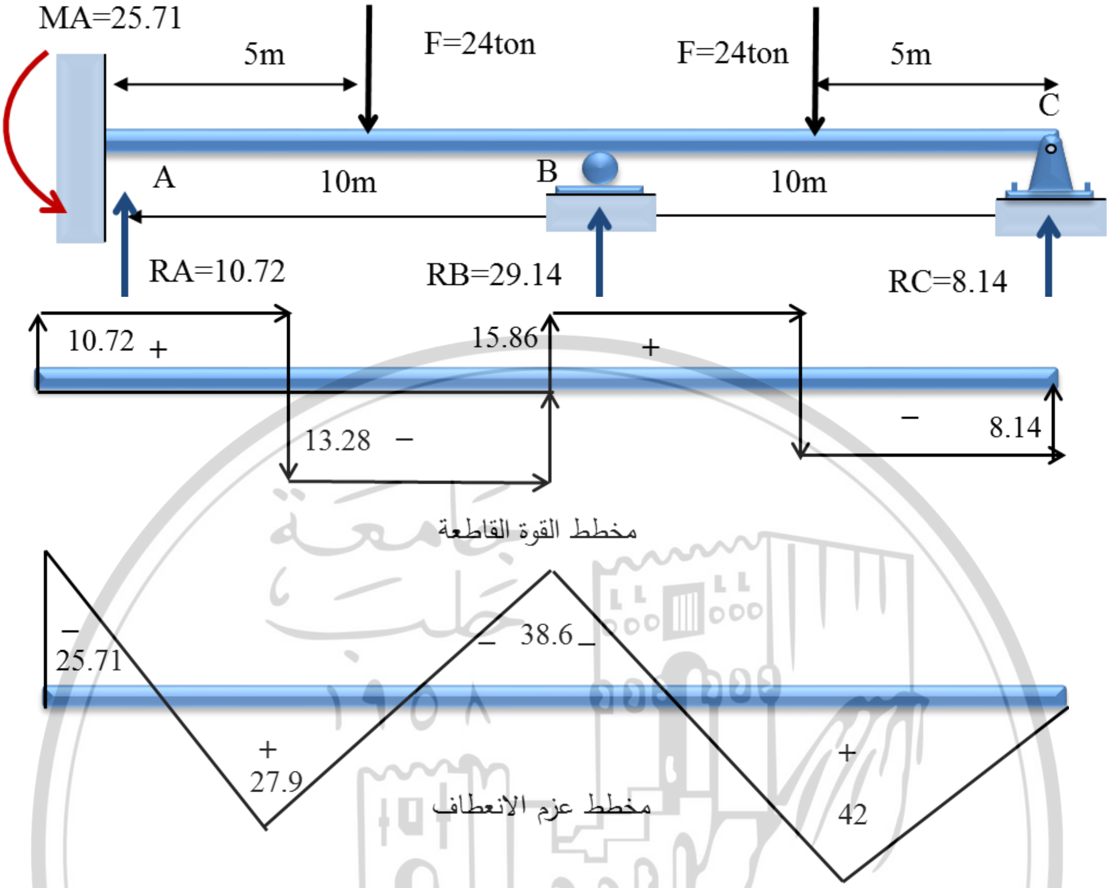
بما أن قيمة M_A سالبة يجب أن نعكس اتجاه المزدوجة M_Aالمفروضة

نعوض قيم ردود الأفعال الفائضة في الجائز الأصلي ونستخدم معادلات التوازن لنحصل على باقي ردود الأفعال.

$$V_A = 10.72 \uparrow \qquad V_C = 8.14 \uparrow$$

بعد إيجاد ردود الأفعال يمكننا حساب العزم في المسند الداخلي M_B ورسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف

$$M_B = 8.14 * 10 - 24 * 5 = -38.6$$



٧–٥ تطبيق طريقة العمل الافتراضي في تحليل الإطارات غير المقررة

تعتبر طريقة القوى من الطرق الهامة في حل الإطارات غير المقررة ذات الطابق الواحد وذات شكل هندسي غير اعتيادي مثل الإطارات الجمالونية المائلة، أما الإطارات متعددة الطوابق فيفضل تحليلها باستخدام نظرية الدورانات (الميل والسهم) Slop Deflection أو طريقة توزيع العزوم moment-distribution أو طريقة الصلابة stiffness method، وتوضح الأمثلة التالية طريقة تطبيق طريقة القوة مستخدمين الإجراءات التي تم استخدامها في الفقرة السابقة.

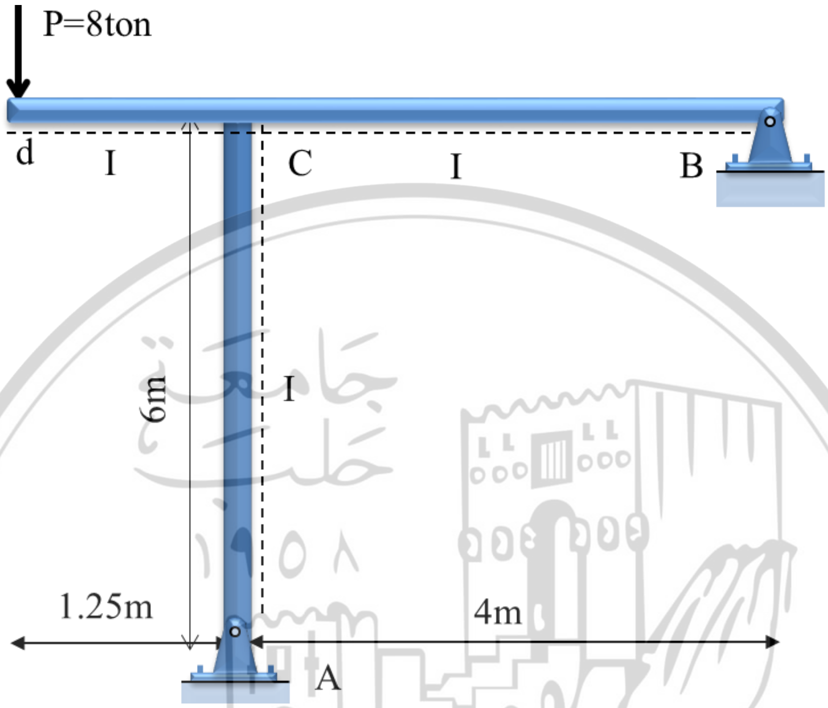
٧–٥–١ أمثلة وتطبيقات عملية: Examples

مثال(٣): الدورة الفصلية الثالثة أيلول ٢٠١١

جائز هيكلي مسنود في A و B على مساند ثابتة، يتعرض لتأثير الحمولات الموضحة في الشكل رقم (٧–١٢) والمطلوب:

١–قرر هذا الجائز باستخدام طريقة العمل الافتراضي.

٢–حساب ردود الأفعال في المساند ورسم مخططات القوى القاطعة والقوى المحورية وعزم الانعطاف إذا علمت أن عامل المرونة الطولي E ثابت وأن عزوم العطالة والأبعاد موضحة على الشكل.



الشكل رقم (٧–١٢)

الحل: هذا الإطار غير مقرر من الدرجة الأولى، نقرر هذا الجائز بحذف الممانعة الأفقية للمسند B أو المسند A وبذلك يصبح المسند الثابت مسندا متدحرجا، نرسم الجملة الأساسية الأولى وهي الجملة المقررة الخاضعة لتأثير الحمولات الخارجية فقط حيث حذفنا الممانعة الأفقية للمسند A كما هو مبين في الشكل رقم (٧–١٣).

نرسم الجملة الأساسية الثانية وهي الجملة المقررة الخاضعة لتأثير رد الفعل الفائض HA كما هو مبين في الشكل رقم (٧–١٤).

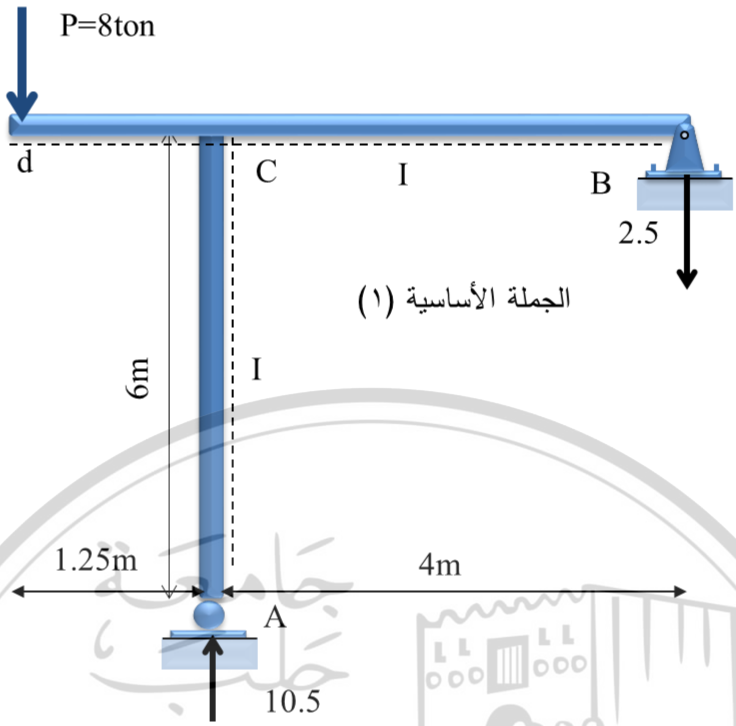
نرسم الجملة الافتراضية الخاضعة لتأثير الحمولة الافتراضية الواحدية مكان رد الفعل الفائض وباتجاهه المفروض كما هو مبين في الشكل رقم (٧–١٥).

الشكل رقم (٧–١٤)

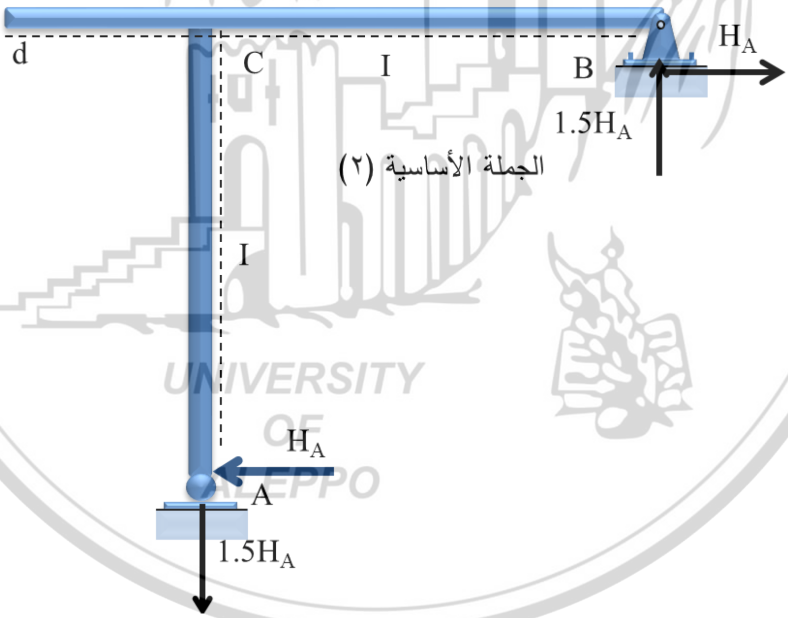
نرسم مخطط عزم الانعطاف للجمل الثلاثة والمبين في الشكل رقم (٧–١٦).

نوجد قيمة تكامل الجداءات لكل من الجملتين الأساسيتين مع الجملة الافتراضية:

$$\frac{-20}{EI}4+\frac{12H_A}{EI}4+\frac{18H_A}{EI}4=0 \quad \rightarrow H_A=\frac{2}{3}$$

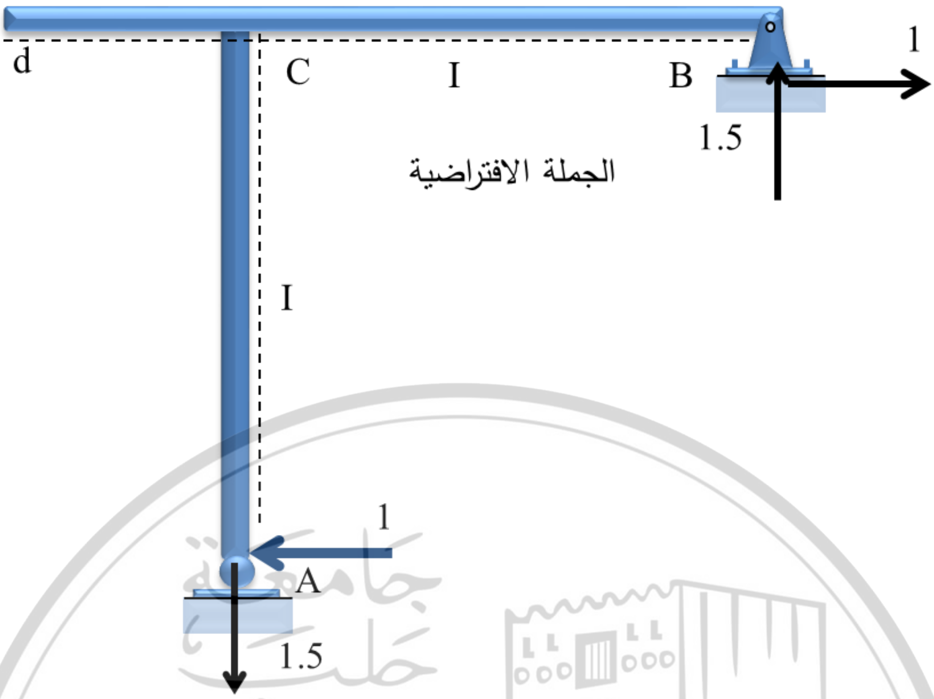


الشكل رقم (٧-١٣)

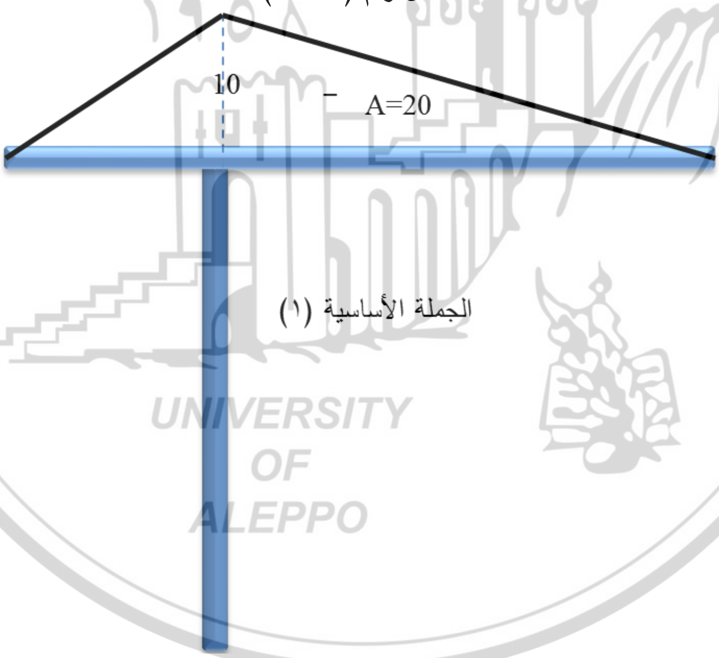


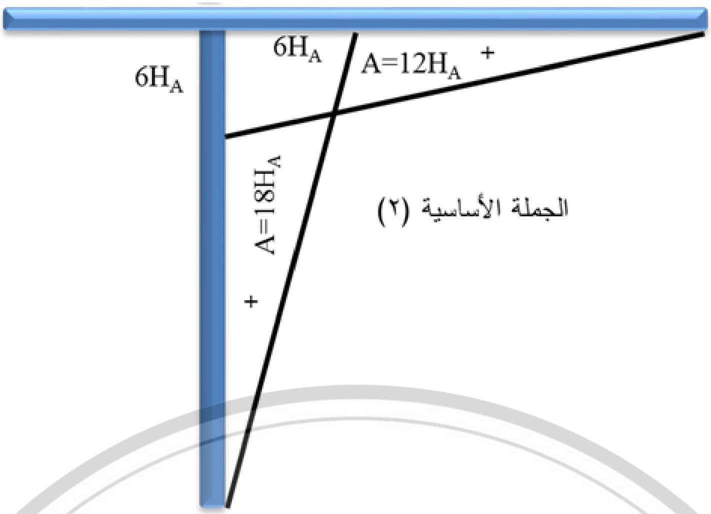
بعد إيجاد قيمة HA نوجد قيم ردود الأفعال باستخدام معادلات التوازن

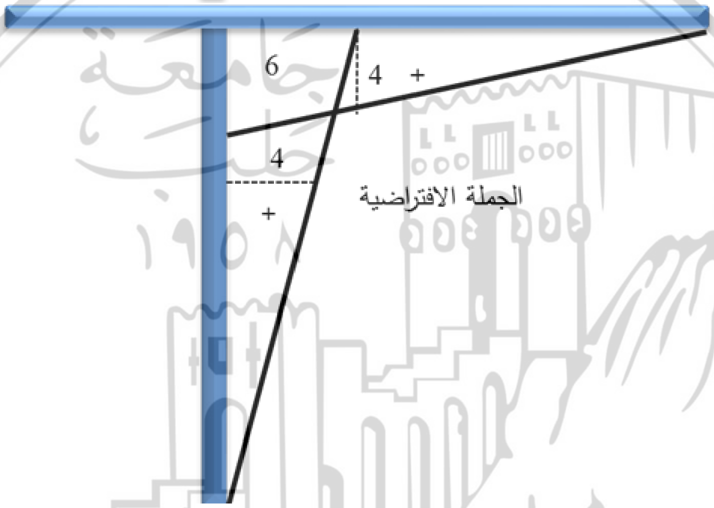
بعد إيجاد قيم ردود الأفعال نرسم مخططات القوى القاطعة والقوى المحورية وعزم الانعطاف الوارد في المثال رقم (٦) من بحث الدورانات في الفصل الخامس.



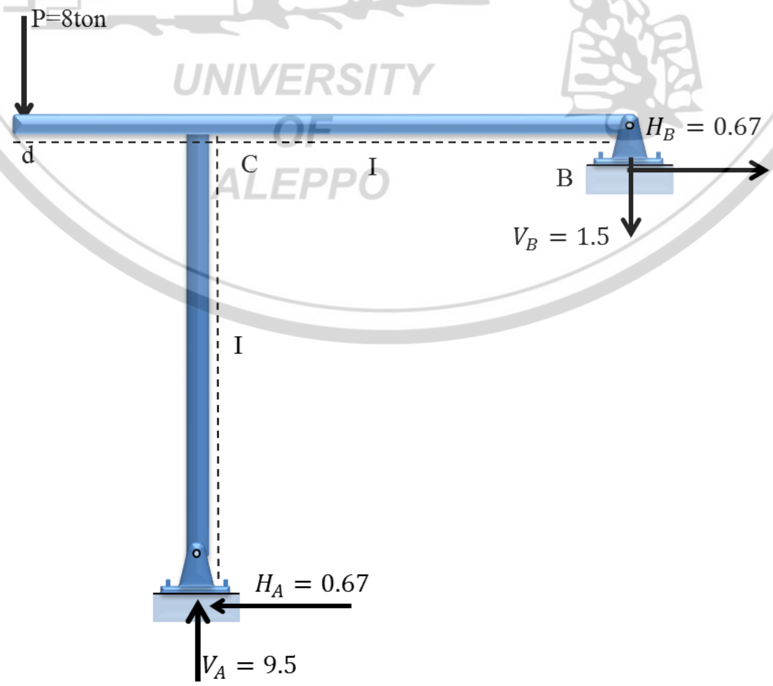
الشكل رقم (٧-١٥)







الشكل رقم (٧-١٦)



<u>مثال (٤)</u>: جائز هيكلي موثوق في **A** و مسنود في **B** على مسند ثابت، يتعرض لتأثير الحمولات الموضحة في الشكل رقم (٧-١٧) والمطلوب:

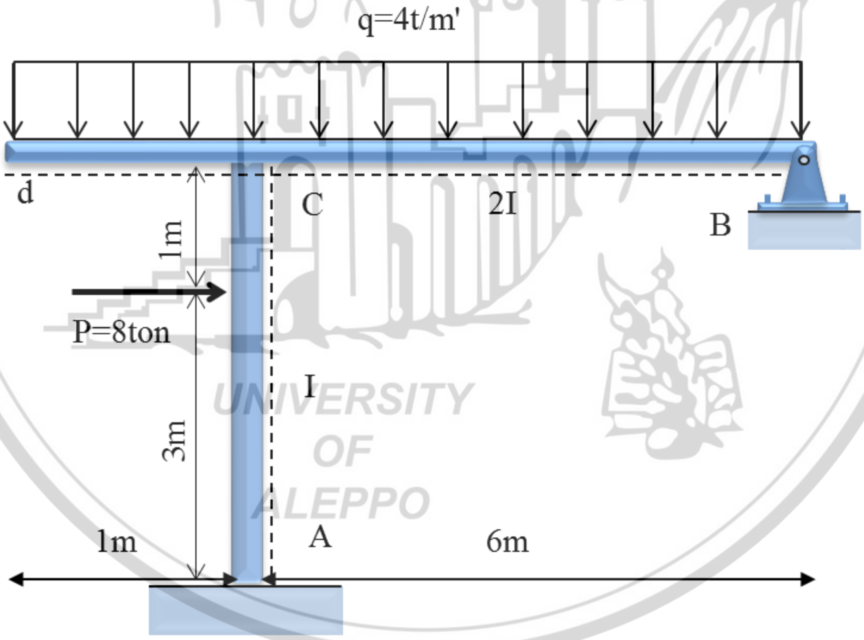
١-قرر هذا الجائز باستخدام نظرية العمل الافتراضي.

٢-حساب ردود الأفعال في المساند ورسم مخططات القوى القاطعة والقوى المحورية وعزم الانعطاف

إذا علمت أن عامل المرونة الطولي E ثابت وأن عزوم العطالة والأبعاد موضحة على الشكل.

الحل: هذا الإطار غير مقرر من الدرجة الثانية، نحذف ممانعتين وفق الحالات التالية:

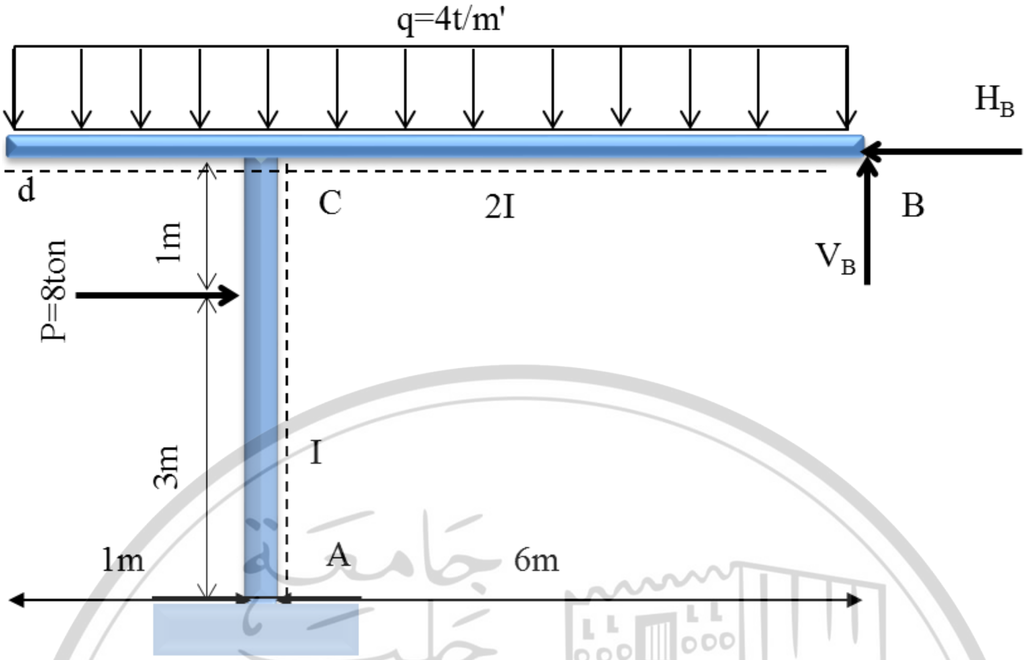
الحالة الأولى: حذف المسند الثابت B وتعويضه بردي الفعل VB و HB كما هو موضح بالشكل رقم (٧-١٨)



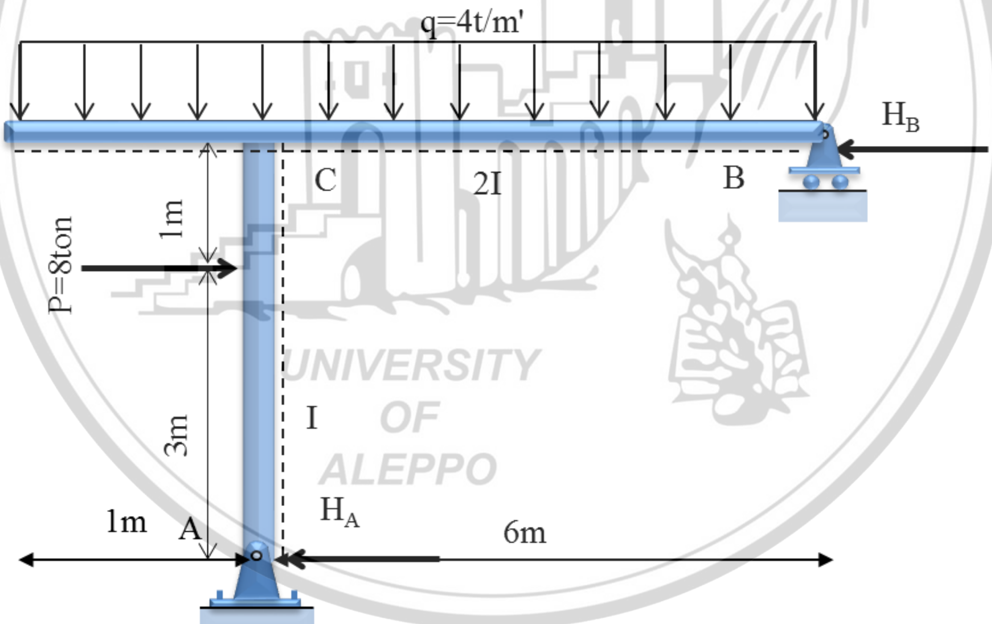
الشكل رقم (٧-١٧)

الحالة الثانية: استبدال المسند الثابت B بمسند متدحرج واستبدال الوثاقة A بمسند ثابت وتعويض الممانعات المحذوفة بردي الفعل HA و HB كما هو موضح بالشكل رقم (٧-١٩).

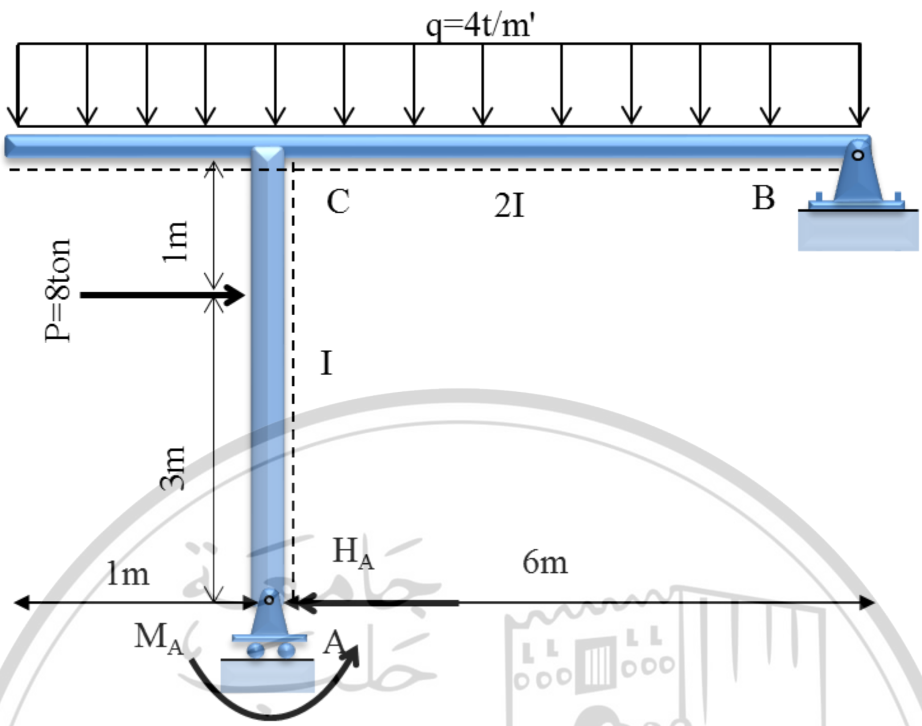
الحالة الثالثة: استبدال الوثاقة A بمسند متدحرج وتعويض الممانعات المحذوفة بردي الفعل H_A و M_A كما هو موضح بالشكل رقم (٧-٢٠).



الشكل رقم (٧-١٨) الحالة الأولى



الشكل رقم (٧-١٩) الحالة الثانية



الشكل رقم (٧-٢٠) الحالة الثالثة

نختار إحدى الحالات السابقة لتحليل هذا الإطار ولتكن الحالة الأولى هي الحالة التي تم اختيارها. نرسم مخطط عزم الانعطاف للجملة الأساسية الأولى الناتج عن تأثير الحمولات الخارجية فقط كما هو مبين في الشكل رقم (٧-٢١a)، ثم نرسم مخطط عزم الانعطاف للجملتين الأساسيتين الثانية والثالثة والناتجة عن ردود الأفعال الفائضة كما هو مبين في الشكل رقم (٧-٢١ b، c).

نرسم جملتين افتراضيتين بحمولتيهما الواحدية مع مخطط عزم الانعطاف لكل جملة منهما كما هو مبين في الشكل رقم (٧-٢٢)، بإجراء تكامل جداء مخططات عزم الانعطاف للجمل الأساسية مع الجملة الافتراضية (١) نحصل على العلاقة الأولى وهي على الشكل التالي:

$$\Delta_{BH}=\left[\frac{-210*2.5-36*3-70*0.5}{EI}\right]+8H_B*\frac{8}{3EI}+\frac{24V_B*2}{EI}=0$$

$$\text{(I)} \qquad 48V_B+\frac{64H_B}{3}-668=0$$

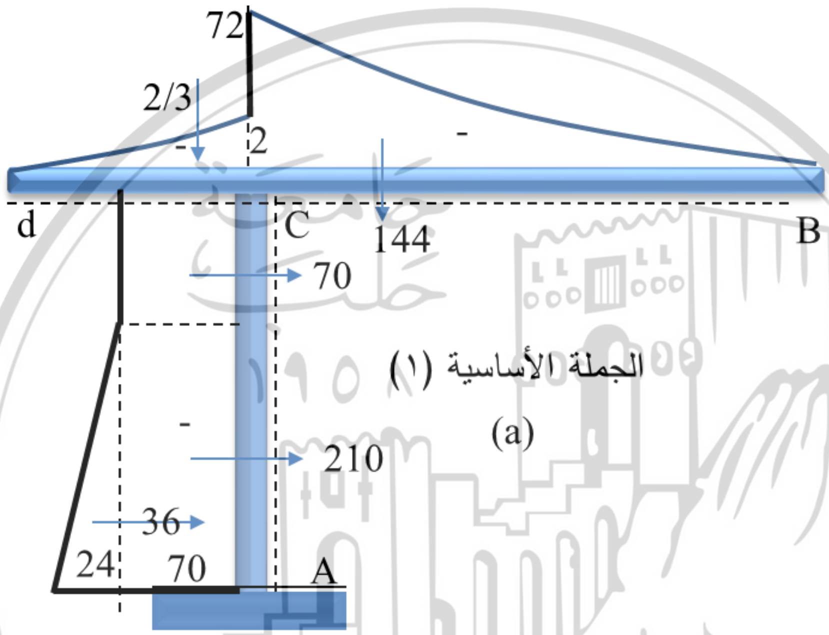
بإجراء تكامل جداء مخططات عزم الانعطاف للجمل الأساسية مع الجملة الافتراضية (٢) نحصل على العلاقة الثانية وهي على الشكل التالي:

$$\Delta_{BV}=\left[\frac{-210*6-36*6-70*6}{EI}\right]-\frac{144*4.5}{2EI}+8H_B*\frac{6}{EI}+\frac{24V_B*6}{EI}$$
$$+\frac{18V_B*2}{2EI}=0$$

$$\text{(II)} \qquad \Delta_{BV}=-2220+48H_B*\frac{6}{EI}+180V_B=0$$

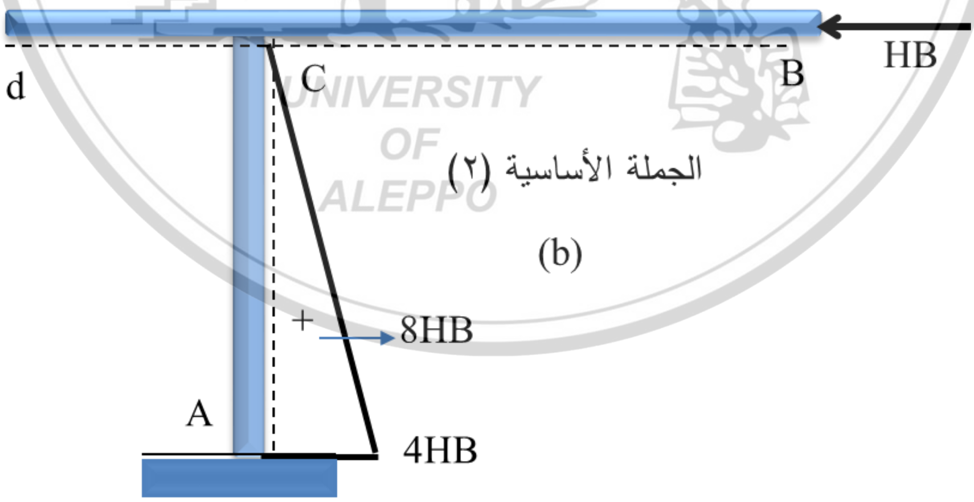
بحل هاتين المعادلتين (I) و (II) حلا مشتركا نستنتج قيم ردود الأفعال الفائضة

$$H_B=8.9 \qquad V_B=9.96$$



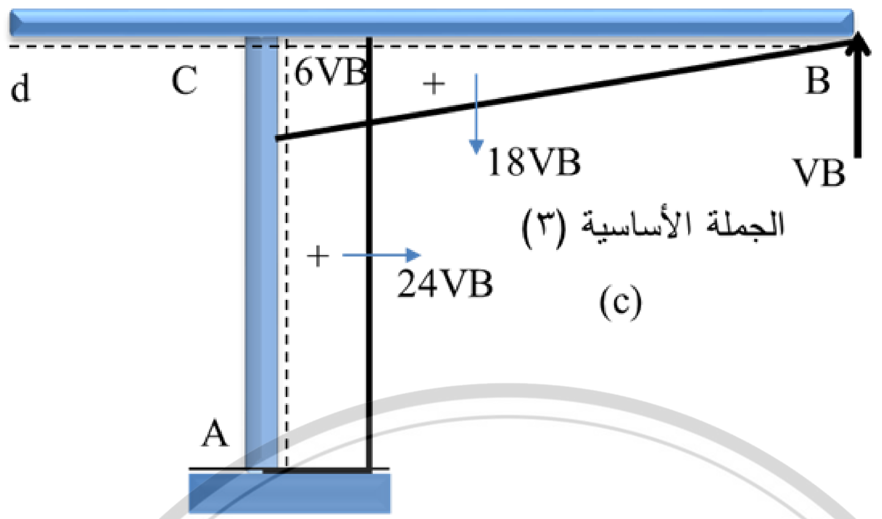
الجملة الأساسية (١)

(a)

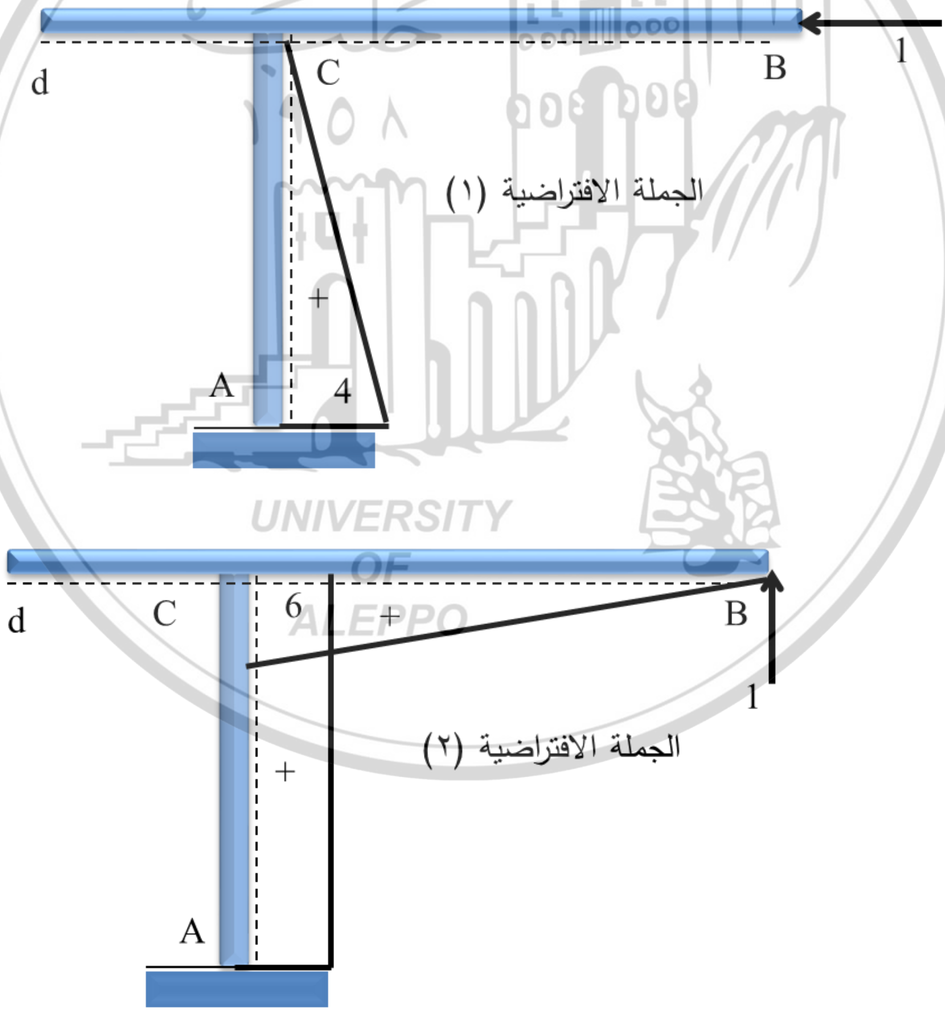


الجملة الأساسية (٢)

(b)

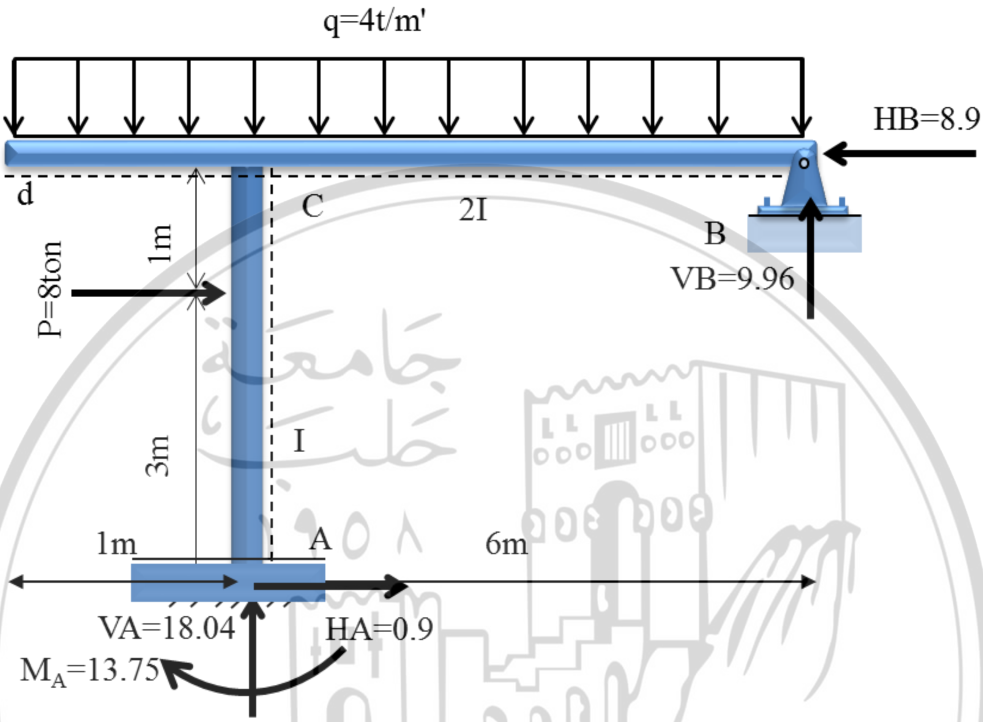


الشكل رقم (٧-٢١)



الشكل رقم (٧-٢٢)

بعد إيجاد قيم ردود الأفعال الفائضة وبالاعتماد على معادلات التوازن نوجد بقية ردود الأفعال المتبقية والموضحة في الشكل رقم (٧-٢٣). أما رسم المخططات فهي موضحة في المثال رقم (٤) من بحث الدورانات في الفصل الخامس.



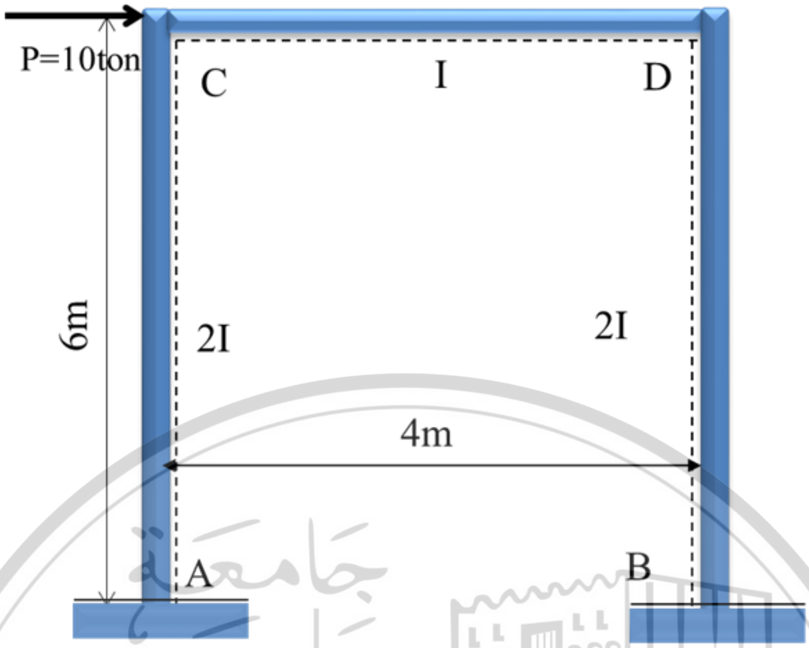
الشكل رقم (٧-٢٣)

<u>مثال(٥):</u> جائز هيكلي موثوق في **A** وB، يتعرض لتأثير الحمولات الموضحة في الشكل رقم (٧-٢٤) والمطلوب:

١-قرر هذا الجائز باستخدام نظرية العمل الافتراضي.

٢-حساب ردود الأفعال في المساند ورسم مخططات القوى القاطعة والقوى المحورية وعزم الانعطاف، إذا علمت أن عامل المرونة الطولي E وعزوم العطالة موضحة على الشكل رقم (٧-٢٤).

الحل: تعتبر هذه الجملة بشكل عام غير مقررة من الدرجة الثالثة نتيجة وجود الوثاقتين، إلا أنه يمكننا تحويلها إلى جملة متناظرة عكسيا وذلك بتقسيم الحمولة المركزة إلى قسمين متساويين، وزلق إحدى القوى إلى العقدة المقابلة لها معتمدين على مبادئ الأشعة " يمكن زلق القوة على حاملها" كما هو موضح في الشكل رقم (٧-٢٥) وبالاعتماد على خاصية التناظر العكسي بانعدام القوى المتناظرة عند محور التناظر،



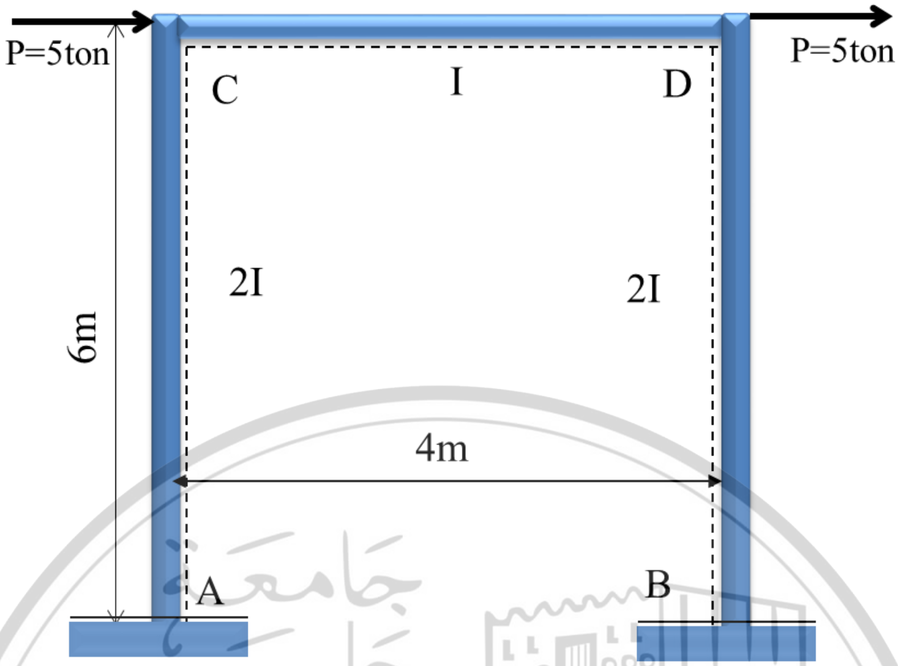
الشكل رقم (٧-٢٤)

لذلك نقطع الجملة عند محور التناظر الذي يحتوي على مجهول وحيد وهي القوة القاطعة حيث تنعدم القوة المحورية وعزم الانعطاف، حيث تحولت هذه الجملة من جملة غير مقررة من الدرجة الثالثة إلى جملة غير مقررة من الدرجة الأولى كما هو مبين في الشكل رقم (٧-٢٦)، تكون الجملة الأساسية الأولى هي الجملة المعرضة لتأثير الحمولات الخارجية فقط، أما الجملة الأساسية الثانية هي الجملة التي تخضع لتأثير القوة القاطعة T عند محور التناظر كما هو موضح في الشكل رقم (٧-٢٧)، ونتيجة التناظر العكسي يمكن إجراء الحسابات على نصف الجملة.

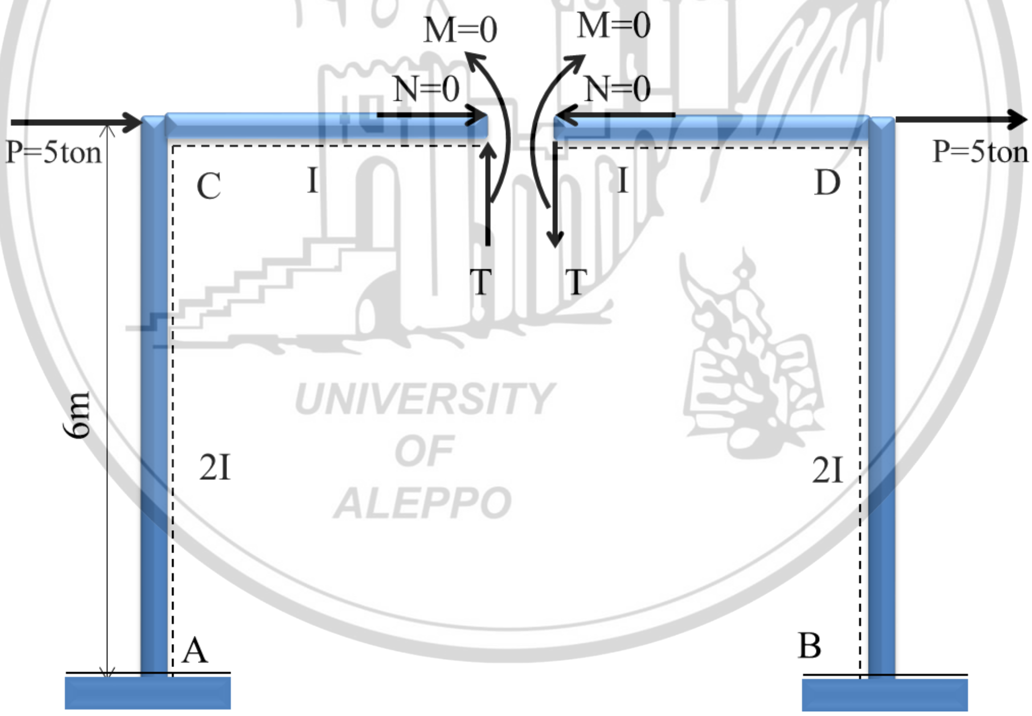
نرسم مخططات عزم الانعطاف للجملتين الأساسيتين والجملة الافتراضية.

$$\Delta = \frac{-90 * 2}{2EI} + \frac{12T * 2}{2EI} + \frac{2T * 4}{3EI} = 0 \rightarrow \ T = 6.13$$

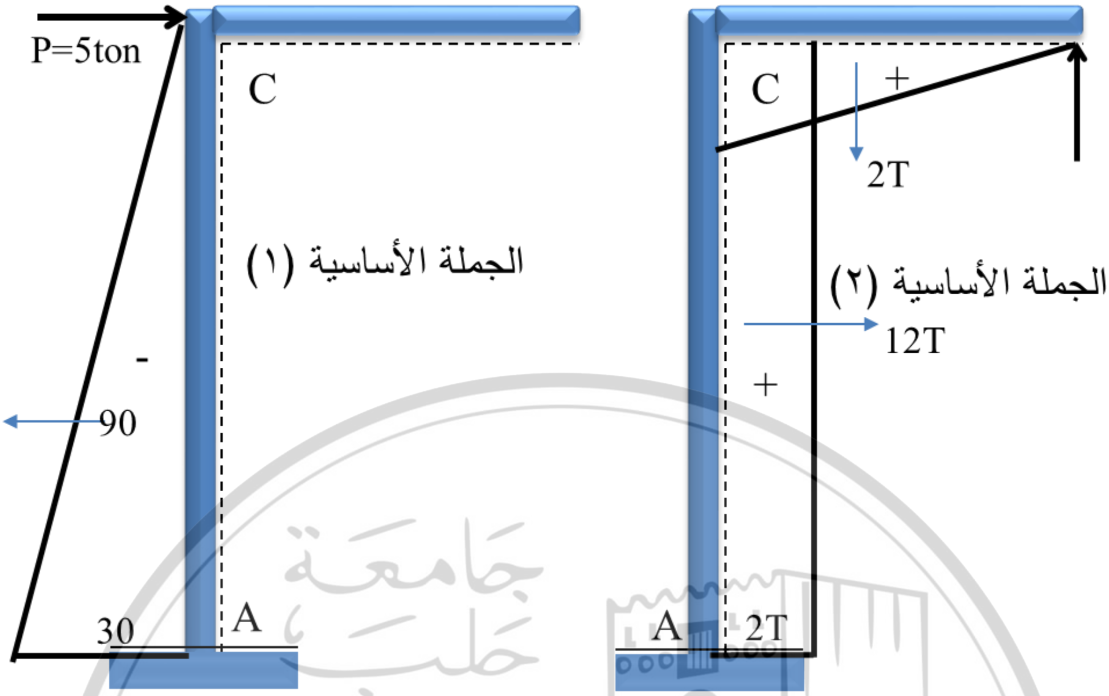
نوجد قيم ردود الأفعال كما هو مبين في الشكل رقم (٧-٢٨)، ونرسم مخططات القوى المحورية والقوى القاطعة وعزوم الانعطاف لنصف الإطار كما هو مبين في الشكلين رقم (٧-٢٨) و(٧-٢٩)، اما النصف الآخر فيكون مخططا القوى المحورية وعزم الانعطاف متناظرة عكسيا ومخطط القوى القاطعة متناظر.



الشكل رقم (٧-٢٥)

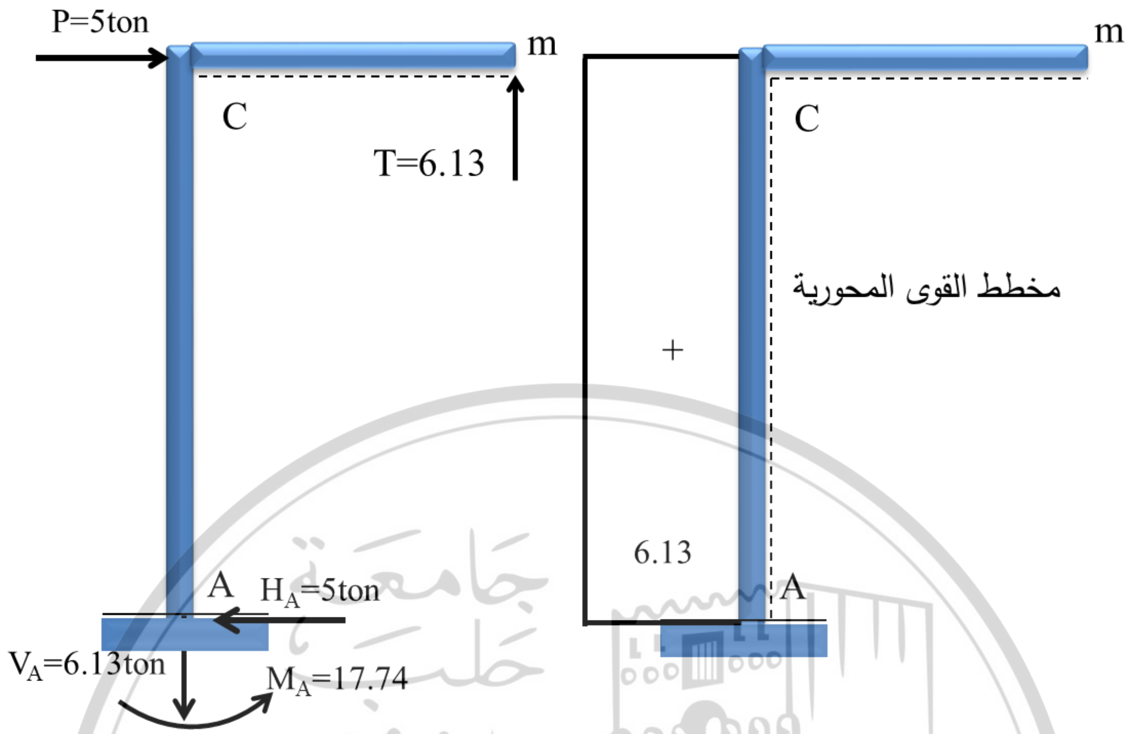


الشكل رقم (٧-٢٦)

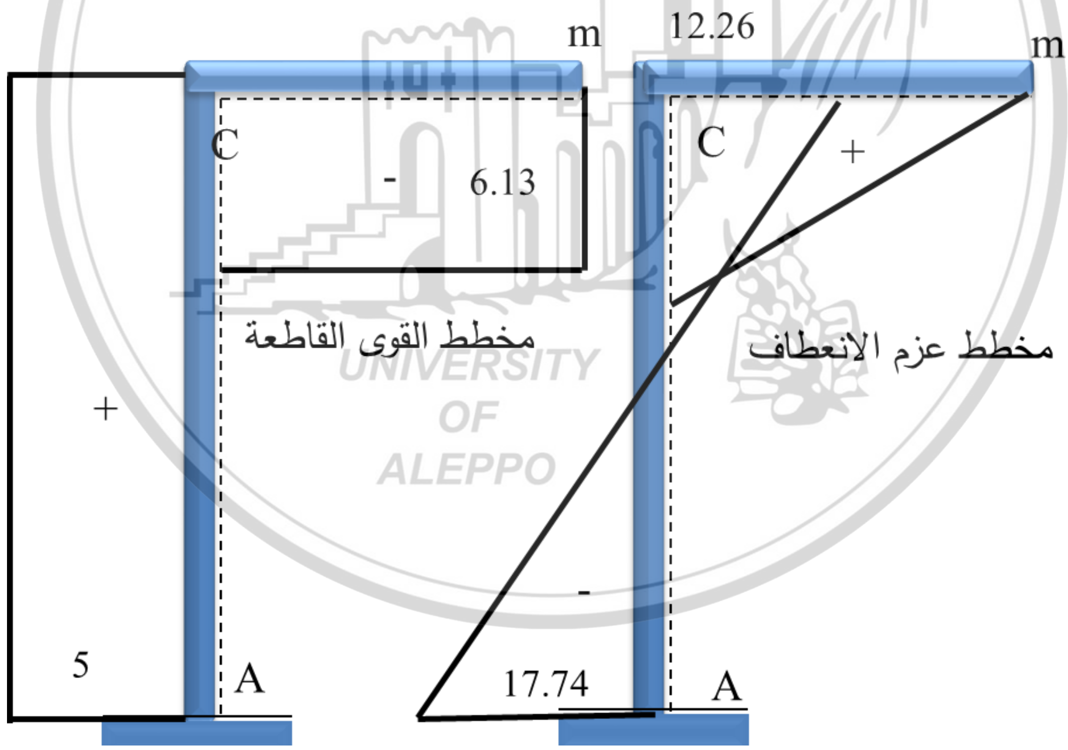


الشكل رقم (٧-٢٧)

الشكل رقم (٧-٢٧)



الشكل رقم (٧-٢٨)

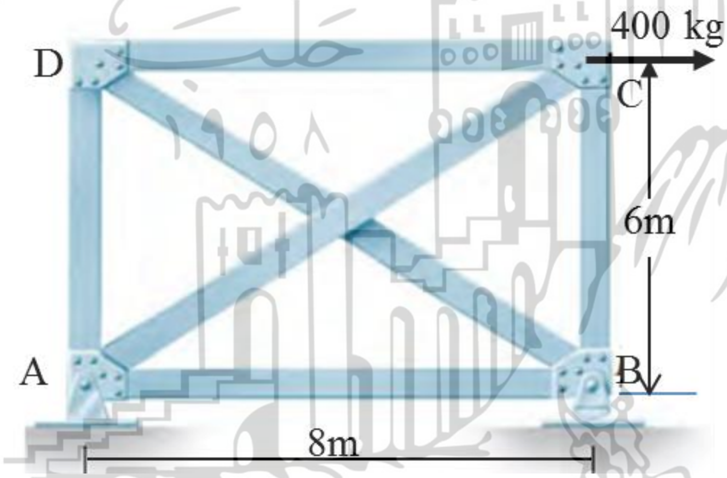


الشكل رقم (٧-٢٩)

٧-٦ تطبيق نظرية العمل الافتراضي على الجمل الشبكية غير المقررة

يمكن تحديد عدم التقرير الداخلي للجمل الشبكية غير المقررة باستخدام العلاقة الواردة في الفصل الأول $b = 2j - r$ وتكون المجاهيل في هذه العلاقة هي القوى الداخلية في العناصر الشبكية (القضبان) وتكون طريقة القوة فعالة عندما تكون الجملة الشبكية غير مقررة من الدرجة الأولى والثانية. وتوضح الأمثلة التالية كيف يمكن تطبيق هذه النظرية.

<u>مثال (٦):</u> لدينا الجائز الشبكي الموضح في الشكل رقم (٧-٣٠) المطلوب تحديد القوة المحورية في العنصر AC إذا علمت أن الصلابة المحورية AE متساوية لجميع العناصر.



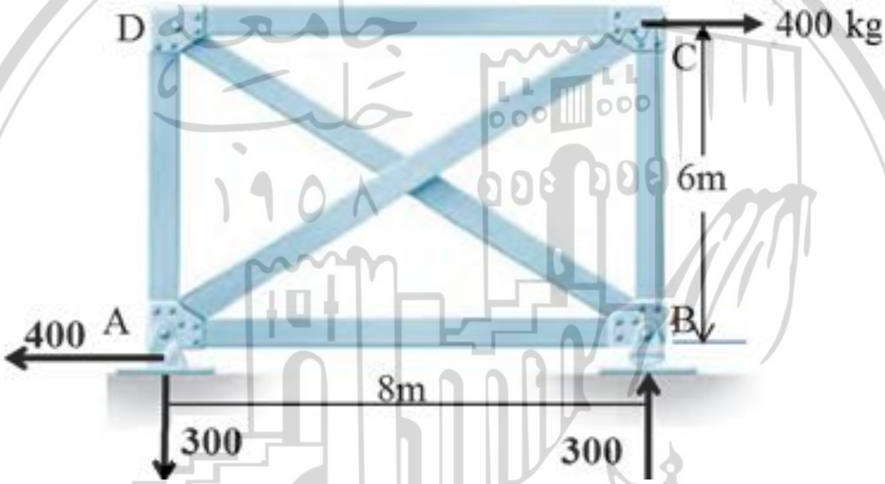
الشكل رقم (٧-٣٠)

من خلال تفحصنا لهذا الجائز الشبكي نلاحظ أنه غير مقرر من الدرجة الأولى لذلك يجب تحديد القوة المحورية في العنصر AC لذلك سوف نختار هذا العنصر كعنصر فائض وهذا يتطلب منا قطع هذا العنصر بحيث لايقاوم القوى المحورية، ونتيجة لذلك يصبح الجائز الشبكي مقررا داخليا.

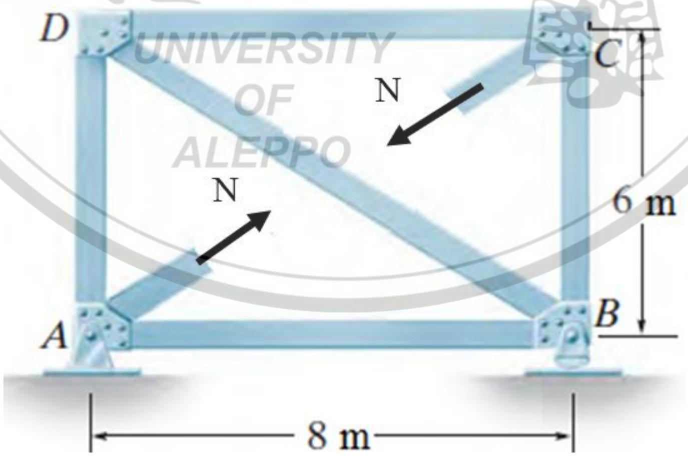
نحصل على الجملة الأساسية الأولى المقررة داخليا محملة بالحمولات الخارجية فقط، ونوجد ردود الأفعال الناتجة عن الحمولات الخارجية الموضحة في الشكل رقم (٧-٣١).

نحذف الحمولات الخارجية من الجملة الأساسية الأولى ونطبق القوة المحورية N المؤثرة في العنصر AC المقطوع وبذلك نحصل على الجملة الأساسية الثانية كما هو موضح في الشكل رقم (٧-٣٢).

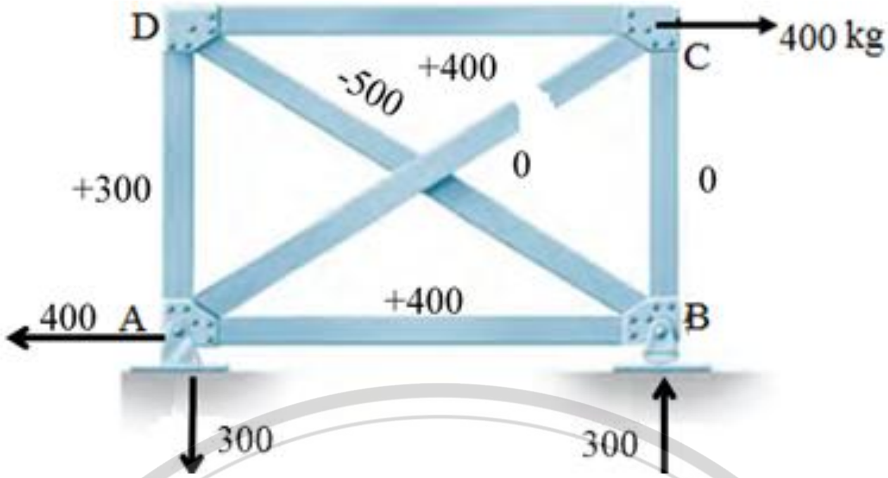
نوجد القوى المحورية في كل من الجملتين الأساسيتين الأولى والثانية والموضحة في الشكلين رقم (٧-٣٣) و (٧-٣٤) باستخدام طريقة توازن العقد أو طريقة المقاطع مع ملاحظة انعدام قيمة ردود الأفعال في الجملة الأساسية الثانية لأن القوة المحورية N الفائضة متوازنة في الجملة لأنها متساوية بالقيمة ومتعاكسة بالاتجاه فتنعدم قيم ردود الأفعال.



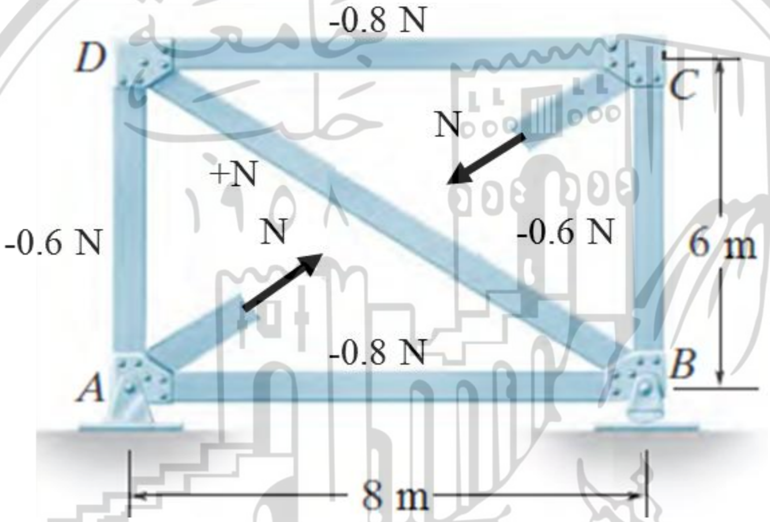
الشكل رقم (٧-٣١)



الشكل رقم (٧-٣٢)



الشكل رقم (٧-٣٣)

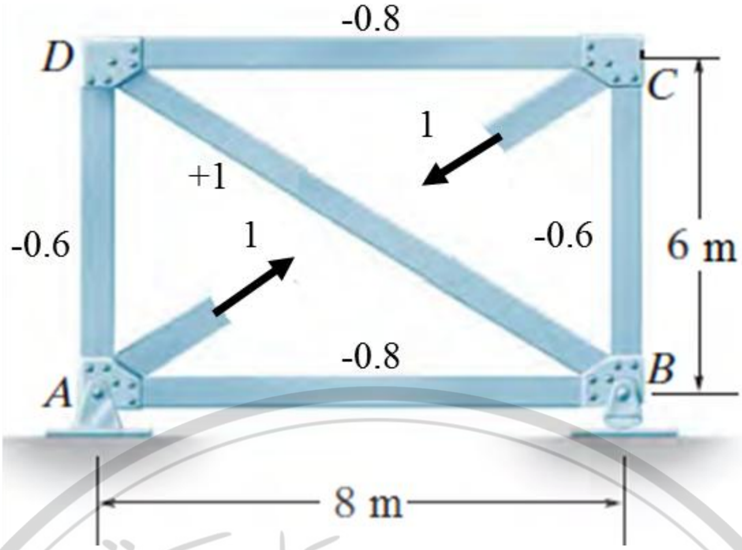


الشكل رقم (٧-٣٤)

بعد إيجاد القوى المحورية في الجمل الأساسية نرسم الجملة الأساسية الثانية ونبدل القوة المحورية N بقوة واحدية وذلك لحساب الانتقال النسبي في العنصر AC والذي يساوي الصفر كما هو موضح بالشكل رقم (٧-٣٥)

نرتب القيم التي حصلنا عليها سابقا في الجدول رقم (٧-١) حيث نجمع القوى المحورية للجمل الأساسية بعمود واحد.

لإيجاد قيم القوى المحورية في عناصر الجملة الشبكية، نعوض قيمة N الناتجة عن عملية التحليل في العمود الثاني من الجدول رقم (٧-١).



الشكل رقم (٧-٣٥)

الجدول رقم (٧-١)

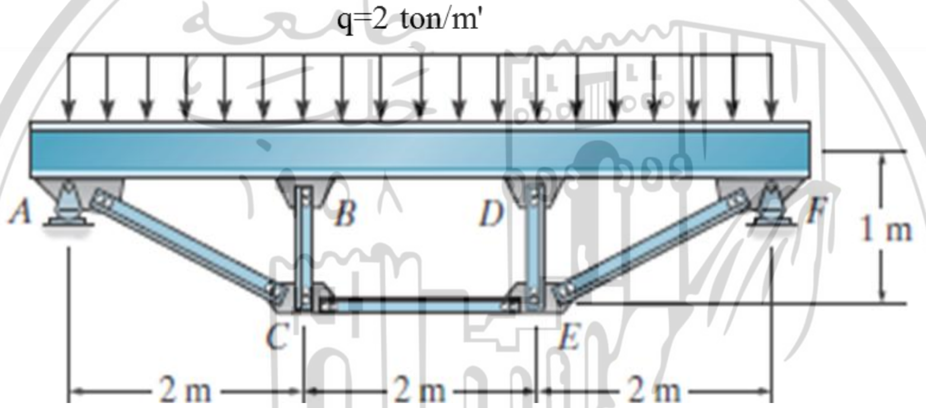
العنصر	القوى المحورية في الجملة الحقيقية F	القوى المحورية في الجملة الافتراضية Fv	الطول	الصلابة المحورية	F * Fv * L
AB	400-0.8N	-0.8	8	EA	-2650+5.12N
BC	0-0.6N	-0.6	6	EA	2.16N
CD	400-0.8N	-0.8	8	EA	-2650+5.12N
DA	300-0.6N	-0.6	6	EA	-1080+2.16N
AC	N	1	10	EA	10N
DB	-500+N	1	10	EA	-5000+10N
شد $(\Delta)_{AC} = \sum F_v \left(\frac{FL}{EA}\right) = 0 \rightarrow N = 324$					-11200+34.56N

مثال(٧): يبين الشكل رقم (٧-٣٦) جائزا بسيطا مسنودا على مسندين بسيطين مدعم بجملة شبكية في الأسفل ليتحمل حمولة موزعة بانتظام مقدارها 2ton/m'، المطلوب تحديد القوة المحورية المؤثرة في العنصر CE وذلك بإهمال سماكة الجائز وبفرض أن عناصر الجائز الشبكي متمفصلة مع الجائز أيضا وكذلك إهمال التغيرات الناتجة عن القوى المحورية والقوى القاطعة في الجائز، إذا علمت أن المقطع العرضي لكل عنصر

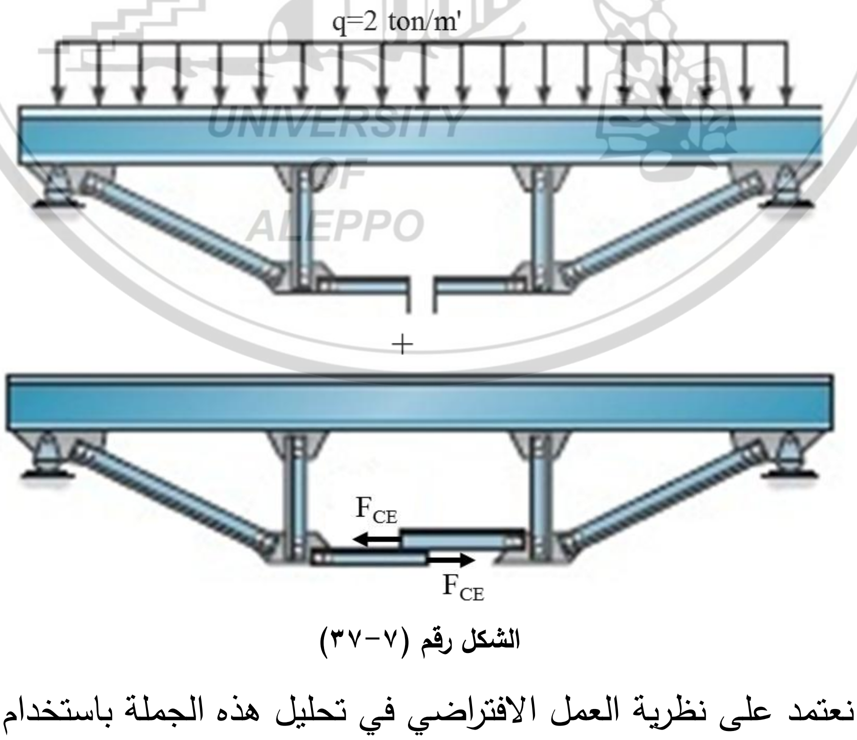
من عناصر الجائز الشبكي يساوي $400mm^2$ وأن عزم عطالة الجائز تساوي $20(10)^6 mm^4$ وأن قيمة عامل المرونة الطولي تساوي E=200GPa.

الحل: إذا علمنا قيمة القوة في أحد عناصر الجائز الشبكي فإنه يمكننا معرفة القوى المحورية في بقية العناصر الشبكية وقيمة القوى الداخلية في الجائز العلوي باستخدام معادلات التوازن، وبالتالي تكون هذه الجملة غير مقررة من الدرجة الأولى.

ومن أجل المباشرة في حل هذه المسألة نختار العنصر CE عنصرا فائضا وذلك بقطع هذا العنصر وإلغاء مقاومته للقوى، وسوف نعتمد على مبدأ تنضد الآثار في حل هذه الجملة كما هو مبين في الشكل رقم (٧-٣٧)



الشكل رقم (٧-٣٦)



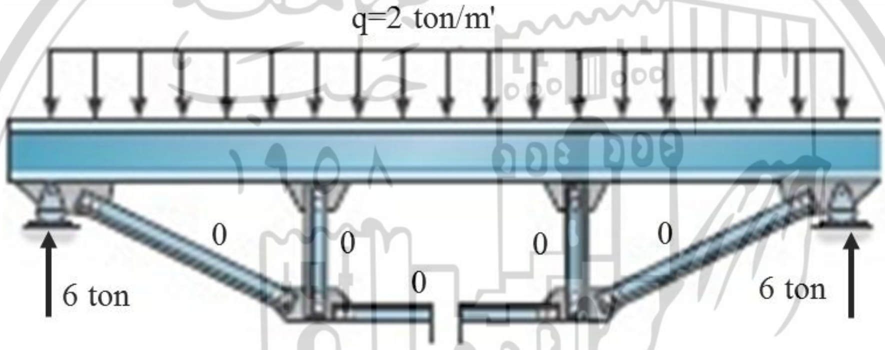
الشكل رقم (٧-٣٧)

سوف نعتمد على نظرية العمل الافتراضي في تحليل هذه الجملة باستخدام العلاقة

$$(\Delta)_{CE} = \int_0^L \frac{M.Mv}{EI}dx + \sum \frac{F.F_v.L}{EA}$$

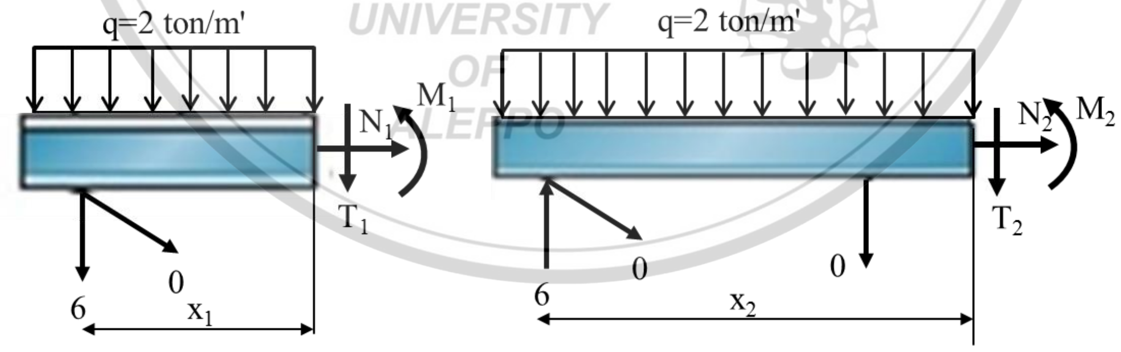
تمثل القيم M و F في هذه المتراجحة قيم عزوم الانعطاف والقوى المحورية الناتجة عن الحمولات الخارجية والقوة المحورية في العنصر CE الفائضة، وتمثل القيم Mv و Fv في هذه المتراجحة قيم عزوم الانعطاف والقوى المحورية الناتجة عن الحمولة الافتراضية الواحدية المؤثرة في العنصر CE، سوف نستفيد من خاصة التناظر في هذه الجملة لتسهيل الحل.

نوجد القوى المحورية المؤثرة في الجملة الأساسية الخاضعة لتأثير الحمولات الخارجية والموضحة في الشكل رقم (٧-٣٨).



الشكل رقم (٧-٣٨)

نكتب معادلات عزم الانعطاف للجملة الأساسية التي تخضع لتأثير الحمولات الخارجية فقط كما هو مبين في الشكل (٧-٣٩).



الشكل (٧-٣٩)

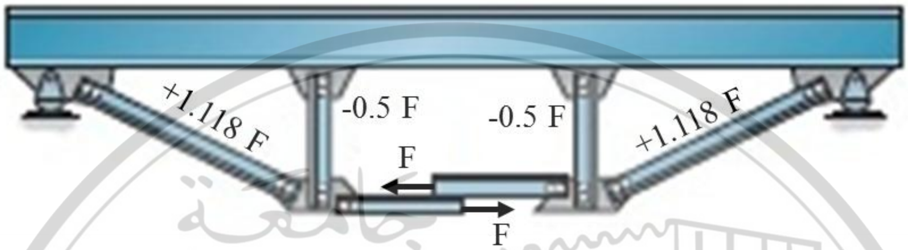
$$(7-4)\quad M_1 = 6x_1 - x_1^2 \qquad M_2 = 6x_2 - x_2^2 \quad M_3 = M_1$$

نوجد القوى المحورية المؤثرة في الجملة الأساسية الخاضعة لتأثير القوة المحورية F الفائضة في العنصر CE والموضحة في الشكل رقم (٧-٤٠).

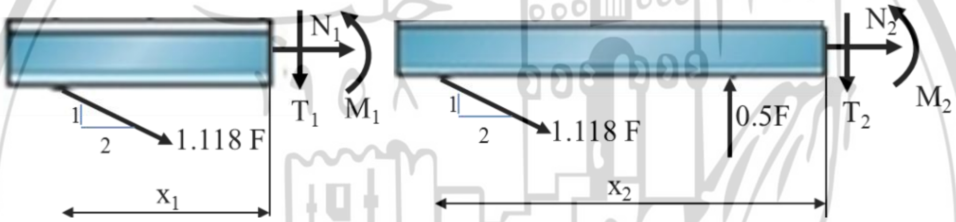
نكتب معادلات عزم الانعطاف للجملة الأساسية التي تخضع لتأثير القوى الناتجة عن الجائز الشبكي كما هو مبين في الشكل (٧-٤١).

$$(7-5)\quad M_1 = \frac{-Fx_1}{2}\ ,\ \ M_2 = \frac{-Fx_2}{2} + \frac{F}{2}(x_2 - 2) = -F \qquad M_3 = M_1$$

لإيجاد قيمة الانتقال النسبي في العنصر CE نرسم الجملة الافتراضية وهي الجملة الأساسية خاضعة لتأثير قوة افتراضية واحدية مكان القوة المحورية الفائضة وباتجاهها،

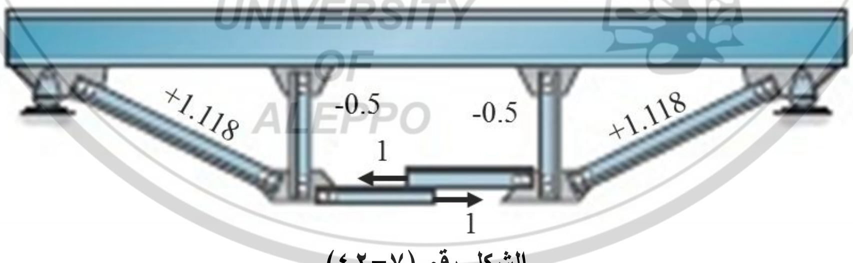


الشكل رقم (٧-٤٠)



الشكل (٧-٤١)

وإيجاد القوى المحورية في الجملة الشبكية وكتابة معادلات عزم الانعطاف في مجالات الجائز العلوي AF مع المحافظة على المجالات الواردة في الجملة الأساسية كما هو مبين في الشكلين رقم (٧-٤٢) و (٧-٤٣).



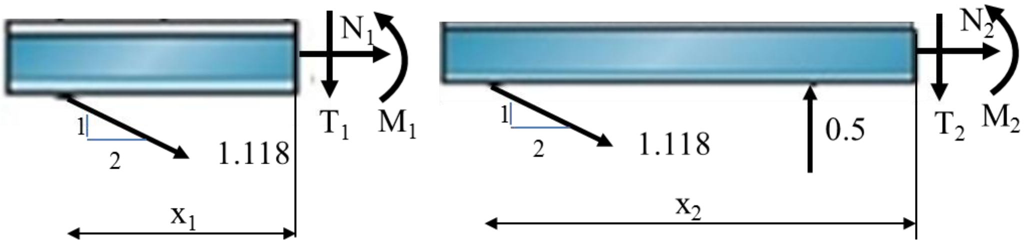
الشكل رقم (٧-٤٢)

$$M_{v1} = \frac{-x_1}{2} \qquad M_{v2} = \frac{-x_2}{2} + \frac{1}{2}(x_2 - 2) = -1 \qquad M_{v3} = M_{v1}$$

$$(\Delta)_{CE} = \int_0^L \frac{M.Mv}{EI}dx + \sum \frac{F.F_v.L}{EA}$$

تعبر M الواردة في العلاقة العامة للعمل الافتراضي عن مجموع معادلات عزم الانعطاف للجمل الأساسية لكل مجال

وبذلك نكتب معادلات عزم الانعطاف (7-4) و (7-5) على النحو التالي:



الشكل رقم (٧-٤٣)

$$(7-6)\quad M_1 = 6x_1 - x_1^2 + \frac{-Fx_1}{2} \qquad M_2 = 6x_2 - x_2^2 - F \quad M_3 = M_1$$

لنوجد الحد الأول من العلاقة العامة للعمل الافتراضي

$$(\Delta)_{CE} = \frac{2}{EI}\int_0^2 \left(6x_1 - x_1^2 + \frac{-Fx_1}{2}\right)\left(\frac{-x_1}{2}\right)dx_1$$
$$+\frac{2}{EI}\int_2^3 (6x_2 - x_2^2 - F)(-1)\,dx_2$$

أما الحد الثاني والخاص بالقوى المحورية فيمكن إيجاده بالاعتماد على الجدول رقم (٧-٢).

الجدول رقم (٧-٢)

العنصر	القوى المحورية في الجملة الحقيقية F	القوى المحورية في الجملة الافتراضية Fv	الطول	الصلابة المحورية	F * Fv * L
AC	0+1.118F	1.118	$\sqrt{5}$	EA	2.795F
CE	0+F	1	2	EA	2F
EF	0+1.118F	1.118	$\sqrt{5}$	EA	2.795F
ED	0-0.5F	-0.5	1	EA	0.25F
CB	0-0.5F	-0.5	1	EA	0.25F
$\sum F_v\left(\frac{FL}{EA}\right)$					$\frac{8.09F}{EA}$

$$\frac{8.09F}{EA} + \frac{2}{EI}\int_0^2 \left(x_1^3 - 6x_1^2 + \frac{Fx_1^2}{2}\right)dx_1 + \frac{2}{EI}\int_2^3 (x_2^2 - 6x_2 + F)dx_2 =$$
$$\frac{8.09F}{400*10^{-6}} + \frac{1}{20*10^{-6}}\left[-12 + \frac{8F}{6}\right] + \frac{2}{20*10^{-6}}[F - 8.66] = 0$$

$$74.756F - 586.666 = 0 \rightarrow F = 7.8477\ ton$$

نعوض قيمة F في معادلات عزم الانعطاف رقم (6-7) فنحصل على المعادلات النهائية لعزم الانعطاف.

$$M_1 = M_3 = 6x_1 - x_1^2 - \frac{Fx_1}{2} = 2.076x_1 - x_1^2$$

$$M_2 = 6x_2 - x_2^2 - F = 6x_2 - x_2^2 - 7.8477$$

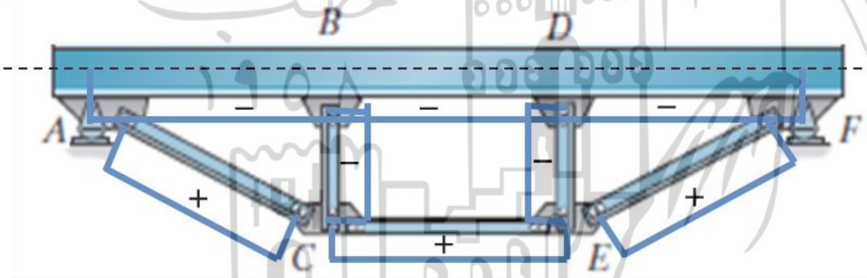
أما معادلات القوة القاطعة فنحصل عليها باشتقاق معادلات عزوم الانعطاف

$$T_1 = -T_3 = 6 - 2x_1 - \frac{F}{2} = 2.076 - 2x_1$$

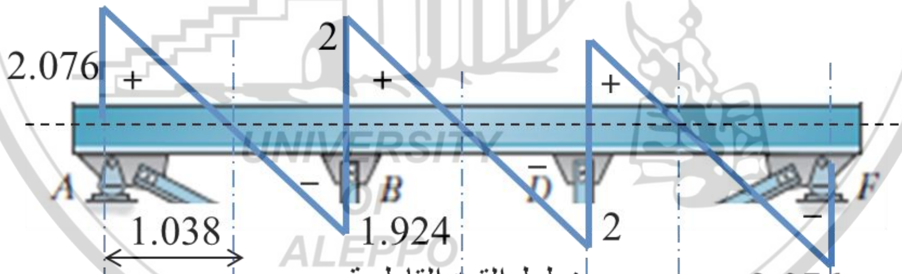
$$T_2 = 6 - 2x_2$$

معادلات القوى المحورية في عناصر الجائز العلوي:

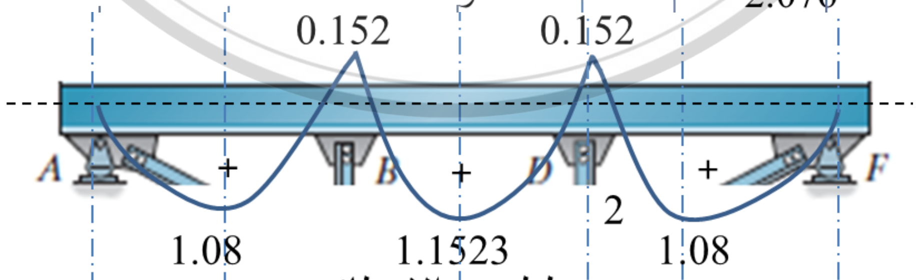
$$N_1 = N_3 = N_2 = -7.8477$$



مخطط القوى المحورية



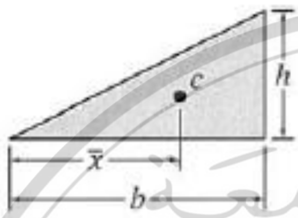
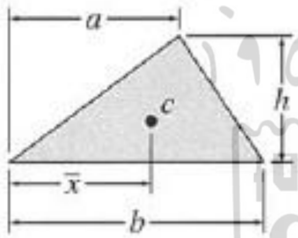
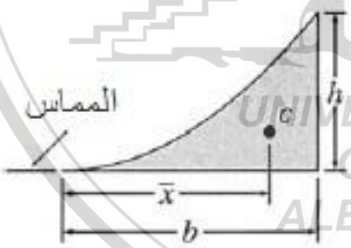
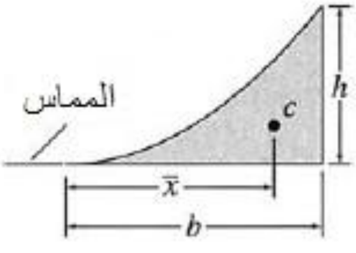
مخطط القوة القاطعة

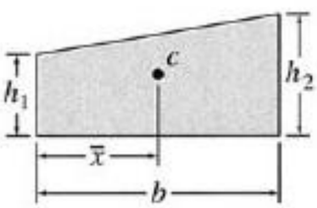
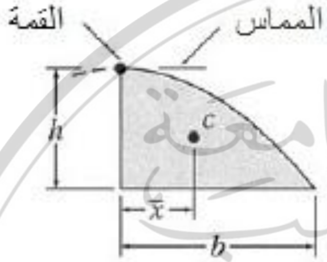
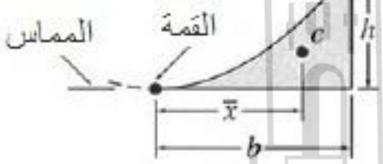
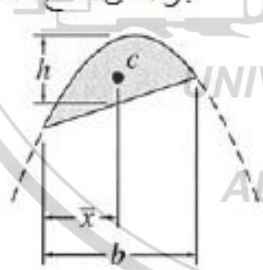
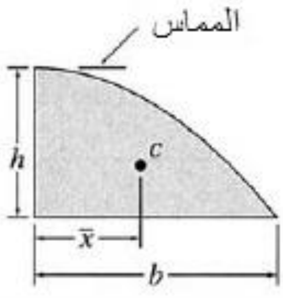


مخطط عزم الانعطاف

الملحق A

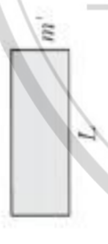
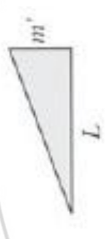
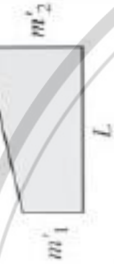
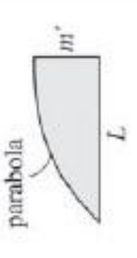
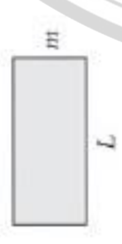
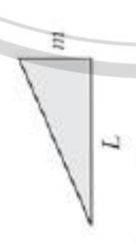
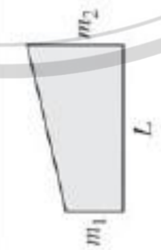
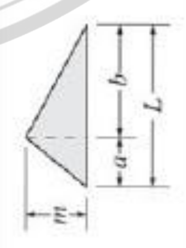
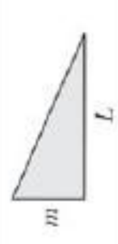
قيم المساحات ومراكز الثقل لبعض الأشكال المستخدمة

الشكل	المساحة	مركز الثقل
مثلث قائم الزاوية 	$A = \frac{bh}{2}$	$\bar{x} = \frac{2b}{3}$
مثلث 	$A = \frac{bh}{2}$	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$
منحني من الدرجة الثالثة محيطي 	$A = \frac{bh}{4}$	$\bar{x} = \frac{4b}{5}$
*n*th-degree curve $y = ax^n,\ n \geq 1$ 	$A = \frac{bh}{n+1}$	$\bar{x} = \frac{(n+1)b}{(n+2)}$

مركز الثقل	المساحة	الشكل
$\bar{x} = \dfrac{b(h_1 + 2h_2)}{3(h_1 + h_2)}$	$A = \dfrac{b(h_1 + h_2)}{2}$	شبه منحرف 
$\bar{x} = \dfrac{3b}{8}$	$A = \dfrac{2bh}{3}$	جزء من قطع مكافئ 
$\bar{x} = \dfrac{3b}{4}$	$A = \dfrac{bh}{3}$	منحني من الدرجة الثانية محيطي 
$\bar{x} = \dfrac{b}{2}$	$A = \dfrac{2bh}{3}$	جزء من قطع مكافئ 
ملاحظة: اذا كان القطاع يمثل جزء من مخطط عزم الانعطاف لعنصر يخضع لتأثير حمولة موزعة بانتظام شدتها w فان $h=wb^2/8$		
$\bar{x} = \dfrac{2b}{5}$	$A = \dfrac{3bh}{4}$	منحني من الدرجة الثالثة 

الملحق B

قيم جداء التكاملات $\int_0^L M.Mv.dx$

$\int_0^L m\,m'\,dx$				
	$mm'L$	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{2}m(m'_1+m'_2)L$	$\frac{2}{3}mm'L$
	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{3}mm'L$	$\frac{1}{6}m(m'_1+2m'_2)L$	$\frac{5}{12}mm'L$
	$\frac{1}{2}m'(m_1+m_2)L$	$\frac{1}{6}m'(m_1+2m_2)L$	$\frac{1}{6}[m'_1(2m_1+m_2)$ $+m'_2(m_1+2m_2)]L$	$\frac{1}{12}[m'(3m_1+5m_2)]L$
	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{6}mm'(L+a)$	$\frac{1}{6}m[m'_1(L+b)+$ $m'_2(L+a)]$	$\frac{1}{12}mm'\left(3+\frac{3a}{L}-\frac{a^2}{L^2}\right)L$
	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{6}mm'L$	$\frac{1}{6}m(2m'_1+m'_2)L$	$\frac{1}{4}mm'L$

المراجع العربية والأجنبية

[1] R. C. HIBBELER, 2012- Structural Analysis, Pearson Prentice Hall, 8th ed, USA, 695 pages.

[2] KASSMALI. Aslam.,2012- Structural Analysis, Pearson Prentice Hall, 4th ed, USA, 876 pages.

[3] Igor A. Karnovsky • Olga Lebed.,2010-Advanced Methods of Structural Analysis, Springer Science+Business Media, 1th ed, USA, 592 pages.

[٤]–المهايني والزين، ١٩٨٠– تحليل المنشآت اللامقررة. الطبعة الأولى، دمشق، ٦٢٩ صفحة.

[٥]–داركوف و كوزنيتسوف، ١٩٨٠– الميكانيكا الإنشائية. ترجمة دار مير للطباعة والنشر، ٧٩١ صفحة.

جدول المصطلحات العلمية

انجليزي – عربي

(A)	
Absolute	مطلق
Analysis	تحليل
Anti-symmetric case	حالة التناظر العكسي
Applied Forces	القوى المطبقة
Arch	قوس
Area	مساحة
Array	النسق (الصف)
Assumption	الفرضية
Axial Force	قوة محورية
(B)	
Ball Support	مسند كروي
Bar	عنصر شبكي
Base Units	الواحدات الأساسية
Beam	جائز
Behavior	سلوك
Bending Moment	عزم انعطاف
Bent	مائل
Boundary Conditions	الشروط الحدية
Bracing	الرابط القطري
Bridge	جسر
Buckling	تحنيب
(C)	
Cable	كابل
Cantilever Beam	ظفر
Column	عمود
Collapse	انهيار
Compatibility	توافق
Component	مركبة

Compression	ضغط
Concentrated Load	حمولة مركزة
Condition Equations	معادلات شرطية
Conjugate Beam	جائز بديل
Constant	ثابت
Consistent deformation	تشوهات متوافقة
Conventions	اصطلاح
Continuity	استمرار
Continues Beam	جائز مستمر
Converge	يتناهى
Coordinate Axes	محاور احداثية
Couple	مزدوجة
Criteria	معيار
Cross Section	مقطع عرضي
Curvature	انحناء
(D)	
Data	معطيات
Dead Load	الحمولة الميتة
Deflection	سهم
Deflected Shape	الشكل المتنقل
Deformation	تشوه
Denominator	مقام الكسر
Design	يصمم
Derivative	مشتق
Determinant	محدد
Determinate	مقرر
Diagram	مخطط
Diameter	قطر
Differential	تفاضلي
Differential Equation	معادلة تفاضلية
Differential Settlement	هبوط تفاضلي
Discontinuity	عدم استمرار
Displacement	ازاحة

Distortion	اعاقة
Dynamic Load	حمولة متحركة
(E)	
Eccentric	منحرف
Eccentricity	انحراف
Elastic Limit	الحد المرن
Elastic Curve , Line	الخط المرن
Elastic Strain Energy	طاقة الانفعال المرن
Energy	طاقة
Equilibrium	توازن
Equivalent Load	حمولة مكافئة
Experimental	تجريبي
(F)	
Factor of Safety	عامل الأمان
Failure	انهيار
Fatigue	تعب
Fibers	ألياف
Finite Element Analysis	التحليل بطريقة العناصر المحددة
Fixed End Moment	عزم الوثاقة
Fixity	وثاقة
Fixed Support	مسند موثوق
Flexibility Coefficient	عامل المرونة
Flexural Rigidity EI	الصلابة الانعطافية
Frame	اطار
Free Body Diagram	مخطط الجسم الطليق
Friction	احتكاك
Function	تابع
(G)	
Gabled Frame	الإطار المثلثي
Gap	فجوة
Geometric Instability	عدم الاستقرار الهندسي
Girder	الجائز الأساسي
Graphical	بياني

(H)	
Hinge	مفصل
Hinged	متمفصل
Hinged Support	مسند متمفصل
Homogenous	متجانس
Horizontal Force	قوة أفقية
(I)	
Idealization	مثالي
Identity Matrix	المصفوفة الواحدية
Impact Factor	عامل الصدم
Inclined Support	مسند مائل
Indeterminate	غير مقرر
Increment of Work	الزيادة في العمل
Inflection Point	نقطة انعطاف
Influence Line	خط التأثير
Instruction	توجيه
Integral, Integration	تكامل
Interior Support	مسند داخلي
Internal Force	قوة داخلية
Inversion	مقلوب
Iterative Method	طريقة التكرار
Isotropic	موحد الخواص
(J)	
Joint	مفصل
(K)	
Kinematic Determinacy	التقرير الازاحي
Kinetic Energy	القدرة الحركية
Known	معلوم
(L)	
Law	قانون
Least Work Method	طريقة العمل الأصغري
Length	طول
Limit Design	تصميم حدي

Linear	خطي
Line Load	خط التحميل
Link Support	وصلة مسندية
Load	حمولة
Local Axis	محور محلي
Live Load	حمولة حية
Longitude Force	قوة طولية
(M)	
Matrix	مصفوفة
Maximum	أعظمي
Mechanism	آلية
Member	عضو
Minimum, Minimal	أصغري
Modulus of Elasticity E	عامل المرونة الطولي
Modulus of Rigidity G	عامل المرونة العرضي (القص)
Moment	عزم
Moment Area Method	طريقة عزم المساحة
Moment Couple	مزدوجة عزم
Moment Diagram	مخطط العزم
Moment Distribution	توزيع العزم
Moment of Inertia	عزم العطالة
Modified Fixed End Moment	عزم الوثاقة المعدل
Multistory	متعدد الطوابق
(N)	
Neutral Axis	المحور الحيادي
Node	عقدة
None Linear response	الاستجابة غير الخطية
Normal Stress	الاجهاد الناظمي
Notation	رموز
Number of Degree of Freedom	عدد درجات الحرية
Numerator	البسط (الكسر)
Numerical Method	الطريقة العددية
(P)	

Parabola	قطع مكافئ
Partial Derivative	مشتق جزئي
Pinned Support	مسند ثابت
Plane	مستوي
Plastic Analysis	التحليل اللدن
Plastic	لدن
Plastic Section Modulus	عامل المقطع اللدن
Plate	صفيحة
Polar Moment of Inertia	عزم العطالة القطبي
Potential Energy	طاقة كامنة
Post-Multiply	يضرب الحاقا
Pre-Multiply	يضرب تقديما
Pressure	ضغط
Principle of Superposition	مبدأ التجميع
Product	جداء
Product of Inertia	جداء العطالة
Purlin	الجائز الطولي
(Q)	
Quadratic Form	الصيغة المربعة
Qualitative Influence Lines	خطوط التأثير الوصفية
(R)	
Radius	نصف قطر
Reaction	رد فعل
Reaction Component	مركبة رد الفعل
Redundant	فائض
Redundant Force	قوة فائضة
Redundant Reaction	رد فعل فائض
Relative Stiffness	صلابة نسبية
Restraint	تقييد
Retaining Wall	جدار استنادي
Rigid	صلب
Rigid Body Motion	حركة الجسم الصلب
Rigid Joint	مفصل صلب

Rocker Bearing (Support)	مسند متأرجح
Roller	متدحرج
Roller Support	مسند متدحرج
Rotation	دوران
Row	صف
(S)	
Scale	مقياس
Segment	قطعة
Seismic Load	حمولة زلزالية
Settlement	هبوط
Shaded Area	مساحة مظللة
Shape Factor	عامل الشكل
Shear Force	قوة قاطعة
Shells	قشريات
Shrinkage	انكماش
Side-Sway	انزياح جانبي
Simple support	مسند بسيط
Simultaneous equation	معادلة انية
Sign Convention	اصطلاح الإشارة
Sine	جيب الزاوية
Slope	ميل
Slope-Deflection equation	معادلة الميل والسهم
Span	مجاز
Space Frame	إطار فراغي
Spring	نابض
Square Root	الجذر التربيعي
Stable	مستقر
Stability	استقرار
Stable equilibrium	توازن مستقر
Standard Specifications	مواصفات قياسية
Static Classification	التصنيف السكوني
Statical Determinacy	التقرير السكوني
Statically Determinate Structures	المنشآت المقررة سكونيا

Stiffness	صلابة
Stiffness Coefficient	عامل الصلابة
Strain	انفعال
Stress	اجهاد
Stringer	الجائز الثانوي
Structure	منشأ
Structural analysis	تحليل الانشاء
Structural Member	عنصر انشائي
Subscript	اللاحقة السفلية
Superscript	اللاحقة العلوية
Successive	متتالي
Successive Approximation	تقريب متتالي
Superposition	تجميع
Support	مسند
Symmetric Case	حالة التناظر
System	نظام
(T)	
Tangent	مماس
Tangential Deviation	انحراف مماسي
Tension	شد
Three Moment Equation	معادلة العزوم الثلاثة
Thrust Line	خط الضغط
Torsion, Torque	فتل
Torsional Moment	عزم الفتل
Transpose of Matrix	منقول المصفوفة
Transverse Forces	قوة عرضية
Trapezium Load	حمولة شبه منحرفة
Trial	تجريبي
Triangulated	مثلثي
Triangular Load	حمولة مثلثية
Truss	شبكي
(U)	
Ultimate Strength	مقاومة قصوى

Uniaxial Stresses	اجهادات محورية أحادية
Uniform Load	حمولة موزعة بانتظام
Unit	واحدة
Unknown	مجهول
Unstable	غير مستقر
Unstable Equilibrium	توازن قلق
(V)	
Variable	متحول
Vector	شعاع
Vertical Displacement	انزياح شاقولي
Vertical Plane	مستوي شاقولي
Verticals	(الأعضاء) الشاقولية
Virtual Displacement	إزاحة افتراضية
Virtual Work	عمل افتراضي
Volume	حجم
(W)	
Work	عمل

دقق علميا من قبل

الدكتور المهندس	الدكتور المهندس	الدكتور المهندس
سعد الدين زيتون	سهيل جنزير	أحمد حمصي

دقق لغويا من قبل

الدكتور عبد الستار السيد أحمد